Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jacques Dufresnoy

Sur quelques propriétés des cercles de remplissage des fonctions méromorphes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 187-209

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__187_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES
CERCLES DE REMPLISSAGE
DES FONCTIONS MÉROMORPHES

PAR JACQUES DUFRESNOY.

INTRODUCTION.

En suivant une voie ouverte par M. L. Ahlfors, nous avons montré, dans un Mémoire récent [1], que d'une étude des surfaces de Riemann situées sur la sphère unitaire, on peut déduire de nombreuses propriétés des fonctions méromorphes. La méthode exposée présente l'intérêt de conduire à des démonstrations assez simples se rattachant toutes à une même idée directrice. De plus, les résultats obtenus sont très généraux et comprennent, comme cas particuliers, d'importantes propriétés classiques.

A l'idée directrice du Mémoire précédent, on peut encore rattacher aisément une théorie des cercles de remplissage des fonctions méromorphes. C'est ce que nous allons montrer dans le présent travail [2].

Une fois acquis les résultats antérieurs, toutes nos démonstrations sont particulièrement simples. Ici encore, les résultats obtenus comprennent, comme cas particuliers, des résultats classiques. Lorsque ces derniers sont de nature quantitative, leur précision se trouve parfois améliorée.

Toute notre étude est faite à l'aide de la fonction $S(r)$ et non de la fonction caractéristique $T(r) = \int S(r)\frac{dr}{r}$ [3]. Il nous semble que l'emploi systématique de $S(r)$ présente des avantages incontestables tant pour la marche des démonstrations que pour la forme des résultats. Toutefois, nous rechercherons souvent

---

(1) *Ann. École Norm. sup.*, (3), 58, 1941, p. 179-259.

(2) L'essentiel en a été résumé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (9 mars 1942).

(3) Nous continuons d'employer les notations du Mémoire cité.

la forme que prennent nos résultats lorsqu'on introduit la fonction caractéristique, afin de faire la jonction avec les propriétés connues.

Dans le Chapitre I nous rappelons certains de nos théorèmes antérieurs et nous les mettons sous une forme directement utilisable. Incidemment nous améliorons l'un d'eux. Le Chapitre II est consacré à l'étude proprement dite des cercles de remplissage. Nous l'avons divisé en deux sections; la première traite des fonctions méromorphes dans tout le plan fini, la seconde des fonctions méromorphes dans un cercle.

Malgré les difficultés actuelles, M. Montel a bien voulu accueillir ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

CHAPITRE I.

RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEURS.

1. Nous utiliserons le théorème suivant (¹) :

THÉORÈME A. — *Soit* $w = F(z)$ *une fonction méromorphe dans le cercle* $|z| < R$. *Soient, d'autre part,* $q \geqq 3$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints (dont certains peuvent se réduire à des points) à chacun desquels est associé un entier positif* μ_i *avec* $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. *Si, à l'exception de* d_i *d'entre eux au plus, tous les disques que présente sur* D_i *la surface de Riemann décrite par* $w = F(z)$ *ont* μ_i *feuillets au moins, on a, lorsque* $r < R$,

$$\left[S(r) - \frac{n}{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2}\right]\log\frac{R}{r} < \frac{\overline{K}}{\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right]^2} \qquad \text{avec} \quad n = \sum d_i,$$

en désignant par $4\pi S(r)$ *l'aire sphérique de la surface de Riemann correspondant à* $|z| < r$ *et par* $\overline{K}$ *une constante dépendant des domaines* D_i.

Dans ce théorème, n désigne le nombre total de disques exceptionnels, chacun de ceux-ci étant compté une seule fois, quelle que soit sa multiplicité. D'autre part, au lieu de supposer que les disques situés sur le domaine D_i ont μ_i feuillets au moins, on pourrait supposer qu'il n'existe aucun disque sur ce domaine D_i; le théorème précédent s'appliquerait alors en attribuant la valeur ∞ au nombre μ_i correspondant.

(¹) *Cf.* le Mémoire cité. Le théorème A n'y est énoncé explicitement que dans le cas $n = 0$ (§ 29, p. 221). Le cas général est indiqué sommairement (*deuxième groupe de théorèmes*, p. 229); voir en particulier l'inégalité (3 *bis*) où l'on doit faire

$$l = \frac{n}{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2} \qquad \text{et} \qquad h'' = \frac{h'}{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2}.$$

2. En remplaçant l'hypothèse du théorème A par des hypothèses plus particulières on obtient les propositions suivantes :

THÉORÈME A_1. — *Si* $w = F(z)$ *est méromorphe dans le cercle* $|z| < R$ *et n'y prend pas plus de* n *fois en tout trois valeurs distinctes* a_i, *on a*

$$[S(r) - n] \log \frac{R}{r} < \frac{18\pi^2}{\delta_0^2},$$

où δ_0 *est la distance sphérique minima des trois valeurs* a_i *prises deux à deux.*

THÉORÈME A_2. — *Si* $w = F(z)$ *est méromorphe dans le cercle* $|z| < R$ *et y présente cinq valeurs ramifiées complètement, sauf au plus* n *fois en tout, on a*

$$[S(r) - 2n] \log \frac{R}{r} < \frac{12\,800\pi^4}{\delta_0^4},$$

où δ_0 *est la distance sphérique minima des cinq valeurs considérées.*

THÉORÈME A_3. — *Si* $w = F(z)$ *est méromorphe dans le cecle* $|z| < R$ *et si la surface de Riemann décrite par cette fonction présente au plus* **n** *disques en tout sur trois domaines simplement connexes et disjoints, on a*

$$[S(r) - n] \log \frac{R}{r} < \overline{K}.$$

THÉORÈME A_4. — *Si* $w = F(z)$ *est méromorphe dans le cercle* $|z| < R$ *et si la surface de Riemann décrite par cette fonction présente au plus* n DISQUES SIMPLES *en tout sur cinq domaines simplement connexes et disjoints, on a*

$$[S(r) - 2n] \log \frac{R}{r} < 4\overline{K}.$$

3. Les estimations des constantes $\overline{K}$ que nous avons obtenues dans notre Mémoire précédent ([1]) sont susceptibles d'être beaucoup améliorées ([2]). Ici, nous améliorerons seulement le second membre $\frac{18\pi^2}{\delta_0^2}$ de l'inégalité du théorème A_1 en utilisant une méthode simple, mais dont l'emploi ne peut guère être généralisé.

Nous ferons subir à la variable w la substitution homographique $W = \frac{aw + b}{cw + d}$ qui transforme les trois valeurs a_1, a_2, a_3 en trois valeurs fixes (1, j, j^2 par exemple). La fonction $w = F(z)$ sera ainsi transformée en une nouvelle fonction $W = F_0(z)$ à laquelle nous appliquerons le théorème A_1. Pour conclure,

---

([1]) $\overline{K} = 8\pi^2 h'^2$ (*Cf.* Chap. II, p. 204-208).

([2]) On parviendrait à de meilleures estimations en reprenant les démonstrations du Mémoire, après avoir introduit sur la sphère unitaire une métrique convenablement adaptée à chaque cas particulier. [L'idée d'employer une métrique non euclidienne se trouve dans AHLFORS, *Zur Theorie der Ueberlagerungsflächen* (*Acta mathematica*, 65, 1935, p. 157-194).]

nous aurons besoin de quelques propriétés de la transformation homographique; établissons-les dès maintenant.

4. Donnons, pour commencer, une forme canonique de la relation homographique $W = \frac{aw + b}{cw + d}$ la plus générale. Montrons d'abord qu'il existe un couple de points w_1, w_2, diamétralement opposés sur la sphère complexe, qui se transforme en un couple de points W_1, W_2, diamétralement opposés. Ces conditions se traduisent en effet par

$$1 + w_1 \overline{w_2} = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{a w_1 + b}{c w_1 + d} \times \frac{\overline{a w_2 + b}}{\overline{c w_2 + d}} = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'existence de w_1 et w_2, qui sont les racines de l'équation (1)

$$(1) \qquad (a\bar{b} + c\bar{d})w^2 + (b\bar{b} + d\bar{d} - a\bar{a} - c\bar{c})w - (\bar{a}b + \bar{c}d) = 0.$$

Effectuons alors, sur la variable w, la substitution

$$w' = \frac{w - w_1}{1 + w\overline{w_1}}$$

qui correspond à une rotation de la sphère complexe sur elle-même; et de même, effectuons sur la variable W la substitution

$$W' = \frac{W - W_1}{1 + W\overline{W_1}}.$$

Il existe entre w' et W' une relation homographique ayant O et ∞ comme points doubles, soit

$$W' = \lambda w'.$$

Calculons la valeur du module de la constante λ. D'une part, on obtient aisément

$$|\lambda| = \left| \frac{W - W_1}{1 + W\overline{W_1}} : \frac{w - w_1}{1 + w\overline{w_1}} \right| = \left| \frac{ad - bc}{(a\bar{b} + c\bar{d})w_1 + b\bar{b} + d\bar{d}} \right|.$$

D'autre part, nous avons vu que w_1 satisfait à l'équation (1); celle-ci peut encore s'écrire

$$[(a\bar{b} + c\bar{d})w + b\bar{b} + d\bar{d}]^2 - [a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}][(a\bar{b} + c\bar{d})w + b\bar{b} + d\bar{d}] + |ad - bc|^2 = 0.$$

Il en résulte que $|\lambda|$ vérifie

$$\frac{1}{|\lambda|^2} - \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}{|ad - bc|} \frac{1}{|\lambda|} + 1 = 0.$$

---

(1) Cette équation a bien toujours deux racines distinctes, à moins que la transformation homographique donnée ne se réduise à une rotation de la sphère complexe sur elle-même; l'équation est alors indéterminée.

C'est une équation du second degré dont les racines sont réelles, positives et inverses l'une de l'autre ([1]). On voit sans peine qu'elles satisfont de plus à l'inégalité

$$\frac{|ad-bc|}{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2} < |\lambda| < \frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{|ad-bc|}. \tag{2}$$

En résumé, une substitution homographique quelconque $W = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ peut toujours se ramener à la suite des opérations que voici : rotation de la sphère complexe sur elle-même, puis transformation $W' = \lambda w'$ et enfin nouvelle rotation de la sphère complexe sur elle-même. Le module de la constante λ satisfait à la double inégalité (2).

5. Étudions maintenant les modifications subies par la fonction $S(r)$ relative à une fonction méromorphe $F(z)$ lorsqu'on effectue sur cette dernière une transformation homographique. Les résultats du paragraphe précédent permettent de se ramener à deux cas particuliers.

1° La transformation homographique se réduit à une rotation de la sphère complexe sur elle-même; $S(r)$ n'est pas modifiée.

2° La transformation homographique se réduit au changement de $F(z)$ en $\lambda F(z)$ qui transforme la caractéristique $T(r, F)$ en $T(r, \lambda F)$. On a

$$|T(r, \lambda F) - T(r, F)| < \big|\log|\lambda|\big|,$$

comme on le voit immédiatement à l'aide de la formule

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\sqrt{1+|F(re^{i\varphi})|^2}\, d\varphi - \log\sqrt{1+|F(0)|^2} + N(r, \infty).$$

D'autre part, en utilisant la relation $T(r) = \int S(r)\dfrac{dr}{r}$, on obtient, pour $r < \rho$,

$$S(r, F)\log\frac{\rho}{r} < T(\rho, F) - T(r, F)$$

et

$$T(\rho, \lambda F) - T(r, \lambda F) < S(\rho, \lambda F)\log\frac{\rho}{r}.$$

Des trois inégalités précédentes on déduit aussitôt

$$S(r, F) < S(\rho, \lambda F) + 2\,\frac{\big|\log|\lambda|\big|}{\log\dfrac{\rho}{r}}.$$

([1]) Ce résultat pouvait être prévu. On est en effet conduit à deux valeurs inverses pour $|\lambda|$ selon que les substitutions homographiques auxiliaires (rotations de la sphère complexe) font correspondre l'origine à w_1 et à W_1, ou bien à w_2 et à W_2.

Conclusion. — Pour une substitution homographique absolument quelconque, cette dernière inégalité est encore valable, si l'on désigne par $|\lambda|$ la constante associée à cette substitution (§ 4).

6. Nous allons devoir appliquer ce résultat à l'homographie qui transforme a_1, a_2, a_3 respectivement en $1, j, j^2$. Évaluons donc la constante $|\lambda|$ correspondante. On obtient, après un calcul facile,

$$\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{|ad-bc|} < \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \left|\frac{1+a_2\bar{a}_3}{a_2-a_3}\right|.$$

D'autre part, la distance sphérique des points a_2 et a_3 est

$$\delta_1 = 2 \operatorname{arc\,tang}\left|\frac{a_2-a_3}{1+a_2\bar{a}_3}\right| < 2\left|\frac{a_2-a_3}{1+a_2\bar{a}_3}\right|.$$

Par conséquent,

$$\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{|ad-bc|} < \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_3}\right) \leq \frac{4\sqrt{3}}{\delta_0},$$

en désignant par δ_0 la distance sphérique minima des trois points a_1, a_2, a_3, pris deux à deux; et la double inégalité (2) donne enfin

$$\frac{\delta_0}{4\sqrt{3}} < |\lambda| < \frac{4\sqrt{3}}{\delta_0}.$$

7. Partons alors d'une fonction $w = F(z)$, méromorphe dans $|z| < R$ et y prenant au plus n fois en tout les trois valeurs a_i. Par la transformation homographique précédente on en déduit une fonction $W = F_0(z)$ prenant au plus n fois en tout les valeurs $1, j, j^2$. Le théorème A_1 appliqué à $F_0(z)$ nous donne, pour $\rho < R$,

$$S(\rho, F_0) < n + \frac{81}{2} \frac{1}{\log\frac{R}{\rho}}.$$

Il en résulte que, pour $r < \rho < R$, on a

$$S(r, F) < S(\rho, F_0) + 2\frac{|\log|\lambda||}{\log\frac{\rho}{r}} < n + \frac{81}{2}\frac{1}{\log\frac{R}{\rho}} + 2\frac{\log\frac{4\sqrt{3}}{\delta_0}}{\log\frac{\rho}{r}}.$$

En choisissant $\rho = \sqrt{rR}$, on obtient le théorème suivant :

Théorème A_1^*. — *Si $w = F(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < R$ et n'y prend pas plus de n fois en tout trois valeurs a_i distinctes, on a*

$$[S(r) - n] \log\frac{R}{r} < 89 + 4 \log\frac{1}{\delta_0}.$$

C'est la forme améliorée du théorème A_1; nous y avons remplacé $\frac{18\pi^2}{\delta_0^2}$

par $89 + 4 \log \frac{1}{\delta_0}$, ce qui est très avantageux pour les petites valeurs de δ_0. Il serait facile de voir que notre nouveau théorème n'est plus susceptible d'amélioration notable.

8. Du théorème A, on peut déduire le suivant (¹) :

THÉORÈME B. — *Dans les conditions du théorème* A *et si de plus* $n = 0$, *on a*

$$R \frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2} < \exp \frac{2\overline{K}}{\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2}.$$

Certains cas particuliers importants donnent lieu à des théorèmes, analogues au précédent, que nous n'énoncerons pas. Indiquons seulement les hypothèses qu'ils mettent en jeu :

(Théorème B_1): $w = F(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < R$ et n'y prend aucune de trois valeurs a_i distinctes (²);

(Théorème B_2) : $w = F(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < R$ et y présente cinq valeurs complètement ramifiées;

(Théorème B_3) : $w = F(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < R$ et la surface de Riemann décrite par cette fonction ne présente aucun disque sur trois domaines D_i simplement connexes et disjoints;

(Théorème B_4) : $w = F(z)$ est méromorphe dans le cercle $|z| < R$ et la surface de Riemann décrite par cette fonction ne présente aucun *disque simple* sur cinq domaines D_i simplement connexes et disjoints.

CHAPITRE II.

APPLICATION A LA THÉORIE DES CERCLES DE REMPLISSAGE.

Fonctions méromorphes dans tout le plan fini.

9. *Définition* (³). — Soit donnée une fonction $f(z)$ méromorphe pour $z \neq \infty$.

(¹) *Cf.* le Mémoire cité, § 30, p. 223.

(²) Ce théorème B_1 n'est autre qu'une forme du théorème de Landau. Dans notre Mémoire antérieur nous avons obtenu

$$R \frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2} < e^{\frac{36\pi^2}{\delta_0^2}}.$$

Il est clair que les considérations développées dans les paragraphes précédents permettent d'améliorer ce résultat; on peut ainsi parvenir à

$$R \frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2} < \frac{C}{\delta_0},$$

où C est une constante numérique ($C < 4\sqrt{3}e^{81}$).

(³) H. MILLOUX, *Le théorème de M. Picard; suites des fonctions holomorphes; fonctions méromorphes et fonctions entières* (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, 3, 1924, p. 345-401).

Soit, d'autre part, dans le plan de la variable complexe z, une famille de cercles Γ_k tels que, si l'on désigne par r_k le rayon du cercle Γ_k et par z_k l'affixe de son centre, les quantités $\rho_k = |z_k|$ et $\frac{\rho_k}{r_k}$ augmentent indéfiniment avec k. On dit que ces cercles Γ_k constituent une *famille de cercles de remplissage* pour la fonction $f(z)$ considérée si, dans Γ_k, la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs de la sphère complexe, sauf au plus celles situées dans deux cercles de rayon (sphérique) δ_k tendant vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

10. *Existence d'une famille de cercles de remplissage.* — Supposons d'abord que l'expression

$$|z| \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \tag{3}$$

ne présente pas de borne supérieure. Soit alors une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ en lesquels cette expression prend des valeurs croissant indéfiniment. Nous pouvons trouver une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ tendant vers zéro et tels que la quantité

$$\lambda_k = \varepsilon_k |z_k| \frac{|f'(z_k)|}{1 + |f(z_k)|^2}$$

croisse indéfiniment avec k. Les cercles Γ_k, de centre z_k et de rayon $r_k = \varepsilon_k |z_k|$, constituent une famille de cercles de remplissage, car, en vertu du théorème B_1 appliqué à $F(z) = f(z + z_k)$, la fonction $f(z)$ prend dans le cercle Γ_k toutes les valeurs de la sphère complexe sauf au plus celles situées dans deux cercles dont le rayon $\delta_k = \frac{C}{\lambda_k}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

Inversement, supposons que l'expression (3) ait une borne supérieure M. Il ne peut alors exister de famille de cercles de remplissage. En effet, dans le cercle de centre z et de rayon $r = \varepsilon |z|$, la dérivée sphérique demeure inférieure à $\frac{M}{|z|(1-\varepsilon)}$ et, par conséquent $\left(\text{si } \varepsilon < \frac{\pi}{\pi + 2M}\right)$ la fonction ne pourra prendre que des valeurs situées dans un cercle de la sphère complexe ayant pour centre $f(z)$ et pour rayon $M \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, quantité qui tend vers zéro avec ε.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$, méròmorphe dans tout le plan fini, présente une famille de cercles de remplissage est que l'expression

$$|z| \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

ne soit pas bornée supérieurement.

Nous retrouvons ainsi un théorème connu que l'on démontre d'ordinaire en faisant appel à la théorie des familles normales [1]; on énonce alors cette con-

[1] A. Ostrowski, *Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes* (*Math. Zeitschrift*, **24**, 1925, p. 215-258). L'étude des cercles de remplissage par la méthode des familles normales a eu pour point de départ trois importants Mémoires de M. G. Julia. [*Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Ann. École Norm. sup.*, (3), 36, 1919, p. 93-125; 37, 1920, p. 165-218; 38, 1921, p. 165-181)].

dition nécessaire et suffisante sous la forme suivante : la famille des fonctions $f(\lambda^n z)$, où λ est une constante arbitraire, doit être non normale dans une couronne limitée par deux circonférences centrées à l'origine et dont le rapport des rayons est supérieur à λ.

Les fonctions $f(z)$ ne présentant aucune famille de cercles de remplissage (*fonctions exceptionnelles*) ont été étudiées par Ostrowski [1]. Indiquons simplement une de leurs propriétés que la forme de notre théorème met immédiatement en lumière. On a

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{\rho \leqq r} \left[\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \right]^2 \rho \, d\rho \, d\theta = O[\log r] \quad [2].$$

On montrerait de même que $L(r)$ est borné, ce qui permet, dans le cas des fonctions exceptionnelles, de donner à plusieurs théorèmes de notre Mémoire déjà cité une forme plus précise que dans le cas général. Mais on ne retrouve pas ainsi les propriétés classiques des fonctions exceptionnelles, propriétés qui s'obtiennent aisément par la théorie des familles normales.

11. *Nouvelles propriétés qualitatives des cercles de remplissage.* — A partir de maintenant nous considérerons uniquement des fonctions non exceptionnelles. On voit aussitôt que la famille de cercles de remplissage que nous avons mise en évidence dans le paragraphe précédent jouit d'un certain nombre de propriétés. Il résulte, en effet, du théorème B_2 que :

Dans Γ_k l'équation $f(z) - a = 0$ a une racine simple au moins, quelle que soit la valeur a, sauf peut-être pour certaines valeurs que l'on peut enfermer dans quatre cercles dont les rayons sphériques δ'_k tendent vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

Il résulte du théorème B_3 que :

Étant donnés trois domaines D_i simplement connexes et disjoints, la surface de Riemann décrite par les valeurs w de la fonction, lorsque z décrit Γ_k, présente au moins un disque sur l'un des domaines D_i dès que k est suffisamment grand.

Il résulte enfin du théorème B_4 que :

Étant donnés cinq domaines D_i simplement connexes et disjoints, la surface de Riemann précédente présente au moins un DISQUE SIMPLE *sur l'un des domaines D_i dès que k est suffisamment grand.*

Toutes ces propositions sont contenues dans la suivante, qui se déduit immédiatement du théorème B :

[1] A. Ostrowski *loc. cit.*; *Voir* également P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Gauthier-Villars, 1927).

[2] Ce qui entraîne en particulier $T(r) = O[\log^2 r]$, résultat obtenu par Ostrowski.

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints (dont certains peuvent se réduire à des points) à chacun desquels est associé un entier μ_i supérieur à 1 avec $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2$, on peut faire correspondre à tout entier k suffisamment grand, un entier i inférieur ou égal à q tel que la surface de Riemann décrite par les valeurs w de la fonction, lorsque z décrit Γ_k, présente sur le domaine D_i au moins un disque ayant moins de μ_i feuillets.

Dans cet énoncé, la valeur $\mu_i=\infty$ correspond à l'existence d'un disque sans limitation du nombre de feuillets. Ce théorème général est surtout intéressant pour l'étude d'une fonction, dont on connaît déjà certaines propriétés, relativement aux valeurs qu'elle prend ou aux disques que présente sa surface de Riemann. Par exemple, dans l'étude d'une fonction entière, on peut choisir le point ∞ pour l'un des domaines D et lui associer l'entier $\mu=\infty$; le théorème s'applique donc avec $q \geqq 2$ domaines D_i situés à distance finie, les entiers μ_i satisfaisant à l'inégalité

$$\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>1.$$

12. *Une propriété quantitative.* — A partir du théorème $A_1^\star$ nous allons établir la proposition suivante :

Si $w=f(z)$ est méromorphe, la couronne $r<|z|<R$ contient un point z_k centre d'un cercle C_k de rayon $\frac{|z_k|}{p}$. Dans C_k, $f(z)$ prend $n_k \geqq 0$ fois au moins toutes valeurs, sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon e^{-n_k} de la sphère. On a

$$n_k>\frac{K}{p^2}\,\frac{S(R)-S(r)}{1+\log\frac{R}{r}}-K_1,$$

où K et K_1 sont des constantes numériques (¹). *On suppose p donné supérieur à un* (²).

En effet, découpons la couronne par $n>8$ demi-droites issues de l'origine et faisant entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}=\vartheta$, et par les cercles centrés à l'origine et ayant pour rayons $R(1+\vartheta)^{-1}$, $R(1+\vartheta)^{-2}$, $R(1+\vartheta)^{-3}$, ... On obtient ainsi des domaines en nombre inférieur à

$$n\left(1+\frac{4}{3\vartheta}\log\frac{R}{r}\right).$$

(¹) Afin de ne pas multiplier inutilement les notations, les *différentes* constantes numériques qui interviendront dans notre étude seront toujours désignées par les *mêmes* lettres K, K_1, $K^\star$.

(²) *Cf.* H. Milloux, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta mathematica*, 52, 1928, p. 189-255). Notre théorème doit être rapproché des théorèmes IV et VIII de M. H. Milloux. On remarquera que le théorème II de cet auteur est une conséquence immédiate du théorème A_1.

A l'un Δ de ces domaines au moins, correspond un morceau de la surface de Riemann décrite par $w=f(z)$ ayant une aire sphérique supérieure à

$$\frac{S(R)-S(r)}{n\left(1+\frac{4}{3\mathfrak{S}}\log\frac{R}{r}\right)}.$$

L'axe de symétrie de Δ est coupé en deux points par le contour de ce domaine. Soit z_k le milieu du segment joignant ces deux points. Un cercle centré en z_k contient Δ dès que son rayon est supérieur à

$$\sqrt{\left[|z_k|\sin\frac{\mathfrak{S}}{2}\right]^2+\left[|z_k|\frac{2(1+\mathfrak{S})}{2+\mathfrak{S}}-|z_k|\cos\frac{\mathfrak{S}}{2}\right]^2}<\frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{S}|z_k|.$$

Si nous choisissons pour n le plus petit entier supérieur à $2\pi\sqrt{2}p$, le cercle C'_k centré en z_k et de rayon $\frac{|z_k|}{2p}$ contient Δ *a fortiori*. A C'_k correspond donc une portion de la surface de Riemann d'aire supérieure à

$$\frac{S(R)-S(r)}{\left[1+2\pi\sqrt{2}p\right]\left[1+\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}p+\frac{1}{2\pi}\right)\log\frac{R}{r}\right]}>\frac{S(R)-S(r)}{25p^2\left(1+\log\frac{R}{r}\right)}. \tag{4}$$

Considérons maintenant le cercle C_k centré en z_k et de rayon $\frac{|z_k|}{p}$ et supposons que, dans ce cercle, la fonction $f(z)$ prenne moins de n_k fois chacune de trois valeurs dont la distance sphérique minima est supérieure à δ_0. En appliquant le théorème $A_1^{\star}$ à la fonction $F(z)=f(z+z_k)$, méromorphe dans le cercle de rayon $\frac{|z_k|}{p}$ centré à l'origine, il vient aussitôt

$$\left[\frac{S(R)-S(r)}{25p^2\left(1+\log\frac{R}{r}\right)}-3n_k\right]\log 2<89+4\log\frac{1}{\delta_0}.$$

La proposition annoncée est ainsi démontrée avec

$$n_k(4+3\log 2)>\frac{S(R)-S(r)}{25p^2\left(1+\log\frac{R}{r}\right)}\log 2-89,$$

c'est-à-dire avec les constantes

$$K=\frac{\log 2}{25(4+3\log 2)} \qquad \text{et} \qquad K_1=\frac{89}{4+3\log 2}.$$

Remarque I. — Le point z_k du théorème précédent peut être choisi *indépendamment de la valeur supérieure à* un *attribuée au nombre* p. Il est clair, tout d'abord, qu'il suffit (quitte à remplacer K par une constante plus petite) de démontrer que cette propriété est bien vérifiée pour les valeurs de p appartenant à une progression géométrique $p=1, 2, 4, 8, \ldots$. Esquissons le raisonnement pour ces valeurs. On commence par faire subir à la couronne le découpage relatif à $p=1$; on met ainsi en évidence un domaine Δ_1 auquel correspond une aire supérieure à

$$\frac{S(R)-S(r)}{25\left(1+\log\frac{R}{r}\right)}.$$

On fait ensuite un découpage plus fin, qui divise chaque domaine en quatre nouveaux domaines, en adjoignant au faisceau des demi-droites, issues de l'origine, le faisceau de leurs bissectrices intérieures et aux cercles centrés à l'origine, de nouveaux cercles également centrés à l'origine, le rayon de chacun de ceux-ci étant la moyenne géométrique des rayons de deux cercles successifs du découpage primitif. Le domaine Δ_1, en particulier, se trouve ainsi décomposé en quatre domaines partiels à l'un desquels correspond une aire supérieure à

$$\frac{S(R)-S(r)}{25\times 2^2\left(1+\log\frac{R}{r}\right)};$$

soit Δ_2 ce domaine. Répétons indéfiniment cette opération. Nous mettons ainsi en évidence une suite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ de domaines emboîtés, ayant un point commun qui leur est intérieur. En plaçant z_k en ce dernier point, on peut achever la démonstration comme ci-dessus par un calcul très élémentaire de limitation.

Remarque II. — Dans le paragraphe 17 nous utiliserons l'expression figurant dans le premier membre de l'inégalité (4) et non pas celle située dans le second membre qui conduit alors à des résultats sensiblement moins précis.

13. *Généralisations*. — Si l'on reprend le raisonnement précédent en appliquant les théorèmes A_2, A_3, A_4 ou, plus généralement, le théorème A, on est conduit aux propositions suivantes qui sont toutes contenues dans la dernière d'entre elles :

Dans C_k, $f(z)-a=0$ *a* $n_k \geqq 0$ RACINES SIMPLES *au moins, quelle que soit la valeur a, sauf peut-être pour certaines valeurs que l'on peut enfermer dans quatre cercles de la sphère dont les rayons sont égaux à une fonction de* n_k *qui tend vers zéro avec* $\frac{1}{n_k}$. *On a encore*

$$n_k > \frac{K}{p^2}\,\frac{S(R)-S(r)}{1+\log\frac{R}{r}} - K_1,$$

où K *et* K_1 *sont deux nouvelles constantes numériques.*

Étant donnés trois domaines D_i *simplement connexes et disjoints, la surface de Riemann décrite par les valeurs* w *de la fonction, lorsque z décrit* C_k, *présente au moins* $n_k \geqq 0$ *disques sur l'un des domaines* D_i. *On a*

$$n_k > \frac{K}{p^2}\,\frac{S(R)-S(r)}{1+\log\frac{R}{r}} - \overline{K},$$

où K *est une nouvelle constante numérique et* K *une constante dépendant des trois domaines* D_i *considérés.*

Étant donnés cinq domaines D_i *simplement connexes et disjoints, la surface de Riemann précédente présente au moins* $n_k \geqq 0$ DISQUES SIMPLES *sur l'un des domaines* D_i, *avec*

$$n_k > \frac{K}{p^2}\frac{S(R)-S(r)}{1+\log\frac{R}{r}} - \overline{K},$$

où K *est une constante numérique et* $\overline{K}$ *une constante dépendant des cinq domaines* D_i *considérés.*

Et, plus généralement,

Étant donnés $q \geqq 3$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints (dont certains peuvent se réduire à des points) à chacun desquels est associé un entier* μ_i *supérieur à* 1 *avec* $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) > 2$, *on peut associer à chaque entier* k, *un entier* i *inférieur ou égal à* q *tel que la surface de Riemann, décrite par les valeurs* w *de la fonction lorsque* z *décrit* C_k, *présente sur le domaine* D_i *au moins* $n_k \geqq 0$ *disques ayant moins de* μ_i *feuillets. On a*

$$n_k > K\frac{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2}{qp^2} \times \frac{S(R)-S(r)}{1+\log\frac{R}{r}} - \frac{\overline{K}}{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2},$$

où K *est une constante numérique et* $\overline{K}$ *une constante dépendant des* q *domaines* D_i *considérés.*

14. *Application à une classe très étendue de fonctions non exceptionnelles.* — Nous avons vu (§ 10) que les fonctions exceptionnelles satisfont à

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{S(r)}{\log r} < \infty.$$

Nous allons étudier maintenant les fonctions qui vérifient la relation

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{S(r)}{\log r} = \infty;$$

elles constituent une classe très étendue de fonctions non exceptionnelles, comprenant, en particulier, toutes les fonctions d'ordre non nul.

Il est clair que, pour une fonction quelconque de cette classe, on peut trouver une suite croissante $0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, telle que l'expression

$$\frac{S(t_{\lambda+1})-S(t_\lambda)}{1+\log\frac{t_{\lambda+1}}{t_\lambda}}$$

augmente indéfiniment avec λ. Les énoncés des deux paragraphes précédents peuvent s'appliquer aux couronnes centrées à l'origine et limitées par les cercles de rayons t_λ et $t_{\lambda+1}$. A chacune de ces couronnes on peut associer un nombre p, augmentant indéfiniment avec λ, et tel que le nombre n_k correspondant croisse aussi indéfiniment.

Il en résulte que *les fonctions considérées présentent une famille de cercles de remplissage* Γ_k *tels que, dans* Γ_k, *la fonction* $f(z)$ *prend* n_k *fois toutes les valeurs de la sphère complexe, sauf au plus celles situées dans deux cercles de rayon sphérique* δ_k, *où* n_k *tend vers l'infini et* δ_k *vers zéro lorsque* k *augmente indéfiniment* (¹).

Et, de même, on obtient des propositions analogues à celles du paragraphe 11 mais dans lesquelles, au lieu d'assurer seulement l'existence d'une racine simple, ou d'un disque, ou d'un disque simple, ou d'un disque à moins de μ_i feuillets, on peut maintenant assurer l'existence de racines simples, ou de disques, etc., en nombre augmentant indéfiniment avec k.

Pour l'étude quantitative que nous allons entreprendre, nous envisagerons seulement les fonctions d'ordre non nul (²).

15. *Fonctions d'ordre fini non nul.* — Pour obtenir des résultats intéressants, il faut considérer, non pas la fonction $S(r)$ elle-même, mais une fonction $U(r)$ à croissance suffisamment régulière et telle que

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{S(r)}{U(r)} = 1.$$

Pour le cas que nous étudions ici, il nous suffit, comme condition de régularité, de prendre la relation

$$\frac{U(kr)}{U(r)} > k_1 > 1,$$

où k et k_1 sont deux constantes fixées arbitrairement ($k > 1$). En prenant alors pour R une valeur pour laquelle $\frac{S(R)}{U(R)} > \frac{1+k_1}{2k_1}$ et pour r la valeur $r = \frac{R}{k}$, on peut appliquer le résultat établi dans le paragraphe 12. Il vient

$$n_k > \frac{K}{p^2} \frac{\frac{1+k_1}{2k_1} U(kr) - U(r)}{1+\log k} - K_1 > \frac{K(k_1-1)}{2k_1(1+\log k)} \frac{U(kr)}{p^2} - K_1,$$

(¹) Pour celles des fonctions considérées qui satisfont à $\varlimsup_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log^2 r} = \infty$, ce théorème a été obtenu par M. G. Valiron [*Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sci.*, 186, 1928, p. 1189-1191)].

(²) A l'aide de démonstrations simples et voisines de celles données dans le paragraphe 15, on peut obtenir des résultats généraux s'appliquant à toutes les fonctions de la classe précédemment considérée, mais n'offrant d'intérêt que pour les fonctions d'ordre nul (*Cf.* §§ 15, 17). Ces résultats ne diffèrent de ceux du paragraphe 15 que par la substitution à $U(r)$ d'une fonction croissante quelconque $u(r)$ satisfaisant à

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{S(r)}{u(r)\log r} = 1.$$

soit

$$n_k > K^\star \frac{U(kr)}{p^2}$$

dès que $\frac{U(kr)}{p^2}$ est assez grand. On peut remplacer la condition de croissance régulière imposée à $U(r)$ par d'autres plus strictes, par exemple par celle de M. Valiron [$U(r) = r^{\rho(r)}$ où $\rho(r)$ tend vers l'ordre ρ de la fonction $f(z)$ étudiée et où $\rho'(r) r \log r$ tend vers zéro quand r augmente indéfiniment (¹)]; la constante $K^\star$ qui s'introduit alors ne dépend que du nombre ρ. D'où le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ fini, non nul. Il lui correspond une fonction $S(r)$. Soit $U(r)$ une régularisante de Valiron de $S(r)$. Il existe une infinité de cercles C_k d'équations

$$|z - z_k| < \frac{1}{p} r_k,$$

où $r_k = |z_k|$ augmente indéfiniment avec k. Dans C_k, $f(z)$ prend n_k fois au moins toutes valeurs sauf au plus celles représentées dans deux cercles de la sphère de rayon e^{-n_k}. On a

$$n_k > K^\star \frac{U(r_k)}{p^2},$$

où $K^\star$ est une constante ne dépendant que de ρ et où p est astreint à la seule condition $p > 1$.

Ce théorème contient un résultat classique analogue (²) dans lequel $S(r)$ est remplacé par $T(r)$, et $U(r)$ par une régularisante de Valiron $V(r)$ de la fonction $T(r)$, et où la constante $K^\star$ est changée en la nouvelle constante $K^\star\rho$. En effet, $V(r) = r^{\sigma(r)}$ étant une régularisante de $T(r)$, la fonction $\rho r^{\sigma(r)} = r^{\sigma(r) + \frac{\log\rho}{\log r}}$ est telle que : 1° $\overline{\lim} \frac{S(r)}{\rho r^{\sigma(r)}} \geqq 1$ (ce qui s'établit immédiatement par l'absurde); 2° $\sigma(r) + \frac{\log\rho}{\log r}$ tend vers ρ; 3° $\left[\sigma'(r) - \frac{\log\rho}{r\log^2 r}\right] r\log r$ tend vers zéro. La fonction $S(r)$ présente donc une régularisante qui reste supérieure à $\rho r^{\sigma(r)}$ pour toutes les valeurs de r. La propriété annoncée en découle aussitôt.

Tenant compte de la Remarque I du paragraphe 12, on voit que l'ensemble des points z_k est indépendant du nombre p. Ce nombre est même susceptible de varier avec l'indice k et l'*on peut, dans le dernier théorème, remplacer la constante p par une fonction $p(r)$ qui demeure supérieure à* un *et inférieure à* $\sqrt{K^\star U(r)}$. Les deux relations figurant dans le théorème deviennent alors

$$|z - z_k| < \frac{r_k}{p(r_k)} \qquad \text{et} \qquad n_k > K^\star \frac{U(r_k)}{p^2(r_k)}.$$

(¹) G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière* (*Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 3e série, 5, 1913, p. 117-257). La fonction $\rho(r)$ est appelée par M. G. Valiron l'ordre précisé de $f(z)$.

(²) G. Valiron, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 89). *Cf.* théorème XIV. On trouvera, dans ce Mémorial, de nombreux renseignements bibliographiques.

Ce nouvel énoncé conduit immédiatement à des propriétés pour les cercles de remplissage.

1° Si nous choisissons $p(r)$ de sorte que $\frac{U(r)}{p^2(r)}$ tende vers l'infini avec une lenteur arbitraire, on en conclut l'*existence d'une famille de cercles de remplissage ayant pour équations*

$$|z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)\, r_k}{\sqrt{U(r_k)}},$$

où $\lambda(r)$ *est une fonction arbitraire qui augmente indéfiniment avec* r *aussi lentement qu'on le veut.*

2° Si, au contraire, nous choisissons une fonction $p(r)$ qui tende vers l'infini très lentement, nous mettons en évidence *une famille de cercles de remplissage auxquels correspond la « multiplicité »* n_k *telle que*

$$n_k > \varepsilon(r_k)\, U(r_k),$$

où $\varepsilon(r)$ *est une fonction arbitraire qui tend vers zéro aussi lentement qu'on le veut.*

16. *Généralisation des propriétés précédentes.* — Au lieu d'utiliser la propriété du paragraphe 12, on peut utiliser aussi bien celles établies dans le paragraphe 13. Cela conduit à assurer que :

L'équation $f(z) - a = 0$ *a, dans* C_k, n_k *racines simples au moins, quelle que soit la valeur* a, *sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles que l'on peut enfermer dans quatre cercles de la sphère dont les rayons tendent vers zéro avec* $\frac{1}{k}$;

La surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ *lorsque* z *décrit* C_k *présente, dès que* k *est assez grand,* n_k *disques au moins sur l'un de trois domaines* D_i *simplement connexes et disjoints* (¹);

Cette surface de Riemann présente, dès que k *est assez grand,* n_k DISQUES SIMPLES *au moins sur l'un de cinq domaines* D_i *simplement connexes et disjoints* (¹);

Plus généralement, *cette surface présente, dès que* k *est assez grand,* $\frac{n_k}{q}\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]$ *disques ayant moins de* μ_i *feuillets sur l'un de* q *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints et à chacun desquels est associé un entier* μ_i *supérieur à* 1 *avec* $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. Dans cet énoncé, le domaine D_i couvert peut varier avec la valeur de l'indice k.

17. *Fonctions d'ordre infini* (²). — Si, à $S(r)$ nous adjoignons une régulari-

(¹) La valeur minima de k à partir de laquelle cette propriété est satisfaite dépend des domaines D_i (*cf.* § 13 : présence de la constante $\overline{K}$).

(²) *Cf.* KING-LAI-HIONG, *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini* (*Journ. Math.*, 9ᵉ série, 14, 1935, p. 233-307). Une étude des fonctions d'ordre infini avait été faite par M. H. Milloux (*Les cercles de remplissage...*, *loc. cit.*) sans introduire les régularisantes.

sante $U(r) = r^{\rho(r)}$ satisfaisant à

$$\frac{U(kr)}{U(r)} > k_1 > 1,$$

les résultats obtenus dans les paragraphes 15 et 16 s'appliquent encore ici. La condition de régularité, que nous venons d'imposer à $U(r)$, peut être remplacée par la condition plus stricte de M. Valiron qui, *dans le cas de l'ordre infini*, consiste en la croissance de la fonction $\rho(r)$ (¹).

Il faut remarquer que si $V(r) = r^{\sigma(r)}$ est une régularisante de Valiron de $T(r)$, il existe une régularisante (au sens large) de $S(r)$ qui reste supérieure à $\sigma(r)\, r^{\sigma(r)}$. Pour s'en assurer, il suffit de démontrer que $\overline{\lim} \dfrac{S(r)}{\sigma(r)\, r^{\sigma(r)}} \geqq 1$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre $\mathfrak{I} < 1$ tel que $S(r) < \mathfrak{I}\sigma(r)\, r^{\sigma(r)}$; par conséquent, $T(r)$ resterait inférieur à

$$\mathfrak{I}\int \sigma(r)\, r^{\sigma(r)} \frac{dr}{r} < \mathfrak{I}\int^{r} r^{\sigma(r)} \left[\frac{\sigma(r)}{r} + \sigma'(r) \log r\right] dr < \mathfrak{I} r^{\sigma(r)},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si l'on utilise la régularisante $r^{\sigma(r)}$ de $T(r)$, les théorèmes des paragraphes 15 et 16 font donc intervenir l'expression

$$n_k > K^{\star} \frac{\sigma(r_k)\, r_k^{\sigma(r_k)}}{p^2(r_k)}.$$

Ce résultat est classique pour ce qui est relatif aux valeurs prises (²), nouveau pour ce qui a trait aux valeurs multiples et aux disques. Nous allons maintenant l'améliorer.

A cet effet, nous remplaçons le second membre de l'inégalité (4) de la page 197 par

$$\frac{S(R) - S(r)}{25p\left(1 + p \log \dfrac{R}{r}\right)},$$

ce qui transforme l'inégalité du théorème énoncé dans le paragraphe 12 en

$$n_k > K \frac{S(R) - S(r)}{p\left(1 + p \log \dfrac{R}{r}\right)} - K_1 \quad (^3).$$

Puis nous modifions le raisonnement du paragraphe 15 de la façon suivante. Nous prenons pour R une valeur telle que $\dfrac{S(R)}{U(R)} > \dfrac{1}{2}$ et pour r la valeur

---

(¹) La condition de régularité introduite par M. K.-L. Hiong est beaucoup plus stricte que la nôtre.

(²) Théorème XVIII du *Mémorial* déjà cité.

(³) La Remarque I continue de s'appliquer, mais le raisonnement qui l'établit doit maintenant comprendre deux parties que nous indiquons rapidement. Pour les valeurs de p suffisamment petites $\left(\dfrac{R}{r} < 1 + \dfrac{1}{p\sqrt{2}}\right)$, le dénominateur $p\left(1 + p\log\dfrac{R}{r}\right)$ est sensiblement proportionnel à p; on passera d'un découpage au suivant uniquement à l'aide de nouvelles demi-droites issues de l'origine (les domaines sont divisés en deux). Pour les valeurs de p suffisamment grandes $\left(\dfrac{R}{r} > 1 + \dfrac{1}{p\sqrt{2}}\right)$, le dénominateur est sensiblement proportionnel à p^2 et l'on passera d'un découpage au suivant par le processus indiqué dans la Remarque I (les domaines sont divisés en quatre).

$r = \mathrm{R}e^{-\frac{1}{\rho(\mathrm{R})}}$. Il vient, en supposant que $\mathrm{U}(r) = r^{\rho(r)}$ est une régularisante de Valiron,

$$n_k > \frac{\frac{1}{2}\mathrm{R}^{\rho(\mathrm{R})} - r^{\rho(r)}}{25p\left[1+\frac{p}{\rho(\mathrm{R})}\right]} > \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{e}}{25}\,\frac{\mathrm{R}^{\rho(\mathrm{R})}}{p\left[1+\frac{p}{\rho(\mathrm{R})}\right]} > \mathrm{K}^\star\,\frac{r_k^{\rho(r_k)}}{p\left[1+\frac{p}{\rho(r_k)}\right]}.$$

Si l'on suppose d'abord que p est fixe, on obtient un théorème analogue au premier de ceux énoncés dans le paragraphe 15, mais *dans lequel* p^2 *est remplacé par* p. Ce résultat subsiste si p varie avec r_k, de telle sorte que $\frac{p(r)}{\rho(r)}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r}$; on a alors

$$n_k > \mathrm{K}^\star\,\frac{\mathrm{U}(r_k)}{p(r_k)}.$$

Si, par contre, $p(r)$ est rapidement croissant $\left[\text{si } \frac{p(r)}{\rho(r)} \text{ augmente indéfiniment avec } r\right]$, on a

$$n_k > \mathrm{K}^\star\,\frac{\rho(r_k)\,\mathrm{U}(r_k)}{p^2(r_k)}.$$

On en conclut l'*existence d'une famille de cercles de remplissage ayant pour équations*

$$|z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)\,r_k}{\sqrt{\rho(r_k)\,\mathrm{U}(r_k)}},$$

où $\lambda(r_k)$ *est une fonction arbitraire qui augmente indéfiniment avec* r *aussi lentement qu'on le veut.*

Si $\mathrm{V}(r) = r^{\sigma(r)}$ est une régularisante de Valiron de $\mathrm{T}(r)$, on ne peut pas affirmer qu'il existe (au même sens) une régularisante $\mathrm{U}(r)$ de $\mathrm{S}(r)$ qui reste supérieure à $\sigma(r)\,r^{\sigma(r)}$. Mais on peut affirmer qu'il existe une fonction $\mathrm{U}(r)$ pour laquelle la condition de croissance régulière s'exprime par

$$\frac{\mathrm{U}(\mathrm{R})}{\mathrm{U}(r)} > \left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\sigma(\mathrm{R})},$$

car cette inégalité est satisfaite par la fonction $\sigma(r)\,r^{\sigma(r)}$ elle-même.

On peut alors reprendre les mêmes considérations que ci-dessus en choisissant $r = \mathrm{R}e^{-\frac{1}{\sigma(\mathrm{R})}}$. On obtient

$$n_k > \mathrm{K}^\star\,\frac{\sigma(r_k)\,r_k^{\sigma(r_k)}}{p\left[1+\frac{p}{\sigma(r_k)}\right]}.$$

En particulier, il existe une famille de cercles de remplissage ayant pour équations

$$|z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)\,r_k}{\sigma(r_k)\sqrt{\mathrm{V}(r_k)}}.$$

Sans insister davantage, il est clair que les propriétés générales énoncées dans le paragraphe 16 s'appliquent aux fonctions d'ordre infini en prenant

$$n_k > \mathrm{K}^\star\,\frac{\mathrm{U}(r_k)}{p(r_k)\left[1+\frac{p(r_k)}{\sigma(r_k)}\right]} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{U}(r) = r^{\rho(r)},$$

ou

$$n_k > K^\star \frac{\sigma(r_k)\,V(r_k)}{p(r_k)\left[1+\dfrac{p(r_k)}{\sigma(r_k)}\right]} \qquad \text{avec} \quad V(r) = r^{\sigma(r)}.$$

Fonctions méromorphes dans le cercle unité (¹).

18. Les méthodes que nous avons utilisées pour les fonctions méromorphes dans tout le plan fini s'appliquent également aux fonctions méromorphes dans un cercle. Bien des développements de la section précédente peuvent être repris mot pour mot ou presque. Aussi allons-nous simplement faire ici une esquisse dans laquelle nous nous astreindrons à une division en paragraphes toute semblable à celle de l'étude précédente.

19. *Définition.* — La famille de cercles Γ_k doit être telle que $\rho_k = |z_k|$ tende vers 1 tandis que $\frac{1-\rho_k}{r_k}$ tende vers l'infini lorsque k augmente indéfiniment. A cette différence près, même définition que précédemment.

20. *Existence d'une famille de cercles de remplissage.* — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$, méromorphe dans le cercle unité, y présente une famille de cercles de remplissage est que l'expression*

$$(1-|z|)\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

ne soit pas bornée supérieurement.

Les fonctions ne présentant pas de cercles de remplissage (*fonctions exceptionnelles*) satisfont donc à la relation

$$S(r) = O\left[\frac{1}{1-r}\right],$$

ce qui entraîne, en particulier,

$$T(r) = O\left[\log\frac{1}{1-r}\right].$$

Ce résultat, prévu par M. H. Milloux (²), ne peut être amélioré.

21. *Nouvelles propriétés qualitatives des cercles de remplissage.* — On peut reprendre ici tout le paragraphe 11 sans lui apporter la moindre modification.

(¹) *Cf.* G. Valiron, *Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes* (*Acta mathematica*, 52, 1928, p. 67-92); King-Lai-Hiong, *Sur les fonctions entières...*, *loc. cit.*; H. Milloux, *Sur la théorie des fonctions méromorphes dans le cercle unité* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), 54, 1937, p. 151-229).

(²) H. Milloux, *Sur la théorie des fonctions ...*, *loc. cit.*; l'auteur établit (Théorème XV, p. 220) la relation

$$T(r) = O\left[\log^2\frac{1}{1-r}\right].$$

22. *Une propriété quantitative.* — On établit la proposition suivante :

Si $w = f(z)$ est méromorphe dans $|z| < 1$, la couronne $r < |z| < R < 1$ contient un point z_k, centre d'un cercle C_k de rayon $\frac{1-|z_k|}{p}$. Dans C_k, $f(z)$ prend $n_k \geqq 0$ fois au moins toutes les valeurs, sauf au plus celles représentées dans deux cercles de rayon e^{-n_k} de la sphère. On a

$$n_k > \frac{K}{p^2}[S(R) - S(r)][1 - R] - K_1,$$

où K *et* K_1 *sont des constantes numériques. On suppose p donné supérieur à* un.

La démonstration est semblable à celle du paragraphe 12; seul le morcellement de la couronne doit être modifié. On découpe d'abord cette couronne en couronnes partielles à l'aide des cercles centrés à l'origine et ayant pour rayons $1-(1-r)\left(1-\frac{1}{2p}\right)$, $1-(1-r)\left(1-\frac{1}{2p}\right)^2$, $1-(1-r)\left(1-\frac{1}{2p}\right)^3$, ... Puis chacune de ces couronnes partielles est découpée en domaines égaux par des demi-droites issues de l'origine et faisant entre elles des angles égaux; le nombre de ces demi-droites est égal au plus petit entier supérieur à $\frac{2p}{1-r'}$, en désignant par r' le rayon du plus petit des deux cercles limitant la couronne partielle considérée. Après avoir estimé le nombre des domaines ainsi découpés on achève sans peine la démonstration.

Remarque I. — Le point z_k du théorème précédent peut être choisi *indépendamment de la valeur supérieure à* un *attribuée au nombre p.*

Remarque II. — On peut donner à la borne inférieure de n_k une forme plus précise, savoir

$$n_k > K \frac{S(R) - S(r)}{p\frac{1}{1-r} + p^2\left(\frac{1}{1-R} - \frac{1}{1-r}\right)} - K_1.$$

23. *Généralisations.* — Ce sont les mêmes que dans le paragraphe 13, mais il est clair que l'on doit prendre pour bornes inférieures de n_k les quantités suivantes :

$$\frac{K}{p^2}[S(R) - S(r)][1 - R] - K_1 \qquad (1^{\text{er}}\ \text{énoncé})$$

$$\frac{K}{p^2}[S(R) - S(r)][1 - R] - \overline{K} \qquad (2^{\text{e}}\ \text{et}\ 3^{\text{e}}\ \text{énoncés})$$

$$K\frac{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2}{qp^2}[S(R) - S(r)][1 - R] - \frac{\overline{K}}{\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2} \qquad (4^{\text{e}}\ \text{énoncé})$$

24. *Application à une classe très étendue de fonctions non exceptionnelles.* — Il s'agit de la classe des fonctions satisfaisant à

$$\overline{\lim_{r=1}}\,(1-r)\,S(r) = \infty.$$

Cette classe comprend, entre autres, l'ensemble des fonctions telles que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty.$$

On obtient les mêmes résultats que dans le paragraphe 14 [1].

25. *Fonctions d'ordre ρ fini non nul* [2]. — Il ne faut pas perdre de vue que $S(r)$ est d'ordre $1+\rho$ tandis que $T(r)$ est d'ordre ρ [3].

La régularisante $U(r)$ est astreinte aux deux conditions

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{S(r)}{U(r)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{U\left[1-\frac{1}{k}(1-r)\right]}{U(r)} > k_1 > 1.$$

On choisit alors R tel que

$$\frac{S(R)}{U(R)} > \frac{1+k_1}{2k_1};$$

puis, r est défini par $r = 1 - k(1-R)$. On arrive ainsi à

$$n_k > K^\star \frac{(1-r)U\left[1-\frac{1}{k}(1-r)\right]}{p^2} - K_1.$$

On peut imposer à la fonction $U(r)$ une condition de croissance régulière plus stricte, par exemple celle de M. Valiron [4] $\left[U(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\rho(r)}\right.$ où $\rho(r)$ tend vers ρ et où $\rho'(r)(1-r)\log\frac{1}{1-r}$ tend vers zéro lorsque r tend vers $\left.1\right]$. On met ainsi en évidence des cercles de remplissage d'équations $|z-z_k| < \frac{1-r_k}{p(r_k)}$ auxquels correspond la « multiplicité » n_k avec

$$n_k > K^\star \frac{(1-r_k)\,U(r_k)}{p^2(r_k)},$$

$p(r)$ étant une fonction assujettie à la seule condition $1 < p^2(r) < K^\star(1-r)U(r)$.

Si $V(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma(r)}$ est une régularisante de Valiron de $T(r)$, la fonction $S(r)$

---

(1) La fonction $u(r)$ de la note finale doit maintenant satisfaire à la relation

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{(1-r)S(r)}{u(r)} = 1.$$

(2) *Cf.*, par exemple, H. MILLOUX, *Sur la théorie des fonctions...*, *loc. cit.*, § 107 et 108.

(3) De plus, on sait que $S(r)$ et $T(r)$ sont du même type (maximum, moyen ou minimum) et de la même classe (divergente ou convergente).

(4) Les conditions de régularité que nous indiquons ici se ramènent à celles du paragraphe 15 si l'on prend $\frac{1}{1-r}$ comme variable au lieu de r.

présente une régularisante $U(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\rho(r)}$ qui reste supérieure à

$$\rho\frac{V(r)}{1-r} = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\sigma(r)+\frac{\log\rho}{\log\frac{1}{1-r}}}$$

car :

1° $\overline{\lim}\,\frac{(1-r)S(r)}{\rho V(r)} \geqq 1$;

2° $\sigma(r) + \frac{\log\rho}{\log\frac{1}{1-r}}$ tend vers ρ ;

3° $\left[\sigma'(r) - \frac{1}{1-r}\,\frac{\log\rho}{\log\frac{1}{1-r}}\right](1-r)\log\frac{1}{1-r}$ tend vers zéro.

La dernière propriété entraîne donc

$$n_k > K^\star \frac{V(r_k)}{p^2(r_k)}.$$

En particulier, il existe une famille de cercles de remplissage d'équations

$$|z - z_k| < \lambda(r_k)\sqrt{\frac{1-r_k}{U(r_k)}} \quad \text{ou} \quad |z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)(1-r_k)}{\sqrt{V(r_k)}};$$

on met aussi en évidence une famille de cercles de remplissage ayant la « multiplicité » n_k avec

$$n_k > \varepsilon(r_k)(1-r_k)U(r_k) \quad \text{ou} \quad n_k > \varepsilon(r_k)V(r_k).$$

26. *Généralisation des propriétés précédentes.* — On peut répéter ici mot pour mot le paragraphe 16.

27. *Fonctions d'ordre infini.* — Les résultats précédents s'appliquent si l'on prend pour $U(r)$ une régularisante au sens large de $S(r)$.

On démontre aisément que, si $V(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma(r)}$ est une régularisante de Valiron du $T(r)$ $\left[\text{c'est-à-dire si } \overline{\lim}\,\frac{T(r)}{V(r)} = 1 \text{ et si } \sigma(r) \text{ est croissante}\right]$, il existe une régularisante (au sens large) de $S(r)$ qui reste supérieure à $\sigma(r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\sigma(r)}$. Le théorème essentiel du paragraphe 25 entraîne donc

$$n_k > K^\star \frac{\sigma(r_k)V(r_k)}{p^2(r_k)}.$$

Ce résultat peut être amélioré si l'on utilise une régularisante de Valiron $U(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\rho(r)}$ de $S(r)$. En choisissant R tel que $\frac{S(R)}{U(R)} > \frac{1}{2}$ et r étant défini par $\frac{1-r}{1-R} = e^{-\frac{1}{\rho(R)}}$, on arrive aussitôt (Cf. *Remarque II*, § 22) à la relation

$$n_k > K^\star \frac{U(r_k)}{p(r_k)\left[1 + \frac{p(r_k)}{\rho(r_k)}\right]}.$$

Si $p(r)$ croît assez lentement, on a donc

$$n_k > K^\star \frac{U(r_k)}{p(r_k)},$$

tandis que, si $p(r)$ croît assez vite, on a

$$n_k > K^\star \frac{U(r_k)\rho(r_k)}{p^2(r_k)}.$$

Par conséquent, il existe une famille de cercles de remplissage ayant pour équation

$$|z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)(1 - r_k)}{\sqrt{\rho(r_k)U(r_k)}}.$$

Si $V(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma(r)}$ est une régularisante de Valiron de $T(r)$, on ne peut pas affirmer qu'il existe (au même sens) une régularisante $U(r)$ de $S(r)$ qui reste supérieure à $\sigma(r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\sigma(r)}$. Mais on peut affirmer qu'il existe une fonction $U(r)$ pour laquelle la condition de croissance régulière s'exprime par

$$\frac{U(R)}{U(r)} > \left(\frac{1-r}{1-R}\right)^{1+\sigma(R)},$$

car cette inégalité est satisfaite par la fonction $\sigma(r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\sigma(r)}$ elle-même.

On parvient ainsi à

$$n_k > K^\star \frac{\sigma(r_k)V(r_k)}{p(r_k)\left[1 + \frac{p(r_k)}{\sigma(r_k)}\right]},$$

à partir de quoi on montre, entre autres, l'existence d'une famille de cercles de remplissage ayant pour équations

$$|z - z_k| < \frac{\lambda(r_k)(1 - r_k)}{\sigma(r_k)\sqrt{V(r_k)}}.$$

28. *Conclusion.* — Nous avons appliqué la même méthode aux fonctions méromorphes dans tout le plan fini et aux fonctions méromorphes dans un cercle. On peut étudier de même une fonction $w = f(z)$ méromorphe dans un domaine D quelconque (un angle par exemple), en supposant connue l'aire $S(r)$ décrite par les valeurs de la fonction lorsque z décrit un domaine D_r intérieur à D, qui s'accroît avec r et qui tend vers D lorsque le paramètre r tend vers une limite r_0. On fera un pavage convenable du domaine D et l'on définira ce qu'on entend par « famille de cercles de remplissage » dans ce domaine.