ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN DIEUDONNÉ

La dualité dans les espaces vectoriels topologiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 107-139
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__107_0>

LA DUALITÉ

DANS

LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PAR M. J. DIEUDONNÉ.

INTRODUCTION.

1. Nous nous proposons, dans ce travail, de donner un exposé d'ensemble de la théorie de la *dualité* dans les espaces vectoriels topologiques, qui a fait l'objet, dans ces dernières années, d'assez nombreux travaux. Cette théorie s'est développée autour du problème de la résolution des *équations linéaires*, c'est-à-dire de la forme $f(x)=y_0$, où l'inconnue x est un élément d'un espace vectoriel E, le second membre y_0 un élément d un espace vectoriel F (distinct ou non de E), et f une *application linéaire* donnée de E dans F (*voir* ci-dessous, au paragraphe 2, le rappel des définitions de ces termes). Lorsque E et F ont un nombre *fini* de dimensions, ce problème se ramène à la résolution d'un *système* d'équations linéaires $f_i(x)=y_{i,0}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, où les f_i sont des *formes linéaires* et les seconds membres, des scalaires donnés : problème purement algébrique, dont la solution classique fait intervenir les *matrices*; mais il est possible de mettre cette solution sous une forme qui s'étende aussitôt au cas où on ne fait aucune hypothèse sur le nombre de dimensions de E et F. Il faut pour cela introduire la notion de *dual algébrique* d'un espace vectoriel E : on entend par là un nouvel espace vectoriel dont les éléments sont les *formes linéaires* définies dans E. A toute application linéaire f de E dans F est alors associée une application linéaire $f^\star$ du *dual* de F dans le *dual* de E, dite *transposée* de f (lorsqu'on rapporte E, F et leurs duals à des bases convenables, la matrice associée à $f^\star$ n'est autre que la matrice transposée, c'est-à-dire obtenue par échange des lignes et des colonnes, de la matrice associée à f); et la condition de résolubilité de l'équation $f(x)=y_0$ est que $u(y_0)=0$ pour toute forme linéaire u définie sur F et telle que $f^\star(u)=0$.

Cette forme de la condition de résolubilité est toutefois trop générale pour être utile dans les équations linéaires que l'on rencontre en pratique, où l'inconnue et le second membre parcourent des espaces vectoriels à une infinité de dimensions (le plus souvent des *espaces fonctionnels*); c'est que, dans ces équations, les applications linéaires f qui interviennent ne sont pas du type le plus général, mais sont assujetties à des conditions liées à la présence de *topologies* sur les espaces vectoriels E et F; nous n'envisagerons, dans ce qui suit, que la plus simple de ces conditions, celle qui impose à f d'être *continue* pour les topologies considérées. Il y a lieu alors de ne faire intervenir, dans la condition de résolubilité de $f(x) = y_0$, que des formes linéaires qui soient, elles aussi, *continues* pour les topologies envisagées; ce qui conduit à introduire, au lieu du dual algébrique de E, le sous-espace de ce dual formé des formes linéaires continues sur E (pour la topologie $\mathfrak{T}$ donnée sur E); c'est ce sous-espace qui sera désigné sous le nom de *dual* de E (relatif à la topologie $\mathfrak{T}$).

Le dual E' ainsi défini peut être le même pour des topologies $\mathfrak{T}$ distinctes sur un même espace vectoriel E; parmi toutes les topologies $\mathfrak{T}$ qui donnent le même dual E', il y en a une *moins fine que toutes les autres*, qu'on appelle la topologie *faible* $\sigma(E, E')$ déterminée par E' sur E; c'est à l'aide de cette topologie (et d'une topologie analogue sur le dual E') que se formulent naturellement les critères de résolubilité des équations linéaires, qui apparaissent en effet comme ne dépendant pas directement des topologies données sur les espaces E et F, mais seulement des topologies *faibles* qui leur correspondent. Aussi consacrons-nous le Chapitre I de ce Mémoire à l'étude générale des topologies faibles sur les espaces vectoriels. Le critère de résolubilité de $f(x) = y_0$ que nous obtenons dans ce Chapitre, généralise celui obtenu par G. Köthe (1) dans un cas particulier; il redonne aussi le critère *algébrique* de résolubilité énoncé plus haut, en spécialisant convenablement la topologie faible considérée.

Pour appliquer les résultats généraux du Chapitre I, il est nécessaire d'étudier les relations entre une topologie $\mathfrak{T}$ sur un espace vectoriel E, et la topologie faible sur E qui lui est associée; cette étude, dans le cas (le plus important en pratique) où $\mathfrak{T}$ est une topologie d'espace *normé*, forme l'objet du Chapitre II; à l'exception du théorème 20, aucun des résultats de ce Chapitre n'est essentiellement nouveau; mais il nous a semblé utile de les rassembler en un tout cohérent et de mettre en évidence ce qui, dans la théorie des équations linéaires dans les espaces normés, est une conséquence de la théorie générale de la dualité faible, et ce qui découle des propriétés particulières des topologies d'espace normé.

Un résumé des principaux résultats de ce travail a été donné dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2).

---

(1) *Voir par exemple* G. Köthe, *Math. Ann.*, 116, 1939, p. 730; on trouvera à cet endroit des indications bibliographiques sur d'autres théorèmes analogues du même auteur.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, 211, 1940, p. 94 et 129. Je dois signaler ici qu'au moment où j'ai obtenu ces résultats (décembre 1939) j'ai échangé à ce sujet une correspondance suivie avec M. H. Cartan, à qui je suis redevable de nombreuses améliorations et simplifications dans l'exposé de la théorie; à la suite de cette correspondance, M. H. Cartan a obtenu de son côté de nouveaux et très intéressants résultats sur la dualité, qu'il n'a pas encore publiés.

2. *Préliminaires algébriques.* — Par *espace vectoriel,* nous entendons, sauf mention expresse du contraire, un espace vectoriel par rapport au *corps des nombres complexes* $\mathbf{C}$: un tel espace E est donc un groupe abélien additif, admettant les nombres complexes comme opérateurs (qu'on qualifie de *scalaires*) avec les axiomes

$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \qquad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \qquad (\lambda\mu)x=\lambda(\mu x), \qquad 1.x=x.$$

Si l'on restreint les opérateurs à ne prendre que des valeurs réelles, on obtient une seconde structure d'espace vectoriel sur E, par rapport au corps $\mathbf{R}$ des nombres réels; on dit que c'est la structure vectorielle *réelle* associée à la structure vectorielle *complexe* donnée. On distingue les sous-espaces vectoriels de ces deux structures, en les appelant respectivement sous-espaces vectoriels complexes et sous-espaces vectoriels réels de E. Un *hyperplan* complexe (resp. réel) est un sous-espace vectoriel complexe (resp. réel) H de E tel que l'espace vectoriel quotient R/H soit un espace à une dimension.

Une *application linéaire* d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une fonction f, définie dans E, à valeurs dans F, et satisfaisant aux identités $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$; si V est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque $\overset{-1}{f}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E; il en est ainsi en particulier de $\overset{-1}{f}(O)$, et l'on peut écrire $f=g\circ\varphi$, où φ est l'application canonique de E sur $E/\overset{-1}{f}(O)$, et g une application linéaire *biunivoque* de $E/\overset{-1}{f}(O)$ sur $f(E)$.

Les applications linéaires ainsi définies sont encore dites applications linéaires *complexes*; on définit de même les applications linéaires *réelles* en considérant les structures vectorielles réelles sur E et F.

Une *forme linéaire* est une application linéaire prenant ses valeurs dans le corps $\mathbf{C}$; une forme linéaire réelle est une application linéaire réelle prenant ses valeurs dans le corps $\mathbf{R}$. Si f est une forme linéaire complexe (resp. réelle) non identiquement nulle, $\overset{-1}{f}(0)$ est un hyperplan complexe (resp. réel), et réciproquement tout hyperplan complexe (resp. réel) H est de cette forme, toutes les formes linéaires f telles que $H=\overset{-1}{f}(0)$ étant proportionnelles à l'une d'elles.

Ce dernier résultat se généralise de la façon suivante :

Théorème 1. — *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n formes linéaires indépendantes, et soit* V *le sous-espace vectoriel formé des points x tels que $u_i(x)=0$ pour $1\leqq i\leqq n$; toute forme linéaire u qui s'annule dans* V *est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Le théorème est vrai pour $n=1$; on le démontre par récurrence sur n. Par hypothèse, le théorème étant supposé vrai pour $n-1$ formes, il existe un élément a_i de E tel que $u_j(a_i) = 0$ pour $j \neq i$, et $u_i(a_i) = 1$, pour chacun des indices i, puisque les u_i sont linéairement indépendantes. On peut donc écrire de proche en proche, pour tout élément x de E,

$$x = \lambda_1 a_1 + x_1 \qquad \text{avec} \quad u_1(x_1) = 0,$$

puis

$$x_1 = \lambda_2 a_2 + x_2 \qquad \text{avec} \quad u_2(x_2) = 0,$$

et ainsi de suite, d'où finalement $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + y$, où $y \in V$; il en résulte que la forme linéaire u est déterminée par ses valeurs aux points a_i; les formes linéaires s'annulant sur V forment donc un espace vectoriel à n dimensions au plus, et, comme cet espace contient les n formes indépendantes u_i, il est engendré par ces formes, ce qui établit le théorème.

3. *Préliminaires topologiques* [3]. — Les seuls espaces vectoriels topologiques que nous considérerons (et qui sont d'ailleurs les plus importants en pratique) sont les espaces *localement convexes* [4]. Rappelons que, dans un espace vectoriel E, un ensemble K est dit *convexe* si le segment joignant deux quelconques de ses points x, y [c'est-à-dire l'ensemble des points $\rho x + (1 - \rho) y$, où ρ parcourt l'ensemble des nombres réels tels que $0 \leqq \rho \leqq 1$] est tout entier contenu dans K; il est dit en outre *cerclé* si pour tout $x \in K$, $e^{i\theta} x \in K$ quel que soit l'angle θ; enfin il est dit *équilibré* si, pour tout $x \neq O$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in K$. Ceci posé, un espace vectoriel topologique est *localement convexe* si sa topologie est *séparée* et s'il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'ensembles convexes, cerclés et équilibrés.

Une fonction p à valeurs finies et $\geqq 0$, définie dans un espace vectoriel E, est appelée une *semi-norme* sur E, si elle satisfait aux conditions

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \qquad p(x + y) \leqq p(x) + p(y).$$

Soit (p_α) une famille de semi-normes sur E; désignons par $U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon}$ l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant à la condition

$$\sup_{1 \leqq i \leqq n} p_{\alpha_i}(x) \leqq \varepsilon;$$

les $U_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varepsilon}$ forment un système fondamental de voisinages de O dans une topologie d'espace localement convexe sur E, lorsqu'on donne à n, aux indices α_i et au nombre $\varepsilon > 0$ toutes les valeurs possibles, à condition que, pour

(3) Pour les notions topologiques et la terminologie que nous utilisons ici, se reporter aux *Éléments de Mathématique* de N. BOURBAKI, Livre III, *Topologie générale* (*Actual. Scient. et Ind.*, nos 858 et 916).

(4) La première définition des espaces localement convexes est due à J. von Neumann (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 37, 1935, p. 1); elle contient une condition de dénombrabilité superflue. *Voir* aussi J. V. WEHAUSEN, *Duke Math. Journ.*, 4, 1938, p. 157-169.

tout $x \neq 0$, il existe un indice α tel que $p_\alpha(x) \neq 0$. Réciproquement, la topologie de tout espace localement convexe peut être définie de cette manière.

Soit E un espace localement convexe, V un sous-espace vectoriel de E; si la topologie de E est définie par les semi-normes p_α, la topologie induite sur V est une topologie d'espace localement convexe, définie par les restrictions des p_α à V.

La topologie quotient de celle de E, sur l'espace quotient E/V, est une topologie d'espace localement convexe; si, pour toute classe $\dot{x} \in$ E/V, on pose $\overline{p_\alpha}(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} p_\alpha(x)$, les $\overline{p_\alpha}$ sont des semi-normes sur E/V, qui définissent la topologie quotient précédente, lorsque la borne supérieure d'un nombre fini quelconque de semi-normes p_α est encore une semi-norme de cette famille.

Si f est une forme linéaire *continue* dans un espace localement convexe E, l'équation $f(x) = 0$ définit un hyperplan fermé; réciproquement, tout hyperplan fermé est de la forme $\overset{-1}{f}(0)$, où f est une forme linéaire continue.

Dans un espace localement convexe E, soit K un ensemble convexe ouvert, V un sous-espace vectoriel ne rencontrant pas K; il existe un hyperplan fermé contenant V et *ne rencontrant pas* K [théorème de Hahn-Banach ([5])]. Parmi les multiples conséquences de cet important théorème, signalons les suivantes :

Si V est un sous-espace vectoriel *fermé* dans E, et x_0 un point n'appartenant pas à V, il existe un hyperplan fermé contenant V, et ne contenant pas x_0; on en conclut que V est l'intersection des hyperplans fermés le contenant.

Si G est un sous-espace vectoriel quelconque de E, f une forme linéaire continue définie dans le sous-espace G, il existe une forme linéaire continue $\overline{f}$, définie dans E, et *prolongeant* f. En particulier, soit $x_0 \neq 0$ un point de E, p une semi-norme de E telle que $p(x_0) \neq 0$; il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) = p(x_0)$ et $|f(x)| \leq p(x)$ quel que soit $x \in$ E.

Dans un espace localement convexe E, un ensemble A est dit *borné* (relativement à la topologie de E) si, pour tout voisinage U de 0, il existe un nombre λ tel que A soit contenu dans λU; cette condition équivaut au fait que, pour toute semi-norme p de E, $\sup_{x \in A} p(x)$ est un nombre *fini*.

Une semi-norme p sur un espace vectoriel E est appelée une *norme* si la relation $x \neq 0$ entraîne $p(x) \neq 0$. Un espace localement convexe est dit *normable* si sa topologie peut être définie par *une seule norme*; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un *voisinage borné* de 0 ([6]); toutes les normes qui définissent la topologie de E sont alors dites *équivalentes*; pour que deux normes p et q soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe deux

---

([5]) S. Banach, *Opérations linéaires* (Warszawa, 1932), p. 27; pour une autre démonstration de ce théorème, *voir* J. Dieudonné, *Revue Scientifique* (Revue rose), 1941, p. 642.

([6]) A. Kolmogoroff, *Studia Mathematica*, 5, 1934, p. 29.

nombres a, b finis et > 0, tels que

$$a.p(x) \leqq q(x) \leqq b.p(x)$$

quel que soit x. Lorsqu'on fixe une norme sur E, l'espace E, muni de cette norme et de la topologie qu'elle définit, est appelé *espace normé* : la norme d'un point x se note alors en général $\|x\|$.

Soit f une application linéaire d'un espace localement convexe E dans un espace localement convexe F. Pour que f soit *continue*, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme q de F, il existe une semi-norme p de E et un nombre $a \geqq 0$ tels que $q(f(x)) \leqq a.p(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Si $f = g \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de E sur $\mathrm{E}/\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$, g l'application linéaire biunivoque de $\mathrm{E}/\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ sur $f(\mathrm{E})$, associée à f, g est alors une application linéaire continue de l'espace quotient $\mathrm{E}/\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ dans F; si g est *bicontinue* (autrement dit, si g est un *isomorphisme* de $\mathrm{E}/\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ sur $f(\mathrm{E})$), on dit que f est un *homomorphisme* de E sur $f(\mathrm{E})$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'image par f de tout voisinage de O dans E, soit un voisinage de O dans le sous-espace $f(\mathrm{E})$ de F.

Signalons enfin que, sur un espace à n dimensions, il n'y a qu'*une seule* topologie d'espace localement convexe (7), identique à celle définie, par exemple, par la *norme euclidienne* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}$ (où les ξ_i sont les coordonnées de x relatives à une base quelconque de l'espace); en particulier, toutes les normes sur un espace à n dimensions sont *équivalentes*.

CHAPITRE I.

LA DUALITÉ FAIBLE.

4. Considérons deux espaces vectoriels E, E' (qui peuvent être éventuellement munis de topologies; lorsqu'il en est ainsi, il est fait abstraction de ces topologies dans ce paragraphe). Supposons donnée dans le produit $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ une *forme bilinéaire* $(x, x') \to \mathrm{B}(x, x')$ (c'est-à-dire une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ dans le corps **C**, linéaire par rapport à chacune des variables $x \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{E}'$); supposons en outre que cette forme satisfasse aux deux conditions suivantes :

($\mathrm{D_I}$). *La relation « quel que soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{B}(x, x') = 0$ » entraîne $x' = 0$.*

($\mathrm{D_{II}}$). *La relation « quel que soit $x' \in \mathrm{E}'$, $\mathrm{B}(x, x') = 0$ » entraîne $x = 0$.*

Nous désignerons par $\mathrm{B}_{x'}$ la forme linéaire $x \to \mathrm{B}(x, x')$ définie dans E, par B'_x la forme linéaire $x' \to \mathrm{B}(x, x')$ définie dans E'.

(7) A. TYCHONOFF, *Math. Ann.*, 111, 1935, p. 769.

Il est immédiat que les fonctions $|B_{x'}|$ sont des *semi-normes* sur E; d'après (D_{II}), elles définissent sur E une topologie d'*espace localement convexe*, que nous appellerons la *topologie faible* définie par E' sur E, et désignerons par la notation $\sigma(E, E')$; d'après la condition de continuité d'une forme linéaire (§ 3), cette topologie est la topologie d'espace localement convexe *la moins fine* pour laquelle toutes les formes $B_{x'}$ soient continues. Si l'on prend arbitrairement un nombre fini de points $x'_i \in E'(1 \leq i \leq n)$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $\sup_{1 \leq i \leq n} |B(x, x'_i)| \leq 1$ est un voisinage de O dans la topologie $\sigma(E, E')$; en vertu de la relation $B(x, \lambda x') = \lambda B(x, x')$, ces ensembles forment un système fondamental de voisinages de O dans cette topologie, lorsque n et les x'_i prennent toutes les valeurs possibles.

On définit de façon analogue la topologie faible $\sigma(E', E)$ définie par E sur E'; en raison de la symétrie évidente que présentent ces deux topologies, nous nous contenterons, en général, d'énoncer les propriétés de $\sigma(E, E')$, celles de $\sigma(E', E)$ s'en déduisant en permutant les rôles de E et E'.

5. Considérons maintenant un espace *localement convexe* quelconque E, et soit $\mathcal{T}$ sa topologie; soit E' l'ensemble des formes linéaires *continues* dans E (pour la topologie $\mathcal{T}$); E' est un espace vectoriel, que nous avons appelé le *dual* de E (relatif à la topologie $\mathcal{T}$). Si, pour tout $x \in E$ et toute forme linéaire $x' \in E'$, on pose $B(x, x') = x'(x)$, B est une *forme bilinéaire* qui vérifie les conditions (D_I) et (D_{II}) : pour (D_I), cela résulte de la définition de la relation $x' = 0$; quant à (D_{II}), c'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach (§ 3) : pour tout $x \neq 0$, il existe une semi-norme p de E telle que $p(x) \neq 0$ et une forme linéaire continue x' telle que $x'(x) = p(x)$, d'où la proposition. On peut donc appliquer ce qui précède et définir sur E (resp. E') la topologie faible $\sigma(E, E')$ (resp. $\sigma(E', E)$); nous dirons que ces topologies faibles sont *associées* à la topologie $\mathcal{T}$. La topologie $\sigma(E, E')$ est *moins fine* que $\mathcal{T}$; on aura souvent, par la suite, à distinguer les propriétés de parties de E (ou d'applications de E dans un autre espace) relatives à ces deux topologies; on fera cette distinction en accolant le qualificatif « faible » ou l'adverbe « faiblement » aux notions relatives à $\sigma(E, E')$; par exemple « ensemble *faiblement fermé* » signifiera « fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$ », « forme linéaire *faiblement continue* » signifiera « continue pour la topologie $\sigma(E, E')$ »; l'absence de ces qualificatifs signifiera qu'il s'agit de notions relatives à la topologie $\mathcal{T}$.

Le dual E' de E, *muni de la topologie* $\sigma(E', E)$, est appelé *dual faible* de E. Si A est un sous-espace vectoriel *partout dense* dans E, toute forme linéaire continue dans A se prolonge d'une manière *unique* en une forme linéaire continue dans E, et réciproquement, toute forme linéaire continue dans E donne, par restriction, une forme linéaire continue dans A. Il y a donc isomorphie des structures d'*espace vectoriel* des duals de A et de E; aussi identifie-t-on d'ordinaire ces duals, en tant qu'espaces vectoriels (non topologiques); nous allons voir par contre ci-dessous (§ 6) que, si $A \neq E$, les topologies faibles $\sigma(E', E)$ et $\sigma(E', A)$ sont *distinctes*.

Appliquée à un sous-espace vectoriel quelconque A de E, cette remarque montre que les duals de A et de son *adhérence* $\overline{A}$ peuvent être *identifiés* (en tant qu'espaces vectoriels *non topologiques*).

6. Reprenons les espaces vectoriels E, E' considérés au paragraphe 4; une fois E muni de la topologie $\sigma(E, E')$, c'est un espace localement convexe, dont on peut donc considérer le *dual*, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues pour la topologie $\sigma(E, E')$; nous allons voir qu'on retrouve ainsi (à une isomorphie près) l'espace E' lui-même; en d'autres termes :

Théorème 2. — *Les seules formes linéaires continues dans* E *pour la topologie* $\sigma(E, E')$, *sont les formes* $B_{x'}$.

En effet, soit u une forme linéaire continue dans E; d'après la condition de continuité (§ 3), il existe des points x'_i en nombre fini ($1 \leqq i \leqq n$) tels que, pour tout $x \in E$

$$|u(x)| \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq n} |B(x, x'_i)|.$$

Il en résulte en particulier que, pour tout x annulant simultanément les n formes linéaires $B_{x'_i}$, on a $u(x) = 0$; d'après le théorème 1 (§ 2), il existe n scalaires λ_i tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{x'_i},$$

donc

$$u = B_{y'},$$

où

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i,$$

ce qui établit le théorème.

Corollaire. — *Soit* F' *un sous-espace vectoriel de* E', *telle que la restriction à* F' *de la forme bilinéaire* B *satisfasse encore à la condition* (D_{II}); *si* F' *est distinct de* E', *la topologie* $\sigma(E, F')$ *est strictement moins fine que* $\sigma(E, E')$.

Il est évident que $\sigma(E, F')$ est moins fine que $\sigma(E, E')$, tout voisinage de O pour la première de ces topologies étant un voisinage de O pour la seconde. Si ces deux topologies étaient identiques, toute forme linéaire sur E, continue pour l'une, serait continue pour l'autre; d'après le théorème 2, appliqué à $\sigma(E, F')$, pour tout $x' \in E'$, il existerait donc $y' \in F'$ tel que $B_{x'} = B_{y'}$, donc on aurait $B(x, x' - y') = 0$ pour tout $x \in E$; mais d'après (D_I), cela entraîne $y' = x'$, donc $F' = E'$, contrairement à l'hypothèse.

7. Lorsque E est un espace localement convexe (dont on désignera par $\mathcal{T}$ la topologie), et E' son dual, on obtient directement le théorème 2 sans faire le raisonnement général ci-dessus : en effet, toute forme linéaire faiblement continue est continue pour la topologie $\mathcal{T}$, puisque cette dernière est plus fine que $\sigma(E, E')$; elle est donc de la forme $B_{x'}$, d'après la définition de la forme bilinéaire B dans ce cas. Il y a donc *identité* entre les formes linéaires continues (pour $\mathcal{T}$) et les formes linéaires faiblement continues.

Déduisons de ce fait quelques conséquences qui nous seront utiles par la suite :

THÉORÈME 3. — *Dans un espace localement convexe, tout sous-espace vectoriel fermé est faiblement fermé.*

D'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3), il suffit de le démontrer pour un hyperplan fermé; un tel hyperplan est de la forme $\overset{-1}{u}(0)$, où u est une forme linéaire continue; comme u est aussi faiblement continue, $\overset{-1}{u}(0)$ est faiblement fermé.

Il y a donc *identité* entre les sous-espaces vectoriels fermés (pour $\mathcal{T}$) et les sous-espaces vectoriels faiblement fermés.

THÉORÈME 4. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe* E (de topologie $\mathcal{T}$); *soit* E' *le dual de* E.

a. Le dual de A *est le même, qu'on munisse* A *de la topologie induite par* $\mathcal{T}$, *ou de la topologie induite par* $\sigma(E, E')$.

b. Si A *est fermé, le dual de l'espace quotient* E/A *est le même, qu'on munisse* E/A *du quotient par* A *de la topologie* $\mathcal{T}$, *ou du quotient par* A *de la topologie* $\sigma(E, E')$.

La première partie résulte de ce que toute forme continue sur A (pour l'une des topologies qu'on considère) est, d'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3), la restriction d'une forme linéaire définie dans E, et continue pour la topologie correspondante. De même, si φ désigne l'application canonique de E sur E/A, pour qu'une forme linéaire u sur E/A soit continue (pour l'une des topologies quotients considérées), il faut et il suffit que $u \circ \varphi$ soit continue dans E pour la topologie correspondante; d'où la seconde partie du théorème.

8. Revenons au cas général considéré au paragraphe 4. Nous dirons qu'un élément $x \in E$ et un élément $x' \in E'$ sont *orthogonaux* si $B(x, x') = 0$.

Soit M une partie quelconque de E; nous désignerons par $M^\star$ l'ensemble des $x' \in E'$ qui sont orthogonaux à *tous* les $x \in M$; si l'on remarque que l'ensemble des $x' \in E'$ orthogonaux à un élément $x \in E$ est l'*hyperplan fermé* défini par l'équation $B_x(x') = 0$, on voit que $M^\star$ est un *sous-espace vectoriel fermé*, intersection de ces hyperplans, lorsque x parcourt M. On dira que $M^\star$ est le *sous-*

espace vectoriel orthogonal à M. Il est clair que, si M et N sont deux parties de E telles que $M \subset N$, on a $N^\star \subset M^\star$.

Pour toute partie M′ de E′, on définit de même le *sous-espace vectoriel* $M'^\star$ *orthogonal à* M′, comme l'ensemble des $x \in E$ orthogonaux à *tous* les $x' \in M'$; c'est un sous-espace vectoriel *fermé* dans E.

THÉORÈME 5. — *Pour toute partie* M *de* E, *l'ensemble* $(M^\star)^\star = M^{\star\star}$ *est le sous-espace vectoriel fermé engendré par* M; *on a* $M^\star = M^{\star\star\star}$.

En effet, soit V le sous-espace vectoriel fermé engendré par M; comme $M^{\star\star}$ est un sous-espace vectoriel fermé contenant M, on a $V \subset M^{\star\star}$. D'autre part, soit x_0 un point n'appartenant pas à V; d'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3), il existe un hyperplan fermé contenant V et ne contenant pas x_0; d'après le théorème 2, il existe donc $x'_0 \in E'$ orthogonal à tous les éléments de V (et en particulier à tous les éléments de M) mais non à x_0, ce qui prouve que x_0 n'appartient pas à $M^{\star\star}$, et achève la démonstration.

9. Soit A un sous-espace vectoriel de E; nous allons étudier la topologie induite sur A par $\sigma(E, E')$, et le *dual* A′ de l'espace localement convexe obtenu en munissant A de cette topologie induite.

THÉORÈME 6. — *La topologie* $\sigma(A, A')$ *est identique à la topologie induite sur* A *par* $\sigma(E, E')$.

En effet, d'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3), toute forme linéaire continue sur A (muni de la topologie induite par $\sigma(E, E')$) est la restriction à A d'une forme linéaire continue dans E; le théorème résulte alors du théorème 2 et de la définition des voisinages de O pour la topologie $\sigma(A, A')$.

Examinons maintenant la structure de A′. Tout d'abord, en tant qu'espace vectoriel *non topologique*, A′ est *isomorphe à l'espace quotient* $E'/A^\star$. En effet, si u' est une forme linéaire continue dans A, il existe $x' \in E'$ tel que u' soit la restriction à A de la forme linéaire $B_{x'}$; en outre, si x' et y' sont deux points de E′ ayant cette propriété, on a $B(x, x') = B(x, y')$ pour tout $x \in A$, autrement dit, $y' - x'$ est *orthogonal* à A. Réciproquement, si $\overline{x'}$ est une classe (modulo $A^\star$) dans E′, et x', y' deux points quelconques appartenant à $\overline{x'}$, les restrictions à A des formes linéaires $B_{x'}$ et $B_{y'}$ sont identiques.

On a vu (§ 5) que A′ peut être identifié au dual de l'*adhérence* $\overline{A}$ de A.

THÉORÈME 7. — *L'espace vectoriel* A′ *muni de la topologie* $\sigma(A', \overline{A})$, *est isomorphe à l'espace quotient* $E'/A^\star$, *muni de la topologie quotient par* $A^\star$ *de* $\sigma(E', E)$.

D'après la définition de la topologie quotient d'une topologie d'espace localement convexe (§ 3), on obtiendra, de la façon suivante, un système fondamental de voisinages de O dans $E'/A^\star$: on choisit arbitrairement un nombre quelconque *n* de points x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ de E, et on considère l'ensemble $W(x_1, \ldots, x_n)$ des classes $\overline{x}'$ (mod $A^\star$) telles que, pour *un* x' appartenant à la classe $\overline{x}'$, on ait $\sup_{1 \leqq i \leqq n} |B(x_i, x')| \leqq 1$. Nous allons d'abord prouver qu'on obtient un système fondamental de voisinages en ne considérant que les $W(x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquels *tous les x_i appartiennent à* $\overline{A}$; tout revient à montrer qu'un ensemble $W(x_1, \ldots, x_n)$ quelconque contient un $W(y_1, \ldots, y_p)$, où les y_i appartiennent à $\overline{A}$. Soit G le sous-espace vectoriel (à n dimensions au plus) engendré par les x_i; G est somme directe de $G \cap \overline{A}$ et d'un sous-espace H. Soit $y_1, \ldots, y_p$ une base de $G \cap \overline{A}$, $z_1, \ldots, z_q$ une base de H, et soit

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} y_j + \sum_{k=1}^{q} \mu_{ik} z_k;$$

on peut toujours supposer que les y_j ont été choisis de sorte que

$$\sum_{j=1}^{p} |\lambda_{ij}| \leqq 1 \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Supposons alors que l'on ait $|B(y_j, x')| \leqq 1$ pour $1 \leqq j \leqq p$; pour chaque valeur de l'indice k $(1 \leqq k \leqq q)$, il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach, un élément z'_k de E' orthogonal à $\overline{A}$ et aux z_h d'indice $h \neq k$, et tel que $B(z_k, z'_k) = B(z_k, x')$; si l'on pose

$$z' = \sum_{k=1}^{q} z'_k,$$

z' est orthogonal à $\overline{A}$, et l'on a

$$B(z_k, z') = B(z_k, x'), \qquad \text{pour } 1 \leqq k \leqq q;$$

on en conclut, d'après le choix des y_j, que $|B(x_i, x' - z')| \leqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq n$, et comme $x' - z'$ appartient à la même classe (mod $A^\star$) que x', la proposition est démontrée.

Cela étant, si les x_i appartiennent à $\overline{A}$, la valeur de $B(x_i, x')$ est *la même* pour *tous* les points x' d'une même classe (mod $A^\star$), et elle est égale à $u'(x_i)$, où u' est la forme linéaire continue dans $\overline{A}$ qui correspond à cette classe d'équivalence; d'où l'isomorphisme annoncé, en vertu de la définition des voisinages de O pour la topologie $\sigma(A', \overline{A})$.

Il résulte du corollaire du théorème 2 que, si A *n'est pas fermé*, le dual A' de A, muni de la topologie $\sigma(A', A)$, *n'est pas isomorphe* à l'espace quotient $E'/A^\star$.

THÉORÈME 8. — *Si* A *est un sous-espace vectoriel fermé de* E, *le dual faible* F' *de l'espace quotient* $F = E/A$ *est isomorphe au sous-espace* $A^\star$ *de* E', *et la topologie* $\sigma(F, F')$ *est identique au quotient par* A *de la topologie* $\sigma(E, E')$.

Posons $B = A^\star$; le dual B' du sous-espace B de E', muni de la topologie

$\sigma(B', B)$, est isomorphe à l'espace quotient E/B^*, d'après le théorème 7 appliqué à E' et B, et en remarquant que B est fermé; comme $B^* = A^{**} = A$, puisque A est fermé (th. 5), B' est isomorphe à $F = E/A$; donc (th. 2 et 6) le dual faible F' de F est isomorphe à B, et la topologie quotient de $\sigma(E, E')$ par A est identique à $\sigma(F, F')$.

10. Considérons maintenant deux couples d'espaces vectoriels, E, E' et F, F'; supposons données une forme bilinéaire B définie dans $E \times E'$, et une forme bilinéaire C définie dans $F \times F'$, ces deux formes satisfaisant aux axiomes (D_I) et (D_{II}). Munissons E et E' des topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$, F et F' des topologies $\sigma(F, F')$ et $\sigma(F', F)$, et considérons une application linéaire u de E dans F; conformément aux conventions du paragraphe 5, nous dirons que u est *faiblement continue* si elle est continue pour les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F, F')$.

THÉORÈME 9. — *Pour que u soit faiblement continue, il faut et il suffit que, pour tout $y' \in F'$, l'application $x \to C\big(u(x), y'\big)$ soit une forme linéaire continue dans* E.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la vérifiée, et considérons un voisinage quelconque de O dans F, défini par la condition $\sup\limits_{1 \leqq i \leqq n} |C(y, y'_i)| \leqq 1$; son image réciproque par u est l'ensemble défini par la relation $\sup\limits_{1 \leqq i \leqq n} \left|C\big(u(x), y'_i\big)\right| \leqq 1$; l'hypothèse, et le théorème 2, entraînent que cet ensemble est un voisinage de O dans E, d'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Pour que u soit faiblement continue, il faut et il suffit que, pour tout hyperplan fermé* H *de* F, $\overset{-1}{u}(H)$ *soit fermé dans* E.

En effet, supposons cette condition remplie, et soit y' un point quelconque de F', H l'hyperplan fermé de F défini par l'équation $C(y, y') = 0$; $\overset{-1}{u}(H)$ est défini par l'équation $C\big(u(x), y'\big) = 0$; s'il est fermé, la forme linéaire $x \to C\big(u(x), y'\big)$ est continue, et le théorème 9 s'applique.

Si u est faiblement continue, il résulte des théorèmes 2 et 9 qu'à tout $y' \in F'$ correspond un $x' \in E'$ et un seul tel que $C\big(u(x), y'\big) = B(x, x')$; la donnée de l'application linéaire u de E dans F définit donc une *application de* F' *dans* E', que nous désignerons par u', et appellerons la *transposée* de u; il est immédiat que u' est une application *linéaire*; elle satisfait à l'identité fondamentale

$$B\big(x, u'(y')\big) = C\big(u(x), y'\big). \tag{1}$$

Inversement, cette identité *caractérise* u' de la manière suivante : si v est une application de F' dans E', telle que l'on ait identiquement $B(x, v(y')) = C(u(x), y')$, on tire de cette relation et de (1) que $B(x, v(y') - u'(y')) = 0$ quels que soient x et y', d'où, d'après (D_I), $v(y') - u'(y') = 0$ quel que soit y', c'est-à-dire $v = u'$.

THÉORÈME 10. — *La transposée u' d'une application linéaire continue u de* E *dans* F, *est une application continue de* F' *dans* E'.

En effet, d'après (1), l'application $y' \to B(x, u'(y'))$ est une forme linéaire continue dans F', et le théorème résulte du théorème 9.

On peut donc définir la *transposée* de l'application linéaire continue u'; *cette transposée n'est autre que u* (en d'autres termes, la relation entre u et u' est *symétrique*). En effet, si v est la transposée de u', on a, d'après (1), l'identité $C(u(x), y') = C(v(x), y')$, d'où, en vertu de (D_{II}), $u(x) = v(x)$ quel que soit $x \in E$, c'est-à-dire $u = v$.

11. L'identité fondamentale (1) entraîne une série de conséquences, par où se relient étroitement les propriétés d'une application linéaire u et de sa transposée u'.

THÉORÈME 11. — *On a*

$$\left(u(E)\right)^{\star} = \overset{-1}{u'}(O), \qquad \left(\overset{-1}{u'}(O)\right)^{\star} = \overline{u(E)}.$$

En effet, si $y' \in F'$ est orthogonal à $u(E) \subset F$, on a, d'après (1),

$$B(x, u'(y')) = 0 \qquad \text{quel que soit } x \in E,$$

donc, d'après (D_I), $u'(y') = O$, et réciproquement; on a donc $\left(u(E)\right)^{\star} = \overset{-1}{u'}(O)$, et la relation $\left(\overset{-1}{u'}(O)\right)^{\star} = \overline{u(E)}$ en résulte, en tenant compte du théorème 5.

COROLLAIRE. — *Pour que u soit une application biunivoque de* E *dans* F, *il faut et il suffit que $u'(F')$ soit partout dense dans* E'.

En effet, la condition pour que u soit biunivoque est que $\overset{-1}{u}(O)$ se réduise à O; cette condition équivaut à $\left(\overset{-1}{u}(O)\right)^{\star} = E'$; mais le théorème 11, appliqué en intervertissant les rôles de u et u', prouve que $\left(\overset{-1}{u}(O)\right)^{\star} = \overline{u'(F')}$, d'où le corollaire.

12. Cherchons maintenant les propriétés de la transposée u' qui équivalent à l'existence d'une solution (au moins) de l'*équation linéaire* $u(x) = y_0$, où y_0 est un élément donné de F. Cela signifie que l'on a $y_0 \in u(E)$; si l'on pose $G' = \overset{-1}{u'}(O)$,

il résulte du théorème 11 que y_0 doit être *orthogonal à* G'. Inversement, supposons cette condition remplie; alors la forme linéaire $C(y_0, y')$ a la même valeur pour deux points appartenant à la même classe (mod. G'); mais ces classes ne sont autres que les ensembles $\overset{-1}{u'}(x')$, où x' parcourt $u'(F')$; si l'on désigne par $H_{y_0}(x')$ la valeur commune de $C(y_0, y')$ pour tous les points y' d'une même classe $\overset{-1}{u'}(x')$, l'application $x' \rightarrow H_{y_0}(x')$ est une *forme linéaire* définie dans $u'(F')$.

THÉORÈME 12 [1]. — *Pour que l'équation* $u(x) = y_0$ *admette une solution au moins, il faut et il suffit que* y_0 *soit orthogonal à* $\overset{-1}{u'}(O)$, *et que la forme linéaire* H_{y_0}, *définie dans* $u'(F')$, *soit continue dans ce sous-espace.*

La condition est *nécessaire* : en effet, si $y_0 = u(x_0)$, on a, pour tout $y' \in \overset{-1}{u'}(x')$, d'après (1),

$$H_{y_0}(x') = C(y_0, y') = C\big(u(x_0), y'\big) = B\big(x_0, u'(y')\big) = B(x_0, x'),$$

donc H_{y_0} est la restriction à $u'(F')$ de la forme linéaire continue B'_{x_0}. La condition est *suffisante*; en effet, si elle est vérifiée, il existe, d'après le théorème 2 et le théorème de Hahn-Banach, un $x_0 \in E$ tel que H_{y_0} soit la restriction à $u'(F')$ de la forme linéaire B'_{x_0}; donc, pour tout $y' \in F'$, on a, d'après (1),

$$C(y_0, y') = H_{y_0}\big(u'(y')\big) = B\big(x_0, u'(y')\big) = C\big(u(x_0), y'\big),$$

d'où, en vertu de (D_{II}), $y_0 = u(x_0)$.

THÉORÈME 13. — *Si* $u(E)$ *est fermé dans* F, *pour que l'équation* $u(x) = y_0$ *admette au moins une solution, il faut et il suffit que* y_0 *soit orthogonal à* $\overset{-1}{u'}(O)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 11, puisqu'alors $u(E) = \overline{u(E)}$. On peut ajouter que la condition « y_0 orthogonal à $\overset{-1}{u'}(O)$ » n'est une condition suffisante pour l'existence des solutions de $y_0 = u(x)$ *que si* $u(E)$ *est fermé*; comme $\overset{-1}{u'}(O)$ est fermé, cette condition est en effet, d'après le théorème 5, *équivalente* à $y_0 \in \overline{u(E)}$.

13. Nous allons maintenant obtenir la propriété de u' qui équivaut à la propriété, pour $u(E)$, d'être *fermé* dans F (propriété qui vient d'intervenir dans le théorème 13).

THÉORÈME 14. — *Pour que* $u(E)$ *soit fermé dans* F, *il faut et il suffit que* u' *soit un homomorphisme de* F' *sur* $u'(F')$.

Posons $G' = \overset{-1}{u'}(O)$; l'application u' s'écrit $u' = g \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de F' sur l'espace quotient F'/G', et g une application *continue* et *biuni-*

voque de F'/G' sur $u'(F')$ (§ 3). Cherchons à quelle condition g est *bicontinue* : il faut et il suffit pour cela que tout voisinage de O dans F'/G' soit l'image réciproque par g d'un voisinage de O dans $u'(F')$.

Or, soit V' un voisinage de O dans $u'(F')$, défini en prenant un nombre fini de points $x_i \in E$, et en considérant l'ensemble des $x' \in u'(F')$ tels que $\sup_{1 \leqq i \leqq n} |B(x_i, x')| \leqq 1$; comme $x' = g(\overline{y'})$, avec $\overline{y'} \in F'/G'$, l'image réciproque par g de V' est l'ensemble des classes $\overline{y'}$ telles que $\sup_{1 \leqq i \leqq n} \left|B\left(x_i, g(\overline{y'})\right)\right| \leqq 1$; d'après l'identité (1), et la définition de g, on a

$$B\left(x_i, g(\overline{y'})\right) = B\left(x_i, u'(y')\right) = C\left(u(x_i), y'\right),$$

pour tout y' appartenant à la classe $\overline{y'}$. Or, si l'on pose $K' = F'/G'$, on a vu (théorème 8) que le dual K de K' est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à $G'^{\star} = \overline{u(E)}$; ce qui précède prouve que l'image réciproque, par g, de la topologie de $u'(F')$ est la topologie $\sigma(K', K_1)$, où K_1 est la partie de K qui correspond à la partie $u(E)$ de $\overline{u(E)}$ dans l'isomorphie précédente. D'autre part, la topologie de l'espace quotient F'/G' est identique à $\sigma(K', K)$; pour qu'elle soit identique à $\sigma(K', K_1)$, il faut et il suffit que $K = K_1$ (corollaire du théorème 2), donc que $u(E) = \overline{u(E)}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Pour que u soit une application de* E *sur* F, *il faut et il suffit que u' soit un isomorphisme de* F' *sur* $u'(F')$.

En effet, si $u(E) = F$, il résulte du corollaire du théorème 11 (appliqué en intervertissant les rôles de u et u'), que u' est une application *biunivoque* de F' sur $u'(F')$; comme $u(E)$ est en outre fermé, u' est un *homomorphisme* de F' sur $u'(F')$, donc un *isomorphisme* de F' sur $u'(F')$. Réciproquement, si u' est un isomorphisme de F' sur $u'(F')$, $u(E)$ est fermé d'après le théorème 14, et partout dense dans F d'après le corollaire du théorème 11; donc $u(E) = F$.

14. Le critère de résolubilité algébrique d'une équation linéaire $f(x) = y_0$, rappelé dans l'Introduction (§ 1), se déduit facilement du théorème 13; il suffit en effet de prendre pour E' et F' les *duals algébriques* de E et F respectivement; alors toute forme linéaire sur E (resp. F) est continue, donc (§ 3) tout sous-espace vectoriel de E (resp. F) est fermé, et le théorème 13 est par suite applicable.

15. Considérons maintenant deux espaces *localement convexes* E et F, dont nous désignerons les topologies respectives par $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$; soient E' et F' les duals respectifs de E et F, relatifs à ces topologies (§ 5). Pour appliquer les résultats qui précèdent à une application linéaire u de E dans F, il s'agira de savoir passer des propriétés de u relatives aux topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$, aux propriétés de u

relatives aux topologies *faibles* $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F, F')$, puisque ce sont ces dernières qui interviennent dans ce qui précède. Nous obtiendrons au Chapitre II des résultats très précis dans cette direction, lorsque $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{U}$ sont des topologies d'espace *normé*. Dans le cas général, nous démontrerons seulement le théorème suivant :

Théorème 15. — *Si u est continue pour les topologies $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{U}$, u est faiblement continue : si u est un homomorphisme de* E *dans* F *pour les topologies $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{U}$, u est un homomorphisme faible de* E *dans* F.

La première partie résulte du théorème 9 : pour tout $y' \in F'$, $y'(y) = C(y, y')$ est continue dans F, muni de la topologie $\mathfrak{U}$; donc $C\big(u(x), y'\big)$ est continue dans E, muni de la topologie $\mathfrak{G}$, et par suite (§ 7) est une forme linéaire faiblement continue; d'après le théorème 9, u est faiblement continue.

Pour démontrer la seconde partie, considérons d'abord le cas où u est un *isomorphisme* de E sur le sous-espace $G = u(E)$ de F; les duals faibles E′ de E (muni de $\mathfrak{G}$) et G′ de G (muni de la topologie induite par $\mathfrak{U}$) sont donc isomorphes. et u est un isomorphisme de la topologie $\sigma(E. E')$ sur $\sigma(G, G')$; mais, d'après le théorème 4 et le théorème 6, $\sigma(G, G')$ est la topologie induite sur G par $\sigma(F, F')$, d'où la proposition dans ce cas.

En second lieu, considérons le cas où u est l'*application canonique* de E sur un espace quotient $F = F/A$ de E par un sous-espace vectoriel fermé A; $\mathfrak{U}$ est donc la topologie quotient de $\mathfrak{G}$ par A. Il suffit de prouver que, si F′ est le dual de F, la topologie quotient par A de $\sigma(E, E')$ est identique à $\sigma(F, F')$; or (th. 4) F′ est encore le dual de F, quand on munit F de la topologie quotient par A de $\sigma(E, E')$; la proposition résulte alors du théorème 8.

Pour établir enfin la seconde partie du théorème dans le cas général, il suffit d'observer que ce cas se ramène par définition aux deux cas particuliers qui viennent d'être envisagés (§ 3).

CHAPITRE II.

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES NORMÉS [8].

16. Soit E un *espace normé* (§ 3); son *dual* E′ est, par définition (§ 5), l'ensemble des *formes linéaires continues* dans E; comme le corps des nombres

---

[8] Comme nous l'avons déjà signalé (Introduction, § 1), à l'exception du théorème 20, aucun des résultats de ce Chapitre ne doit être considéré comme nouveau; les principaux sont dus à M. Banach (*loc. cit.*) et à M. Hausdorff [*Zur Theorie der linearen Räume* (*J. de Crelle*, 167, 1932, p. 294-311)]. Ce sont d'ailleurs ces résultats qui nous ont servi de guides dans la théorie générale exposée au Chapitre I; en particulier, la *forme* des principaux théorèmes que nous avons obtenus sur les topologies faibles est calquée sur les théorèmes analogues de M. Hausdorff pour les topologies d'espace normé (bien que le principe de leur démonstration soit tout à fait différent).

complexes est un espace normé particulier, le dual de E apparaît comme un cas particulier de l'*espace vectoriel des applications linéaires continues* de l'espace normé E dans un espace normé F; nous désignerons cet espace par $\mathcal{L}(E, F)$ et commencerons par en rappeler certaines propriétés qui nous serviront dans toute la suite de ce Chapitre.

On sait (§ 3) que, pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $a \geqq 0$ tel que $\|u(x)\| \leqq a \,.\, \|x\|$ pour tout $x \in E$; le plus petit nombre a pour lequel cette identité a lieu se note $\|u\|$; c'est une *norme* dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$; quand on considère $\mathcal{L}(E, F)$ comme un espace normé, c'est toujours de cette norme qu'il s'agit. Muni de cette structure d'espace normé, $\mathcal{L}(E, F)$ est *complet* si F est un espace normé complet [9]. Si A est un sous-espace vectoriel *partout dense* dans E, toute application linéaire continue u de A dans F se prolonge d'une manière unique en une application linéaire continue $\overline{u}$ de E dans F; en outre, la norme de u est égale à celle de $\overline{u}$; autrement dit, les *espaces normés* $\mathcal{L}(A, F)$ et $\mathcal{L}(E, F)$ sont *isomorphes*, ce qui permet de les *identifier*; en particulier, on peut identifier les espaces normés $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(\hat{E}, F)$ où $\hat{E}$ est le *complété* de E.

Lorsque E est *complet*, on peut caractériser les ensembles *bornés* (§ 3) dans l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$ grâce au théorème fondamental suivant, de MM. Banach et Steinhaus [10] :

THÉORÈME 16. — *Si* E *est complet, pour qu'une partie* A *de l'espace normé* $\mathcal{L}(E, F)$ *soit bornée, il faut et il suffit que, pour tout* $x \in E$,

$$\sup_{u \in A} \|u(x)\| < +\infty.$$

17. L'application des définitions précédentes au cas où F est le corps des nombres complexes conduit à définir, pour toute forme linéaire continue x' sur l'espace normé E, sa *norme* $\|x'\|$, égale par définition à $\sup\limits_{\|x\|=1} |x'(x)|$, d'où l'inégalité

$$|B(x, x')| = |x'(x)| \leqq \|x\| . \|x'\| \tag{2}$$

valable quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$. Muni de la structure d'espace normé définie par cette norme, E' est appelé le *dual fort* de E; c'est un espace normé *complet*. Si A est un sous-espace vectoriel partout dense dans l'espace normé E,

---

(9) F. HAUSDORFF, *loc. cit.*, p. 299.

(10) S. BANACH et H. STEINHAUS, *Fund. Math.*, 9, 1927, p. 57; *cf.* aussi F. HAUSDORFF, *loc. cit.*, p. 305, où l'on trouvera des indications bibliographiques sur des cas particuliers de ce théorème, démontrés antérieurement par O. Toeplitz et E. Helly.

les *duals forts* de A et de E sont *isomorphes* [on notera dès à présent la différence avec ce qui se passe pour les duals *faibles* de A et de E (§§ 5 et 6)].

D'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3) et la définition de la norme d'une forme linéaire, on a la proposition suivante [11] : si G est un sous-espace vectoriel d'un espace normé E, et f une forme linéaire continue définie dans G, il existe une forme linéaire $\bar{f}$, définie et continue dans E, prolongeant f, et telle que *la norme de* $\bar{f}$ *soit égale à celle de* f.

On déduit de ce résultat la structure des duals forts d'un *sous-espace vectoriel* et d'un *espace quotient* d'un espace normé :

Théorème 17. — *Soit* G *un sous-espace vectoriel d'un espace normé* E, $G^\star$ *le sous-espace du dual* E′ *orthogonal* (§ 8) *à* G.

a. Le dual fort du sous-espace normé G *est isomorphe à l'espace quotient* $E'/G^\star$ *du dual fort* E′ *de* E.

b. Si G *est fermé, le dual fort de l'espace quotient* E/G *est isomorphe au sous-espace normé* $G^\star$ *du dual fort* E′ *de* E.

a. On sait (§ 9) que le dual G′ de G est isomorphe à $E'/G^\star$ en tant qu'espace vectoriel non topologique; dans cette isomorphie, à une forme linéaire continue $f \in G'$ correspond dans $E'/G^\star$ la classe (mod $G^\star$) des formes linéaires continues dans E et prolongeant f; pour toute forme x' de cette classe, on a évidemment $\|x'\| \geqq \|f\|$, et, d'autre part, on a vu ci-dessus qu'il existe une forme $\bar{f}$ de cette classe telle que $\|\bar{f}\| = \|f\|$; on peut donc écrire $\|f\| = \inf \|x'\|$, la borne inférieure étant prise dans la classe (mod $G^\star$) qui correspond à f; cette borne inférieure étant précisément (§ 3) la norme de cette classe dans $E'/G^\star$, l'isomorphie entre G′ et $E'/G^\star$ *conserve les normes*, d'où la première partie du théorème.

b. Posons $F = E/G$; on sait (th. 8) que le dual F′ est isomorphe à $G^\star$, en tant qu'espace vectoriel non topologique. A une forme linéaire $u \in F'$ correspond dans cette isomorphie une forme linéaire $x' \in G^\star$ telle que, pour toute classe $\bar{x} \in F$, et tout élément x de cette classe, on ait $u(\bar{x}) = x'(x)$. D'après (2), on a

$$|u(\bar{x})| \leqq \|x'\| . \|x\| \qquad \text{quel que soit } x \in \bar{x},$$

d'où, en prenant la borne inférieure du second membre lorsque x parcourt $\bar{x}$, $|u(\bar{x})| \leqq \|x'\| . \|\bar{x}\|$, d'après la définition de la norme dans F (§ 3); d'après la définition de la norme de u, on a donc $\|u\| \leqq \|x'\|$. D'autre part, $\|u\|$ est la borne supérieure de $|x'(x)|$ lorsque x parcourt l'ensemble des points tels que

[11] S. Banach, *Opérations linéaires* (Warszawa, 1931), p. 55-56.

$\inf_{y \in G} \|x+y\| \leqq 1$; comme cet ensemble contient la sphère $\|x\| = 1$, on a $\|x'\| \leqq \|u\|$, ce qui prouve l'égalité $\|u\| = \|x'\|$, et achève la démonstration.

18. Si E est un espace normé, *le dual fort* E″ *du dual fort* E′ de E est un espace normé complet, que nous appellerons le *bidual* de E. On peut définir un isomorphisme (que nous appellerons *isomorphisme canonique*) de l'*espace normé* E sur un *sous-espace normé* $\tilde{E}$ de E″ ; en effet, pour tout $x \in E$, l'application $x' \to x'(x)$ est une *forme linéaire définie* dans E′, et *continue* en vertu de (2), donc appartient à E″; désignons-la par $\tilde{x}$; on voit aisément, d'après la définition de la norme d'une forme linéaire, et le théorème de Hahn-Banach, que $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ (12). L'application $x \to \tilde{x}$ est donc bien un isomorphisme de la structure d'espace normé de E sur celle du sous-espace $\tilde{E}$ de E″ formé des $\tilde{x}$. Lorsque $\tilde{E} = E''$, on dit que E est un espace *réflexif;* si E a un nombre *fini* de dimensions, il est réflexif, car $\tilde{E}$ et E″ ont alors le même nombre de dimensions que E. Nous obtiendrons plus loin la condition pour qu'un espace normé soit réflexif (§ 24); notons dès maintenant qu'un espace réflexif est nécessairement complet.

19. Considérons un espace normé E. Nous allons maintenant étudier les rapports entre les topologies *faibles* $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$, et les topologies d'espace normé de E et E′; ces dernières seront appelées dans ce qui suit *topologies fortes* (elles sont *plus fines* que les topologies faibles); on accolera le qualificatif « fort » ou l'adverbe « fortement » aux notions relatives à ces topologies.

Il faut remarquer tout de suite que, sauf lorsque E est réflexif, les rapports entre $\sigma(E, E')$ et la topologie forte sur E ne sont nullement les mêmes que ceux de $\sigma(E', E)$ et de la topologie forte sur E′; cela tient au fait que, lorsque E n'est pas réflexif, $\sigma(E', E)$ *n'est pas* la topologie faible *associée* à la topologie forte de E′ (au sens du paragraphe 5), en vertu du corollaire du théorème 2; sauf mention expresse du contraire, quand nous parlerons de la topologie faible de E′, il s'agira toujours de $\sigma(E', E)$, et *non* de la topologie $\sigma(E', E'')$ associée à la topologie forte de E′.

THÉORÈME 18. — *Tout ensemble faiblement borné dans* E *est fortement borné, et réciproquement* (13).

Par définition (§ 3), pour qu'une partie A de E soit faiblement bornée, il

(12) S. BANACH, *loc. cit.*, p. 189-190.

(13) Sous cette forme générale, le théorème est démontré par N. Dunford [*Trans. Amer. Math. Soc.*, 44, 1938, p. 308 (théorème 2)] ainsi que le théorème 21 (*ibid.*, th. 3); mais le cas particulier du théorème 18 où l'ensemble considéré est dénombrable, se trouve déja dans S. Banach (*loc. cit.*, p. 80, th. 6).

faut et il suffit que, pour tout $x' \in E'$, $\sup_{x \in A} |x'(x)|$ soit *finie*. Soit $\tilde{A}$ l'image de A par l'application canonique $x \to \tilde{x}$ de E dans le bidual E''; on a donc

$$\sup_{\tilde{x} \in \tilde{A}} |\tilde{x}(x')| < +\infty.$$

Or, le théorème 16 appliqué à l'espace complet E' et au cas où F est le corps des nombres complexes, prouve que $\tilde{A}$ est *borné* dans E''; donc A est *fortement borné* dans E, ce qui prouve la première partie du théorème. La réciproque découle immédiatement de (2).

20. Du théorème 18 nous allons déduire une nouvelle caractérisation des espaces *normables* (*cf.* § 3).

THÉORÈME 19. — *Soient p et q deux normes sur un espace vectoriel* E; *pour que la topologie $\mathcal{T}_p$ définie par p soit plus fine que la topologie $\mathcal{T}_q$ définie par q, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue pour la topologie $\mathcal{T}_q$ soit continue pour la topologie $\mathcal{T}_p$.*

La condition est évidemment nécessaire, Réciproquement, supposons-la vérifiée, et considérons le voisinage V de O pour la topologie $\mathcal{T}_p$, formé des $x \in E$ tels que $p(x) \leqq 1$; toute forme linéaire x' continue pour $\mathcal{T}_q$ étant continue pour $\mathcal{T}_p$, on a

$$\sup_{x \in V} |x'(x)| < +\infty;$$

donc V est *faiblement borné* pour la topologie $\mathcal{T}_q$, et par suite aussi *fortement borné* d'après le théorème 18; mais cela signifie que tout voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_q$ contient un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_p$, donc que $\mathcal{T}_p$ est plus fine que $\mathcal{T}_q$.

COROLLAIRE. — *Si le dual de* E *est le même pour les topologies $\mathcal{T}_p$ et $\mathcal{T}_q$, ces deux topologies sont identiques.*

THÉORÈME 20. — *Pour qu'un espace localement convexe* E *soit normable, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de* O *faiblement borné dans* E ([14]).

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la vérifiée, et soit V un voisinage de O faiblement borné; on peut supposer que V est l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leqq 1$, où p est une des *semi-normes* définissant la topologie de E (§ 3). Montrons d'abord que p est une *norme* : en effet, si

---

([14]) *Cf.* J. V. WEHAUSEN, *loc. cit.*, théorème 10, p. 163 : M. Wehausen démontre, sous l'hypothèse superflue qu'il y a un *système fondamental* de voisinages faiblement bornés, que toute semi-norme correspondant à un de ces voisinages est une norme; il en conclut seulement que le dual de E est identique au dual de chacun des espaces normés qu'on obtient en munissant E de ces normes, mais n'aperçoit pas que la topologie de E est une topologie d'espace normé.

l'on avait $p(x_0) = 0$ pour $x_0 \neq 0$, il existerait une semi-norme q telle que $q(x_0) \neq 0$; d'après le théorème de Hahn-Banach (§ 3), il existerait une forme linéaire f continue dans E et telle que $f(x_0) = q(x_0) \neq 0$. Comme, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda x_0 \in V$, on aurait $\sup_{x \in V} |f(x)| = +\infty$, contrairement à l'hypothèse.

On peut alors supposer que la topologie $\mathcal{T}$ de E est définie par un système de semi-normes qui sont toutes $\geqq p$ (si cette condition n'était pas remplie, on aurait un système équivalent en prenant les enveloppes supérieures de p et des semi-normes données); un tel système est donc composé de *normes*. Soit q l'une d'elles, $\mathcal{T}_q$ et $\mathcal{T}_p$ les topologies d'espace normé définies respectivement par q et p. Par hypothèse, $\mathcal{T}_q$ est *plus fine* que $\mathcal{T}_p$; d'autre part, $\mathcal{T}_q$ est *moins fine* que la topologie $\mathcal{T}$; donc toute forme linéaire continue pour $\mathcal{T}_q$ est continue pour $\mathcal{T}$; d'après l'hypothèse, V est donc *faiblement borné* pour $\mathcal{T}_q$, et par suite *fortement borné* pour cette topologie (th. 18); mais le raisonnement du théorème 19 prouve que cette propriété entraîne que $\mathcal{T}_q$ est *moins fine* que $\mathcal{T}_p$, et par suite lui est *identique*. Cela s'applique à toutes les semi-normes définissant la topologie $\mathcal{T}$; toutes ces semi-normes étant des normes *équivalentes à p*, $\mathcal{T}$ est identique à $\mathcal{T}_p$, d'où le théorème.

21. Passons aux relations entre la topologie forte sur le dual E' et la topologie faible $\sigma(E', E)$. On notera tout d'abord que, dans E', il existera des sous-espaces vectoriels *fortement fermés*, mais *non faiblement fermés*, sauf si E est réflexif : en effet, si E n'est pas réflexif, il existe des formes linéaires sur E' qui sont fortement continues, mais non faiblement continues; et réciproquement, l'existence de telles formes linéaires entraîne que E n'est pas réflexif. Il n'y a donc pas ici d'analogue du théorème 3.

Le théorème correspondant au théorème 18 est le suivant :

THÉORÈME 21 ([13]). — *Tout ensemble fortement borné dans* E' *est faiblement borné; si* E *est complet, tout ensemble faiblement borné dans* E' *est fortement borné.*

La première partie résulte immédiatement de l'inégalité (2); la seconde est un cas particulier du théorème 16, appliqué au cas où l'espace F est le corps des nombres complexes.

La seconde partie du théorème 21 est en défaut lorsque E n'est pas complet. Par exemple, soit E le sous-espace de l'espace (c) des suites (ξ_n) tendant vers une limite, formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls; on voit sans peine que le dual E' de E est l'espace (l) des suites (α_n) telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, et que, si $x = (\xi_n)$, $x' = (\alpha_n)$, $B(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ et $\|x'\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. L'espace E n'est pas complet; considérons dans E' la suite des points (x'_m), où

$x'_m = (\alpha_{mn})$, avec $\alpha_{mn} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}$; on voit que $\|x'_m\|$ est la somme des m premiers termes de la série harmonique, donc la suite (x'_m) n'est pas fortement bornée; mais comme α_{mn} tend vers une limite finie lorsque, n restant fixe, m augmente indéfiniment, la suite (x'_m) est faiblement bornée.

22. Les théorèmes 22 à 24 qui suivent sont fondamentaux dans la théorie des espaces normés et ses applications à l'Analyse fonctionnelle; sous la forme que nous leur donnons ici, ils sont dus à M. N. Bourbaki ([15]); mais un théorème équivalent au théorème 23 avait déjà été établi par M. Banach ([16]), et ce dernier avait aussi démontré les théorèmes 22 et 24 dans le cas particulier où l'espace normé E est « séparable » (c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable partout dense dans E) ([17]).

Théorème 22. — *Dans le dual* E′ *d'un espace normé* E, *la boule fermée* S, *formée des* x' *tels que* $\|x'\| \leqq 1$, *est faiblement compacte.*

Remarquons que, d'après la définition de la topologie faible $\sigma(E', E)$, E′, muni de cette topologie, peut être considéré comme un *sous-espace* de l'espace $\mathbf{C}^E$ de toutes les fonctions complexes définies dans E, muni de la topologie *produit* ([18]) de celles de ses espaces facteurs (identiques au corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes); dire qu'une partie A de E′ est *faiblement bornée* signifie que ses projections sur les espaces facteurs de $\mathbf{C}^E$ sont des ensembles *bornés* dans $\mathbf{C}$; d'après le théorème de Tychonoff ([19]), A est donc *relativement compacte* dans l'espace $\mathbf{C}^E$. D'après le théorème 21, ce raisonnement s'applique en particulier à la boule S; le théorème sera établi si l'on prouve que S est *fermée* dans $\mathbf{C}^E$. Or, soit f un point de $\mathbf{C}^E$ adhérent à S; quels que soient x, y dans E, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un $x' \in S$ tel que

$$|f(x) - x'(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |f(y) - x'(y)| \leqq \varepsilon, \qquad |f(x+y) - x'(x+y)| \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqq 3\varepsilon,$$

et comme ε est arbitraire, $f(x+y) = f(x) + f(y)$; on montre de même que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout scalaire λ, donc que f est une forme linéaire sur E. En outre, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in S$ telle que $|f(x) - x'(x)| \leqq \varepsilon$, d'où $|f(x)| \leqq 1 + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $|f(x)| \leqq 1$, ce qui prouve que f est continue, et appartient à S, d'où le théorème.

([15]) N. Bourbaki, *C. R. Acad. Sc.*, 206, p. 1701. Nous reproduisons ici les démonstrations de ces théorèmes (qui n'ont pas été publiées) avec l'autorisation de l'auteur.

([16]) *Loc. cit.*, p. 119, lemme 2.

([17]) *Loc. cit.*, p. 123, théorème 3 et p. 189, théorème 13.

([18]) N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I, § 8 (*Actual. scient. et ind.*, n° 858, p. 42).

([19]) *Ibid.*, p. 63.

On déduit aussitôt du théorème 22, par translation, que toute boule fermée $\|x' - x'_0\| \leqq r$ dans E' est faiblement compacte.

THÉORÈME 23. — *Soit* E *un espace normé complet,* E' *son dual; pour qu'un sous-espace vectoriel* V *de* E' *soit faiblement fermé, il faut et il suffit que l'intersection de* V *et de toute boule fermée dans* E' *soit faiblement compacte.*

La nécessité de la condition résulte aussitôt du théorème 22 (que E soit ou non complet). Pour montrer qu'elle est suffisante, nous allons établir que, si elle est remplie, et si x'_0 est un point de E' n'appartenant pas à V, il existe un hyperplan faiblement fermé contenant V, mais ne contenant pas x'_0, ou encore qu'il existe $x_0 \in$ E orthogonal à V, mais non à x'_0.

Pour cela, d'après un raisonnement de M. Banach [16], il suffit d'établir le lemme suivant : *il existe une suite* (x_n) *de points de* E, *tendant fortement vers* 0, *et telle que tout point* $x' \in$ E' *satisfaisant à la relation* $\sup_n |B(x_n, x' - x'_0)| \leqq 1$ *n'appartienne pas à* V.

Soit d la distance de x'_0 à V; remarquons d'abord que $d > 0$ (c'est-à-dire que V est *fortement fermée*); en effet, l'intersection de V et d'une boule fermée S de centre x'_0 est faiblement compacte, donc faiblement fermée, et à fortiori fortement fermée; la distance de x'_0 à cette intersection est par suite > 0. Suivant toujours le raisonnement de M. Banach, nous allons voir qu'il existe un ensemble *fini* P_1 de points de E tel que tout point $x' \in$ E' satisfaisant aux relations

$$\|x' - x'_0\| \leqq d + 1, \qquad |B(x, x' - x'_0)| \leqq \frac{d}{2}\|x\|,$$

pour tout $x \in P_1$, *n'appartienne pas à* V. Supposons en effet le contraire; à tout ensemble fini F de points de E correspondrait alors un ensemble *non vide* H(F) de points x' appartenant à V et satisfaisant aux relations

$$\|x' - x'_0\| \leqq d + 1, \qquad |B(x, x' - x'_0)| \leqq \frac{d}{2}\|x\|, \qquad \text{pour tout } x \in F;$$

si F_1 et F_2 sont deux parties finies de E, on a évidemment

$$H(F_1 \cup F_2) = H(F_1) \cap H(F_2),$$

donc les H(F) formeraient une *base de filtre* $\mathfrak{B}$ dans l'intersection de V et de la boule $\|x' - x'_0\| \leqq d + 1$; cette intersection étant faiblement compacte, la base de filtre $\mathfrak{B}$ aurait un point faiblement adhérent $x'_1 \in$ V. Il en résulte en particulier que, pour tout $x \in$ E, tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie F de E, il existerait $x' \in$ H(F) tel que $|B(x, x' - x'_1)| \leqq \varepsilon$; si l'on suppose que $x \in$ F, on en déduit $|B(x, x'_1 - x'_0)| \leqq \frac{d}{2}\|x\| + \varepsilon$, et, comme ε est arbitraire, $|B(x, x'_1 - x'_0)| \leqq \frac{d}{2}\|x\|$; or, cette relation ayant lieu pour tout $x \in$ E, on en conclurait que $\|x'_1 - x'_0\| \leqq \frac{d}{2}$, contrairement à la définition de d; l'hypothèse d'où nous étions partis est donc absurde.

Par récurrence, on en déduit aisément que, pour tout entier n, il existe une partie finie P_n de E telle que tout point $x' \in E'$ satisfaisant aux relations

$$\|x' - x'_0\| \leq d + n, \quad |B(x, x' - x'_0)| \leq (d + k)\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in P_{k+1} \text{ et } 1 \leq k \leq n - 1,$$
$$|B(x, x' - x'_0)| \leq \frac{d}{2}\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in P_1,$$

n'appartienne pas à V. En divisant par $d + k$ les points de P_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots$) et en rangeant en une suite (x_n) les points de l'ensemble dénombrable obtenu, il est immédiat que la suite (x_n) satisfait aux conditions du lemme (car on peut évidemment supposer que les points de chaque P_n ont tous une norme ≤ 1). Ce dernier étant démontré, le théorème 23 en résulte.

23. Dans le raisonnement de M. Banach auquel nous nous sommes référés pour établir le théorème 23, le fait que E est *complet* joue un rôle essentiel (alors qu'il n'intervient pas dans le lemme, qui est valable pour un espace normé quelconque E). Effectivement, nous allons voir que le théorème 23 est *inexact* si E n'est pas complet.

En effet, soit $\hat{E}$ le *complété* de E, x_0 un point de $\hat{E}$ n'appartenant pas à E, et soit V l'hyperplan $B(x_0, x') = 0$ dans le dual E' de E, identique au dual de $\hat{E}$; d'après le théorème 22, l'intersection de V et d'une boule fermée quelconque dans E' est faiblement compacte pour la topologie $\sigma(E', \hat{E})$, donc aussi pour la topologie $\sigma(E', E)$ qui est moins fine; mais V n'est pas fermé pour cette dernière topologie (corollaire du théorème 2).

24. Théorème 24. — *Pour qu'un espace normé* E *soit réflexif, il faut et il suffit que la boule fermée* S *formée des points* $x \in E$ *tels que* $\|x\| \leq 1$ *soit faiblement compacte.*

En effet, soit $\tilde{E}$ l'image canonique de E dans son bidual E'' (§ 18); l'application canonique de E sur $\tilde{E}$ est non seulement un isomorphisme de la structure d'espace normé de E sur celle de $\tilde{E}$, mais aussi, d'après sa définition, un isomorphisme de la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur $\sigma(\tilde{E}, E')$. Si $\tilde{E} = E''$, l'image canonique $\tilde{S}$ de S est faiblement compacte (pour la structure $\sigma(E'', E')$) d'après le théorème 22; donc S est faiblement compacte. Réciproquement, supposons que S soit faiblement compacte; il en est de même de $\tilde{S}$, donc le théorème 23, appliqué au sous-espace vectoriel $\tilde{E}$ du dual E'' de l'espace complet E', montre que $\tilde{E}$ est *faiblement fermé* dans E''. On en conclut que $\tilde{E} = E''$; sinon, il existerait un $x' \in E'$ orthogonal à $\tilde{E}$ et $\neq 0$; donc x' serait orthogonal à E et $\neq 0$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE. — *Si* V *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif* E, *le sous-espace* V *et l'espace quotient* E/V *sont des espaces réflexifs.*

En effet, V est faiblement fermé (th. 3), et la topologie faible sur V est induite par la topologie faible de E (th. 6); l'intersection de V et de la boule S est donc faiblement compacte dans V, ce qui prouve que V est réflexif. D'autre part, la boule $\|\bar{x}\| \leqq 1$ dans E/V est l'image de la boule $\|x\| \leqq 1$ par l'application canonique $x \to \bar{x}$ de E sur E/V (qui, à tout élément $x \in$ E, fait correspondre sa classe mod. V). Or, cette application est faiblement continue (th. 15); elle transforme donc tout ensemble faiblement compact en un ensemble faiblement compact, ce qui prouve que E/V est réflexif.

25. Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour étudier les *applications linéaires* d'un espace normé E dans un espace normé F. Nous dirons, conformément aux conventions du paragraphe 19, qu'une telle application u est *fortement continue* (resp. un *homomorphisme fort*) si elle est continue (resp. est un homomorphisme) lorsqu'on munit E et F de leurs topologies fortes (topologies d'espace normé). D'après le théorème 15, si u est fortement continue dans E (resp. un homomorphisme fort de E dans F), u est aussi faiblement continue (resp. un homomorphisme faible de E dans F). Mais ici, ces propositions admettent des *réciproques :*

THÉORÈME 25 ([20]). — *Si u est une application faiblement continue d'un espace normé* E *dans un espace normé* F, *u est fortement continue dans* E.

En effet, soit S la boule $\|x\| \leqq 1$ dans E; il suffit de prouver que $u(\mathrm{S})$ est *borné* dans F. Or, si y' est un élément du dual F', $y' \circ u$ est une forme linéaire continue dans E, donc $\sup\limits_{x \in \mathrm{S}} \left| y'\big(u(x)\big) \right| < +\infty$, c'est-à-dire $\sup\limits_{y \in u(\mathrm{S})} |y'(y)| < +\infty$; comme y' est quelconque, $u(\mathrm{S})$ est *faiblement borné* dans F, donc fortement borné (th. 18).

THÉORÈME 26 ([21]). — *Si u est un homomorphisme faible d'un espace normé* E *dans un espace normé* F, *u est un homomorphisme fort de* E *dans* F.

Remarquons d'abord que u est faiblement continue, donc fortement continue d'après le théorème 25. Supposons d'abord que u soit un *isomorphisme faible* de E dans F. Si u' est la transposée de u, on sait alors (corollaire du théorème 14, appliqué en échangeant les rôles de u et u') que $u'(\mathrm{F}') = \mathrm{E}'$. Soit S la boule $\|y\| \leqq 1$ dans F; pour voir que u est un isomorphisme fort, il faut prouver que $\overset{-1}{u}(\mathrm{S})$

([20]) Le théorème est démontré par N. DUNFORD, *loc. cit.*, p. 317 (th. 20).

([21]) Si l'on tient compte des théorèmes 11 et 14, le théorème 26 est équivalent à un théorème de F. Hausdorff (*loc. cit.*, p. 308, dritter Hauptsatz).

est *borné* dans E. Or, quel que soit $x' \in E'$, il existe $y' \in F'$ tel que $x' = u'(y')$, donc

$$B(x, x') = B(x, u'(y')) = C(u(x), y') = y'(u(x));$$

quel que soit $x \in \overset{-1}{u}(S)$, on a par suite

$$|x'(x)| = |y'(u(x))| \leqq \|y'\|;$$

donc $\overset{-1}{u}(S)$ est *faiblement borné*, et par suite fortement borné (th. 18).

Passons au cas général, et soit $K = \overset{-1}{u}(0)$; on peut écrire $u = v \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de E sur E/K, et v une application linéaire biunivoque de E/K sur $u(E)$. D'après le théorème 4, le dual de E/K est le même, qu'on munisse E/K de la topologie d'espace normé, quotient par K de la topologie forte de E, ou de la topologie quotient par K de $\sigma(E, E')$; en outre, cette dernière topologie quotient est la topologie faible de l'espace normé E/K (th. 8). Donc v est un *isomorphisme faible* de l'espace normé E/K dans l'espace normé F; il en résulte que c'est aussi un isomorphisme fort, donc que u est un homomorphisme fort de E dans F.

On peut donc désormais parler d'application linéaire *continue* (resp. d'*homomorphisme*) de E dans F sans préciser s'il s'agit des topologies fortes ou des topologies faibles sur E et F.

26. Rappelons deux théorèmes de M. Banach, dont nous aurons besoin dans ce qui suit :

Théorème 27 [22]. — *Soit u un homomorphisme d'un espace normé* E *dans un espace normé* F. *Si* E *est complet*, $u(E)$ *est fermé dans* F. *Réciproquement, si* E *et* F *sont complets, et si u est une application linéaire fortement continue de* E *dans* F, *telle que* $u(E)$ *soit fermé dans* F, *u est un homomorphisme de* E *dans* F.

Théorème 28 [23]. — *La transposée u' d'une application linéaire continue u d'un espace normé* E *dans un espace normé* F, *est fortement continue dans* F'.

Il résulte en particulier du théorème 28 que toute application linéaire *faiblement continue* v de F' dans E' est *fortement continue* (analogue du théorème 25); en effet, une telle application est la transposée d'une application linéaire faiblement continue u de E dans F (§ 11); comme u est fortement continue d'après le théorème 25, v est fortement continue d'après le théorème 28.

Par contre, la première partie du théorème 15 n'a pas d'analogue, en général, dans le dual d'un espace normé : si F n'est pas réflexif, une application linéaire

---

[22] S. Banach, *loc. cit.*, p. 38.

[23] *Ibid.*, p. 100.

v de F' dans E' peut être fortement continue sans être faiblement continue; il suffit pour le voir de considérer le cas où $E = E'$ est le corps des nombres complexes.

Des théorèmes 27 et 28, on déduit les suivants :

THÉORÈME 29. — *Pour que la transposée u' d'une application linéaire continue de* E *dans* F *soit un homomorphisme fort de* F' *dans* E', *il faut et il suffit que* $u'(F')$ *soit fortement fermé dans* E'.

En effet, u' est fortement continue d'après le théorème 28; comme les duals F' et E' sont complets, on peut appliquer à u' le théorème 27, d'où la proposition.

THÉORÈME 30. — *La transposée u' d'un homomorphisme u de* E *dans* F *est un homomorphisme fort de* F' *dans* E'

En effet, comme u est un homomorphisme faible de E dans F, $u'(F')$ est faiblement fermé dans E' (théorème 14, appliqué en échangeant les rôles de u et u'), donc fortement fermé; le théorème résulte donc du théorème 29.

La réciproque du théorème 30 est inexacte en général; nous y reviendrons au paragraphe 29.

27. Si F n'est pas réflexif, un homomorphisme fort de F' dans E' peut fort bien ne pas être un homomorphisme faible, ni même être faiblement continu, comme le montre l'exemple des formes linéaires fortement continues dans F'; il n'y a donc pas ici d'analogue à la seconde partie du théorème 15. Mais nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 31 ([24]). — *Soit u une application linéaire continue d'un espace normé* E *dans un espace normé* F. *Si u' est un homomorphisme fort de* F *dans* E', *et si* E *est complet*, *u' est un homomorphisme faible de* F' *dans* E'.

Soit $G = \overset{-1}{u'}(0)$; si φ est l'application canonique de F' sur l'espace quotient F'/G, on peut écrire $u' = v \circ \varphi$, où v est une application linéaire biunivoque de F'/G sur $u'(F')$. Désignons par A l'adhérence $\overline{u(E)}$ dans F [les adhérences forte et faible sont identiques d'après le théorème 3, puisque $u(E)$ est un sous-espace vectoriel]; on a $G = A^*$ (th. 5 et 11); par suite (th. 17) le dual fort A' de l'espace normé A est isomorphe à l'espace normé F'/G. D'autre part, comme A est fermé, la topologie faible $\sigma(A', A)$ est isomorphe à la topologie quotient par G de $\sigma(F', F)$ (th. 7); on peut donc (et c'est ce que nous ferons dans la suite de cette démonstration), *identifier* A' avec l'espace quotient F'/G, en ce qui concerne les topologies fortes et faibles de ces deux espaces, et considérer v

([24]) Le théorème est essentiellement dû à S. Banach, sous une forme un peu moins générale, mais à laquelle le théorème 31 se ramène aisément (*loc. cit.*, p. 146, th. 1).

comme une application linéaire biunivoque de A′ sur $u'(F')$. Comme u' est faiblement continue dans F′, v est faiblement continue dans A′; soit w son application réciproque [de $u'(F')$ sur A′]; la proposition sera établie si l'on prouve que w est *faiblement continue*. Il suffit pour cela (corollaire du théorème 9) de montrer que, si H est un hyperplan fermé dans A′, $\overset{-1}{w}(H) = v(H)$ est faiblement fermé dans $u'(F')$; nous allons montrer davantage, à savoir que $v(H)$ est *faiblement fermé dans* E′. En effet, soit S une boule fermée dans E′, telle que $S_1 = S \cap v(H)$ ne soit pas vide; par hypothèse, v est un *isomorphisme fort* de A′ sur $u'(F')$, donc $\overset{-1}{v}(S)$ est *fortement borné* dans A′; d'autre part, S est faiblement compacte, donc faiblement fermée dans E′ (th. 22), et comme v est faiblement continue, $\overset{-1}{v}(S)$ est faiblement fermé dans A′. Donc (th. 22), $\overset{-1}{v}(S)$ est *faiblement compact* dans A′, et il en est de même de $\overset{-1}{v}(S_1) = \overset{-1}{v}(S) \cap H$, puisque H est faiblement fermé; comme v est faiblement continue, elle transforme tout ensemble faiblement compact en ensemble faiblement compact, donc $S_1 = v\left(\overset{-1}{v}(S_1)\right)$ est faiblement compact dans E. Comme E est complet, le théorème 23 prouve que $v(H)$ est faiblement fermé dans E′, ce qui achève la démonstration.

Le théorème est inexact si l'on ne suppose pas E complet. Prenons en effet pour F le complété $\hat{E}$ de E, et pour u l'application identique de E dans F; u' est alors l'application identique de F′ sur E′, qui est un isomorphisme fort (§ 16), mais non un isomorphisme faible (corollaire du théorème 2).

28. Le théorème 26 ne se transpose pas non plus tel quel aux homomorphismes faibles de F′ dans E′; mais on a le théorème suivant :

THÉORÈME 32. — *Si* F *est complet, et si u' est un homomorphisme faible de* F′ *dans* E′, *u' est un homomorphisme fort de* F′ *dans* E′.

Conservons les notations de la démonstration du théorème 31; l'hypothèse entraîne cette fois que v est un *isomorphisme faible* de A′ sur $u'(F')$, et que v est *fortement continue* dans A′ (d'après le théorème 28); v est la *transposée* d'une application linéaire continue f de E dans A, et comme v est un isomorphisme faible, $f(E) = A$ (corollaire du théorème 14). Soit S la boule $\|x'\| \leq 1$ dans E′; il suffit de prouver que $\overset{-1}{v}(S)$ est *fortement borné* dans A′. Or pour tout $y \in A$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; donc, pour tout $y' \in A'$,

$$B(y, y') = B\left(f(x), y'\right) = B\left(x, v(y')\right);$$

si $y' \in \overset{-1}{v}(S)$, on a donc

$$|B(y, y')| = \left|B\left(x, v(y')\right)\right| \leq \|x\| . \|v(y')\| \leq \|x\|;$$

donc $\overset{-1}{v}(S)$ est *faiblement borné* dans A′. Comme A est fermé dans l'espace complet F, c'est un espace complet, et il résulte du théorème 21 que $\overset{-1}{v}(S)$ est *fortement borné*, d'où le théorème.

Ici encore, le théorème cesse d'être exact si l'on ne suppose pas F complet, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

29. Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent, lorsque E et F sont tous deux *complets*, d'énoncer le théorème suivant, qui les relie et les résume :

THÉORÈME 33 [25]. — *Soient* E *et* F *deux espaces normés complets, u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Les propositions suivantes sont toutes équivalentes :*

a. u est un homomorphisme (fort ou faible) *de* E *dans* F;
b. $u(E)$ *est* (fortement ou faiblement) *fermé dans* F;
c. u' *est un homomorphisme fort de* F′ *dans* E′;
d. $u'(F')$ *est fortement fermé dans* E′;
e. $u'(F')$ *est faiblement fermé dans* E′;
f. u' *est un homomorphisme faible de* F′ *dans* E′.

En effet, *a* et *b* sont équivalentes, d'après le théorème 27, et le même théorème prouve l'équivalence de *c* et *d*; *a* et *c* sont équivalentes d'après le théorème 14, et le même théorème prouve que *b* et *f* sont équivalentes; enfin, *c* et *f* sont équivalentes d'après les théorèmes 31 et 32 (on peut aussi dire que *c* entraîne *f* d'après le théorème 31, et remarquer que *e* entraîne *d* sans aucune hypothèse sur E et F, ce qui évite d'utiliser le théorème 32).

Si l'on suppose seulement que E soit complet, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 34. — *Si u est une application linéaire continue d'un espace normé complet* E *dans un espace normé* F, *les propositions a, c, d, et e du théorème* 33 *sont équivalentes, et entraînent b et f.*

Tout revient à démontrer que *c* entraîne *a*, c'est-à-dire la réciproque du théorème 30.

De façon générale, considérons les *complétés* $\hat{E}$ et $\hat{F}$ de E et F respectivement : toute application linéaire continue u de E dans F se prolonge (de manière unique) en une application linéaire continue $\overline{u}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$: en outre, comme les duals forts de $\hat{E}$ et $\hat{F}$ sont respectivement identiques aux duals forts E′ et F′ de E et F (§ 17) la *transposée* de $\overline{u}$ est *identique* à la transposée u' de u. Il en résulte aussitôt que si u' est un homomorphisme fort de F′ dans E′, $\overline{u}$ est un

---

[25] Si l'on tient compte des théorèmes 11 et 14, le théorème 33 se trouve déjà dans le Mémoire plusieurs fois cité de F. Hausdorff.

homomorphisme de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$, en vertu du théorème 33, qui est alors applicable. Or, si E est complet, $\bar{u}$ est identique à u, donc u est un homomorphisme de E dans $\hat{F}$, ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de E dans F.

COROLLAIRE. — *Soient* E_1, E_2 *deux espaces normés obtenus en munissant un même espace vectoriel de deux topologies* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *d'espace normé; si* $\mathcal{C}_1$ *est strictement plus fine que* $\mathcal{C}_2$, *et si* E_1 *est complet, la topologie induite par la topologie forte du dual* E'_1 *de* E_1 *sur le dual* E'_2 *de* E_2 (considéré comme sous-espace vectoriel de E'_1) *est strictement moins fine que la topologie forte de* E'_2.

En effet, l'application identique u de E_1 dans E_2 n'est pas un isomorphisme fort; sa transposée u', qui est l'application canonique de E'_2 dans E'_1, ne peut donc être un isomorphisme fort, en vertu du théorème 34.

Nous allons maintenant montrer que le théorème 34 cesse d'être exact lorsqu'on ne suppose plus E complet, même si F est alors supposé complet. A cet effet, nous donnerons d'abord une méthode générale qui permet, étant donné un espace normé E à une infinité de dimensions, de former sur le même espace vectoriel deux topologies d'espace normé $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, dont la première est *strictement moins fine* et la seconde *strictement plus fine* que la topologie de E. Pour cela, considérons une *base vectorielle* (a_α) de E (par rapport au corps des nombres complexes); on peut évidemment supposer que $\|a_\alpha\| = 1$ quel que soit α. L'ensemble des indices α étant infini, on peut le mettre sous la forme du produit $B \times \mathbf{N}$ d'un ensemble infini B et de l'ensemble des entiers naturels, autrement dit écrire la base sous la forme $(a_{\beta,n})$. Cela étant, posons

$$b_{\beta,n} = n \,.\, a_{\beta,n} \qquad \text{et} \qquad c_{\beta,n} = \frac{1}{n} \cdot a_{\beta,n}, \qquad \text{pour tout } \beta;$$

soit V_1 l'ensemble cerclé et convexe engendré par les $b_{\beta,n}$, V_2 l'ensemble cerclé et convexe engendré par les $c_{\beta,n}$. Il est immédiat que V_1 et V_2 sont des ensembles équilibrés, et que, pour tout élément $x \neq 0$ de E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \notin V_1$ et $\lambda x \notin V_2$; donc V_1 et V_2 sont des ensembles de la forme $p_1(x) \leqq 1$ et $p_2(x) \leqq 1$ respectivement, où p_1 et p_2 sont des *normes*; il est clair d'ailleurs que p_1 ni p_2 ne peuvent être équivalentes à la norme de E, d'où la proposition.

Prenons alors pour F un espace complet quelconque (à une infinité de dimensions), et soit E un espace normé obtenu en munissant l'espace vectoriel F d'une topologie strictement plus fine que celle de F (d'après la méthode précédente); E ne peut être complet, en vertu du théorème 27. Soit u l'application identique de E sur F, qui est continue; comme $u(E) = F$, u' est un isomorphisme faible de F' dans E' (corollaire du théorème 14); comme F est complet, u' est aussi un isomorphisme fort de F' dans E' d'après le théorème 32, mais u n'est pas un isomorphisme fort de E dans F. Ce même exemple fournit un contre-exemple pour le corollaire du théorème 34.

En utilisant toujours la même méthode, nous allons maintenant montrer que le théorème 32 cesse d'être exact lorsqu'on ne suppose plus F complet, même si E est complet. En effet, prenons pour E un espace complet, pour F un espace normé obtenu en munissant E d'une topologie strictement moins fine que celle de E. Soit u l'application identique de E dans F, qui est continue; comme $u(E) = F$, u' est un isomorphisme faible de F' dans E'; mais u' ne peut être un isomorphisme fort de F' dans E', car alors, d'après le théorème 34, u serait un isomorphisme fort de E sur F, contrairement à l'hypothèse.

Le même exemple prouve que, lorsque E est complet, mais non F, les propositions b et f du théorème 33 (qui sont toujours équivalentes entre elles) n'entraînent pas les propositions a, c, d, e.

APPENDICE.

Espaces réflexifs et espaces uniformément convexes.

30. La condition de réflexivité d'un espace normé (th. 24) a été obtenue sous une forme différente par M. Goldstine ([26]); l'énoncé auquel il aboutit est assez compliqué d'aspect (il utilise la notion de limite généralisée de Moore-Smith), et résulte de l'usage d'intégrales généralisées d'un type introduit par M. Hildebrandt. Il serait facile de prouver directement l'équivalence de cette condition et de celle du théorème 24; nous ne l'entreprendrons pas ici, mais il ne nous semble pas dépourvu d'intérêt de montrer comment on peut adapter la méthode de M. Goldstine pour donner du théorème 24 une démonstration qui n'utilise pas le théorème 23 de M. Banach. L'outil essentiel de cette méthode est en effet une proposition sur les intégrales de Hildebrandt, qui est équivalente au théorème suivant de la théorie de la dualité, que nous allons maintenant démontrer par un raisonnement tout à fait différent, bien entendu, de celui de M. Goldstine :

Théorème 35. — *Dans le bidual* E'' *d'un espace normé* E, *soit* S'' *la boule fermée* $\|x''\| \leq 1$, $\tilde{E}$ *l'image canonique de* E; *l'intersection* $S'' \cap \tilde{E}$ *est faiblement dense par rapport à* S''.

Soit $x'' \in S''$; il nous faut prouver que, pour toute suite finie (x'_i) $(1 \leq i \leq n)$ de points $\neq 0$ de E', il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq 1$ et que $|B(x'_i, x'') - B(x_0, x'_i)| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit V le sous-espace vectoriel fermé de E, intersection des

([26]) H. H. Goldstine, *Weakly complete Banach spaces* (*Duke Math. Journ.*, 4, 1938, p. 125-131). Signalons en passant une erreur dans la démonstration du dernier théorème de ce travail (*voir* p. 130) : il y a confusion entre un espace de deuxième catégorie *dans lui-même* et un espace de deuxième catégorie *dans un autre espace* le contenant; la validité du théorème lui-même (à savoir, que le seul cas où le bidual E'' soit isomorphe à E est le cas où E est réflexif) reste indécise.

n hyperplans $B(x, x'_i) = 0$; l'espace-quotient E/V a un nombre fini de dimensions, et son dual fort peut être identifié au sous-espace V^* de E' orthogonal à V (th. 17), qui est engendré par les x'_i ; comme tout espace à un nombre fini de dimensions est réflexif, le dual fort de V^* est isomorphe à E/V. Or, si f est la restriction de la forme linéaire x'' au sous-espace V^*, f est une forme linéaire continue sur V^*, donc appartient au dual de V^*; d'autre part, sa norme est $\leqq \|x''\| \leqq 1$. Il existe donc un point $\bar{x} \in E/V$, de norme $\leqq 1$, tel que

$$B(x'_i, x'') = B(\bar{x}, x'_i), \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n;$$

pour tout $x \in \bar{x}$, on aura aussi

$$B(x'_i, x'') = B(x, x'_i), \qquad \text{pour tout } i.$$

Or, d'après la définition de la norme dans E/V (§ 3), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \bar{x}$ tel que $\|x\| \leqq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$; donc il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leqq 1$ et $\|x - x_0\| \leqq \varepsilon$. On a par suite

$$|B(x_i, x'') - B(x_0, x'_i)| = |B(x - x_0, x'_i)| \leqq \varepsilon \|x'_i\|;$$

si l'on a pris ε assez petit pour que $\varepsilon \|x'_i\| \leqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq n$, on voit que x_0 remplit les conditions voulues, d'où le théorème.

Une fois démontré le théorème 35, la démonstration de la seconde partie du théorème 24 procède comme suit : si la boule S est faiblement compacte dans E, son image canonique $S'' \cap \tilde{E}$ est faiblement compacte dans le bidual E'', donc $S'' \cap \tilde{E}$ est *faiblement fermée* dans E'', et par suite identique à son adhérence faible, qui n'est autre que S'' en vertu du théorème 35; mais la relation $S'' \cap \tilde{E} = S''$ entraîne évidemment $E'' = \tilde{E}$.

On déduit du théorème 35 un autre critère (évidemment équivalent à celui du théorème 24), en raisonnant de la façon suivante : soit x'' un point de S'' tel que $\|x''\| = 1$; d'après le théorème 35, tout voisinage faible de x'' dans E'' [il s'agit toujours de la topologie faible $\sigma(E'', E')$] rencontre $S'' \cap \tilde{E}$; les traces sur $S'' \cap \tilde{E}$ des voisinages faibles de x'' forment donc une *base d'un filtre* $\mathfrak{F}$ sur $\tilde{E}$, qui est d'ailleurs *filtre de Cauchy* pour la topologie faible $\sigma(\tilde{E}, E')$. Pour que E soit réflexif, il faut et il suffit que (pour tout x'') $\mathfrak{F}$ soit *faiblement convergent* dans $\tilde{E}$, car si $\tilde{x} \in \tilde{E}$ est limite de $\mathfrak{F}$, on aura $x'' = \tilde{x}$. Cette condition peut encore se transformer : si E est réflexif, on a $x'' \in \tilde{E}$, donc les traces sur $S'' \cap \tilde{E}$ (égal ici à S'') des voisinages *forts* de x'' forment une base d'un filtre $\mathfrak{G}$ *plus fin* que $\mathfrak{F}$, et *fortement convergent* (vers x''). Inversement, supposons qu'il existe sur $\tilde{E}$ un filtre $\mathfrak{G}$ plus fin que $\mathfrak{F}$ et fortement convergent vers un point $\tilde{x} \in \tilde{E}$; $\tilde{x}$ est alors *fortement adhérent* à $\mathfrak{G}$, donc *faiblement adhérent* à $\mathfrak{G}$, et par suite *faiblement adhérent* à $\mathfrak{F}$ qui est moins fin que $\mathfrak{G}$; mais comme $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour la topologie faible, $\mathfrak{F}$ est faiblement convergent vers $\tilde{x}$, donc E est réflexif. Si l'on remarque que, pour que E soit réflexif, il est nécessaire qu'il soit *complet*, on voit que, si cette condition est remplie, une condition nécessaire et suffisante pour que E soit *réflexif* est que, *pour tout* x'', *il existe un filtre de Cauchy pour la topologie forte qui soit plus fin que le filtre* $\mathcal{F}$.

Cette condition sera en particulier remplie si, dans le filtre $\mathcal{F}$, il existe des ensembles *de diamètre arbitrairement petit*, car $\mathcal{F}$ lui-même sera un filtre de Cauchy pour la topologie forte. Nous allons voir qu'il en est ainsi si E satisfait à la condition suivante : (C) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $x'' \in E''$ *tel que* $\|x''\| = 1$, *il existe* $\delta > 0$ (dépendant de x'' et de ε) *tel que, pour tout* $x' \in E'$ *satisfaisant aux conditions* $\|x'\| = 1$, $|B(x', x'') - 1| \leqq \delta$, *le diamètre de l'ensemble des* $x \in E$ *tels que* $\|x\| \leqq 1$, $|B(x, x') - 1| \leqq \delta$ *soit* $\leqq \varepsilon$. En effet, prenons un $x'_0 \in E'$ tel que $|B(x'_0, x'') - 1| \leqq \frac{\delta}{2}$ et $\|x'_0\| = 1$, et considérons l'ensemble $\tilde{A}$ des points $\tilde{x}$ de $S'' \cap \tilde{E}$ tels que $|B(x'_0, x'') - B(x, x'_0)| \leqq \frac{\delta}{2}$; $\tilde{A}$ appartient à $\mathcal{F}$, et est l'image canonique d'une partie A de E dont les points x satisfont aux relations $\|x\| \leqq 1$, $|B(x, x'_0) - 1| \leqq \delta$; donc A a un diamètre $\leqq \varepsilon$, et il en est de même de $\tilde{A}$.

La condition (C) est satisfaite, en particulier, lorsque la topologie forte de E est définie par une norme *uniformément convexe* ([27]); nous retrouverons ainsi le fait qu'un tel espace, s'il est complet, est réflexif ([28]). En effet, l'uniforme convexité de la norme signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqq 1$, $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| \geqq 1 - \delta$ entraînent $\|x - y\| \leqq \varepsilon$; supposons donné un $x' \in E'$ tel que $\|x'\| = 1$, et soit A l'ensemble des x tels que $|B(x, x') - 1| \leqq \frac{\delta}{2}$ et $\|x\| \leqq 1$; A contient au moins un point x_0 tel que $\|x_0\| = 1$; pour tout autre point $x \in A$, on aura

$$|B(x - x_0, x')| \leqq \delta, \qquad \text{donc} \qquad \left|B\left(\frac{1}{2}(x + x_0), x'\right)\right| \geqq 1 - \delta,$$

ce qui, vu la relation $\|x'\| = 1$, entraîne $\left\|\frac{1}{2}(x + x_0)\right\| \geqq 1 - \delta$, et par suite $\|x - x_0\| \leqq \varepsilon$. Pour un espace à norme uniformément convexe, on a donc une propriété plus précise que la condition (C), puisqu'on peut alors, dans l'énoncé de cette dernière, supprimer toute restriction sur x', sans modifier la conclusion.

([27]) *Voir* J. CLARKSON, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 1936, p. 396.
([28]) *Voir* B. J. PETTIS, *Duke Math. Journ.*, 5, 1939, p. 249.