ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE LELONG

Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 58 (1941), p. 83-177

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1941_3_58__83_0>

SUR

QUELQUES PROBLÈMES

DE

LA THÉORIE DES FONCTIONS

DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

PAR M. PIERRE LELONG.

INTRODUCTION.

Une fonction analytique $f(x, y)$ supposée holomorphe dans un domaine de l'espace à quatre dimensions qui contient à son intérieur la région plane $x \subset d$, $y = y_0$, peut y être développée sous la forme

$$f(x, y) = \Sigma A_n(x)(y - y_0)^n, \tag{1}$$

et la série écrite lui fait correspondre une suite $A_n(x)$ de fonctions holomorphes dans d dont les propriétés sont liées à celles de $f(x, y)$. Cette remarque est à l'origine de la méthode suivie; toutefois ce n'est pas la suite $A_n(x)$ elle-même que nous avons fait intervenir, mais certaines suites de fonctions sous-harmoniques qui s'en déduisent et sont de la forme

$$U_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \log |A_n(x)|,$$

où $\varphi(n)$ est une fonction choisie dans chaque cas étudié de manière que la suite $U_n(x)$ soit bornée dans son ensemble à l'intérieur de d.

Un lien qui nous semble intime entre la théorie des fonctions sous-harmoniques de variables réelles et celle des fonctions analytiques de deux variables complexes, nous a permis de traiter par une même méthode des problèmes en apparence éloignés. Les uns sont relatifs à la description de certaines singularités situées à distance finie, pour laquelle les fonctions sous-harmoniques sont un instrument commode et précis. Les autres constituent une étude des fonctions entières $f(x, y)$ et de leur croissance. Cette étude nous est d'ailleurs apparue comme un cas particulier d'un problème plus général qui est l'examen du comportement d'une fonction analytique au voisinage des différents points d'une variété caractéristique singulière, et l'ensemble des théorèmes obtenus au Chapitre III exprime, quant à la croissance, un principe comparable à la continuité des singularités à distance finie, quoique d'expression plus complexe.

Sommaire. — Après quelques préliminaires destinés à relier ce mémoire aux importants travaux que Hartogs a consacrés aux séries (1), le Chapitre I étudie la fonction, en général complètement discontinue, $U(x) = \overline{\lim}_{n=\infty} U_n(x)$ et la fonction semi-continue supérieurement $V(x) = \overline{\lim}_{x' \to x} U(x')$. D'après Hartogs lorsque $\varphi(n) = n$, la fonction $V(x)$ détermine le domaine H de convergence uniforme de (1) : H est un domaine semi-cerclé défini par $x \subset d$, $|y - y_0| < R(x)$. La fonction $V(x) = -\log R(x)$ est sous-harmonique. Nous établissons ce dernier résultat, qui doit être considéré comme déjà acquis par le mémoire de Hartogs ([1]), d'une manière valable pour une suite de fonctions sous-harmoniques de forme quelconque. Les points x_i, où l'on a $U(x_i) < V(x_i)$, sont les projections de couronnes planes (épines) appartenant à l'ensemble des variétés caractéristiques sur lesquelles $f(x, y)$ peut être prolongée à travers son ensemble singulier comme fonction analytique d'une seule variable. Si les masses des $U_n(x)$ convergent vers une fonction limite d'ensemble, ces points forment un ensemble de capacité intérieure nulle. Dans le cas général, il en est encore ainsi des épines de longueur infinie correspondant aux valeurs x_i, pour lesquelles $f(x_i, y)$ est une fonction entière en y.

([1]) *Math. Annalen*, 62, p. 1. De ce fait, le mémoire se trouve contenir des exemples remarquables de singularités compatibles avec la sous-harmonicité d'une fonction, singularités dont l'étude systématique est toute récente.

Le Chapitre II montre que la classe des fonctions sous-harmoniques de variables réelles est un instrument analytique adapté à l'étude de l'ensemble singulier S de $f(x, y)$. Partant d'un domaine H indiqué plus haut et défini à partir d'une fonction sous-harmonique donnée quelconque $V(x)$, nous construisons une série (1) dont H est le domaine de convergence uniforme. Le développement obtenu est lacunaire (et peut, du reste, l'être autant qu'on le désire), de sorte que $f(x, y)$ n'est pas prolongeable hors de H : la sous-harmonicité de $-\log R(x)$ suffit pour que H soit domaine d'holomorphie et même de méromorphie, à l'exclusion des conditions auxiliaires (telles que l'existence d'un laplacien continu) admises dans les travaux antérieurs. L'emploi d'une classe de fonctions semi-continues est d'ailleurs une conséquence naturelle du fait que S est un ensemble fermé. Signalons que le passage d'un domaine de convergence H à un domaine d'holomorphie, qui s'effectue dans notre travail grâce aux propriétés des séries lacunaires d'une variable, relève également d'un théorème général établi par d'autres méthodes dans un mémoire de MM. H. Cartan et P. Thullen [1]. Les résultats établis nous montrent ensuite comment toute précision descriptive apportée à la connaissance de certains ensembles plans permet de préciser le principe de continuité des singularités de $f(x, y)$.

L'étude se poursuit par l'examen de cas d'harmonicité en x de la fonction $\log R(x, y)$ obtenue en faisant varier la valeur centrale y_0 du développement (1). Dans un cas très général les régions F, à travers lesquelles $f(x, y)$ est prolongeable, sont limitées par des variétés définies par des fonctions analytiques des coordonnées réelles de E_4. Dans un cas plus restreint, si θ est l'argument du premier point singulier de $f(x, y)$ rencontré sur chacun des cercles $|y - y_0| = R(x)$ à partir d'un point d'argument constant supposé point de régularité, la fonction $\theta(x)$ est de plus sous-harmonique de x. Précisant encore les hypothèses, nous envisageons le cas où la fonction $\log R(x, y)$ est doublement harmonique en x et en y dans un domaine de E_4; cette hypothèse entraîne sa biharmonicité. Elle ne peut être réalisée que dans un domaine portant sur sa frontière une variété caractéristique W

---

(1) *Math. Annalen*, t. 106, 1932, p. 638, théorème 10.

de points singuliers en position d'arête saillante par rapport aux points singuliers voisins. L'équation de W se calcule effectivement. On sait inversement qu'une variété W, qui est l'intersection de deux hypersurfaces non tangentes d'équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, φ et ψ étant deux fois continûment dérivables, est une variété caractéristique dès qu'elle appartient à S et que dans son voisinage les trois régions, où l'on a soit $\varphi < 0$, soit $\psi < 0$, ne contiennent que des points réguliers. Revenant sur cette question, nous avons considéré le problème des arêtes comme la recherche des conditions minima et géométriques portant sur W et S pour que ce résultat soit acquis. Nous appelons ensemble des arêtes le sous-ensemble de S en lequel la partie bilatérale du faisceau dérivé laisse échapper un plan caractéristique et nous montrons, en établissant la biharmonicité de $\log R(x; y)$, qu'une restriction, également de nature géométrique, suffit pour que les variétés en infinité dénombrable, dont se compose cet ensemble, soient des variétés caractéristiques.

Le Chapitre III revient sur le cas, laissé de côté, où $f(x, y)$ n'a aucune singularité à distance finie au-dessus de d, c'est-à-dire dans le domaine $x \subset d$, $|y| < \infty$. A la recherche de singularités se substitue l'étude des croissances comparées de la classe de fonctions entières en y obtenues en laissant x constant. Nous avons montré l'intérêt de ce problème en le rattachant à d'autres questions : le théorème de continuité nous apprend que la présence d'un seul point singulier M sur une variété caractéristique W entraîne que tous les points de W soient singuliers, tant que cette variété reste plongée dans un domaine dont tous les points étrangers à W sont des points de régularité. Le théorème de continuité a-t-il un équivalent en ce qui concerne la croissance, et le comportement de $f(x, y)$ demeure-t-il sensiblement le même au voisinage des différents points de W? Nous montrons l'équivalence entre le problème indiqué plus haut et celui-ci; la réponse à la question est positive, si toutefois on élimine certaines particularités bien définies qui n'apparaissent que pour un ensemble de points de capacité intérieure nulle sur W.

Les fonctions entières de deux variables possèdent l'ensemble S le plus simple possible, puisqu'il se compose des deux variétés $x = \infty$, $y = \infty$.

Les paragraphes 3, 4 et 5 de ce Chapitre sont consacrés à l'étude de leur croissance. La méthode employée dans ce travail nous a permis d'obtenir des résultats très complets.

Nous donnons, chemin faisant, une définition générale et de caractère géométrique de la croissance totale introduite par M. É. Borel. Une classe assez particulière de fonctions d'ordre total fini avait été étudiée par M. J. Sire : en fait l'étude de la croissance de $f(x, y)$ en y peut être, dans ce cas, poussée jusqu'au type qui reste constant, sauf sur un ensemble de valeurs données à x, qui est de capacité intérieure nulle.

Nous avons limité en fonction de la croissance l'aire des variétés d'équation $f(x, y) - a = 0$ dans un dicylindre, en utilisant une propriété des projections de cette aire sur les plans des deux variables complexes.

Nous terminons ce travail par une application au problème suivant : sur quel ensemble de valeurs x_i dans le plan, l'équation $f(x_i, y) = 0$, où y est l'inconnue, peut-elle n'avoir aucune racine? D'un résultat antérieur découle presque immédiatement qu'un tel ensemble est de capacité intérieure nulle, ce qui précise une question posée par M. G. Julia concernant le type de cet ensemble. D'autre part, appelant $n(x_i, r')$ le nombre des racines de l'équation $f(x_i, y) = 0$, qui sont de modules inférieurs à r', nous avons constaté que $n(x, r')$ peut être, pour la plupart des points x_i, d'un ordre de croissance (supposé fini) égale à ρ et seulement d'ordre $\rho - \alpha$ sur un ensemble exceptionnel de capacité intérieure nulle, mais ayant la puissance du continu. Ce résultat montre quelles difficultés nouvelles séparent l'étude d'une relation entière de type général de celle d'une relation linéaire ou même algébrique, mais de degré déterminé en x.

J'apporte ici l'expression de ma respectueuse et profonde reconnaissance à M. Paul Montel pour l'intérêt très bienveillant qu'il n'a cessé de porter à mes recherches. Je remercie très vivement M. Arnaud Denjoy pour la sympathie qu'il a bien voulu me témoigner. M. Georges Valiron m'a apporté à différentes reprises de précieux encouragements dans la préparation de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

CHAPITRE I.

SUITE DE FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES DÉDUITE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE $f(x, y)$.

Soient x et y deux variables complexes

$$x = u_1 + iu_2, \qquad y = u_3 + iu_4, \tag{1}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 sont les coordonnées réelles d'un espace euclidien E_4 à quatre dimensions. Les formules (1) nous imposent d'établir un ordre bien déterminé entre elles pour passer aux valeurs x et y que nous considérons comme les coordonnées complexes d'un point de E_4.

La distance de deux points $A[x, y]$ et $A'[x', y']$ de E_4 est définie par

$$d^2 = \sum_{i=1}^{i=4} |u_i - u'_i|^2 = |x - x'|^2 + |y - y'|^2.$$

Une fonction analytique $f(x, y)$ des variables x, y est donnée au voisinage d'un point $P[x_0, y_0]$ par un développement de Taylor

$$f(x, y) = \sum_{m, n} a_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n. \tag{2}$$

Ce développement est assujetti à une condition de convergence : la série double obtenue en remplaçant dans (2) chaque terme par son module, doit converger pour $|x - x_0| = r_1 > 0$, $|y - y_0| = r_2 > 0$. Cette condition assure la convergence uniforme de (2) par rapport à l'ensemble des variables x, y, tant que le point $P[x, y]$ demeure à l'intérieur d'un dicylindre de centre P_0 défini par les inégalités $|x - x_0| \leqq r'_1$, $|y - y_0| \leqq r'_2$, les nombres r'_1 et r'_2 étant inférieurs respectivement aux nombres r_1 et r_2. Les dérivés partielles de $f(x, y)$ sont alors définies dans le même domaine par les séries dérivées de (2) et permettent d'exprimer les coefficients a_{mn}.

On passe, par prolongement analytique le long d'une ligne polygonale de E_4, de l'élément de centre P_0 à une infinité d'éléments de même forme : l'opération poursuivie tant qu'elle est possible définit d'une manière théorique en même temps la fonction $f(x, y)$ et un domaine D qui est son domaine d'existence dans E_4. Le domaine D est univalent si deux éléments différents ont toujours des supports différents dans E_4; sinon, le domaine d'existence de $f(x, y)$ est dit multivalent. Nous n'aurons à utiliser dans la suite que des domaines univalents. De plus, tous les domaines seront supposés bornés, sauf indication contraire. Nous appellerons S l'ensemble complémentaire de D, c'est-à-dire l'ensemble des points en lesquels $f(x, y)$ est ou singulière ou non définie.

Les propriétés des séries doubles absolument convergentes permettent d'ordonner le développement de Taylor (2) suivant les puissances croissantes de $y - y_0$ sous la forme

$$f(x, y) = \Sigma A_n(x, y_0)(y - y_0)^n. \tag{3}$$

Ce nouveau développement, auquel nous donnerons le nom de série de Hartogs, de la fonction $f(x, y)$, est, comme le précédent, uniformément convergent en x, y dans le dicylindre de centre P_0, de rayons r'_1, r'_2.

Soit γ le cercle $[x = x_1, |y - y_0| = \rho < r'_2]$

$$A_n(x_1, y_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(x, y)}{(y - y_0)^{n+1}}\,dy = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n f(x_1, y_0)}{\partial y^n}. \tag{4}$$

Les coefficients du développement (3) obtenus tout d'abord à partir de (2) sont donnés par (4); ils sont donc indépendants de x_0. Ils constituent, si l'on donne à y_0 une valeur constante, une famille de fonctions analytiques définies dans chacun des domaines ouverts dont se compose l'intersection du domaine D avec le plan $y = y_0$.

Notations. — Nous noterons $\varphi_n(x, y) = \dfrac{\partial^n f(x_1, y)}{\partial y^n}$ les dérivées partielles en y de la fonction $f(x, y)$, avec

$$A_n(x, y) = \frac{1}{n!}\varphi_n(x, y) \qquad \text{et} \qquad U_n(x, y) = \frac{1}{n}\log|A_n(x, y)|.$$

Nous écrirons encore $A_n(x)$, $U_n(x)$ à la place de $A_n(x, y_0)$, $U_n(x, y_0)$ quand nous étudierons ces fonctions dans un plan $y = y_0$.

De (4), découlent deux propriétés remarquables très simples de la suite des dérivées partielles de $f(x, y)$ prises par rapport à l'une des variables lorsque l'on considère ces dérivées dans un domaine d'holomorphie de la fonction.

THÉORÈME 1. — *Si $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine ouvert et borné* D *de* E_4 *dans tout domaine fermé* Δ *intérieur à* D, *les fonctions* $U_n(x, y)$ *sont bornées dans leur ensemble par un nombre qui ne dépend que de $f(x, y)$ et de* Δ.

La démonstration résulte d'une majoration uniforme par rapport à x déduite de (4). Toutefois, il nous faut choisir pour chaque valeur de x le contour d'intégration de manière que sa longueur demeure bornée uniformément quel que soit x.

Soit δ, la plus courte distance de Δ à la frontière de D et soit $\delta_1 = \frac{\delta}{10}\cdot$ Établissons dans E_4 un réseau constitué à partir d'un sommet arbitraire en menant les variétés planes parallèles aux variétés coordonnées et distantes de δ_1. Soient D' le domaine constitué par tous les parallélotopes du réseau qui sont entièrement contenus dans D, et dont les contigus le sont aussi, $G(x)$ l'intersection de D' par un plan $P(x)$ d'équation $x = \text{const.}$, $\Gamma(x)$ l'intersection de Δ par le même plan : $\Gamma(x)$ est contenu dans $C(x)$ et la distance d'un point de $\Gamma(x)$ à la frontière de $C(x)$ est au moins $10\delta_1 - 4\delta_1 = 6\delta_1$. Un domaine de $\Gamma(x)$ porté par $P(x)$ est donc contenu dans un domaine de $C(x)$ et séparé de la frontière de celui-ci par une chaîne de carrés traces des parallélotopes du réseau sur $P(x)$; dans le domaine $C(x) - \Gamma(x)$, on peut donc construire, en empruntant seulement des côtés de ces carrés, des lignes polygonales fermées C_x qui restent à distance δ_1 au moins à la fois de $\Gamma(x)$ et de la frontière de $C(x)$ et enferment à leur intérieur chacun des domaines de $\Gamma(x)$.

L'intégrale

$$(4') \qquad A_n(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_x} \frac{f(x, \zeta)\, d\zeta}{(\zeta - y)^{n+1}},$$

où y appartient à $\Gamma(x)$ nous donne la majoration cherchée. La longueur totale des contours C_x est en effet au plus $4N\delta_1$; le nombre total N des carrés contenus dans $P(x)$ et contenant un point de D est au plus égal à $\left(\frac{K}{\delta_1}\right)^2$, K étant une borne du diamètre de D. Si $M(\delta_1)$

désigne une borne de $|f(x, y)|$ sur le sous-domaine D' de D, on aura, quand le point $[x, y]$ sera contenu dans Δ,

$$|A_n(x, y)| < \frac{4k^2}{2\pi\delta_1^2} \frac{M(\delta_1)}{\delta_1^n},$$

$$U_n(x, y) < -\log\delta_1 + \frac{\lambda}{n}, \tag{5}$$

avec

$$\lambda = \log M(\delta_1) + 2\log 2K - \log(2\pi\delta_1^2),$$

ce qui démontre l'énoncé.

Remarque. — Si au lieu de poser $\delta = 10\,\delta_1$, on pose $\delta = (p + 10)\,\delta_1$, $\rho > 0$, on obtient

$$U_n(x; y) < -\log(1 + \varepsilon_p)\,\delta + \frac{\lambda'}{n},$$

avec

$$\varepsilon_p = 1 + \frac{10}{p}, \qquad \lambda' = \log 2k^2 + 2\log(1 + \varepsilon_p) + \log M(\delta_1) - \log\pi\delta^2.$$

On en conclut, en prenant p suffisamment grand, que, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$U_n(x, y) < -\log\delta - \varepsilon \tag{6}$$

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de n, quand $[x, y]$ est intérieur à Δ. Dans ces conditions, la borne de l'énoncé pourra être prise aussi voisine qu'on le voudra de $-\log\delta$, δ étant la distance de Δ à l'ensemble S des points où $f(x, y)$ est singulière ou non définie.

La propriété peut encore être énoncée :

Dans un domaine intérieur au domaine d'holomorphie les dérivées partielles $\varphi_n(x, y)$ de la fonction vérifient une inégalité de la forme

$$|\varphi_n(x, y)| < n!\,AB^n. \tag{7}$$

A peut être pris aussi voisin de 1, B aussi voisin de $\frac{1}{\delta}$, qu'on le veut, pourvu que n soit assez grand.

En particulier, pour $y = y_0$, les coefficients du développement (3) vérifient la condition

$$|A_n(x)| < AB^n. \tag{7'}$$

Réciproque. — Donnons-nous une suite de fonctions holomorphes $A_n(x)$ définies dans un domaine $x \subset d$ et y satisfaisant à une condition (7′). Le développement (3) converge uniformément par rapport à l'ensemble des variables x, y quand le point $[x, y]$ reste contenu dans un domaine intérieur au domaine Δ produit topologique du domaine $x \subset d$ par $|y - y_0| < \frac{1}{B}$; il est en effet majoré, dans ce cas, par une série convergente à termes positifs. Il représente donc une fonction analytique des deux variables complexes dans le domaine Δ, dont les dérivées $\varphi_n(x, y)$ pour $y = y_0$, $x \subset d$ se réduisent aux fonctions $n!\, A_n(x)$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 2. — *Pour que les fonctions holomorphes $f_n(x) = n!\, A_n(x)$ représentent les dérivées successives $\varphi_n(x, y)$ d'une fonction $f(x, y)$ prises pour $y = y_0$, il faut et il suffit que, dans tout domaine fermé du plan $y = y_0$ où elles sont définies, la suite $U_n(x) = \frac{1}{n} \log |A_n(x)|$ soit uniformément bornée.*

2. Les fonctions $U_n(x, y)$ qui s'introduisent dans cette étude sont en x, comme en y, des fonctions sous-harmoniques continues. Par fonction sous-harmonique U(P), P étant un point variable dans un plan (représenté soit par la variable complexe x, soit par le couple réel u_1, u_2) nous entendons une fonction réelle satisfaisant aux conditions suivantes :

a. elle est égale en tous points P à sa limite supérieure en ce point;
b. à l'intérieur d'un contour C, elle est inférieure ou égale à toute fonction harmonique dans C qui la majore sur C.

Les fonctions $U_n(x, y)$ déduites de la suite des dérivées $\varphi_n(x, y)$ constituent dans tout domaine fermé d'holomorphie de $f(x, y)$, une famille de fonctions sous-harmoniques bornées, qu'on les considère comme fonctions de x ou comme fonctions de y variant seuls.

Une fonction sous-harmonique $U(x)$ bornée, définie dans un domaine d, peut dans un sous-domaine d_1 de d se décomposer sous la forme

$$(8) \qquad \mathrm{U}(x) = \mathrm{H}(x) + \int_{d_1} d\mu(a) \log|x-a|,$$

$\mathrm{H}(x)$ est une fonction harmonique à l'intérieur de d_1, l'intégrale représente un potentiel dû à des masses dont la distribution est définie dans d_1 par une fonction positive d'ensemble borélien $\mu(e)$. Nous appellerons cette fonction d'ensemble la masse de la fonction sous-harmonique considérée. Cette appellation est justifiée par le fait que si l'on remplace d_1 par un domaine analogue d'_1, les deux distributions obtenues coïncident sur la partie commune de d_1 et de d'_1.

La décomposition d'une fonction de la suite particulière

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{1}{n} \log|\mathrm{A}_n(x)|$$

s'obtient en posant $\mathrm{A}_n(x) = \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{H}(x - a_i^n)$, les a_i^n étant tous les zéros de $\mathrm{A}_n(x)$ dans d_1 et

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{1}{n} \log|\mathrm{B}_n(x)| + \sum_i \frac{\log|x - a_i^n|}{n}.$$

La fonction de masse $\mu_n(e)$ est définie en localisant la masse $\frac{p}{n}$ au point a_i^n, p étant l'ordre de multiplicité du zéro a_i^n. L'étude des masses des fonctions $\mathrm{U}_n(x)$ dans d équivaut donc à celle des zéros des dérivées $\varphi_n(x, y)$ situés sur la région plane $[x \subset d, y - y_0]$.

Le théorème 1 entraîne une conséquence relative aux masses totales $\mu_n(d)$ contenues dans un domaine fermé. Énonçons la propriété pour une suite de fonctions sous-harmoniques de forme quelconque :

Théorème 3. — *Soit* $\mathrm{U}_n(x)$ *une suite de fonctions sous-harmoniques uniformément bornées dans le domaine fermé d. A tout domaine* d_1 *complètement intérieur à d correspondent deux nombres* α *et* β *tels que l'on ait*

$$(9) \qquad \mathrm{U}_n(x) \leqq -\alpha\,\mu_n(d_1) + \beta,$$

pour x contenu dans d_1; α *et* β *ne dépendent que de* d_1 *et de la borne* M *des* $\mathrm{U}_n(x)$ *dans d.*

Soit d' un domaine intermédiaire entre d et d_1 dont le contour, tracé dans le domaine $d - d_1$ possède une tangente qui varie continûment, soit $g(x, a)$ sa fonction de Green : si a est un point quelconque de d_1, les fonctions $-g(x, a)$ où x est la variable, sont négatives pour x intérieur à d'. Traçons encore un contour intermédiaire γ dans $d' - d_1$, à distance positive de d_1. Dans un voisinage de ce contour étranger à d_1, les fonctions harmoniques négatives sont régulières. On peut leur assigner sur γ un maximum négatif $-\alpha$ indépendant du paramètre a lorsque celui-ci varie dans d_1. On utilisera alors la décomposition

$$\text{(10)} \qquad U_n(x) = H'_n(x) - \int_{d'} d\,\mu_n(a)\,g(x, a),$$

où $H'_n(x)$ prend les mêmes valeurs que $U_n(x)$ sur γ et est sa plus petite majorante harmonique sur d', pour obtenir

$$U_n(x) \leqq -\alpha\,\mu_n(d_1) + M,$$

dès que x est intérieur à γ et en particulier s'il est dans d_1. L'inégalité (9) est établie.

Il en résulte que les fonctions $U_n(x)$ formées, ainsi qu'il a été indiqué, à partir de la suite des dérivées partielles de $f(x, y)$ prises pour $y = y_0$ satisfont à (9) dans tout domaine d_1 intérieur à un domaine d d'intersection du domaine d'holomorphie D avec le plan $y = y_0$. Dans ces conditions, deux éventualités sont possibles :

a. ou bien $\mu_n(d_1) \to \infty$. Dans ces conditions $U_n(x)$ tend vers $-\infty$ uniformément dans d_1; la fonction de deux variables $f(x, y)$ n'a pas de singularité dans la région $x \subset d_1$, $|y| < \infty$; les fonctions $f(x_0, y)$ où x a une valeur fixée x_0 intérieure à d, sont entières en y.

b. ou bien $\overline{\lim}\,\mu_n(d_1) = K$, K étant fini. Dans ces conditions $f(x_0, y)$ a des singularités à distance finie au-dessus du domaine $x \subset d$, et il en est de même de $f(x, y)$.

Plaçons-nous dans ce dernier cas : d'après la remarque qui précède le théorème 2, en un point x_0 de d_1, on a, pour une suite infinie d'indice n_k

$$\text{(11)} \qquad U_{n_k}(x_0) \geqq -\log\delta - \varepsilon,$$

δ étant la plus courte distance des points du domaine $[x \subset d, y = y_0]$ à l'ensemble singulier S de $f(x, y)$, distance prise parallèlement aux plans $x = \text{const.}$; ε est un nombre positif quelconque. On déduit, en comparant (9) et (11),

$$\mu_{n_k}(d_1) \leqq \frac{1}{\alpha}[\log \delta + \varepsilon - \mathrm{M}]. \tag{12}$$

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 4. — *La fonction $f(x, y)$ étant holomorphe dans un voisinage* D *du domaine plan fermé $x \subset d$, $y = y_0$, si l'on désigne par $\nu(n)$ le nombre des points d'intersection de la variété $\varphi_n(x, y) = 0$ avec le plan $y = y_0$ qui sont situés sur d, dès qu'il existe une singularité de $f(x, y)$ située à distance finie qui se projette sur le plan $y = y_0$ à l'intérieur de d, on a*

$$\underline{\lim} \frac{\nu(n)}{n} < \mathrm{A},$$

A *étant une constante qui dépend essentiellement de la distance de l'ensemble* S *au domaine d, prise parallèlement au plan* $x = \text{const.}$

Si l'on a $\lim \frac{\nu(n)}{n} = \infty$, *la fonction $f(x, y)$ n'a aucune singularité au-dessus du domaine d à distance finie.*

Dans le cas où $f(x, y)$ possède des singularités à distance finie au-dessus de d, la recherche de celles-ci à partir du développement (3) peut se faire en supprimant de (3) toutes les suites partielles pour lesquelles $\frac{\nu(n)}{n}$ augmente indéfiniment : on est ainsi ramené à n'opérer que sur une suite de fonctions sous-harmoniques qui sont non seulement bornées, mais encore de masses totales bornées dans leur ensemble.

Nous reviendrons au Chapitre II sur cette étude. Mais nous pouvons conclure dès maintenant en ce qui concerne la convergence du développement de Hartogs

$$f(x, y) = \sum_0^\infty \mathrm{A}_n(x)(y - y_0)^n. \tag{3}$$

Dans le cas où les $\mathrm{A}_n(x)$ sont les fonctions déduites des dérivées partielles $\varphi_n(x, y)$ d'une fonction supposée holomorphe dans le voisinage d'un domaine $[x \subset d, y = y_0]$, tout domaine dicylindrique $\left[x \subset d, |y - y_0| < \frac{1}{B}\right]$ qui ne contient pas de points de S est, d'après la remarque qui suit le théorème 1 un domaine de convergence uniforme. Donc, le domaine total de convergence uniforme du développement de Hartogs, si l'on entend ainsi le domaine dont tout sous-domaine fermé est un domaine de convergence uniforme, est le plus grand domaine semi-cerclé [1] défini par $[x \subset d, |y - y_0| < R(x)]$ ne contenant pas de points de S.

La fonction $R(x)$ est donc la distance comptée parallèlement au plan $x = 0$ du point $[x, y_0]$ de d à l'ensemble S; il y a sur chacun des cercles $[x, |y - y_0| = R(x)]$ un point de cet ensemble. Nous retrouvons ainsi simplement comme conséquence des propriétés de la suite des dérivées partielles considérées, une propriété essentielle [2] de la série de Hartogs d'une fonction de deux variables qui la rapproche du développement de Taylor d'une fonction d'une seule variable.

La fonction $R(x)$, qui définit pour $x \subset d$ la frontière du domaine semi-cerclé de convergence uniforme, représente donc une distance parallèlement à un plan fixe d'un point d'une région plane à l'ensemble fermé S. Elle est semi-continue inférieurement : si $x' \to x$, on a

$$\underline{\lim}\, R(x') = R(x).$$

Dans le Mémoire fondamental cité, Hartogs a construit la fonction $R(x)$ à partir de la fonction $\rho(x)$ rayon de convergence de la série de Taylor obtenue en donnant à x une valeur constante. On a

$$-\log \rho(x) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, U_n(x) = U(x).$$

Nous énoncerons sous la forme suivante un résultat qui découle, sans modification importante, de la démonstration de Hartogs :

---

(1) Nous appelons domaine semi-cerclé, de plan de symétrie $y = y_0$ un domaine défini par le crochet, d étant une région connexe du plan $y = y_0$, $R(x)$ une fonction quelconque.

(2) F. Hartogs, *Math. Ann.*, t. 62, 1906, p. 1. Le résultat est énoncé par M. H. Cartan (*Journal de Mathématiques*, t. 10, 1931, p. 36), et obtenu par une méthode différente.

Si les $U_n(x)$ *sont des fonctions sous-harmoniques uniformément bornées dans un domaine d ouvert, et si dans un sous-domaine* d_1 *de d on a* $U(x) \leqq A$ *l'inégalité* $U_n(x) \leqq A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *est vérifiée pour* $n > N(\varepsilon)$ *quel que soit x pris dans le domaine* d_1.

Cet énoncé entraîne évidemment que $R(x)$ soit égal à la borne inférieure de $\rho(x)$ au voisinage de la valeur considérée, ou encore, puisque $\rho(x) \geqq R(x)$, que l'on ait $R(x) = \underline{\lim}_{x' \to x} \rho(x')$.

Définition. — Nous appellerons *régularisée* de la limite supérieure $U(x) = \overline{\lim}_{n=\infty} U_n(x)$, la fonction

$$V(x) = \overline{\lim}_{x' \to x} U(x').$$

Le théorème de Hartogs entraîne alors la propriété suivante :

Le domaine de convergence uniforme du développement de Hartogs est déterminé par $|y - y_0| < e^{-V(x)}$, $V(x)$ *étant la régularisée de la limite supérieure de la suite* $U_n(x)$.

Remarque. — L'inégalité $\rho(x) \geqq R(x)$ entraînant $U(x) \leqq V(x)$, la régularisée de $U(x)$ est en même temps sa plus petite majorante semi-continue supérieurement. La propriété $U(x) \leqq V(x)$ est en défaut pour une suite de fonctions continues quelconques, comme le montrent des exemples simples. Mais elle subsiste pour une suite de fonctions sous-harmoniques de forme quelconque :

THÉORÈME 5. — *Si* $U_n(x)$ *est une suite de fonctions sous-harmoniques bornées dans d la limite supérieure* $U(x)$ *de la suite et sa régularisée* $V(x)$ *satisfont à l'inégalité* $U(x) \leqq V(x)$ *en tout point intérieur à d.*

Sinon, il existerait un point $x_0 \subset d$ en lequel on aurait simultanément $V(x_0) = A$, $U(x_0) \geqq A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Il existe alors une suite partielle infinie d'indices n_k pour laquelle

$$U n_k(x_0) \geqq A + \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

dès que $n_k \geqq N$. Mais la définition $A = \overline{\lim}\, U(x)$ quand $x \to x_0$ entraîne l'existence d'un cercle $|x - x_0| \leqq \rho$ en tout point duquel on ait, sauf en x_0 peut-être, l'inégalité

$$U(x) \leqq A + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

Les inégalités (13) et (14) sont incompatibles si les $U_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble par un nombre M.

En effet, soit $2\pi\omega_n$, la mesure angulaire de l'ensemble des points de la circonférence $|x - x_0| = \rho$ en lesquels $U_n(x) \geqq A + \frac{\varepsilon}{2}$: sur cet ensemble, on a $U_n(x) \leqq M$ et sur l'ensemble complémentaire

$$U_n(x) < A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$U_n(x_0) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(x_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi \leqq M\omega_n + (1 - \omega_n)\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{15}$$

Comparant avec (13), on obtient

$$A + \frac{3\varepsilon}{2} \leqq M\omega_{n_k} + (1 - \omega_{n_k})\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \omega_{n_k} \geqq \frac{\varepsilon}{4(M - A)}.$$

Il existe donc pour une infinité de valeurs de n un ensemble e_n de la circonférence $|x - x_0| = \rho$, de mesure bornée inférieurement, sur lequel $U_n(x) > A + \frac{\varepsilon}{2}$. L'ensemble des points communs à une infinité d'entre eux n'est donc pas vide : en un point x de la circonférence on a $U(x) \geqq A + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui contredit (14) et démontre l'énoncé.

3. *Construction directe de la régularisée.* — Les opérations

$$U(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, U_n(x), \tag{16}$$

$$V(x) = \overline{\lim_{x' \to x}}\, U(x'), \tag{17}$$

déterminent $V(x)$ à partir de la suite $U_n(x)$. Mais $V(x)$ est ainsi défini à partir de la fonction $U(x)$ laquelle est en général complètement discontinue. En vue d'établir une propriété simple et essentielle de $V(x)$, nous utiliserons la suite

$$(18) \qquad V_n^r(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} U_n(x + t e^{i\varphi})\, t\, dt\, d\varphi,$$

obtenue en substituant à chaque fonction $U_n(x)$ sa moyenne dans un cercle C de centre x, de rayon $r > 0$. L'avantage dans la recherche de la fonction limite supérieure apparaît immédiatement :

Lemme 1. — *Si* $U_n(x)$ *est une suite de fonctions sous-harmoniques bornées par* M *sur* d, *la suite de leurs moyennes* $V_n^r(x)$ *constitue, à l'intérieur de* d, *une famille également continue.*

En effet, si $x = u_1 + iu_2$, on a

$$\frac{\partial V_n^r}{\partial u_1} = \frac{1}{\pi r^2} \int_C U_n(x)\, du_2 = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} U_n(x + t e^{i\varphi})\, d\varphi \leqq \frac{2M}{r}.$$

Un calcul analogue borne $\frac{\partial V_n^r}{\partial u_2}$, ce qui démontre le lemme.

Posons $V^r(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} V_n^r(x)$. La fonction $V^r(x)$ est obtenue comme limite de la suite non croissante des fonctions

$$W_p^r(x) = \max V_n^r(x) \qquad \text{pour } n \geqq p.$$

L'ensemble des fonctions $V_n^r(x)$, $W_p^r(x)$ possède une égale continuité; $V^r(x) = \lim_{p=\infty} W_p^r(x)$ est une fonction continue. Elle est de plus sous-harmonique comme les fonctions $V_n^r(x)$, $W_p^r(x)$ elles-mêmes, la suite $W_p^r(x)$ étant non croissante. En résumé, l'opération

$$(19) \qquad V^r(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} V_n^r(x)$$

fournit une limite supérieure qui est encore sous-harmonique.

Supposons maintenant que r décroisse et tende vers zéro. La suite des fonctions $V^r(x)$ est non croissante : elle a donc une limite sous-harmonique que nous noterons :

$$(20) \qquad V^0(x) = \lim_{r=0} V^r(x).$$

La semi-continuité supérieure de $V^0(x)$ la rapproche de $V(x)$. Nous allons établir en effet que ces deux fonctions coïncident, ce qui démontrera en retour la sous-harmonicité de la régularisée $V(x)$.

THÉORÈME 6. — *Si* $U_n(x)$ *est une suite de fonctions sous-harmoniques uniformément bornées dans* d, *la régularisée* $V(x)$ *de* $\overline{\lim}\, U_n(x)$ *coïncide dans l'intérieur du domaine* d *avec la fonction* $V^0(x)$ *définie à partir de la suite des moyennes* (18) *par les opérations* (19) *et* (20).

La démonstration de l'égalité $V(x) = V^0(x)$ comprend deux parties :

a. $V^0(x) \geqq V(x)$. On a en effet

$$V_n^r(x) \geqq U_n(x) \qquad \text{pour } r > 0.$$

D'où

$$V^r(x) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, V_n^r(x) \geqq \overline{\lim_{n=\infty}}\, U_n(x) = U(x).$$

La fonction $V^r(x)$ est continue; par suite, l'inégalité $V^r(x) \geqq U(x)$ donne après la régularisation $V^r(x) \geqq V(x)$ quel que soit r. Quand r tend vers zéro, cette inégalité entraîne *a*.

b. $V^0(x) \leqq V(x)$. Si l'inégalité est inexacte à l'intérieur de d, il existe un point x_0 intérieur à d en lequel

$$V^0(x_0) = A, \qquad V(x_0) < A - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Traçons du point x_0 comme centre un cercle de rayon assez petit pour que, d'une part, il soit tout entier contenu dans d, et que, d'autre part, la fonction $V(x)$ qui est semi-continue supérieurement satisfasse sur ce cercle C, circonférence comprise, à l'inégalité

$$V(x) < V(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} < A - \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{21}$$

Nous allons mettre cette inégalité en contradiction avec l'égalité $V^0(x_0) = A$. Cette dernière détermine $V^r(x_0) \geqq A$ pour $r > 0$. Prenons r égal au rayon du cercle C. Puisque $V^r(x_0) = \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, V_n^r(x_0)$, il existe une suite partielle infinie telle que l'on ait

$$V_{n_k}^r(x_0) \geqq A - \frac{\varepsilon}{4}.$$

On aura donc

$$I_{n_k}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{n_k}(x_0 + r\, e^{i\varphi})\, d\varphi \geqq V_{n_k}^r(x_0) \geqq A - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Majorons l'intégrale suivant un procédé employé plus haut; $2\pi\omega_{n_k}$ étant la mesure de l'ensemble situé sur le cercle C et en lequel $U_{n_k}(x)$ surpasse $A - \frac{\varepsilon}{2}$, M étant une borne des $U_n(x)$, on aura

$$A - \frac{\varepsilon}{4} \leqq M\omega_{n_k} + (1 - \omega_{n_k})\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \omega_{n_k} \geqq \frac{\varepsilon}{4\left(M - A + \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

L'ensemble $U_{n_k}(x) > A - \frac{\varepsilon}{2}$ a une mesure bornée inférieurement. Il existe donc un ensemble de mesure positive sur C en lequel $U(x) \geqq A - \frac{\varepsilon}{2}$. Cet ensemble a certainement un point limite x' sur C. En ce point $V(x')$ est au moins égal à $A - \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (21).

En tout point intérieur de d, a et b sont réalisés et entraînent l'égalité $V(x) = V^0(x)$. Il en résulte :

THÉORÈME 7. — *Si* $U_n(x)$ *est une suite de fonctions sous-harmoniques définies dans un domaine ouvert d, uniformément bornées dans tout sous-domaine fermé de d, la plus petite majorante semi-continue supérieurement de* $U(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} U_n(x)$ *est une fonction sous-harmonique.*

Relativement à la frontière du domaine semi-cerclé de convergence de la série de Hartogs, nous énoncerons :

THÉORÈME 8. — *La fonction* $R(x)$ *qui détermine le domaine de convergence uniforme* $[x \subset d, |y - y_0| < R(x)]$ *du développement de Hartogs est telle que* $V(x) = -\log R(x)$ *soit sous-harmonique.*

La réciproque sera démontrée au Chapitre II.

Cas où $V(x)$ *est continue* : Supposons $V(x_0) = A$ et $V(x)$ continue au point x_0. Il existe un cercle $|x - x_0| \leqq \rho$ à l'intérieur duquel on a $|V(x) - A| < \eta$, η donné positif. D'où

$$U(x) \leqq V(x) \leqq A + \eta$$

et le théorème de Hartogs nous montre que l'on a $U_n(x) < A + 2\eta$ ou encore $U_n(x) < V(x) + 3\eta$ dans le même cercle pour $n > N(\eta)$.

THÉORÈME 9. — *Si la limite supérieure régularisée* $V(x)$ *d'une suite de fonctions sous-harmoniques* $U_n(x)$ *est continue dans* d, *il n'existe, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *qu'un nombre fini de fonctions* $U_n(x)$ *qui puissent surpasser la fonction* $V(x) + \varepsilon$ *dans* d.

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de points x_n et de fonctions U_n, tels que $U_n(x_n) > V(x_n) + \varepsilon$. Nous pouvons supposer, après extraction d'une suite partielle, que x_n tende vers un point x_0 intérieur à d.

En ce point $V(x)$ est continue. On est ainsi en contradiction avec l'inégalité $U_n(x) < V(x) + \varepsilon$, $\varepsilon = 3\eta$, qui est vérifiée pour

$$n > N(\eta), \qquad |x - x_0| \leqq \rho.$$

La conclusion s'exprime simplement au moyen de la fonction

$$\beta_n(x) = U_n(x) - V(x).$$

Soit

$$\beta_n^+(x) = \beta_n(x) \quad \text{si } \beta_n(x) > 0, \qquad \beta_n^-(x) = 0 \quad \text{si } \beta_n(x) \leqq 0.$$

Le théorème 9 est équivalent à l'énoncé suivant :

Dans tout domaine où la limite supérieure régularisée de la suite $U_n(x)$, *est continue, les fonctions* $\beta_n^+(x)$ *convergent uniformément vers zéro.*

REMARQUE. — La continuité de $V(x)$ n'entraîne pas celle de $U(x)$. Ainsi la suite

$$U_n(x) = \frac{1}{4^n} \sum_{p=1}^{p=2^n} \log\left|x - \frac{p}{2^n}\right| + \log|x|$$

a pour limite supérieure régularisée la fonction $V(x) = \log|x|$ cependant que $U(x) = -\infty$ pour tous les nombres du segment $0,1$ qui s'écrivent dans le système de base 2 avec un nombre fini de chiffres.

4. *Propriétés de la fonction* $U(x)$. — L'étude des points x en lesquels $U(x) < V(x)$ est d'intérêt secondaire pour l'étude du domaine de convergence de la série de Hartogs. En un tel point, l'inégalité $\rho(x) > R(x)$ montre seulement qu'il existe une couronne

$$\rho(x) \leqq |y - y_0| < R(x)$$

que nous appellerons une *épine de longueur* $R - \rho$ sur laquelle le développement définit encore une fonction holomorphe *d'une seule variable*. Mais ces épines joueront un rôle essentiel au Chapitre III dans l'étude des fonctions entières.

Parmi les points x projections d'épines, les plus remarquables sont ceux en lesquels $U(x) = -\infty$. Nous limiterons leur ensemble en exprimant une propriété de sa capacité.

a. La capacité d'un ensemble formé par un domaine fermé G, borné, limité par des courbes dont la tangente varie continûment ou par une somme de tels domaines disjoints s'obtient à partir de la fonction de Green $g(x, \infty)$ du domaine complémentaire, relativement au point ∞ du plan.

On a, quand $|x| \to \infty$,

$$g(x, \infty) \sim \log|x| + \gamma + \varepsilon\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

et la capacité de G sera par définition $C = e^{-\gamma}$, γ est la constante de Robin de G.

b. Un ensemble borné quelconque et fermé, G s'obtient comme limite d'une suite décroissante de domaines G_n du type précédent. Par définition, sa capacité est la limite de la suite des capacités $C(G_n)$ lesquelles forment une suite non croissante.

c. Si E est un ensemble quelconque, la borne inférieure des capacités des ensembles fermés qui le contiennent sera appelée la capacité extérieure de E, la borne supérieure des ensembles fermés qui sont contenus dans E sera appelée la capacité intérieure de E, et l'on parlera de la capacité de E sans plus, quand on les supposera égales.

Nous considérerons tout particulièrement des ensembles de capacité nulle : un tel ensemble est de mesure linéaire nulle, et même de mesure λ dimensionnelle nulle quel que soit λ.

LEMME 1. — *Soit* $S(x) = \int d\mu(a) \log|x - a|$ *un potentiel dû à des masses* $\mu(a)$ *positives. L'ensemble* E *des points du plan en lesquels on a* $S(x) \leq \alpha$, α *quelconque, est de capacité au plus égale à* $e^{\frac{\alpha}{\mu}}$ *s'il porte la masse totale* μ.

En effet $S(x)$ est harmonique régulière à l'extérieur de E. Les courbes $S(x) = \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, sont de nature régulière; elles limitent le domaine G formé des points où $S(x) > \alpha + \varepsilon$. Ce domaine contient le point à l'infini comme point intérieur. Quand $|x|$ tend vers l'infini, la fonction $S(x)$ est équivalente à $\mu \log|x| + \varepsilon\left(\frac{1}{|x|}\right)$. La fonction

$$g(x) = \frac{1}{\mu}[S(x) - \alpha - \varepsilon]$$

est donc la fonction de Green du domaine G relativement au point à l'infini, et comme E est intérieur au domaine complémentaire $\overline{G}$ on a, pour sa capacité C(E),

$$C(E) \leqq C(\overline{G}) \leqq e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\mu}} \qquad \text{quel que soit } \varepsilon.$$

Par suite $C(E) \leqq e^{\frac{\alpha}{\mu}}$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2. — *Si α est négatif, l'ensemble* E *en lequel on a* $S(x) \leqq \alpha$ *a une capacité* C(E) *au plus égale à* $e^{\frac{\alpha}{\mu}}$, *μ étant la masse totale de la distribution.*

A l'encontre du lemme précédent, l'énoncé ne suppose pas la connaissance de la position des masses par rapport à l'ensemble E.

Appelons μ' la masse totale du potentiel qui est extérieure à E. On peut, sans modifier le potentiel sur E, opérer un balayage extérieur de ces masses et remplacer ces masses par une couche convenable étalée sur la frontière de E. Dans cette opération, les masses μ' ne sont pas augmentées. Soit donc $\mu_1 \leqq \mu$ la masse totale après le balayage, $S_1(x)$ le nouveau potentiel. L'ensemble $S_1(x) < \alpha + \varepsilon$ contient E et porte la masse totale μ_1. On a donc : $C(E) \leqq e^{\frac{\alpha}{\mu_1}}$. Or $\alpha < 0$, $0 < \mu_1 \leqq \mu$ entraînent $\frac{\alpha}{\mu_1} \leqq \frac{\alpha}{\mu}$ et par suite $C(E) \leqq e^{\frac{\alpha}{\mu}}$.

LEMME 3. — *Soit* $S_n(x)$ *une suite de potentiels de masses totales* μ_n *bornées uniformément par un nombre* μ; *l'ensemble* E *des points en lesquels la fonction* $S(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} S_n(x)$ *satisfait à une condition* $S(x) < -\beta$, $\beta > 0$, *est de capacité intérieure au plus* $e^{-\frac{\beta}{\mu}}$.

Désignons par e_n l'ensemble des points du plan déterminés par la condition $S_n(x) < -\beta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $-\beta + \varepsilon < 0$. Un point x de E appartient à tous les e_n d'indices supérieurs à $N(x)$. Pour construire E à partir des ensembles e_n, formons d'abord les ensembles e'_p constitués par l'intersection de tous les e_n d'indices au moins égaux à p. La capacité des ensembles e_n est bornée par $e^{\frac{-\beta+\varepsilon}{\mu}}$ d'après le lemme 2; il en est donc de même de celle des ensembles e'_p quel que soit p. La suite des ensembles e'_p est non décroissante et finit par contenir tout point de E. Donc, un sous-ensemble fermé de E a une capacité qui ne peut dépasser $e^{\frac{-\beta+\varepsilon}{\mu}}$, si petit que soit ε. La capacité intérieure de E est donc au plus $e^{-\frac{\beta}{\mu}}$ ce qui démontre le lemme.

Remarque. — Dans le cas où les $S_n(x)$ sont des potentiels obtenus, à partir d'une suite de fonctions analytiques, par le procédé employé plus haut, on peut appliquer le lemme 1 au lieu du lemme 2 aux ensembles e_n. On a, en effet, en tout point x qui porte une masse positive, $S_n(x) = -\infty$. Le lemme 3 est alors valable quel que soit le signe de β.

THÉORÈME 10. — *Soit $U_n(x)$ une suite de fonctions sous-harmoniques bornées dans un domaine d et soit $U(x) = \overline{\lim}_{n=\infty} U_n(x)$: ou bien l'ensemble des points en lesquels $U(x) = -\infty$ est de capacité intérieure nulle à l'intérieur de d, ou bien $U_n(x)$ tend uniformément vers $-\infty$ dans tout domaine intérieur à d.*

Par ensemble de capacité nulle à l'intérieur d'un domaine d nous entendons un ensemble dont l'intersection avec tout sous-domaine intérieur de d est constitué par un ensemble de capacité nulle.

Soit d_1 un sous-domaine intérieur de d. Traçons dans $d - d_1$ des arcs γ enfermant à leur intérieur un domaine d_2 $(d_1 \subset d_2 \subset d)$ et soit $g(x, a)$ la fonction de Green de d_2. Reprenons la décomposition déjà utilisée

$$U_n(x) = H'_n(x) - \int_{d_2} d\mu_n(a) g(x, a). \tag{10}$$

Les fonctions $H'_n(x)$ sont harmoniques dans d_2 et y sont bornées supérieurement. Donc, ou bien elles tendent vers $-\infty$ uniformément dans $d_1 \subset d_2$, ou bien il existe une suite partielle $H_{n_k}(x)$ bornée inférieurement dans d_2. Dans la première éventualité, l'énoncé est établi, car on a $U_n(x) \leqq H'_n(x)$ et ces fonctions tendent uniformément vers $-\infty$ dans d_1. Dans la seconde, deux cas sont encore à distinguer : ou bien $\mu_{n_k}(d_2)$ augmente indéfiniment et alors, d'après (9), $U_{n_k}(x)$ converge uniformément vers $-\infty$ dans d_1; on retrouve alors le premier cas de l'énoncé, ou bien il existe une suite partielle infinie d'indices n' extraite de la suite d'indices n_k et telle que $\mu_{n'}(d_2)$ ait une borne supérieure finie. Dans ce cas, nous allons montrer que l'ensemble des points de d_2, en lesquels $U(x) = -\infty$ est de capacité intérieure nulle. Soient

$$u(x, a) = -g(x, a) - \log|x-a|,$$

$$U_{n'}(x) = H_{n'}(x) + \int_{d_2} d\mu_{n'}(a)\, u(x, a) + \int_{d_2} d\mu_{n'}(a) \log|x-a|.$$

La fonction $u(x, a)$ est harmonique dans d_2. Elle y satisfait à l'inégalité $u(x, a) > -\log k$, k étant une borne supérieure du plus grand diamètre de d_2. Nous prendrons $k > 1$.

Dans ces conditions, on a

$$\overline{\lim}\, U_{n'}(x) \geqq m - \mu \log k + \overline{\lim} \int_{d_2} d\mu_{n'}(a) \log|x-a|.$$

Appliquons le lemme 3 à la limite supérieure : β étant un nombre positif, on a

$$(22) \qquad U(x) \geqq m - \mu \log k - \beta,$$

sauf sur un ensemble de capacité intérieure au plus $e^{-\frac{\beta}{\mu}}$. Si l'on considère des valeurs indéfiniment croissantes de β, la seconde éventualité de l'énoncé est établie. Elle exige la présence d'une suite partielle infinie pour laquelle on ait à la fois $H'_n(x) > m$, et $\mu_n < \mu$ dans un domaine intérieur à d. Nous dirons qu'une telle suite est une suite principale. L'énoncé obtenu nous permet de compléter le théorème 4. En effet, si $f(x, y)$ est holomorphe dans un voisinage du domaine plan $x \subset d$, $y = y_0$, les fonctions $U_n(x)$ déduites de la suite des dérivées partielles pour $y = y_0$ satisfont aux hypothèses du théorème précédent. Le théorème 10 permet alors de résoudre la question suivante : sur quel ensemble de valeurs de x la fonction $f(x, y)$ de la *seule variable* y est-elle une fonction entière de y, sans l'être pour toutes les valeurs de x appartenant à d ? Si pour $x = x_0$, $f(x_0, y)$ est entière, on a $U(x_0) = -\infty$, et l'on est ainsi conduit à énoncer :

THÉORÈME 11. — *Une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans un voisinage du domaine plan $[x \subset d, y = y_0]$ ou bien est fonction entière de y quel que soit x intérieur au domaine d, ou bien n'est fonction entière de y que pour un ensemble* E *de valeurs de x de capacité intérieure nulle dans d.*

S'il existe un point singulier de $f(x, y)$ situé à distance finie et qui se projette à l'intérieur de d sur le plan $y = y_0$, la première éventualité est à écarter, car elle entraîne $V(x) = -\infty$ et par suite l'absence d'une telle singularité pour la fonction de deux variables $f(x, y)$. D'où :

S'il existe à distance finie un point singulier $[x = x_s \subset d, y = y_s]$ de $f(x, y)$ supposée holomorphe dans un voisinage du domaine plan $[x \subset d, y = y_0]$, la fonction $f(x, y)$ de la seule variable y n'est entière que pour un ensemble de valeurs de x de capacité intérieure nulle dans d.

Épines. — Nous avions appelé, à la suite d'un énoncé précédent, épines du domaine semi-cerclé de convergence les couronnes

$$[x_1 \subset d,\ R(x_1) \leqq |y - y_0| < \rho(x_1)]$$

sur lesquelles la série $\Sigma A_n(x_1, y_0)(y - y_0)^n$ converge encore pour la valeur x_1 considérée. Si l'on donne à x cette valeur fixe, le développement de Hartogs n'est autre alors que le développement de Taylor de la fonction d'une seule variable $f(x_1, y)$. Ainsi donc les épines sont les couronnes de centre y_0 dans les plans $x = \text{const.}$, sur lesquelles la fonction $f(x, y)$ est prolongée à travers son ensemble singulier par une fonction d'une seule variable $f(x, y)$. Nous laisserons de côté, dans ce mémoire, la recherche plus générale des variétés caractéristiques — c'est-à-dire définie en annulant une fonction holomorphe $g(x, y)$ de deux variables — le long desquelles $f(x, y)$ peut être prolongée à travers son ensemble singulier au moyen d'une fonction $\psi(t)$ analytique de la variable t, paramètre d'uniformisation locale de la variété $g(x, y) = 0$. Les épines sont les couronnes de centre $y = y_0$ dans les plans $x = \text{const.}$, qui appartiennent à cet ensemble de variétés caractéristiques. Cette nouvelle définition montre que l'existence d'une épine est relative à la fonction $f(x, y)$ et non au développement de cette fonction en série de Hartogs.

Le théorème 11 établit en particulier que les épines de longueur infinie forment en projection un ensemble de capacité intérieure nulle.

Ensemble $V(x) = -\infty$. — Plaçons-nous toujours dans un domaine $x \subset d$, où l'on n'a pas $V(x) = -\infty$ en tout point. L'ensemble des valeurs de x rendant entière la fonction $f(x, y)$ comprend, en plus des points correspondant à une épine de longueur infinie, des points en lesquels $R(x) = \infty$, $V(x) = -\infty$: $V(x)$ étant semi-continue supérieurement est continue en un tel point x_0, et le plan $x = x_0$ est asymptote à la frontière du domaine semi-cerclé H

$$[x \subset d,\ |y - y_0| < R(x)].$$

Nous dirons que le point x_0 correspond à une pointe à l'infini du domaine H.

Certaines de ces pointes à l'infini se projettent suivant un ensemble dénombrable de valeurs de x. Ce sont celles x_i pour lesquelles on a

$$\varliminf \frac{V(x)}{\log|x - x_i|} \geqq h_i, \qquad \text{quand} \quad |x - x_i| \to 0,$$

h_i étant un nombre positif quelconque.

La condition (22) entraîne l'existence d'un nombre r_i tel que, pour $|x - x_i| \leqq r_i$, on ait, ε étant donné ($\varepsilon > 0$, $h_i - 2\varepsilon > 0$, $r_i < 1$),

$$U(x) \leqq V(x) \leqq (h_i - \varepsilon) \log|x - x_i|,$$

$$U_n(x) \leqq (h_i - \varepsilon) \log|x - x_i| + \eta \qquad (\eta > 0), \tag{24}$$

à partir d'un certain rang. Considérons en particulier une suite principale que nous représenterons encore par $U_n(x)$. La démonstration du théorème 10 prouve que, si une suite $U_n(x)$ est principale, alors dans la décomposition

$$U_n(x) = H_n(x) + \int_d d\mu_n(a) \log|x-a|, \tag{25}$$

les fonctions $H_n(x)$ harmoniques à l'intérieur de d sont bornées inférieurement par un nombre m dans tout domaine d_1 intérieur à d. Prenons pour domaine d le cercle $|x - x_i| \leqq \rho$, soit γ_i. Montrons que, si $\mu_n(r)$ désigne la masse de $U_n(x)$ à l'intérieur du cercle $|x - x_i| \leqq r$, $\overline{\lim}_{n=\infty} \mu_n(r)$ est au moins égal à h_i quel que soit r. En effet, $\mu_n(r) \leqq h_i - 2\varepsilon$ entraîne, si $r < \rho$ grâce à (24),

$$\begin{aligned} I_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(x_i + r e^{i\theta})\, d\theta \\ &\geqq \mu_n(r)\log r + \int_{r<|a-x_i|<\rho} d\mu_n(a)\log|a - x_i| + m, \\ I_n(r) &\geqq (h_i - 2\varepsilon)\log r + m, \end{aligned}$$

qui contredit (23) pour r pris inférieur à une valeur r_0 indépendante de n. On a donc $\mu_n(r) \geqq h_i - 2\varepsilon$ pour $n > N$, $r < r_0$ quel que soit ε, N pouvant dépendre de r.

Supposons qu'en plusieurs points $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $V(x)$ tende vers $-\infty$ en satisfaisant à une condition (23).

Entourons chacun de ces points d'un cercle γ_i de rayon r_i dont il est le centre. On choisira les r_i assez petits pour que ces cercles soient étrangers les uns aux autres. On a alors $\sum_i \mu_n(\gamma_i) \geqq \sum h_i$ pour la suite principale considérée et n supérieur à une certaine valeur. Il n'y a donc qu'un nombre fini de points x_i de la nature indiquée pour lesquels $h_i > h$, à savoir au plus $p \leqq \frac{\mu}{h}$ de tels points, μ étant une borne de la masse totale $\mu_n(d)$ pour une suite principale à l'intérieur du domaine d considéré.

Les points x_i en lesquels $V(x)$ tend vers l'infini en satisfaisant à une condition (23) forment donc un ensemble dénombrable dans tout domaine intérieur à d.

5. La considération de la suite principale de masse bornée μ dans un domaine d_1 intérieur à d permet de compléter le théorème 11 quand $f(x, y)$ a un point singulier à distance finie au-dessus de d.

Désignons par E_h, l'ensemble $U(x) < h$. Quand h tend vers $-\infty$, la capacité de E_h tend vers zéro. Si nous reprenons le résultat donné par (22), en posant $m - \mu \log k - \beta = h$, on aura l'énoncé suivant :

Dans un domaine d_1 intérieur à d, la capacité intérieure de l'ensemble $U(x) < h$, $(h < 0)$, *est au plus*

$$C_h = k\, e^{\frac{h-m}{\mu}}, \tag{26}$$

k étant une borne supérieure, plus grande que 1, du diamètre d'un domaine intermédiaire $d_2 (d_1 \subset d_2 \subset d)$, μ une borne supérieure de la masse d'une suite principale dans d_2, m une borne inférieure dans d_1 des fonctions harmoniques de la décomposition (10) faite dans le domaine d_2. Nous énoncerons :

Théorème 12. — *Si la fonction $f(x, y)$ possède un point singulier à distance finie au-dessus du domaine $[x \subset d, y = y_0]$, la capacité C_h de l'ensemble $U(x) \leqq h$ tend vers zéro quand h décroît indéfiniment. On a, dans tout domaine intérieur à d,*

$$|\log C_h| > |h| (A + \varepsilon_h) \qquad (\varepsilon_h \to 0), \tag{27}$$

A *est une constante.*

L'énoncé borne en projection l'ensemble des épines de longueur supérieure à L, dans le cas où $R(x)$ reste inférieur à un nombre R : il suffit alors de remplacer au second membre $|h|$ par $|\log(L + R)|$.

Étude d'un cas particulier. — Supposons que pour toute suite principale $\mu_n(d_1)$ tende vers zéro, pour tout domaine d_1 intérieur à d. Alors dans (26) on pourra remplacer μ par un nombre aussi petit qu'on veut. La capacité de E_h s'annule donc à partir d'une valeur finie de h. D'autre part, dans la décomposition (10), les potentiels

$$\int d\mu_n(a) \log |x - a|$$

tendent vers zéro, sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle E_0

dans d_2; $U(x)$ se réduit hors de E_0 à $\overline{\lim_{n=\infty}} H_n(x)$, donc à une fonction sous-harmonique continue qui coïncide avec $V(x)$. Ainsi $U(x) = V(x)$ sauf sur E_0 où l'on a $U(x) < V(x)$. D'où l'énoncé :

THÉORÈME 13. — *Dans les hypothèses du théorème 4, si l'on a*

$$\lim \frac{\nu(n)}{n} = 0,$$

les épines se projettent suivant un ensemble de capacité intérieure nulle.

Cet énoncé n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons établir. Nous suppposerons que, dans d, les fonctions d'ensemble $\mu_n(e)$ déterminées à partir de la suite des dérivées $\varphi_n(x, y_0)$ ont pour limite une fonction d'ensemble $\mu(e)$. La condition $\lim \mu_n(e) = 0$ entraîne des propriétés très particulières de la fonction $f(x, y)$. L'existence d'une limite, quand cette limite n'est pas identiquement nulle, est une condition de nature beaucoup plus générale. Ce cas n'en offre que plus d'intérêt en vue de la formation effective d'exemples de fonctions $f(x, y)$ à partir d'un développement de Hartogs et nous aurons à l'utiliser dans ce but. L'énoncé obtenu englobe des résultats partiels récents [1].

THÉORÈME 14. — *Soit* $U_n(x)$ *une suite de fonctions sous-harmoniques bornées supérieurement dans leur ensemble à l'intérieur de d; si les fonctions de masse* μ_n *relatives aux* $U_n(x)$ *convergent vers une fonction d'ensemble dans tout domaine intérieur à d, l'ensemble* E_0, *sur lequel* $U(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} U_n(x)$ *diffère de sa régularisée* $V(x)$, *est de capacité intérieure nulle à l'intérieur de d.*

L'énoncé entraîne que les épines sont projetées suivant un ensemble E_0 dont l'intersection avec un domaine fermé quelconque d_1 intérieur à d est de capacité intérieure nulle.

Soit d_2 un domaine intermédiaire $d_1 \subset d_2 \subset d$. Si la fonction limite μ est telle que $\mu(d_1)$ soit infini, $U_n(x)$ tend uniformément ainsi qu'on

(1) M. BRELOT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 836; H. DELANGE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 205, et *Ann. Éc. Normale*, t. 56, 1939, p. 229.

l'a vu vers $-\infty$: $U(x)=V(x)=-\infty$. L'ensemble E_0 est vide. Dans le cas contraire nous distinguerons plusieurs cas :

1° *Les fonctions $U_n(x)$ sont des potentiels bornés inférieurement d'une manière uniforme.* — Soient

$$U_n(x)=\int_{d_2} d\,\mu_n(a)\log|x-a|$$

et soit

$$V_1(x)=\int_{d_2} d\mu(a)\log|x-a|$$

le potentiel construit avec la fonction limite des fonctions de masses. Comme il est bien connu, on a $U(x)\leqq V_1(x)$.

Supposons $V_1(x)-U(x)\geqq\varepsilon>0$ sur un ensemble de capacité intérieure positive. La même inégalité est alors réalisée sur un ensemble fermé e_1 de capacité $c_1>0$. Chargeons-le de masses $\nu(a)$ réparties suivant la distribution d'équilibre de Robin-Frostmann, telle que le potentiel $\lambda(x)=\int d\nu(a)\log|x-a|$ ait pour valeur -1 sur e_1 sauf, peut-être sur un sous-ensemble e'_1, de capacité nulle. Le potentiel $\lambda(x)$ est borné et continu sauf sur e'_1. Mais e'_1, étant de capacité nulle, ne porte aucune masse dans la distribution μ_n, sinon on aurait $U_n(x_0)=-\infty$ en un point x_0 de e'_1, ce qui est contraire à l'hypothèse que $U_n(x)$ est borné inférieurement. Il n'en porte également pas dans la distribution limite μ, car on aurait en un point x_0 de e'_1, $V_1(x_0)=-\infty$ et par suite $U(x_0)=-\infty$, ce qui contredit la même hypothèse.

Les intégrales d'énergie

$$I_n=\int_{d_2} d\,\mu_n(a)\,\lambda(a),\qquad I=\int_{d_2} d\,\mu(a)\,\lambda(a)$$

ont un sens, l'ensemble des points de discontinuité de $\lambda(a)$ ne portant jamais de masses.

D'autre part, quand $\mu_n(a)$ tend vers $\mu(a)$, I_n a pour limite I. Le procédé de double intégration usuel dans la théorie du potentiel nous donne

$$I_n=\int_{d_3} d\,\mu_n(a)\int_{e_1} d\,\nu(x)\log|x-a|=\int_{e_1} d\,\nu(x)\,U_n(x),$$

$$I=\int_{e_1} d\,\nu(x)\,V_1(x),$$

de sorte que

$$\int_{e_1} d\nu(x)\,U_n(x) \to \int_{e_1} d\nu(x)\,V_1(x).$$

D'autre part $U(x)$ est sommable (elle est finie et elle est mesurable comme limite supérieure de fonctions mesurables). On a donc

$$\int_{e_1} d\nu(x)\,U(x) = \int_{e_1} d\nu(x)\,\overline{\lim_{n=\infty}}\,U_n(x) \geqq \overline{\lim_{n=\infty}}\int_{e_1} d\nu(x)\,U_n(x),$$

$$\int_{e_1} d\nu(x)\,U(x) \geqq \int_{e_1} d\nu(x)\,V_1(x),$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ et démontre l'énoncé dans le cas où les $U_n(x)$ sont des potentiels bornés inférieurement. La démonstration prouve que le potentiel $V_1(x)$ dû à la distribution limite est égal à la régularisée $V(x)$ de $U(x)$, puisque $V_1(x)$ et $V(x)$ possèdent tous deux la semi-continuité supérieure.

2° *Les* $U_n(x)$ *sont des fonctions sous-harmoniques bornées inférieurement.* — La décomposition

$$U_n(x) = H_n(x) + \int_{d_2} d\mu_n(a)\log|x-a|$$

donne une suite de fonctions harmoniques $H_n(x)$ bornées supérieurement et inférieurement dans tout domaine intérieur à d_2, donc également continues, et d'autre part une suite de potentiels bornés inférieurement. Montrons que l'ensemble des points en lesquels $U(x) < V(x) - \varepsilon$ est de capacité intérieure nulle dans d_1. A cet effet recouvrons d_1 par un nombre fini de cercles de rayon η assez petit pour que l'oscillation de la famille $H_n(x)$ soit, dans chacun de ces cercles, inférieure à $\frac{\varepsilon}{4}$; il nous suffit de montrer que dans l'un d'eux, soit γ_0, l'ensemble E_0 possède la propriété indiquée. Or

$$U(x) = \overline{\lim_{n=\infty}}\left[H_n(x) + \int_{d_2} d\mu_n(a)\log|x-a|\right],$$

$$U(x) \geqq \overline{\lim_{n=\infty}}\int_{d_2} d\mu_{n_k}(a)\log|x-a| + \lim H_{n_k}(x),$$

n_k étant les indices d'une suite partielle infinie quelconque. Choisissons cette suite de manière que, si x_0 est le centre de γ_0, on ait

$$\lim H_{n_k}(x_0) = \overline{\lim} H_{n_k}(x_0) = A.$$

On aura pour $n_k > N$, d'une part $|A - H_{n_k}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$, d'autre part

$$|H_{n_k}(x) - H_{n_k}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{pour} \quad x \subset \gamma_0,$$

d'après la définition du cercle γ_0. Par suite, dans γ_0,

$$\underline{\lim} H_{n_k}(x) \geqq A - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$U(x) \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \int_{d_2} d\mu_{n_k}(a) \log|x-a| + A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$U(x) \geqq \int_{d_2} d\mu(a) \log|x-a| + \overline{\lim} H_n(x) - \frac{3\varepsilon}{4},$$

sauf sur un ensemble e_0, de capacité intérieure nulle dans γ_0. D'autre part on a évidemment

$$\begin{aligned} U(x) &\leqq \overline{\lim} \int_{d_2} d\mu_n(a) \log|x-a| + \overline{\lim} H_n(x) \\ &\leqq \int_{d_2} d\mu\,(a) \log|x-a| + \overline{\lim} H_n(x) = S(x). \end{aligned}$$

La double inégalité

$$S(x) - \frac{3\varepsilon}{4} \leqq U(x) \leqq S(x),$$

la première étant réalisée seulement à l'ensemble e_0 près dans V_0, nous donne, $S(x)$ étant semi-continue supérieurement,

$$S(x) - \frac{3\varepsilon}{4} \leqq V(x) \leqq S(x)$$

et par suite

$$V(x) - U(x) < \frac{3\varepsilon}{4}$$

dans V_0, à l'ensemble e_0 près. L'énoncé est ainsi démontré quand les $U_n(x)$ sont bornés inférieurement. De plus, $V(x)$ est égal à

$$\int d\mu(a) \log|x-a| + \overline{\lim_{n=\infty}} H_n(x).$$

3° Pour passer au cas général, remarquons que l'on peut choisir le nombre négatif $-k$ assez grand en valeur absolue pour que l'ensemble e_k, en lequel on a $\mathrm{U}(x) < -k$, soit de capacité inférieure à un nombre donné ε.

Remplaçons $\mathrm{U}_n(x)$ par $\mathrm{U}'_n(x)$ enveloppe supérieure de $\mathrm{U}_n(x)$ et du nombre $-k$: hors de e_k, la fonction limite supérieure ainsi que sa régularisée sont les mêmes pour les deux suites, et l'inégalité $\mathrm{U}(x) < \mathrm{V}(x)$ ne peut avoir lieu que sur un ensemble de capacité nulle e_0. L'ensemble $e_0 + e_k$ a même capacité intérieure que e_k, capacité qui est arbitrairement petite. L'énoncé est donc démontré également dans ce cas.

Nous dirons, dans la suite de ce mémoire, qu'une propriété a lieu presque partout (1) à l'intérieur d'un domaine d si elle a lieu dans tout domaine intérieur à ce domaine, excepté sur un ensemble dont l'intersection avec tout domaine fermé intérieur à d est un ensemble de capacité intérieure nulle.

Dans les conditions du théorème 14 la fonction $\mathrm{U}(x)$ est égale presque partout dans d à sa régularisée.

Décomposition de la fonction $\mathrm{U}(x)$. — Dans un domaine d_2 intérieur à d la démonstration qui précède a fourni les décompositions

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{V}(x) = \overline{\lim}\, \mathrm{H}_n(x) + \int_{d_2} d\mu(a) \log|x-a|,\\ &\mathrm{U}(x) = \mathrm{V}(x) + \eta(x), \end{aligned}\right.$$

$\mathrm{V}(x)$ est une fonction sous-harmonique qui apparaît comme la somme d'une fonction sous-harmonique continue et d'un potentiel. $\mathrm{U}(x)$ est égale à $\mathrm{V}(x)$ augmentée d'une fonction $\eta(x)$ qui est négative ou nulle et nulle presque partout.

Cette décomposition met en évidence dans le cas particulier étudié les propriétés de la fonction discontinue $\mathrm{U}(x)$.

(1) La locution « presque partout » signifie donc dans ce Mémoire : presque partout *en capacité*.

CHAPITRE II.

SINGULARITÉS DE $f(x, y)$ A DISTANCE FINIE.

1. Nous avons établi, au théorème 8, une propriété du plus grand domaine ouvert dont tout sous-domaine fermé est domaine de convergence uniforme du développement de Hartogs (3) de $f(x, y)$ supposée holomorphe dans le voisinage du domaine plan $[x \subset d,\ y = y_0]$. Ce domaine ouvert, que nous continuerons d'appeler le domaine de convergence de (3) est défini par $[x \subset d,\ |y - y_0| < R(x)]$, où $V(x) = -\log R(x)$ est une fonction sous-harmonique.

Pour simplifier, nous appellerons *domaine* H un tel domaine semi-cerclé; il est caractérisé par sa trace d sur son plan de symétrie $y = y_0$ et par la fonction sous-harmonique $V(x)$ définie dans d.

La réciproque du théorème 8 s'énonce :

Théorème 15. — *Étant donné dans* E_4 *un domaine* H *défini par*

$$[x \subset d,\ |y - y_0| < R(x)], \qquad V_1(x) = -\log R(x),$$

$V_1(x)$ *étant une fonction sous-harmonique quelconque, il est possible de construire une fonction* $f(x, y)$ *dont le développement de Hartogs suivant les puissances de* $y - y_0$ *ait* H *comme domaine de convergence.*

Soit d_1 un domaine fermé intérieur au domaine ouvert d trace de H sur $y = y_0$. Dans d_1 nous représenterons $V_1(x)$ sous la forme

$$V_1(x) = H_1(x) + \int_{d_1} d\mu(a) \log|x - a|.$$

Nous construirons un premier développement $f_1(x, y)$ dont le domaine de convergence H sera défini par $[x \subset d_1,\ |y - y_0| < R(x)]$. Posons, à cet effet,

$$U_p^1(x) = H_1(x) + \int_{d_1} d\mu_p(a) \log|x - a|.$$

Les fonctions $\mu_p(a)$ convergeront vers $\mu(a)$ dans d_1 et seront en même temps de la forme particulière $\frac{1}{n}\log|P_n(x)|$, $P_n(x)$ étant un polynome. Pour les définir, traçons un quadrillage Q_n de côté $\frac{1}{2^n}$ dans le plan des x. Le sommet initial de ce quadrillage sera choisi de manière qu'aucune droite du quadrillage ne porte de masse dans la distribution; ce qui est possible, puisque les quadrillages qui portent une masse positive sont en infinité dénombrable. Au centre d'un carré C_i^n de Q_n plaçons une masse $\mu_n(C_i^n)$ égale à $\frac{p_{i,n}}{5^n}$, $p_{i,n}$ étant la partie entière de $5^n\mu(C_i^n)$. La fonction d'ensemble μ_n est ainsi définie pour toutes les mailles du quadrillage Q_n intérieures à d et l'on a

$$\mu(C_i^n) - \frac{1}{5^n} < \mu_n(C_i^n) \leqq \mu(C_i^n). \tag{29}$$

On considère des valeurs croissantes de n, le quadrillage Q_{n+1} étant obtenu par subdivision des carrés de Q_n. Montrons que les fonctions μ_n convergent vers la fonction d'ensemble μ, c'est-à-dire que, pour tout ensemble e dont la frontière ne porte pas de masse dans la distribution μ, on a

$$\mu(e) = \lim \mu_n(e).$$

Si e est un domaine formé d'un nombre entier N de mailles de Q_n on a, d'après (29),

$$0 < \mu(e) - \mu_n(e) = \sum_{i=1}^{i=N} [\mu(C_i^n) - \mu_n(C_i^n)] < \frac{N}{5^n}.$$

Or, N est au plus égal à $4^n h^2$, h étant le plus grand diamètre de d. D'où

$$0 < \mu(e) - \mu_n(e) < \left(\frac{4}{5}\right)^n h^2. \tag{30}$$

Un tel domaine e sera encore formé d'un nombre entier de mailles des réseaux Q_{n+p}, $p > 0$ et comme (30) est une majoration uniforme pour tout ensemble de mailles du réseau Q_n, $\mu_n(e)$ a pour limite $\mu(e)$ d'après (30).

Si e est un ensemble quelconque dont la frontière ne porte pas de masse dans la distribution μ nous l'approcherons par son intérieur au moyen de domaines k_n du type précédent. On a

$$\mu(e) - \mu(k_n) = \mu(e - k_n),$$

$e - k_n$ est contenu dans un voisinage de la frontière f de e, voisinage qui tend vers f; $\mu(e-k_n)$ tend vers zéro, puisque $\mu(f)=0$. On en déduit que la différence

$$\mu(e)-\mu(k_n)=\mu(e-k_n)+[\mu(k_n)-\mu_n(k_n)]$$

tend vers zéro, le crochet étant justiciable de la majoration (30). Les inégalités

$$\mu_n(k_n)\leqq\mu_n(e)\leqq\mu(e)$$

entraînent donc que $\mu_n(e)$ tende vers $\mu(e)$. La suite des fonctions d'ensemble $\mu_n(e)$ converge ainsi vers $\mu(e)$. Il est à remarquer que la définition et la convergence des fonctions sont établies non seulement dans d_1, mais dans tout le domaine ouvert d, la définition de μ étant, suivant une remarque déjà faite, indépendante de d_1.

Désignons par a_i^n le centre d'un carré C_i^n de Q_n, où est concentrée une masse $\frac{p_{i,n}}{5^n}$ et formons le polynome

$$P_n^1(x)=\Pi(x-a_i^n)^{p_{i,n}}.$$

Le produit étant étendu aux a_i^n situés sur d_1

$$\frac{1}{5^n}\log|P_n^1(x)|=\sum\frac{p_{i,n}}{5^n}\log|x-a_i^n|=\int_{d_1}d\mu_n(a)\log|x-a|.$$

Nous définirons la suite $U_p^1(x)$ de la manière suivante :

$$\text{si}\quad p\neq 5^n,\qquad U_p^1(x)=-\infty,\qquad A_n^1(x)=0,$$
$$\text{si}\quad p=5^n,\qquad U_p^1(x)=H_1(x)+\int_{d_1}d\mu_n(a)\log|x-a|,$$

ce qui nous donne

$$A_p^1(x)=P_n^1(x)e^{5^n(H_1+iH_1')},$$

$H_1'(x)$ étant une fonction conjuguée de $H(x)$.

On a donc :

$$U(x)=\overline{\lim_{p=\infty}}U_p^1(x)=H_1(x)+\lim\int_{d_1}d\mu_n(a)\log|x-a|,$$

ou

$$U(x)=H_1(x)+\int_{d_1}d\mu(a)\log|x-a|$$

presque partout sur d_1, d'après le théorème 14. Passant à la régularisée, on obtient en tout point de d_1

$$V(x) = H_1(x) + \int_{d_1} d\mu(a) \log|x-a| = V_1(x).$$

La détermination des coefficients $A_p^1(x)$ du développement cherché est donc effectuée dans d_1. Pour former une suite $\alpha_p(x)$ qui satisfasse aux conditions posées dans tout domaine intérieur au domaine ouvert d, considérons une suite infinie de domaines fermés d_1, d_2, ..., qui tendent vers d en croissant. Chacun d'eux donne lieu à une décomposition

$$V_1(x) = H_q(x) + \int_{d_q} d\mu(a) \log|x-a|,$$

d'où sera, comme plus haut, déduite une suite de polynomes $P_n^q(x)$ obtenus en considérant tous les a_i^n contenus dans d. Formons le tableau des fonctions $A_{5^n}^q(x)$ qui s'en déduisent et ne sont pas identiquement nulles. Considérons la suite diagonale du tableau, ce qui revient à poser

$$\alpha_p(x) = 0, \qquad \text{si } p \neq 5^n,$$
$$\alpha_p(x) = A_p^n(x), \qquad \text{si } p = 5^n.$$

Soit $W_p(x) = \frac{1}{p}\log|\alpha_p(x)|$. La fonction $U(x) = \overline{\lim}\, W_p(x)$ est égale à $V_1(x)$ presque partout dans un domaine fermé quelconque intérieur à d, car un tel domaine est contenu dans tous les d_q à partir d'une valeur de q. Par suite la régularisée $V(x)$ de $U(x)$ est égale en tout point intérieur à d à la fonction $V_1(x)$ dont nous sommes partis. Le développement

$$f(x, y) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \alpha_p(x)(y-y_0)^p \tag{31}$$

a comme domaine de convergence le domaine H donné dans l'énoncé.

Nous avons ainsi établi l'identité entre la classe des domaines H et celle des domaines de convergence de développements de Hartogs.

Remarque. — Le développement (30) est de type lacunaire. On a en effet, pour la largeur relative d'une lacune,

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} = \frac{4}{5} > 0.$$

Le développement (30) peut d'ailleurs être construit de type aussi fortement lacunaire qu'on le veut.

Nous allons montrer que la fonction $f(x, y)$ définie par (31) ne peut être prolongée à l'extérieur de H comme fonction analytique de deux variables. Dans le cas contraire, $f(x, y)$ serait régulière en un point $P[x_1, y_1 = y_0 + R(x_1)e^{i\theta}]$ situé sur l'ensemble des circonférences $[x \subset d, |y - y_0| = R(x)]$ qui appartiennent à la frontière F de H et séparent dans E l'intérieur de l'extérieur de H. Par ailleurs, le type de la série (31) est assez lacunaire pour que toutes les séries de Taylor déduites de (31), en donnant à x une valeur constante intérieure à d, aient leur cercle de convergence

$$|y - y_0| = \rho(x)$$

comme coupure. Deux cas sont alors à considérer :

a. $R(x_1) = \rho(x_1)$. Si la fonction $f(x, y)$ de deux variables était holomorphe dans un dicylindre de centre P, elle serait holomorphe sur un arc de cercle $|y - y_0| = R(x_1)$ contenant P.

Il en serait de même de la fonction $f(x, y)$ de la seule variable y, ce qui est contredit par le fait que le cercle $|y - y_0| = R(x_1)$ est tout entier coupure pour cette fonction.

b. $R(x_1) < \rho(x_1)$, il existe une suite infinie de valeurs x'_n telles que x'_n tende vers x_1 et que $\rho(x'_n)$ ait pour limite $R(x_1)$. Si $f(x, y)$ était holomorphe dans le dicylindre $|x - x_1| < r$, $|y - y_1| < r$, en choisissant n assez grand pour que $|x'_n - x_1| < r$, $|\rho(x'_n) - R(x_1)| < \frac{r}{4}$ on obtient un arc du cercle $[x'_n, |y - y_0 = \rho(x'_n)]$ entièrement contenu à l'intérieur de ce dicylindre, sur lequel, par suite, $f(x'_n, y)$ est régulière et l'on retrouve la même contradiction.

Appelant domaine d'holomorphie un domaine dans lequel est holomorphe une fonction $f(x,y)$ qui n'est pas prolongeable au delà de ce domaine comme fonction analytique de deux variables, nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 16. — *Tout domaine* H *est domaine d'holomorphie.*

En remarquant que les singularités des fonctions d'une variable utilisées sont certainement essentielles, nous démontrons également ainsi que la fonction $f(x, y)$ donnée par (30) n'est pas méromorphe hors de H. Par suite :

THÉORÈME 17. — *Tout domaine* H *est domaine de méromorphie.*

Remarquons, en conclusion des résultats qui précèdent, le rôle joué par la classe des fonctions réelles sous-harmoniques dans l'étude de l'ensemble singulier S d'une fonction $f(x, y)$. Les théorèmes 8 et 16 expriment en effet une propriété des cercles $[x \subset d, |y - y_0| = R(x)]$ qui déterminent la frontière F de H. Mais chacun de ces cercles est assujetti à s'appuyer sur le point de S qui se trouve le plus proche du plan $y = y_0$, la distance étant prise parallèlement au plan $x = 0$. La condition imposée à cette distance traduit donc une propriété géométrique de l'ensemble S. La frontière commune Φ de l'ensemble S et du domaine d'holomorphie D a été étudiée sous des conditions de régularité assez restrictives. En la supposant constituée dans E par des variétés définies au moyen de fonctions continues, deux fois continûment dérivables des variables réelles u_i, E. E. Levi a donné sous le nom de pseudo-convexité une propriété de cette frontière. Appliqué au cas très particulier d'un domaine semi-cerclé, le critère de pseudo-convexité se traduit (1) par $\Delta \log R(x) \leqq 0$, qui est bien un caractère de sous-harmonicité pour la fonction $-\log R(x)$ dans le cas où $R(x)$ est supposé deux fois différentiable. Les résultats précédents montrent qu'un tel point de vue est trop restrictif. Du fait que l'ensemble S est un ensemble fermé résulte seulement que la section de S par un plan $x = \text{const.}$ est un ensemble $e(x)$ qui est, à certains égards, une

(1) *Cf.* l'ouvrage de H. BEHNKE et P. THULLEN, *Ergebnisse der Mathematik*, volume 3, cahier 3, 1934, p. 55.

fonction semi-continue supérieurement du point x. On a, en effet, $e(x_0) > \overline{\lim}\, e(x')$ quand x' tend vers x_0; le symbole $\overline{\lim}$ définit la limite supérieure fermée des ensembles $e(x')$. D'autre part, si un point p appartient à $e(x_0)$ et est étranger à $\overline{\lim}\, e(x')$, il est centre d'une hypersphère ne contenant pas de points de S sauf sur le plan $x = x_0$ qui passe par son centre. Parmi ces hypersphères, celles dont les centres se projettent sur le plan des x en des points distincts deux à deux sont en infinité dénombrable. On peut donc énoncer d'une manière générale :

Les fonctions qui définissent la frontière d'un domaine d'holomorphie au moyen des coordonnées sont des fonctions semi-continues, sauf sur un ensemble dénombrable.

Si on se limite aux domaines semi-cerclés pour lesquels $e(x)$ est une circonférence, on est conduit ainsi *a priori* à chercher les fonctions $V(x) = -\log R(x)$ parmi une classe semi-continue supérieurement, et les résultats précédents, en établissant pour les fonctions $V(x)$, $R(x)$ la possibilité d'être discontinues montrent la nécessité d'utiliser des fonctions ayant ce degré de généralité.

Les fonctions sous-harmoniques les plus générales dont nous avons rappelé la définition au Chapitre I constituent donc bien un instrument analytique adapté à l'étude de l'ensemble singulier.

2. *Comportement de la frontière au voisinage d'une discontinuité de* $R(x)$. — Supposons que $V(x)$ soit discontinue pour la valeur $x = x_0$. Étudions l'ensemble $V(x) < V(x_0) - \varepsilon$. Son complémentaire dans un cercle $|x - x_0| \leqq r$ est fermé par suite de la semi-continuité supérieure de $V(x)$. Donc l'ensemble $V(x) < V(x_0) - \varepsilon$ que nous appellerons η est un *ensemble ouvert* : chacun de ses points est centre d'un cercle appartenant à l'ensemble. Pour simplifier, nous adopterons une définition dont l'étude précise des fonctions sous-harmoniques vient de montrer la nécessité (1). Un ensemble e sera dit effilé en O si e est à distance positive de O, ou s'il existe dans un cercle de

(1) M. Brelot, *C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 828, et *Journal de Math.*, t. 19, 1940, p. 319.

centre O une fonction sous-harmonique dont la valeur en O est supérieure à sa plus grande limite prise sur l'ensemble complémentaire de e à l'intérieur du cercle C. Dans ces conditions *l'ensemble en lequel on a* $R(x) > R(x_0) + \varepsilon$ *est l'ensemble effilé en* x_0 *le plus général.* Nous ramenons ainsi l'étude du comportement de la frontière F de H au voisinage du cercle

$$|y - y_0| = R(x),$$

correspondant à une discontinuité de $R(x)$, à un problème déjà isolé par ailleurs. Dans la note citée, M. Brelot a caractérisé, en adoptant la capacité comme caractère métrique, les sections de η contenues à l'intérieur de cercles $|x - x_0| \leqq r$ de rayons décroissants. Si $C(r)$ est la capacité du sous-ensemble de η contenu à l'intérieur d'un tel cercle, il faut et il suffit pour que η soit effilé que l'intégrale

$$I = \int_0^\varepsilon \frac{dr}{r \log \frac{1}{C(r)}} = \int_0^\varepsilon \frac{dr}{r\gamma(r)}$$

converge. Des caractères géométriques en découlent dès que η admet une structure d'un modèle déterminé; remarquons qu'étant ouvert η est, de toutes manières, la somme d'une infinité d'ensembles ouverts d_n disjoints, ayant x_0 comme point limite.

Exemple. — Supposons que η contienne une suite de cercles de rayons r_n de centres x_n, $|x_n| = \rho_n$ étrangers les uns aux autres. Si nous donnons une condition de serrage $b \geqq \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \geqq a > 0$ des points x_n, les rayons r_n associés ne peuvent être bornés supérieurement que par une fonction suffisamment décroissante. On ne peut avoir $r_n \geqq \rho_n^\alpha$ si grand que soit pris α, $(\alpha > 1)$. En effet, dans le cercle de rayon

$$\rho'_n = \rho_n + \rho_n^\alpha = \rho_n(1 + \zeta_n),$$

on aurait $c(\rho'_n) \geqq \rho_n^\alpha$; l'intégrale I serait divergente. Mais on pourra prendre $r_n = \rho_n^{\log^2 \rho_n}$, ce qui donne pour la constante de Robin γ_n la valeur $-\log^3 \rho_n$. De l'inégalité

$$\frac{1}{\gamma(r)} \leqq \sum_{\rho_n < r} \frac{1}{\gamma_n} \leqq - \sum_{\rho_n < r} \frac{1}{\log^3 \rho_n}$$

et des conditions écrites, on déduit une majoration de la forme

$$\frac{1}{\gamma(r)} < -\frac{A}{\log^2 r}, \qquad A > 0,$$

qui assure la convergence de l'intégrale I.

Nous nous bornons, dans ce travail, à montrer l'intérêt qu'il y a à obtenir des propriétés géométriques précises de tels ensembles plans si l'on veut améliorer la description de l'ensemble singulier S d'une fonction $f(x, y)$ et en particulier de la frontière F d'un domaine H.

Au voisinage du cercle $[x_0, |y - y_0| = R(x_0)]$, $R(x)$ étant discontinue en x_0, F possède la particularité suivante : dans le plan $x = x_0$, seul l'intérieur du cercle $|y - y_0| < R(x)$ appartient à H. Cependant, un point P extérieur à ce cercle et à distance positive de sa circonférence peut être limite de points de H *situés dans des plans voisins*, et par suite être point frontière de H ([1]).

Il existe en effet une suite x_n qui tend vers x_0, cependant que $R(x_n)$ demeure au moins égal à $R(x_0) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Il suffit de prendre ces points x_n dans l'ensemble η. Nous pourrons prendre un point x_n dans chaque domaine d_n et lui associer un cercle $\gamma_n = |x - x_n| < r_n$ entièrement contenu dans d_n. Les dicylindres D_n ouverts $|x - x_n| < r_n$, $|y - y_0| < R(x_0) + \varepsilon$ appartiennent à H. La couronne σ : $[x_0, R(x_0) \leqq |y - y_0| < R(x_0) + \varepsilon]$ lui est étrangère mais elle est limite d'une infinité de domaines dicylindriques $\Delta_n = [\,|x - x_n| < r_n,\ R(x_0) < |y - y_0| < R(x_0) + \varepsilon]$ qui appartiennent à H.

Supposons que toute la frontière de H soit singulière. On a mis ainsi en évidence la possibilité pour l'ensemble S de contenir une couronne plane σ qui est en position très voisine d'une épine pénétrant dans le domaine d'holomorphie H. Une telle épine W serait constituée par une portion limitée de variété plane dont les points appartiendraient à S, mais seraient chacun centre d'une hypersphère dans laquelle $f(x, y)$ est régulière sauf sur W. La configuration que nous venons d'obtenir diffère de celle qui correspond à une telle épine en

---

([1]) On comparera de tels points P à ceux du segment $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq 1$, frontière du domaine défini par $y > \sin \frac{1}{x}$ dans le plan de deux coordonnées réelles x, y.

ce que σ ne pénètre pas dans H, mais est seulement atteinte comme limite de domaines Δ_n appartenant à H, domaines dont précisément l'importance est limitée par la condition qu'ils forment par projection sur le plan $y = y_0$ un ensemble effilé.

Aussi bien la possibilité d'obtenir une épine de S pénétrant dans un domaine d'holomorphie est-elle exclue, que cette épine soit constituée par un morceau limité de plan ou plus généralement de variété caractéristique. Démontrons l'énoncé suivant ([1]) :

THÉORÈME 18. — A. *Soit* W *une variété caractéristique, s l'ensemble des points singuliers portés par* W, *s ne peut posséder un point frontière* P *sur* W *dans un voisinage duquel* $f(x, y)$ *est holomorphe sauf sur* W.

Si W est le plan $x = 0$, soit $P[0, y_1]$ le point frontière de s indiqué par l'énoncé, et soit G le dicylindre de centre P : $|x| < r$, $|y - y_1| < a$, dans lequel $f(x, y)$ est supposé holomorphe, aux points du plan $x = 0$ exceptés; P étant limite de points réguliers, nous pouvons en désigner un, soit $Q[0, y_0]$ tel que $|y_1 - y_0| < \frac{a}{4}$. Considérons le développement de Hartogs fait à partir de la valeur $y = y_0$. La fonction $R(x, y_0)$ est pour $x = 0$ au plus égale à $\frac{a}{4}$ alors que pour $|x| < r$ et $x \neq 0$ elle est au moins égale à $\frac{a}{2}$, ce qui est impossible, $R(x, y_0)$ ayant la semi-continuité inférieure.

Si W est définie par $g(x, y) = 0$ et si en $P[x_1, y_1]$ la dérivée g'_x n'est pas nulle, on représentera W par $x = x_1 + h(y - y_1)$ au voisinage de P. La fonction $\varphi(u, y) = f[x_1 + h(y - y_1) + u, y]$ est holomorphe dans le voisinage du point $u = 0$, $y = y_1$, sauf sur le plan $u = 0$, et $P[u = 0, y = y_1]$ est frontière de points réguliers situés sur ce plan. D'autre part, les points où l'on a $g'_x = 0$ ne sauraient ni être seuls singuliers puisqu'ils sont isolés, ni être à eux seuls frontières des points singuliers situés sur W. L'énoncé est donc établi, d'où découle en particulier que S ne saurait projeter dans un domaine d'holo-

([1]) *Cf.* en ce qui concerne la forme A du théorème 18, P. THULLEN, *Math. Ann.*, vol. 111, 1935, p. 137. On peut la considérer comme une conséquence de la continuité des singularités d'une fonction $f(x, y)$.

morphie une épine plane sur laquelle se trouve une frontière entre points singuliers et réguliers.

Remarque. — L'énoncé permet de *prolonger une singularité* sur une variété caractérisque W. Partant d'un point P supposé singulier, on pourra parcourir W et affirmer que tous les points M rencontrés sont singuliers tant qu'ils seront centres de dicylindres en lesquels on sait que $f(x, y)$ est holomorphe, sauf peut-être aux points situés sur W. La méthode précédente montre que ce prolongemeut est possible au moyen d'une uniformisation locale de W, donc sur toute partie irréductible de W plongée dans un domaine d'holomorphie.

L'énoncé démontré plus haut reçoit maintenant une forme plus précise que nous énoncerons seulement dans le cas où W est une variété plane que nous supposerons être le plan $x = 0$.

B. *Soit* σ *un domaine du plan* $x = 0$ *contenu dans la couronne* $R < |y| < R + a$; *la fonction* $f(x, y)$ *supposée régulière dans le dicylindre* $|x| < r$, $|y| < R$ *et dans les domaines dicylindriques,*

$$\Delta_n = x \subset d_n, \quad R < |y| < R + a$$

ne peut être singulière sur σ *que si les domaines* d_n *forment un ensemble effilé au point* $x = 0$.

Points à l'infini. — Un point à l'infini de H est obtenu quand $V(x)$ tend vers $-\infty$. Un domaine fermé de convergence uniforme intérieur à H est défini par $|y - y_0| < e^{-s(x)}$ avec $s(x) > V(x) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Il sera donc déterminé par $|y - y_0| < k R(x)$.

Cette condition précise ce qu'il faut entendre par domaine fermé intérieur à H dans le cas où H a des pointes à l'infini. Ces pointes forment en projection sur le plan de symétrie un ensemble de capacité intérieure nulle. Celles x_i pour lesquelles on impose une condition $R(x) > \frac{1}{|x - x_i|^\alpha}$, $\alpha > 0$ quand x tend vers x_i sont, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, en infinité dénombrable.

3. Nous désignerons par $R(x, y)$ la distance comptée parallèlement au plan $x = 0$ du point $[x, y]$ à l'ensemble singulier S de $f(x, y)$.

La fonction $V(x, y) = -\log R(x, y)$ est, d'après ce qui précède, sous-harmonique de x pour $y = y_0$. Elle est sous-harmonique et continue de y pour $x = x_0$ d'après la propriété de la plus courte distance d'un point à un ensemble.

Nous examinerons le cas particulier ou, pour $x \subset d$, $V(x, y)$ est une fonction harmonique de x.

LEMME. — *Si $U_n(x)$ est une suite de fonctions sous-harmoniques négatives ou nulles dans d qui converge vers zéro en un point x_0 intérieur à d, alors les fonctions de masses μ_n associées aux $U_n(x)$ tendent vers zéro dans tout domaine intérieur à d et $U_n(x)$ tend vers zéro presque partout à l'intérieur de d.*

Supposons, en effet, qu'il existe un domaine $d_1 \subset d$ et une suite infinie que nous représenterons par $U_n(x)$ tels que $\mu_n(d_1) \geqq a > 0$. Il nous suffira de reprendre un raisonnement fait au Chapitre I au moyen de deux domaines intermédiaires d'_1, d_2 : $d_1 \subset d'_1 \subset d_2 \subset d$, d'_1 contenant x_0 à son intérieur. De la décomposition

$$U_n(x) = H'_n(x) - \int_{d_2} d\mu_n(a)\, g(x, a)$$

découle, puisque l'on a $H'_n(x) \leqq 0$, $\mu_n(d_1) \geqq m$, $-g(x, a) \leqq -\alpha$:

$$U_n(x) \leqq -\alpha\, \mu_n(d_1) \leqq -m\alpha$$

dès que x est intérieur à d'; on ne peut avoir

$$\overline{\lim_{n=\infty}} U_n(x_0) = 0$$

que si $\mu_n(d_1)$ tend vers zéro.

L'inégalité $U_n(x) = H'_n(x)$, entraîne $H_n(x_0) \to 0$ au point x_0. Les fonctions $H_n(x)$ convergent donc uniformément vers zéro dans tout domaine intérieur à d. Quant aux termes $\int_{d_2} d\mu_n(a)\, g(x, \alpha)$, chacun d'eux se met, comme il a été déjà vu, sous la forme d'une fonction harmonique qui tend uniformément vers zéro avec μ_n, augmentée d'un potentiel qui, d'après le théorème 14, tend vers zéro presque partout dans d_2. Comme d_2 est un domaine quelconque intérieur à d, le lemme est établi.

THÉORÈME 19. — *Si la suite de fonctions sous-harmoniques* $U_n(x)$ *bornées supérieurement a dans d une limite supérieure régularisée* $V(x)$ *qui est harmonique, il existe une suite partielle qui converge vers* $V(x)$ *presque partout dans d et les fonctions de masse de cette suite tendent vers zéro dans d.*

La fonction $V(x)$ étant continue, nous savons d'après le théorème 9 que, si β_n désigne le maximum de $U_n(x) - V(x)$ dans un domaine fermé $d_1 \subset d$, on a $\lim \beta_n^+ = 0$. Posons

$$U'_n(x) = U_n(x) - V(x) - \beta_n^+. \tag{32}$$

Choisissons un point $x_0 \subset d$, en lequel $U(x_0) = V(x_0)$; il existe une suite partielle $U_{n_k}(x)$ qui, en ce point, converge vers $V(x_0)$. On aura

$$\lim U'_{n_k}(x_0) = 0.$$

Les fonctions $U'_{n_k}(x)$ forment une suite satisfaisant aux conditions du lemme dans d_1 qui converge donc vers zéro presque partout dans d_1 et par suite presque partout dans d.

Les masses des $U'_n(x)$ sont les mêmes que celles des $U_n(x)$. Donc, les fonctions μ_{n_k} tendent vers zéro dans l'intérieur de d.

La suite particulière considérée se distingue de toutes les autres En effet, la convergence en un seul point intérieur à d d'une suite partielle suffit, d'après le lemme, à assurer sa convergence presque partout dans d. Dès lors, une telle suite $U_p(x)$, ou bien converge presque partout vers $V(x)$, ou bien satisfait à $\overline{\lim\limits_{p=\infty}}\, U_p(x) < V(x) - m$, $m > 0$, dans un domaine intérieur à d : les fonctions $\overline{\lim}$ de suites partielles qui ne coïncident pas avec $V(x)$ restent à distance positive de $V(x)$.

Remarquons également que l'énoncé 19 établit une convergence sans aucune hypothèse de cette nature.

Conséquence. — 1° Si $\nu(n)$ représente le nombre de points d'intersection de la variété $\varphi_n(x, y) = 0$ avec le domaine $[x \subset d_1 \subset d, y = y_0]$, on a, lorsque $\log R(x, y_0)$ est harmonique de x :

$$\underline{\lim} \frac{\nu(n)}{n} = 0; \tag{33}$$

2° Dans tout domaine d où $\log R(x, y_0)$ est harmonique de x, les épines se projettent suivant un ensemble de capacité intérieure nulle sur le plan $y = y_0$ d'après le théorème 14, et cette propriété demeure quelle que soit la fonction $f(x, y)$ dont on considère le développement pourvu que, au-dessus de d, son domaine H soit limité par la même frontière F

$$[x \subset d, \ |y - y_0| = R(x, y_0)].$$

Cas particulier. — On est assuré que $\log R(x, y_0)$ est harmonique pour $x \subset d$ lorsque la frontière F porte au-dessus de d une variété caractéristique $y - y_0 = \varphi(x)$.

Ce sera le cas, quand F s'appuie sur une variété polaire ou sur une variété de ramification. L'équation $|y - y_0| = R(x) e^{i\theta(x)} = \varphi(x)$ montre que $\theta(x)$ est une fonction conjuguée de $\log R(x)$ définie à une constante additive près ; par suite *toutes les surfaces caractéristiques, portées par* F, *s'obtiennent par rotation à partir de l'une d'entre elles. Elles demeurent portées par* F *dans tout domaine où* $\log R(x)$ *est harmonique.*

Énonçons encore dans ce cas particulier :

THÉORÈME 20. — *Si au-dessus du domaine $x \subset d$ du plan $y = y_0$, la frontière* F *du domaine de convergence* H *porte une surface caractéristique $y - y_0 = \varphi(x)$:*

1° *Il existe une suite infinie de dérivées $\varphi_{n_k}(x, y)$ telle que, dans tout domaine d_1 intérieur à d, les équations $\varphi_{n_k}(x, y_0) = 0$ ont au plus An_k racines,* A *étant une constante ;*

2° *Les fonctions $U_{n_k}(x, y_0)$, déduites des dérivées appartenant à cette suite, convergent vers la fonction harmonique $-\log|\varphi(x)|$ presque partout à l'intérieur de d ;*

3° *Les épines du domaine* H *qui sont au-dessus de d se projettent suivant un ensemble de capacité intérieure nulle à l'intérieur de d.*

4. Nous ferons maintenant une hypothèse plus restrictive en supposant que $\log R(x, y)$ est harmonique en x, quand x varie dans d, non seulement pour une valeur particulière y_0, mais pour certains ensembles de valeurs voisines.

Nous étudierons quelles conséquences entraîne pour l'ensemble σ des points singuliers situés sur F l'hypothèse que $\log R(x, y)$ est harmonique de x quand x appartient à un domaine d, et cela pour toutes les valeurs y du segment $y = y_0 + he^{i\omega}$, $0 \leqq h < h_1$, dont l'amplitude n'intervient pas.

Désignons par $C(x)$ le cercle $[x, y = y_0 + R(x)e^{i\theta}]$, par O son centre, par Ou la demi-droite décrite par le point $[x, y = y_0 + he^{i\omega}]$ quand h positif varie seul. Parcourons $C(x)$ dans le sens des θ croissants à partir du point D situé sur Ou : nous rencontrons certainement un point singulier de la *fonction analytique de deux variables* sur $C(x)$. Nous appellerons A le premier point singulier rencontré, de coordonnées $[x, y_A = R(x)e^{i\theta(x)}]$. Pour en calculer l'argument, nous utiliserons une méthode récemment employée pour résoudre le même problème pour les fonctions d'une variable (¹). Remarquons que $R(x, y)$ est la distance du point $[x, y]$ à l'ensemble s_x section de l'ensemble singulier S par un plan $x = \text{const.}$ D'où, en supposant x constant,

$$(30) \qquad -\frac{\cos(\theta - \omega)}{R_0} = \frac{\partial}{\partial h} \log R(x_1 y_0 + he^{i\omega}) = \mu(x),$$

R_0 représentant par abréviation $R(x, y_0)$.

Toutefois, le calcul fait à x constant ne nous donne aucune limite uniforme par rapport à x. Posons

$$\mu_h(x) = \frac{1}{h}[\log R(x, y_0 + he^{i\omega}) - \log R_0].$$

Les fonctions $\mu_h(x)$ sont harmoniques de x, pour $0 < h < h_1$ et convergent vers $\mu(x)$ pour chaque valeur de x. Montrons de plus qu'elles sont bornées. On a évidemment

$$R_0 + h \geqq R(x, y_0 + he^{i\omega}) \geqq R_0 - h.$$

(¹) S. Mandelbrojt, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1456. Nous n'appliquons pas ici le résultat à la fonction $f(x, y)$ de la seule variable y pour x constant, ce qui introduirait les épines. Nous utilisons directement la propriété de la distance à un ensemble fermé.

D'où

$$(31) \qquad |\mu_h(x)| < \frac{A}{R(x, y_0)} \qquad \text{dès que} \quad h < h_1,$$

A étant une constante indépendante de x et de h.

Dans un domaine d_1 intérieur à d, $R(x, y_0)$ a un minimum non nul; par suite, les fonctions $\mu_h(x)$ forment une famille harmonique bornée. La convergence est donc uniforme et la fonction $\mu(x)$ est aussi harmonique. L'égalité qui définit $\theta(x)$

$$(32) \qquad \cos(\theta - \omega) = -\mu(x)\, R(x, y_0)$$

montre que θ est fonction analytique des variables réelles u_1, u_2. Soit l la longueur OT interceptée sur la demi-droite Ou de direction fixe par la tangente AT au cercle $C(x)$

$$\frac{1}{l} = \frac{\cos(\theta - \omega)}{R(x, y_0)}.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME 21. — *Si l'on suppose la fonction* $\log R(x, y)$ *harmonique de x pris dans un domaine d quand y appartient au segment* $y = y_0 + he^{i\omega}$, $0 \leqq h < h_1$, *alors le premier point singulier rencontré sur les cercles de la frontière du domaine semi-cerclé, lorsqu'on les parcourt à partir du point* $y = y_0 + R(x, y_0)e^{i\omega}$ *dans un sens constant, décrit une multiplicité à deux dimensions déterminée par des fonctions analytiques des coordonnées réelles u_1 et u_2 de x, tant que x reste à l'intérieur de d. La fonction $l(x)$ définie par* (33), *qui détermine les équations de cette multiplicité, est l'inverse d'une fonction harmonique.*

Conséquences. — 1° Le segment $l(x)$ ne peut être minimum ou maximum que sur la frontière de d à moins d'être constant.

2° Écartons le cas où tout point de F est singulier, cas dont le théorème 16 a montré la possibilité, et supposons qu'un point $[x_1, y_1]$ de F soit régulier, c'est-à-dire centre d'un dicylindre $|x - x_1| < r$, $|y - y_1| < r'$ dans lequel $f(x, y)$ est holomorphe; la région située sur F à travers laquelle $f(x, y)$ est prolongeable, a sur F une frontière f à deux dimensions. Le théorème 21 nous indique que dans la région $|x - x_1| < r$ cette frontière f est formée par des multiplicités à deux dimensions déterminées par des fonctions analytiques de variables réelles.

L'égalité (32) s'écrit encore :

$$\mu(u_1, u_2) = e^{-V(u_1, u_2)} \cos(\theta - \omega).$$

Si, partant de (34), nous exprimons par $\Delta\mu = 0$ l'harmonicité de μ, il vient, en tenant compte de $\Delta V = 0$

$$(34) \qquad \cos(\theta - \omega)\left[\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\right)^2\right] - \sin(\theta - \omega)\left[\Delta\theta + 2\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \frac{\partial U}{\partial u_2}\frac{\partial Q}{\partial u_2}\right)\right] = 0.$$

Supposons $\log R(x, y)$ harmonique de y non plus seulement pour y compris sur un segment, mais pour toutes les valeurs de y appartenant à un secteur

$$y = y_0 + he^{i\theta}, \qquad 0 \leqq h < h, \qquad |\theta - \omega| < \alpha,$$

les arcs découpés par l'angle $|\theta - \omega| < \alpha$ sur les cercles $C(x)$ ne contenant que des points réguliers. Dans ces conditions (34) est vérifié quand on y remplace ω par une valeur quelconque prise sur cet arc; on en déduit la nullité des deux crochets qui y figurent. Le système des deux équations ainsi obtenues a pour solution particulière $\theta = W(u_1, u_2)$, W étant une fonction harmonique conjuguée de $V(x)$. Si l'on pose $\theta = W + \tau$, on obtient

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_2}\right)^2 = -2\left(\frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial \tau}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial \tau}{\partial u_2}\right) = \Delta\tau,$$

qui entraîne $\Delta\tau \geqq 0$. Nous énoncerons donc la propriété suivante : elle précise le caractère des multiplicités qui constituent dans les conditions étudiées la frontière sur F d'une région de régularité.

Théorème 22. — *Si un point P* $[x_1, y_1 = y_0 + R(x_1)e^{i\omega}]$ *est un point régulier sur* F, *si, de plus, dans un cercle* $|x - x_1| \leqq r$, *la fonction* $\log R(x, y)$ *est une fonction harmonique de x quelle que soit la valeur de y prise dans un secteur* $y = y_0 + he^{i\theta}$, $0 \leqq h < h_1$, $|\theta - \omega| < \alpha$, *alors, dans le voisinage de P, le premier point singulier rencontré sur le* *cercle* $C(x)$ *à partir de la droite d'argument* ω *a pour argument une fonction* $\theta(x)$ *analytique des coordonnées réelles de* x *et cette fonction est de plus sous-harmonique.*

5. Nous appliquerons les résultats de ce chapitre au problème de l'étude des arêtes [1] de l'ensemble singulier S.

Définition. — Nous appellerons arêtes de l'ensemble S le sous-ensemble W des points M en lesquels la partie bilatérale du faisceau dérivé [2] de S laisse échapper un plan caractéristique $\pi(M)$.

Les résultats d'une étude géométrique récente [3] rendent utilisable cette définition au point de vue analytique malgré sa généralité. En effet, les points du sous-ensemble W se répartissent sur une infinité dénombrable de multiplicités W_i définies par des fonctions continues satisfaisant même à une condition de Lipschitz.

Chacune de ces multiplicités mérite le nom d'arêtes : en effet, coupons S par le plan caractéristique $\pi(M)$, que nous supposerons être le plan $x = 0$; nous obtenons un ensemble s dont le faisceau dérivé en M n'a aucune partie bilatérale; si ce faisceau dérivé est connexe, il forme un angle de sommet M d'ouverture inférieure à π. Les points voisins de M sur W_i sont donnés par $y = g(x)$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < k\,|x_1 - x_2|$$

et dans les plans $x =$ const., on a encore ce qu'on peut appeler la configuration d'une arête sortante de S. Pour préciser et éliminer le cas où le faisceau dérivé dans ces plans ne serait pas formé d'un seul angle, nous appellerons arêtes A les multiplicités W_i qui possèdent la propriété suivante : quand M parcourt l'une d'elles, le faisceau dérivé varie continûment et sa section par les plans caractéristiques qui n'appartiennent pas à sa partie bilatérale demeure un faisceau connexe.

---

(1) *Cf.* l'ouvrage cité de H. Behnte et P. Thullen, p. 52.

(2) C'est-à-dire l'ensemble des droites dont les deux demi-droites issues de M sont des tangentes à S.

(3) F. Roger, *Acta Mathematica*, t. 69, 1938, p. 99.

THÉORÈME 23. — *Les arêtes A sont composées de variétés caractéristiques.*

Nous montrerons qu'il en est ainsi pour l'arête $y = g(x)$ au voisinage du point $M[o, y_1]$, $\pi(M)$ étant le plan $x = o$. Soit TMT′ l'angle inférieur à π qui constitue l'intersection du faisceau dérivé en M avec le plan $x = o$. D'après la définition même du faisceau dérivé, il existe un cercle γ de centre M dans le plan $x = o$ tel que les points de S qui y sont contenus soient situés à l'intérieur d'un angle $T_1MT'_1$ contenant TMT′ mais encore inférieur à π. Soit r le rayon de ce cercle. Prenons sur la bissectrice de l'angle $T_1MT'_1$ un point $P[o, y_0]$ assez voisin de M pour que le cercle de centre P passant par M soit intérieur à γ. Il existe un dicylindre de centre P en lequel $f(x, y)$ est régulière. Étudions la fonction $R(x, y)$ au voisinage des valeurs $x = o$, $y = y_0$. Considérons en particulier le domaine H de plan de symétrie $y = y_0$. L'arête étant continue et S fermé, il existe un cercle $d : |x| < \rho$, au-dessus duquel la seule singularité située sur la frontière de H est l'arête. On a donc

$$\log R(x, y) = \log |g(x) - y|.$$

Remplaçons au besoin ρ par un nombre inférieur; l'hypothèse de continuité faite dans la définition des arêtes A entraîne, S étant fermé, la disposition suivante dans tous les plans $x =$ const. tant que x reste dans le cercle d : sur chaque cercle $[x, |y - y_0| = R(x)]$, dont nous désignerons le centre par O, se trouve le seul point singulier M appartenant à l'arête; les points de l'ensemble S situés dans le cercle de centre M et de rayon r sont contenus dans un angle de bissectrice OM au plus égal $2\pi - 2\alpha$, $(\alpha > o)$.

Dans ces conditions, tant que y reste voisin de y_0, $\log R(x, y)$ est une fonction harmonique de y pour x constant. Le domaine d'harmonicité contient, comme on le vérifie facilement, le cercle

$$|y - y_0| < R(x, y_0) \sin \alpha.$$

Remplaçant $R(x, y)$ par une borne inférieure dans le cercle d on aura :

THÉORÈME 24. — *Au voisinage d'un de ses points* M *en lequel on suppose que le plan exceptionnel* $\pi(M)$ *est le plan* $x = 0$, *une arête* A *appartient à la frontière d'un domaine dans lequel* $\log R(x, y)$ *est fonction harmonique de* y, *soit quand on* y *laisse* x *constant, soit quand on* y *remplace* x *par* u-ty, t *étant de module suffisamment petit.*

En effet, si le plan $x = 0$ n'appartient pas à la partie bilatérale du faisceau, il en est encore de même d'une infinité de plans de directions voisines à partir desquels on peut reprendre le raisonnement précédent après avoir fait dans l'équation de l'arête le changement de variable indiqué par l'énoncé.

LEMME. — *Si* $V(x, y)$ *est une fonction définie dans un domaine* D, *sous-harmonique en* x *pour* y *constant, harmonique en* y *au voisinage de chaque point de* D *quand on se déplace sur les plans* $x + ty =$ const. *dès que* $|t| < a$, *elle est harmonique de* x *et de* y *dans* D.

Remarquons d'abord que $V(x, y)$ est continue du point $P[x, y]$ de E_4; en effet de l'harmonicité sur deux directions de plans définies par $t = 0$ et $t = t_1$ résultent que les dérivées dans quatre directions n'appartenant pas à une même variété linéaire sont bornées. Montrons ensuite que $V(x, y)$ est harmonique au voisinage d'un point de D dont nous désignerons les coordonnées par x_0, y_0.

La sous-harmonicité de $V(x, y)$ en x nous donne

$$(35) \qquad \theta(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(x_0 + re^{i\theta}, y_0)\, d\theta - V(x_0, y_0) \geqq 0.$$

Soit b un nombre positif inférieur à a. On a, quel que soit ω, puisque $V(x, y)$ est harmonique de y sur tous les plans $y - y_0 = t(x - x_0)$ avec $t = be^{i\omega}$

$$\int_0^{2\pi} V\left(x_0 + re^{i\theta},\ y_0 + \frac{r}{b}e^{i(\theta+\omega)}\right) d\theta = 0.$$

Intégrons par rapport à ω; l'intégrale peut s'écrire

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left(x_0 + re^{i\theta},\ y_0 + \frac{r}{b}e^{i\theta'}\right) d\theta\, d\theta' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \theta\left(x_0,\ y_0 + \frac{r}{b}e^{i\theta'}\right) d\theta' = 0.$$

Cette égalité comparée à (35) entraîne, par suite de la continuité, $\theta(x, y) = 0$ et, le nombre r étant quelconque du moment qu'il est assez petit pour que les points considérés restent à l'intérieur de D, on en conclut à l'harmonicité de $V(x, y)$ en x pour y constant.

La fonction $\log|g(x) - y|$ est doublement harmonique et même, par suite de sa forme, biharmonique de x, y. Ainsi, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 25. — *Une arête* A *appartient à la frontière d'un domaine dans lequel* $\log R(x, y)$ *est biharmonique*. Réciproquement, *si la fonction* $\log R(x, y)$ *est biharmonique dans un domaine* $x \subset d$, *la frontière du domaine de convergence de la série de Hartogs de* $f(x, y)$ *de centre* $y = y_0$ *porte au-dessus de* d *une arête* A *de points singuliers*.

La réciproque est en effet immédiate, l'harmonicité de $\log R(x, y)$ en y pour x donné entraînant qu'il n'y ait qu'un seul point singulier M sur le cercle de convergence et que les points de S voisins de ce point soient contenus dans un angle sans point commun autre que M avec le cercle et avec sa tangente en M.

L'équation de l'arête s'établit effectivement à partir de la fonction $\log R(x, y)$ supposée biharmonique. En effet, soit

$$\psi(x, y) = \log R(x, y) + i H(x, y),$$

$H(x, y)$ étant une conjuguée de $R(x, y)$. On a

$$(36)\quad \begin{cases} \varphi(x, y) = \psi'(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial u_3} \log R(x, y) - i \dfrac{\partial}{\partial u_4} \log R(x, y), \\ \varphi(x, y) = -\dfrac{1}{R(x, y)}(\cos\theta - i \sin\theta), \end{cases}$$

d'après la méthode de calcul de l'argument du point singulier employée plus haut. Par suite, pour $y = y_0$,

$$y_A = R(x, y_0) e^{i\theta} = -\frac{1}{\varphi(x, y_0)}.$$

La fonction $y_A = g(x)$ *qui définit l'arête* A *est obtenue en prenant* $g(x) = -\dfrac{1}{\varphi(x, y_0)}$, $\varphi(x, y)$ étant la fonction analytique définie par (36).

Le théorème 23 est ainsi démontré.

Remarque. — Soit D un domaine dans lequel $V(x, y)$ est biharmonique. Soit d l'intersection de ce domaine par un plan $y = y_0$. D'après le théorème 19 il existe une suite partielle $U_{n_k}(x, y)$ qui converge presque partout à l'intérieur de d vers $V(x, y)$; cette suite converge en tout point intérieur à D sauf sur un ensemble qui est coupé par tout plan caractéristique sur lequel on n'a pas $x =$ const. suivant un ensemble de capacité intérieure nulle. En effet, soit $P[x_1, y_1]$ un point de D suffisamment proche du domaine d : $[x \subset d, y = y_0]$ pour que nous puissions mener par ce point un plan analytique π qui coupe d sans sortir de D. Nous choisirons ce plan de manière qu'il coupe d en un point Q où la suite $U_{n_k}(x, y)$ converge vers $V(x, y)$. Traçons dans π un domaine d' qui, sans sortir de D, contienne à son intérieur P et Q. La convergence en Q entraîne la convergence presque partout dans d' sur le plan; la proposition est donc démontrée.

Définition. — Un ensemble de E_4 sera dit *de type* E_0 s'il est coupé par toute variété caractéristique qu'il ne contient pas suivant un ensemble de capacité intérieure nulle.

Le raisonnement qui précède peut être fait sur une variété caractéristique, en se servant comme variable de son paramètre d'uniformisation locale, les $U_n(x, y)$ devenant évidemment des fonctions sous-harmoniques de ce paramètre. D'autre part, on peut atteindre tout point intérieur de D en empruntant un nombre fini de domaines tels que d', la convergence en un point du précédent entraînant la convergence presque partout dans le suivant. Nous énoncerons donc :

THÉORÈME 26. — D *étant le domaine contigu à l'arête* A *où* $\log R(x,y)$ *est biharmonique, il existe une suite partielle* $U_{n_k}(x, y)$ *qui converge dans* D *sauf sur un ensemble de type* E_0 *à l'intérieur de* D.

Cette suite mise à part, les fonctions de la suite restante demeurent inférieures à $V(x, y) = -\log R(x, y)$ *d'un nombre fixe dans tout domaine* D' *intérieur à* D.

Indiquons une circonstance mise en lumière par cet énoncé : nous savons, par le théorème 20, que les équations $\varphi_{n_k}(x, y) = 0$ n'ont dans D′ qu'un nombre $\nu(n_k)$ de zéros sur un plan $y = y_0$, avec

$$\lim \frac{\nu(n_k)}{n_k} = 0. \tag{37}$$

Ce fait peut *a priori* être interprété de deux manières : ou bien les variétés définies par $\varphi_{n_k}(x, y) = 0$ ne pénètrent que rarement dans D′ (on pourrait, utilisant un résultat du chapitre suivant, imposer une borne supérieure convenable fonction de n à l'aire de ces variétés dans D′), ou bien, la direction de plan $y = \text{const.}$ est une direction exceptionnelle pour la majeure partie de ces variétés, le caractère exceptionnel devant, par ailleurs, être précisé par l'étude des fonctions $\varphi_{n_k}(x, y)$ au voisinage de l'ensemble singulier S. Il est clair que, même formulée avec cette imprécision, la première éventualité se distingue de la seconde en ce que les plans de directions voisines $x + ty = u$ possèdent encore dans le premier cas la propriété de n'être coupés par les variétés $\varphi_{n_k}(x, y) = 0$ qu'au même degré de rareté, Le théorème 26 nous montre qu'au voisinage de l'arête il en est bien ainsi : quelle que soit la direction de plan qui porte d', la limitation (36) est valable, $\nu(n_k)$ étant le nombre des points de la variété $\varphi_{n_k}(x, y) = 0$ situés sur d'; la limitation de la fréquence des variétés $\varphi_{n_k}(x, y)$ dans D′ fera appel à des caractères de croissance dans E_4 et non plus seulement à des propriétés particulières aux plans $y = \text{const.}$

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE QUELQUES CARACTÈRES LIÉS A LA CROISSANCE

1. Nous continuerons l'étude d'une fonction $f(x, y)$ supposée holomorphe au voisinage de la région plane $[x \subset d,\ y = 0]$ en examinant le cas, laissé de côté au Chapitre I, où $f(x, y)$ n'a aucune singularité à distance finie au-dessus de d, c'est-à-dire dans la région $[x \subset d, |y| < \infty]$. Les fonctions que nous noterons (fx_i, y), de la seule variable y, constituent alors une classe de fonctions entières d'une variable dépendant du paramètre x. Pour comparer ces différentes fonctions entre elles, nous utiliserons les notations suivantes

qui représentent différentes fonctions croissantes par rapport à $r' = |y|$:

$M(x, r')$ désigne le maximum de $|f(x, y)|$ pour x fixé, $|y| = r'$;
$M(r, r')$ est le maximum de $|f(x, y)|$ pour $x \leqq r$, $y \leqq r'$;
$M_n(r)$ est le maximum de $|A_n(x)|$ pour $x \leqq r < R$.

Le cercle $|x| \leqq kR$, $k > 1$ sera supposé contenu dans le domaine ouvert d. Nous poserons

$$S(r, r') = \sum_0^\infty M_n(r)\, r'^n.$$

Remarquons tout d'abord que $S(r, r')$ et $M(r, r')$ sont des fonctions de r' de croissances à très peu près identiques. On a en effet, d'après (4),

$$M_n(r) < \frac{M(r, r')}{r'^n} \tag{38}$$

ou, en remplaçant r' par $2r'$,

$$S(r, r') = \sum_0^\infty M_n(r)\, r'^n < M(r, 2r') \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} = 2M(r, 2r').$$

De plus $S(r, r')$ majore la série $\Sigma A_n(x) y^n$. On a donc

$$M(r, r') \leqq S(r, r') \leqq 2M(r, 2r'). \tag{39}$$

La fonction $S(r, r')$ constituant une majorante pour toutes les fonctions entières en y de la classe étudiée, pour lesquelles le paramètre x est de module inférieur à r, un problème préliminaire se pose : comparer entre elles les différentes majorantes obtenues quand on remplace le cercle $|x| < r$ par un autre cercle ou même par un domaine d_1 quelconque, la série $\Sigma M_n(d_1) r'^n$ continuant à être notée $S(d_1, r')$.

Considérons les deux cercles concentriques $|x| = r$, $|x| = R$ avec $r < R$. Les courbes C_n, définies par rapport aux axes Ouy par

$$y = f_n(u) = \log M_n(e^u), \qquad u = \log r,$$

sont convexes et croissantes. Par ailleurs désignons par $\overline{A_0 A_n}$, $\overline{B_0 B_n}$, $\overline{D_0 D_n}$ les ordonnées de la courbe C_n pour les valeurs $u = \log r$, $u = \log R$, $u = \log kR$. A partir d'une certaine valeur n_0 de n, $\overline{D_0 D_n}$ est négatif, le cercle $|x| = kR$ appartenant à d, et $M_n(kR)$ tendant vers zéro. Soient encore C'_n les courbes qu'on déduit de C_n en divisant les ordonnées par $|B_0 B_n|$; elles passent toutes par le point B'_0 de coordonnées $u = \log R$, $y = -1$ et possèdent les propriétés de croissance et de convexité des courbes C_n; leur pente, à gauche de B'_0, ne peut surpasser la pente de la corde $B'_0 D_0$. En exprimant que le transformé A'_n de A_n est au-dessus de cette droite, nous obtenons l'inégalité

$$\log M_n(r) \geqq \log M_n(R)\left[1 + \frac{\log R - \log r}{\log k}\right]$$

réalisée pour $n > n_0$. Elle est de la forme

$$\log M_n(r) \geqq (\alpha \log r + \beta) \log M_n(R) = h(r) \log M_n(R).$$

D'autre part on a $\log M_n(r) \leqq \log M_n(R)$. D'où

$$h(r) \log M_n(R) \leqq \log M_n(r) \leqq \log M_n(R); \tag{40}$$

$h(r)$ est une fonction plus grande que 1, finie dès que r est différent de zéro; (40) entraîne l'énoncé :

Théorème 27. — *Soit $|x| < R$ un cercle fixe intérieur au domaine d aux points duquel il correspond une classe de fonctions $f(x, y)$ entières en y, et soit $M_n(r)$ le maximum sur le cercle $|x| = r$ du module du coffiecient $A_n(x)$ de la série de Hartogs $\Sigma A_n(x) y^n$ de $f(x, y)$. Le rapport $\frac{\log M_n(r)}{\log M_n(R)}$ reste, à partir d'une certaine valeur de n, compris entre deux fonctions positives fixes qui ne dépendent que de r; elles demeurent finies tant que r est positif et que le cercle $|x| = r$ reste intérieur à d.*

De (40) découle encore

$$M_n(R)^{h(r)} < M_n(r) < M_n(R)$$

pour $n > n_0$. D'où, à partir d'une valeur r'_0,

$$\Sigma M_n(R)^{h(r)} r'^n \leqq \Sigma M_n(r) r'^n \leqq \Sigma M_n(R) r'^n. \tag{41}$$

Nous sommes amenés à comparer les croissances de deux fonctions $\Sigma C_n r'^n$ et $\Sigma C_n^h r'^n$, h étant un nombre fixe supérieur à un. Désignons par $N(r')$ le rang du terme de module maximum de la série $\Sigma C_n r'^n$ (ou le rang le plus élevé s'il se trouve plusieurs termes ayant cette propriété). On aura

$$\log C_N^h r'^N = h \log C_N + N \log r' = h \log C_N (r'^N)^{\frac{1}{h}}.$$

Si donc $m(r')$ désigne le module d'un tel terme, $M_1(r')$, $M_2(r')$ étant les maxima des modules des deux séries $\Sigma C_n r'^n$, $\Sigma C_n^h r'^n$, que nous comparons pour une valeur r', on aura

$$\log M_2(r') > \log C_N^h r'^N = h \log C_N (r'^N)^{\frac{1}{h}} = h \log m\left(r'^{\frac{1}{h}}\right).$$

Or $\log m(r')$ est asymptotiquement équivalent à $\log M_1(r')$. D'une façon précise, la théorie des fonctions entières d'une variable [1] donne la double inégalité

$$\log m(r') < \log M_1(r') < \log m(r') + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon'\right) \log_2 m(r')$$

ou

$$\log m(r') < \log M_1(r') < (1 + \varepsilon) \log m(r'),$$

sauf pour des valeurs r' sur l'ensemble desquelles $\log r'$ a une variation bornée. Dans ces conditions, (41) nous conduit à l'inégalité

$$M\left(R, r'^{\frac{1}{h}}\right) \leqq M(r, r') \leqq M(R, r') \tag{42}$$

pour $r < R$, le nombre h est fini dès que r est positif; il est borné par la fonction $h(r)$ définie plus haut.

La comparaison des quantités $M_n(R)$, $M_n(r)$ conduit donc à l'énoncé :

THÉORÈME 28. — *Si l'on considère les fonctions* $M(r, r')$ *et* $S(r, r')$ *pour différentes valeurs de* r, *on a*

$$S(r, r'^{h(r')}) = S(R, r') \qquad \text{et} \qquad M(r, r'^{h(r')}) = M(R, r'), \tag{43}$$

la fonction $h(r')$ *étant bornée, quand* r' *varie, par une fonction de* r *qui reste finie tant que* r *est différent de zéro.*

L'énoncé donné ne tient plus compte d'intervalles exceptionnels de valeurs de r'; il sera justifié sous cette forme par la remarque faite page (174).

---

[1] G. VALIRON, *Lectures on the general Theory of integral fonctions*, 1923, p. 106.

Continuant à étudier les conséquences de l'énoncé 27, nous poserons, pour $n > n_0$, de manière que $\varphi(n)$ soit une fonction positive

$$\varphi(n) = -\log M_n(R)$$

et

$$U_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \log |A_n(x)|.$$

Les fonctions sous-harmoniques $U_n(x)$ sont inférieures à -1 pour $|x| < R$. Elles sont de masses bornées dans l'intérieur de ce cercle; sinon, d'après un résultat du Chapitre I, une suite partielle d'entre elles convergerait vers $-\infty$ dans tout domaine intérieur à d, et en particulier sur le cercle $|x| = r < R$, ce qui contredit l'énoncé 27 d'après lequel on a, en un point de ce cercle,

$$U_n(x_n) = \frac{1}{\varphi(n)} \log M_n(r) \geqq -h(r).$$

Nous énoncerons donc :

THÉORÈME 29. — *Les coefficients $A_n(x)$ ont dans tout cercle $|x| \leqq r < R$ un nombre de zéros $\nu(n)$ tel que le rapport $\frac{\nu(n)}{\varphi(n)}$ soit borné quel que soit n.*

D'autre part les plus petites majorantes harmoniques $H_n(x)$ des $U_n(x)$ dans le cercle $|x| < R$ forment une famille normale bornée inférieurement dans tout cercle intérieur. Un raisonnement du Chapitre I montre que la capacité de l'ensemble $U_n(x) < -h$ est au plus $Ke^{-\frac{h}{\mu}}$, K et μ ne dépendant ni de n ni de h, mais seulement des bornes finies assignées aux fonctions $U_n(x)$. L'ensemble E_h sur lequel on a $\overline{\lim}\, U_n(x) < -h$ possède une capacité intérieure limitée par la même expression. Désignant toujours par $m(r')$ le terme maximum de la série

$$S(R, r') = \Sigma M_n(R) r'^n,$$

nous remarquerons qu'il existe une suite r'_p avec $r'_p \to \infty$, $N(r'_p) \to \infty$, $\varepsilon(r'_p) \to 0$:

$$(43') \qquad \log m(r'_p) > [1 - \varepsilon(r'_p)] \log S(R, r'_p)$$

et nous écrirons, r' et N appartenant à ces suites de valeurs,

$$(44) \qquad \log|A_N(x)\,r'^N| > -h\,\varphi(N) + N\log r' = h\log m\left(r'^{\frac{1}{h}}\right)$$

si $U_N(x) > -h$. D'où, si petit que soit ε positif,

$$\log M(x, r') > (h-\varepsilon)\log S\left(R, r'^{\frac{1}{h}}\right)$$

pour une infinité de valeurs de r' tendant vers l'infini, à moins que l'on n'ait $\overline{\lim}\, U_N(x) \not> -h$.

THÉORÈME 30. — *La croissance des fonctions de la classe $f(x_i, y)$ présente le caractère d'homogénéité suivant : on a, quel que soit* ε,

$$\log M(x, r') > (h-\varepsilon)\log S\left(R, r'^{\frac{1}{h}}\right)$$

pour une infinité de valeurs de r' tendant vers l'infini, sauf si x appartient à un ensemble E_h dont la capacité intérieure tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$.

Le théorème constitue évidemment un résultat précis dans le cas où l'on attribue à la croissance de $\log S(R, r')$, ou encore à celle de $\log M(R, r')$, un certain caractère de régularité.

Remarque sur une propriété des fonctions d'une variable. — Supposons $f(z)$ régulière dans un domaine contenant à son intérieur les cercles concentriques C_1, C_2, C_3 de centre O de rayons r_1, r_2, r_3 croissants dans cet ordre : il existe une borne inférieure de $\log M(C_1)$ en fonction linéaire de $\log M(C_2)$ et de $\log M(C_3)$, obtenue en exprimant la convexité de $\log M(r)$ en fonction de $\log r$, $M(r)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle $|x| = r$.

Si nous remplaçons C_1 par un ensemble e intérieur au cercle C_2, et désignons par $M(e)$ le maximum de $|f(z)|$ pris sur e, un théorème de forme analogue subsiste encore, dès que e est de capacité positive, mais avec cette différence pourtant essentielle que les coefficients de la fonction linéaire obtenue ne sont plus nécessairement positifs. Le raisonnement fait plus haut s'applique en effet à toute fonction sous-harmonique

$$U(z) = \log|f(z)| - \log M(C_3).$$

Ces fonctions forment une famille négative ou nulle, de masses bornées pour $|z| < r_3$; l'ensemble $U(z) < -h$ a une capacité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. Autrement dit, si e est de capacité $C > 0$, le maximum $M(e)$ de $|f(z)|$ sur e est borné inférieurement par un nombre *qui ne dépend que des données*; l'existence de la propriété est ainsi acquise par une méthode de familles normales.

Indiquons très brièvement comment le calcul de la borne s'effectue : nous poserons $r_2 = R$, $r_3 = k^2R$, $k > 1$, et nous considérerons également le cercle intermédiaire $|x| = kR$. A l'intérieur de ce dernier cercle, la masse μ de $U(z)$ est bornée :

$$(45) \qquad \mu < \frac{\log M(k^2R) - \log M(kR)}{\log(k^2+1) - \log 2k} < \frac{\log M(k^2R) - \log M(R)}{\log(k^2+1) - \log 2k} = \mu_1.$$

D'autre part, si $\nu(z)$ est la distribution d'équilibre de Robin-Frostmann sur e, on a

$$(46) \quad I = \int_e U(z)\,d\nu(z) = \int_e H(z)\,d\nu(z) - \int_e\int_{|x|\leqq kR} d\mu(a)\,d\nu(z) \log\left|\frac{k^2R^2 - \bar{a}z}{kR(z-a)}\right|,$$

$\mu(a)$ étant la distribution relative à $U(z)$ elle-même. Nous bornerons inférieurement $M(e)$ au moyen de l'intégrale I, ce qui nous amène à borner tout d'abord $H(z)$, plus petite majorante harmonique de $U(z)$ dans le cercle $|x| < kR$. On aura dans le cercle $|x| < R$

$$(47) \qquad \begin{aligned} H(z) &\geqq \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 [\log M(R) - \log M(kR)] \\ &\geqq \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 [\log M(R) - \log M(k^2R)] = m. \end{aligned}$$

Dans le deuxième terme au second membre de (46) isolons le potentiel. Nous aurons

$$\int_e\int d\mu(a)\,d\nu(z) \log|z-a| > -\mu_1\gamma = \mu_1 \log C,$$

γ étant la constante de Robin de e. D'où la limite inférieure

$$\log M(e) \geqq I \geqq m + \mu_1[\log C + \log R + \log(k - 1)]$$

m et μ_1 étant définies par (45), (47). Ainsi la propriété se trouve précisée et définit le comportement d'une fonction $f(z)$ à un ensemble de capacité nulle près. Nous énoncerons :

Théorème 31. — *Si $f(z)$ est une fonction régulière sur le cercle $|z| = k^2 R$ et à son intérieur, les maxima $M(e)$, $M(R)$, $M(k^2 R)$, $k > 1$, de $|f(z)|$, pris successivement : 1° sur un ensemble e de capacité $C > 0$ situé dans le cercle $|x| < R$, 2° sur le cercle $|x| = R$, 3° sur le cercle $|x| = k^2 R$, satisfont à l'inégalité*

$$\log M(e) \geqq \mu_1[\log C + \log R + \log(k - 1)] + m,$$

μ_1 et m étant des fonctions linéaires de $\log M(k^2 R)$, $\log M(R)$, dont les coefficients dépendent des rayons R, $k^2 R$, des deux cercles concentriques.

Le théorème 30 permet de comparer la croissance des diverses fonctions $f(x, y)$ de y obtenues lorsque x demeure intérieur à un cercle fixe $|x| < R$. Quand x demeure à l'intérieur d'un domaine d_1 quelconque intérieur à d on obtient une inégalité de même forme.

Nous passons en effet, par le théorème 28, d'un cercle à un cercle concentrique; soit maintenant d_1 un domaine qui contient O à son intérieur; il contient un cercle de centre O, ce qui fournit une limitation inférieure de $\log M(d_1, r')$. Pour obtenir une majoration il suffit de représenter d_1 conformément sur un cercle C' : $|x| = R'$, le point O restant fixe; le transformé d'un certain cercle de centre O de la figure primitive est un domaine contenu dans C' contenant à son intérieur un cercle C'' de centre O dans la nouvelle figure; au moyen de C' et de C'', on aura encore une majoration du type (42)

$$\log M\left(R, r'^{\frac{1}{h}}\right) \leqq \log M(d_1, r') \leqq \log M(R, r'^h),$$

le nombre h étant fini et ne dépendant que de d_1.

On passera d'un domaine d_1 à un domaine d_2 quelconque, tous deux à distance positive de la frontière de d, au moyen d'un domaine d_3

les contenant et contenant O à son intérieur; l'exposant h de r' reste fini et l'on aura

$$\log M\left(d_1, r'^{\frac{1}{h}}\right) < \log M(d_2, r') < \log M(d_1, r'^h)$$

ou encore :

THÉORÈME 32. — *Si d_1 et d_2 sont deux domaines intérieurs à d, on a*

$$\log M[d_1, r'^{h(r')}] = \log M(d_2, r'),$$

$h(r')$ étant une fonction (positive ou négative) qui reste bornée quand r' tend vers l'infini.

Le même procédé, appliqué à l'étude du maximum $M_n(d)$ de $|A_n(x)|$ dans un domaine d permet de passer du théorème 27 à l'énoncé :

THÉORÈME 33. — *Si d_1 et d_2 sont deux domaines intérieurs à d, le rapport*

$$\frac{\log M_n(d_1)}{\log M_n(d_2)} \tag{48}$$

reste, à partir d'une certaine valeur de n, compris entre deux nombres positifs fixes.

On peut ainsi prendre comme fonction $\varphi(n)$ de comparaison aussi bien $-\log M_n(d_1)$ que $\log M_n(R)$ que nous avions utilisé plus haut.

Le résultat relatif aux masses s'étend également à partir de 32 :

Dans tout domaine intérieur à d, les dérivées $\dfrac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}$ n'ont sur un plan $y = y_0$ que $k\varphi(n)$ zéros au plus, $\varphi(n)$ étant égal à $-\log M_n(d_1)$, où $M_n(d_1)$ représente le maximum de $|A_n(x)|$ sur d_1.

Enfin, du théorème 31, résulte qu'on peut aussi définir $\varphi(n)$ égal à $-\log M_n(e)$, $M_n(e)$ étant le maximum de $|A_n(x)|$ sur un ensemble de capacité positive.

THÉORÈME 34. — *Soient e un ensemble de capacité positive, d_1 un domaine, tous deux intérieurs à d. On a, si petit que soit* ε,

$$h \log M_n(d_1) < \log M_n(e) < \log M_n(d_1)$$

et

$$(49) \qquad (h-\varepsilon)\log S\left(d_1, r'^{\frac{1}{h}}\right) < \log S(e, r') < \log S(d_2, r'^h),$$

pour un nombre h fini supérieur à un, excepté peut-être pour un ensemble de valeurs r' sur lequel $\log r'$ *a une variation finie.*

L'étude d'une fonction $f(x_i, y)$ obtenue pour une valeur particulière du paramètre x prise dans un domaine d quelconque conduit, d'après le théorème 33, à remplacer, dans 30, la fonction $S(R, r')$ par $S(d, r')$.

Nous donnerons maintenant une autre forme d'énoncé :

THÉORÈME 35. — *Étant donnée une fonction $h(r')$ indéfiniment croissante, la croissance des fonctions $f(x, y)$, obtenues en donnant à x une valeur constante, présente le caractère d'homogénéité suivant : l'inégalité*

$$(49') \qquad \log M[x, r'^{h(r')}] > \log S(d_1, r'),$$

est valable sauf si x appartient à un ensemble E_0 de capacité extérieure nulle, et elle est vérifiée pour un ensemble $E_{r'}$ d'intervalles de valeurs de r' qui tendent vers l'infini et sont indépendants de la valeur donnée à x.

Cet énoncé, un peu moins général que l'énoncé 30, présente sur ce dernier deux avantages : l'ensemble exceptionnel E_0 a une capacité et cette capacité est nulle; d'autre part, l'inégalité (49′) sera vérifiée sur la même suite $E_{r'}$ d'intervalles quel que soit x étranger à E_0, à partir toutefois d'une valeur convenable de r'.

Sa démonstration utilise la propriété du terme maximum $m(r')$ de la série $S(d_1, r') = \Sigma M_n(d_1) r'^n$. Représentant toujours par $N(r')$ le rang de ce terme, nous aurons

$$(50) \qquad \log|A_N(x)| > -h(r')\varphi[N(r')],$$

sauf sur un ensemble dont la capacité tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. Prenons pour h la fonction croissante $h(r')$ qui figure dans (49'). Comme plus haut, nous pouvons trouver une suite d'intervalles ω sur lesquels $r' \to \infty$ et

$$\log m(r') > [1 - \varepsilon(r')] \log S(d_1, r'),$$

$\varepsilon(r')$ tendant vers zéro. Considérons seulement la suite infinie S des valeurs N de la fonction $N(r')$ sur ω. A toute valeur r' de ω correspond la valeur $N(r')$. Réciproquement, à une valeur N de S faisons correspondre une valeur r' obtenue en prenant la plus petite des valeurs r' pour lesquelles on a $N(r') = N$. La fonction $r'(N)$ est définie ainsi pour les valeurs N entières de la suite S; $r'(N)$ est croissante. Si l'on substitue cette fonction dans (50), on obtient

$$\log |A_N(x)| > -\psi(N)\varphi(N), \tag{51}$$

où $\psi(N)$ croît et tend vers l'infini.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — $U_n(x)$ *étant une suite de fonctions sous-harmoniques bornées, de masses bornées dans* d, $\psi(n)$ *une fonction donnée indéfiniment croissante, l'ensemble* E *sur lequel* $\overline{\lim} \frac{U_n(x)}{\psi(n)} < -1$ *est de capacité* EXTÉRIEURE *nulle.*

En effet E est un sous-ensemble de l'ensemble E' obtenu en remplaçant la suite $U_n(x)$ par une suite partielle $U_{n_p}(x)$, les indices n_p seront choisis de manière que $\psi(n_p) > p^2$, ce qui est possible, $\psi(n)$ étant une fonction donnée. L'ensemble e_{n_p}, où l'on a

$$U_{n_p}(x) < -\varphi(n_p) < -p^2,$$

est de capacité C_p au plus égale à $Ke^{-\frac{p^2}{\mu}}$. Par suite on a

$$\gamma_p = -\log C_p > \frac{p^2}{\mu} - \log K > \frac{p^2}{\mu_1},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de p.

L'ensemble $\eta_q = \sum_{p>q} e_{n_p}$ possède une constante de Robin γ'_q

$$\frac{1}{\gamma'_q} \leqq \sum_{p>q} \frac{1}{\gamma_q} \leqq \mu_1 \sum_{q}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \varepsilon_q.$$

ε_q tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$. L'ensemble E' est contenu dans η_q, sa capacité extérieure est ε_q au plus, quel que soit q. Ainsi E et E' sont de capacité extérieure nulle, le lemme est établi.

Revenons à l'inégalité (50), on aura

$$\log M(x, r') > \log|A_N(x)| + N \log r' > -h(r')\varphi(N) + N \log r'$$
$$> h(r') \log m\left[r'^{\frac{1}{h(r')}}\right] > \log m\left[r'^{\frac{1}{h(r')}}\right],$$

sauf si l'on avait

$$\log A_N|(x)| < -h(r')\varphi(N),$$

ce qui entraînerait

$$U_N(x) = \frac{1}{\varphi(N)} \log|A_N(x)| < -\psi(N).$$

Nous utiliserons le raisonnement du lemme précédent en considérant une suite N_p extraite de la suite des indices N, et telle que $\psi(N_p) > p^2$. Dans ces conditions si e_{N_p} désigne l'ensemble où l'on a $U_{N_p}(x) < -\psi(N_p)$, l'ensemble $\eta_q = \Sigma e_{N_p}$, la somme étant faite pour $N_p > N_q$, a une capacité extérieure qui tend vers zéro quand N_q augmente indéfiniment. Si donc, pour une valeur x, on a

$$\log M(x, r') < \log m\left[r'^{\frac{1}{h(r')}}\right]$$

lorsque r' est tel que $N(r') \doteq N_p > N_q$, x appartient à η_q. A la suite N_p correspond une suite de valeurs r'_p tendant vers l'infini, prises dans les intervalles ω, telles qu'on ait

$$(52) \qquad \log M[x, r'^{h(r')}] > [h(r') - \varepsilon] \log m(r') > \log S(d_1, r')$$

quand r' appartient à cette suite, sauf si x appartient à un ensemble dont la capacité extérieure tend vers zéro, quand augmente indéfiniment la valeur r'_0 à partir de laquelle on suppose que (52) est vérifié dans la suite r'_p. D'ailleurs chaque valeur r'_p est centre d'un intervalle sur lequel (52) est encore vérifié. Désignons par $E_{r'}$ cette suite d'intervalles : l'énoncé est établi. On a encore dans les mêmes conditions

$$\log M[(x, r'^{h(r')}] > \log M[d_1, r'],$$

la fonction $S(d_1, r')$ étant d'après (39) équivalente à $M(d_1, r')$.

Nous terminerons cette étude des propriétés d'homogénéité de la classe $f(x_i, y)$ en examinant la précision des théorèmes obtenus par rapport à quelques types usuels de croissance.

a. Supposons tout d'abord $\log M(r_0, r')$ d'ordre fini α pour une certaine valeur r_0 (pour simplifier les notations on suppose l'origine $x = 0$ contenue dans d), c'est-à-dire

$$\overline{\lim} \frac{\log_2 M(r_0, r')}{\log r'} = \alpha. \tag{53}$$

Dans ce cas et comme conséquence des énoncés 31 et 33 :

1° Le maximum $M(e, r')$ de $|f(x, y)|$ pour $x \subset e$, $|y| \leqq r'$, e étant un ensemble de capacité positive, satisfait à

$$\alpha_1 < \frac{\overline{\lim} \log_2 M(e, r')}{\log r'} < \alpha_2,$$

α_1 dépend essentiellement de la capacité de e et ne s'annule qu'avec celle-ci.

2° Dans les mêmes conditions $\log M(x, r')$ est d'ordre fini positif dans tout domaine iutérieur à d, sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle.

3° Dès qu'en un point x_0 intérieur à d, $\log M(x, r')$ est d'ordre fini non nul, l'ensemble des x, pour lesquels $\log M(x, r')$ est d'ordre nul, est de capacité nulle.

b. Il n'y a aucune difficulté à adapter le critère d'homogénéité de croissance donné par (49) et (49') à un type de croissance d'ordre infini ou d'ordre nul suffisamment précisé. Donnons-nous à titre d'exemple l'équivalence

$$\log M(r, r') \sim r' \log r'$$

ou, pour préciser,

$$(54) \qquad B \log^2 r' < \log_2 M(r, r') < A \log^2 r'.$$

Dans ces conditions on aura, dans tout domaine d_1 intérieur à d, et sauf sur un ensemble dont la capacité intérieure tend vers zéro avec $\frac{1}{h_2}$,

$$B(\log r' - \log h_2)^2 < \log_2 M(x, r') < A(\log r' + \log h_1)^2$$

pour une suite de valeurs de r' tendant vers l'infini. En remplaçant h_2 par une fonction croissant indéfiniment, on aura, d'après (35),

$$B < \overline{\lim} \frac{\log_2 M(x, r')}{\log^2 r'} < A,$$

sauf si r' appartient à un ensemble de capacité nulle.

Ce type de comparaison (54) renferme une classe assez vaste pour que presque toutes [1] les fonctions $f(x_i, y)$ de la classe étudiée lui appartiennent au point de vue de leur croissance maxima. Lorsque cette circonstance a lieu, nous dirons que la classe elle-même appartient à ce type de croissance, c'est ainsi qu'une classe est dans cette acception d'ordre non nul dès qu'une de ses fonctions est d'ordre positif, d'ordre infini dès qu'une fonction $f(x_i, y)$ est d'ordre de croissance infini.

2. Nous appliquerons les résultats précédents à l'étude d'un problème spécial aux fonctions de plusieurs variables. On y est conduit en examinant le principe de continuité tel qu'il a été formulé au Chapitre II. Notons, d'une façon sommaire, que les variétés de points singuliers d'une fonction de n variables sont ou bien des variétés à $2n-1$ dimensions réelles, ou bien des variétés à $2n-2$ dimensions qui sont des variétés caractéristiques. Les premières sont à comparer aux lignes singulières d'une fonction $f(z)$, les secondes à ses points singuliers essentiels isolés. Le principe de continuité nous apprend qu'une variété caractéristique W, plongée dans un domaine

(1) Il s'agit d'une presque totalité entendue au sens de la capacité.

d'holomorphie est tout entière singulière dès qu'un de ses points l'est. Mais ce caractère global de la singularité W demeure-t-il si l'on considère le comportement de la fonction au voisinage des différents points de W ? Le problème posé revient à l'extension, aux propriétés de croissance, du principe de continuité tel qu'il a été présenté au Chapitre II.

Montrons, pour une fonction $f(x, y)$, la liaison du problème ainsi posé avec l'étude de l'homogénéité, au point de vue de la croissance, de la classe $f(x_i, y)$ de fonctions entières examinée plus haut.

Supposons d'abord W constituée par la région plane $[x \subset d, y = 0]$, plongée dans le domaine $[x \subset d_1, |y| < R_1]$, $d \subset d_1$, où $f(x, y)$ est supposée régulière, sauf sur W. Reprenons un procédé utilisé au début du Chapitre I et coupons par un plan $x = \text{const.}$, on aura

$$f(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x, \zeta)\, d\zeta}{\zeta - y} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(x, \zeta)\, d\zeta}{\zeta - y}, \tag{55}$$

où C est le cercle $[x, |y| = R < R_1]$, C′ le cercle $[x, |y| = \varepsilon]$, parcourus tous deux dans le sens direct, le point $[x, y]$ appartenant au domaine $\varepsilon < |y| < R$. Au lieu d'une série de Hartogs proprement dite, (55) nous donne une série qui procède suivant les puissances positives et négatives de y

$$f(x, y) = \sum_0^\infty A_n(x)\, y^n + \sum_1^\infty \frac{B_n(x)}{y^n} \tag{56}$$

avec

$$A_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x, \zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \qquad B_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} f(x, \zeta)\, \zeta^{n-1}\, d\zeta. \tag{57}$$

Les coefficients $A_n(x)$, $B_n(x)$ n'ont plus un lien direct avec les dérivées de $f(x, y)$. Mais les expressions (57) *en donnent encore le prolongement analytique* quand on passe d'un point à un autre à y constant. D'autre part les majorations

$$\frac{1}{n}\log|A_n(x)| < -\log R + \frac{1}{n}\log M(d, R),$$

$$\frac{1}{n}\log|B_n(x)| < \log\varepsilon + \frac{1}{n}\log M(d, \varepsilon),$$

où $M(d, R)$, $M(d, \varepsilon)$ sont les maxima de $|f(x, y)|$ sur les surfaces $[x \subset d, |y| = R]$, $[x \subset d, |y| = \varepsilon]$, assurent la convergence et nous montrent que $\varphi(x, y) = \sum_0^\infty A_n(x) y^n$ est une fonction régulière dans tout le domaine $[x \subset d, |y| < R_1]$, tandis que la fonction

$$\psi(x, y) = \sum_0^\infty \frac{B_n(x)}{y^n}$$

n'est singulière au-dessus du domaine $x \subset d$ qu'aux points de W; elle est régulière pour $y = \infty$. Posons

$$f_1(x, y) = \psi\left(x, \frac{1}{y}\right).$$

La fonction $\psi(x, y)$ *constitue la partie principale de* $f(x, y)$ *au voisinage de* W; la fonction $f_1(x, y)$ qui en est déduite forme une classe étudiée au paragraphe 1. Le problème posé est donc équivalent à l'étude de l'homogénéité des croissances en y de cette classe $f_1(x, y)$ pour $x \subset d$. La manière dont s'établit l'existence d'une partie principale relative à l'ensemble de W illustre l'analogie entre variétés caractéristiques singulières de $f(x, y)$ et points singuliers essentiels isolés d'une fonction $f(z)$.

Si W est une variété caractéristique définie par $g(x, y) = 0$, on sera ramené au cas précédent au point de vue de l'étude locale tant qu'on étudie W au voisinage d'un point en lequel on n'a pas simultanément $g'_x = 0$, $g'_y = 0$. Il suffira en effet, si l'équation $g(x, y) = 0$ est supposée résoluble en y, de poser $y - h(x) = y_1$, $x = x_1$. On étudiera alors la fonction

$$f[x_1, y_1 + h(x_1)] = \varphi(x_1, y_1),$$

la transformation effectuée étant univalente au voisinage de W.

Les résultats du paragraphe 1 s'appliquent à $f_1(x, y)$: remarquons que l'on peut prendre pour plan $x_1 = \text{const.}$ une direction de plan quelconque, non tangente à W; la variable $|y_1|$ est, en grandeur, équivalente à la distance du point $[x_1, y_1]$ à W, multipliée par un facteur constant.

Nous appelons ensemble de capacité nulle sur W un ensemble dont tout sous-ensemble, contenu sur W dans un voisinage qui est uniformisé à l'aide d'un paramètre t, correspond à un ensemble de valeurs de t de capacité nulle. La notion est indépendante du paramètre choisi. Dans ces conditions le théorème 35 a pour conséquence :

THÉORÈME 36. — *Soit* Q_0 *une direction de plan caractéristique supposée différente des plans tangents à la variété singulière caractéristique* W *dans un domaine* d. *Quand le point* $P[x, y]$ *tend vers un point* S *de* W *en se déplaçant sur le chemin à deux dimensions constitué par le plan* Q(S) *mené par* S *parallèlement à* Q_0, *la croissance du maximum* $M(S, r)$ *de* $|f(x, y)|$ *pris à une distance* r *de* W *sur ce chemin satisfait à une condition d'homogénéité; si l'on pose* $\mu(d, r) = \max M(S, r)$, *on a*, $\eta(r)$ *étant une fonction donnée qui tend vers zéro*,

$$\log \mu[d, r^{\eta(r)}] < \log M(S, r) < \log \mu(d, r) \tag{58}$$

et la première inégalité est valable sur une suite d'intervalles E_r *tendant vers l'infini, sauf si* x *est un point d'un ensemble exceptionnel de capacité nulle.*

On traduirait de même la forme d'énoncé donnée par le théorème 30.

Conséquence. — De même que l'on parle de la croissance d'une fonction $f(z)$ au voisinage d'un point singulier isolé, de même on parlera de la croissance de $f(x, y)$ au voisinage de W, avec la précision définie par (58). Cette croissance est encore celle de $M(r)$, $M(r)$ étant le maximum de $|f(x, y)|$ pris sur l'ensemble des points voisins de W et situés à distance au moins égale à r de cette variété, au voisinage d'une de ses régions plongée dans un domaine d'holomorphie.

En particulier on parlera d'une variété d'ordre fini, d'ordre infini ou nul : dire, par exemple, que W est d'ordre fini, signifie que la croissance de $\log M(r)$ est d'ordre fini au voisinage de tout élément de W ou, encore, que si l'on tend vers un point quelconque de W suivant une direction Q_0 choisie à l'avance, l'ordre de croissance de $f(x, y)$, en fonction de la distance à W, est variable mais reste fini et non nul sauf quand on tend vers les points d'un ensemble de capacité intérieure nulle situé sur W.

3. *Cas des fonctions entières de deux variables.* — Les fonctions $f(x, y)$, dont l'ensemble singulier est le plus simple, sont les fonctions entières : cet ensemble se réduit aux deux variétés caractéristiques

$$W_1 : x = \infty, \qquad W_2 : y = \infty.$$

D'après le théorème de continuité il n'y a que trois types de fonctions entières : les constantes pour lesquelles ni W_1, ni W_2 ne sont singulières, les fonctions d'une seule variable pour lesquelles W_1 ou W_2 seule est singulière, enfin celles que nous étudierons, pour lesquelles W_1 et W_2 sont singulières toutes deux : tous les points de ces deux variétés sont alors singuliers.

Croissance totale. — Nous indiquerons plus loin comment se précisent les résultats précédents quand on les applique à l'étude de la classe $f(x_i, y)$, $f(x, y)$ étant entière en x et y. L'étude de la croissance des fonctions entières de deux variables comporte en outre l'étude de $f(x, y)$ au voisinage du point commun aux variétés W_1, W_2. Nous examinerons la croissance de $|f(x, y)|$ sur des plans $y = tx$ qui pivotent autour de ce point.

Nous y sommes encore conduit en définissant la croissance à deux variables comme une propriété géométrique du champ scalaire obtenu dans E_4 en attachant à un point $[x, y]$ la valeur $|f(x, y)|$; nous étudierons alors les propriétés de ce champ invariantes par les rotations pseudo-conformes (c'est-à-dire les changements du système de comparaison dans E_4 qui conservent l'origine, la quantité $\rho^2 = x\bar{x} + y\bar{y}$, et la propriété de l'élément caractéristique). Celles-ci s'obtiennent aisément en fonction de quatre paramètres réels θ, θ', τ, ω par les équations

$$(59) \qquad x' = x \cos\omega\, e^{i\theta} + y \sin\omega\, e^{i\tau}, \qquad y' = x \sin\omega\, e^{i\theta'} - y \cos\omega\, e^{i(\theta'+\tau-\theta)}.$$

Elles échangent entre eux les plans $y = tx$.

Définition. — Nous appellerons *totales* les notions de croissance déduites de l'étude du champ scalaire défini plus haut, et invariantes par les transformations (59).

Croissance dans une direction donnée. — La fonction d'une variable, obtenue pour $y = tx$, a la forme

$$f(x,\ tx) = \varphi(x,\ t) = \sum_0^\infty \mathrm{P}_n(t)\, x^n,$$

où $\mathrm{P}_n(t)$ est le polynome de degré n

$$\mathrm{P}_n(t) = \sum_{q=0}^{q=n} a_{n-q,q}\, t^q,$$

les coefficients a_{pq} étant ceux de la série de Taylor $f(x, y) = \sum_{p,q} a_{pq} x^p y^q$.

Grâce à cette particularité, l'étude de la croissance de $\varphi(x,\ t)$ en x pour les différentes valeurs de t présente un caractère d'homogénéité plus précis que celui rencontré aux paragraphes 1 et 2. Comparons tout d'abord diverses majorantes. Soit $|t| = \tau$ et soit $\mathrm{M}_1(\tau,\ r)$ le maximum de $|\varphi(x,\ t)|$ pour $|x| \leqq r_1$, $|t| \leqq \tau$;

$$\mathrm{M}_1(\tau,\ r) = \mathrm{M}(r,\ \tau r).$$

Par suite, si $\tau' > \tau$,

$$\mathrm{M}_1(\tau',\ r) = \mathrm{M}(r,\ \tau' r) < \mathrm{M}\left(r\frac{\tau'}{\tau},\ \tau' r\right) < \mathrm{M}_1\left(\tau,\ \frac{r\tau'}{\tau}\right)$$

$$\mathrm{M}_1(\tau,\ r) < \mathrm{M}_1(\tau',\ r) < \mathrm{M}_1\left(\tau,\ \frac{r\tau'}{\tau}\right). \tag{60}$$

Cette double inégalité est suffisante pour la comparaison des deux majorantes $\mathrm{M}_1(\tau,\ r)$, $\mathrm{M}_1(\tau',\ r)$. Elle nous montre le degré d'homogénéité de croissance à espérer et nous permet de plus de comparer $\mathrm{M}_1(\tau,\ r)$ et $\mathrm{M}_1(1,\ r) = \mathrm{M}(r,\ r)$.

Soit $\mathrm{M}(\rho)$ le maximum de $|f(x, y)|$ dans l'hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} \leqq \rho^2$. Le dicylindre $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r$ est contenu dans cette hypersphère pour $r \leqq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. On aura donc

$$\mathrm{M}_1\left(1,\ \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \leqq \mathrm{M}(\rho).$$

D'autre part, d'après (56), si $\mathrm{M}(\rho)$ est atteint en un point de l'hypersphère pour lequel $|x| = r$, $|t| = \tau$, on a

$$\mathrm{M}(\rho) = \mathrm{M}_1(\tau,\ r) < \mathrm{M}_1(1,\ r\tau) < \mathrm{M}_1(1,\ \rho).$$

D'où la double inégalité

$$M_1\left(1, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \leqq M(\rho) \leqq M_1(1, \rho), \tag{61}$$

qui montre que les maxima de $|f(x, y)|$ pris soit sur toute l'hypersphère, soit seulement sur les points de cette hypersphère pour lesquels $|y| = |x|$ sont sensiblement équivalents au point de vue de la croissance. Nous utiliserons également la majorante

$$\sigma(r) = \sum C_n r^n, \tag{62}$$

où C_n est la borne supérieure exacte des modules des coefficients de $P_n(t)$. On a, pour $|t| = 1$,

$$|P_n(t)| < (n+1) C_n < 2^n C_n.$$

Par suite

$$M_1(1\, r) < \sum 2^n C_n r^n = \sigma(2\, r).$$

D'autre part, $M_n(\tau)$ désignant le maximum de $|P_n(t)|$ pour $|t| = 1$,

$$C_n < M_n(1)$$
$$\sigma(r) < S_1(1, r) < 2\, M_1(1, 2\, r)$$

d'après (39). D'où enfin les inégalités comparatives

$$M_1(1, r) < \sigma(2\, r) < 2\, M_1(1, 4\, r). \tag{63}$$

Définition. — Nous appellerons croissance totale la croissance de $M(\rho)$ en fonction de ρ, $M(\rho)$ étant comme plus haut le maximum de $|f(x, y)|$ pour $x\bar{x} + y\bar{y} \leqq \rho^2$.

THÉORÈME 37. — *Au sens précisé par les inégalités* (60), (61), (63), *il est équivalent de définir la croissance totale de $f(x, y)$ par celle (en fonction de la même variable ρ) soit de $M(\rho)$, soit de $M(\rho, \tau\rho)$, τ fini et non nul, soit par celle de la fonction $\sigma(\rho) = \sum C_n \rho^n$, C_n étant la borne supérieure exacte du module des coefficients a_{pq} de la série de Taylor pour lesquels on a $p + q = n$.*

Limitons maintenant l'ensemble des directions $y=tx$ pour lesquelles $\log M_1(t, r)$ est d'une croissance très inférieure à la croissance totale.

Supposons qu'on dispose d'une suite de polynomes $P_n(t)$ pour lesquels $C_n=1$. Les fonctions sous-harmoniques $U_n(t)=\frac{1}{n}\log|P_n(t)|$ sont bornées et de masses bornées dans tout domaine fini du plan; leur maximum sur le cercle $|t|=1$ est borné inférieurement car on a

$$1=C_n\leqq M_n(1).$$

Le maximum de $U_n(t)$ pour $|t|=1$ est donc positif ou nul. Dans le cercle $|t|<R$, $R>1$, les $U_n(t)$ ont leurs plus petites majorantes harmoniques bornées inférieurement; l'ensemble $\overline{\lim}\, U_n(t)<-h$, $(h>0)$, est un ensemble dont la capacité intérieure tend vers zéro avec $\frac{1}{h}\cdot$ Dans le cas général nous énoncerons donc

Lemme. — $P_n(x)$ *étant une suite infinie de polynomes de degrés* $\varphi(n)<kn$, *si* C_n *est la borne supérieure exacte du module des coefficients de* $P_n(t)$, *l'ensemble* $\overline{\lim}\, V_n(t)=-\infty$ *avec*

$$V_n(t)=\frac{1}{n}[\log|P_n(t)|-\log C_n]$$

est de capacité intérieure nulle dans tout le plan.

Par cette expression, nous entendons que la section de l'ensemble par tout cercle $|x|\leqq R$ est un ensemble borné de capacité intérieure nulle. Il faut et il suffit d'ailleurs que sa section par le cercle $|x|<1+\varepsilon$ d'une part, et l'ensemble obtenu d'autre part dans le cercle $|x'|<1$ par la transformation $x'=\frac{1}{x}$ possèdent cette propriété. De tels ensembles sont ainsi définis sur le plan complet ou sur son image sphérique.

Soit $N(r)$ le rang du terme maximum $m(r)$ de la série $\Sigma C_n x^n$; comme plus haut utilisons une suite ω d'intervalles de valeurs de r sur lesquels le rapport de $\log m(r)$ à $\log\sigma(r)$ tend vers l'unité, tandis que $r\rightarrow\infty$. Nous aurons sur ω :

$$\log|P_N(t)|>\log C_N-Nh,$$

$$\log M_1(t, r)>\log m\left(\frac{r}{h}\right)>(1-\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{r}{h}\right)$$

pour une infinité de valeurs de r tendant vers l'infini, sauf si x appartient à l'ensemble $\overline{\lim} \mathrm{V}_n(t) = -h$, $(h > 0)$, dont la capacité intérieure tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. On peut donc donner encore deux formes d'énoncé :

THÉORÈME 38. — *La croissance en x, $(|x| = r)$ de la fonction*

$$f(x, tx) = \varphi(t, x),$$

qui prend les valeurs de $f(x, y)$ dans une direction donnée, possède les caractères d'homogénéité suivants, lorsque l'on considère les différentes fonctions $\varphi(t, x)$ obtenues en donnant à t des valeurs de module inférieur à τ; on a d'une part

$$\mathrm{M}_1(t, r) < \mathrm{M}(\tau r \sqrt{2}), \tag{64}$$

M *étant la fonction de croissance totale, d'autre part*

$$\mathrm{M}_1(t, r) > \mathrm{M}(r\eta), \tag{65}$$

pour une infinité de valeurs de r, sauf pour un ensemble de valeurs de t dont la capacité intérieure tend vers zéro avec η.

Autre forme. — (65) peut se remplacer, si $\eta(r)$ est une fonction donnée qui décroît et tend vers zéro, par l'inégalité

$$\mathrm{M}_1(t, r) > \mathrm{M}[r\eta(r)],$$

réalisée pour une infinité de valeurs de r, indépendantes de x, x étant pris hors d'un ensemble de capacité extérieure nulle.

Prenons comme variable, non plus r, mais ρ, afin d'obtenir le résultat indépendamment des transformations (59). Soit

$$\varphi_1(t, \rho) = \Sigma \frac{\mathrm{P}_n(t)\rho^n}{[|t|^2 + 1]^{\frac{n}{2}}} = \Sigma \alpha_n(t)\rho^n.$$

$$\text{Si } |t| \leqq 1, \text{ on a } \quad |\alpha_n(t)| \leqq |\mathrm{P}_n(t)| \leqq (n+1)\mathrm{C}_n,$$

$$\text{Si } |t| \geqq 1, \text{ on a } \quad |\alpha_n(t)| \leqq \left|\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq (n+1)\mathrm{C}_n.$$

D'où

$$|\varphi_1(t, \rho)| < \sigma(2\rho) < 2\mathrm{M}(4\rho\sqrt{2}.$$

En sens inverse, on a encore, en séparant les deux cas $|t| \leqq 1$, $|t| \geqq 1$, d'une part $|\alpha_n(t)| \geqq 2^{-n} |P_n(t)|$, de l'autre $|\alpha_n(t)| \geqq 2^{-n} \left| P_n\left(\frac{1}{t}\right) \right|$. L'énoncé obtenu intéresse cette fois-ci le plan complet.

Théorème 39. — *Par rapport à la variable ρ, distance à l'origine, les caractères d'homogénéité se traduisent par*

$$\varphi_1(t, \rho) < 2M(4\rho\sqrt{2}),$$

et, $\eta(\rho)$ étant une fonction décroissante donnée, par

$$\varphi_1(t_1\rho) > M[\rho\eta(\rho)],$$

réalisée pour $\rho > \rho_0(x)$ pour une suite de valeurs de ρ tendant vers l'infini, la même quel que soit x pris hors d'un ensemble de capacité nulle dans le plan

Cas particuliers. — Si la fonction de croissance totale est d'ordre infini, la croissance de $f(x, y)$ est d'ordre infini dans presque toutes les directions.

Si au contraire $M(\rho)$ est d'ordre fini, cet ordre est aussi celui de $M(r, r)$, et de $\sigma(r)$. La fonction est d'ordre total fini. Cette notion a été le point de départ des travaux de M. É. Borel ([1]) poursuivis par M. J. Sire ([2]). L'ordre total α était défini à partir des coefficients de la série de Taylor $\Sigma a_{pq} x^p y^q$ par

$$\lim_{p+q=\infty} \frac{-\log|a_{p,q}|}{(p+q)\log(p+q)} = \frac{1}{\alpha}.$$

Cette condition revient, ainsi qu'on le voit aisément, à supposer $\sigma(r)$ d'ordre α.

En partant du champ scalaire défini plus haut dans E_4, nous avons donné à l'adjectif total employé par M. Borel une acception plus générale et d'apparence très différente, mais il vient d'être prouvé que cet emploi ne conduit pas à ambiguité.

([1]) *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 81.

([2]) *Rendiconti del Ceriolo mathematico*, Palerme, 1911.

L'ordre total fini est obtenu en résumé comme ordre fini de croissance soit de $M(\rho)$, [$M(\rho)$ maximum de $|f(x, y)|$ sur l'hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} \leqq \rho^2$], soit comme ordre fini de croissance de $f(x, y)$ dans presque toutes les directions $y = tx$, soit encore à partir de la série $\sigma(r)$ formée à l'aide des coefficients C_n déduits de la série diagonale.

Étude du type de l'ordre. — Reprenons la série

$$\varphi_1(t, u) = \sum \frac{P_n(t)}{[|t|^2 + 1]^{\frac{n}{2}}} u^n$$

que nous supposons d'ordre fini α. Soit $\mu(t, \rho)$ le maximum de $|\varphi_1(t, u)|$ pour $|u| = \rho$. L'étude se complète par celle de

$$A(t) = \overline{\lim} \frac{\log \mu(t, \rho)}{\rho^\alpha}.$$

Si $A(t)$ est fini (cas d'un type moyen), l'étude précédente le fournit encore sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle. Le calcul de $A(t)$ donne en effet d'après un résultat connu

$$\log A(t) = \overline{\lim} \left[\log \frac{n}{e\alpha} + \frac{\alpha}{n} \log |P_n(t)| - \frac{\alpha}{2} \log(1 + |t|^2) \right]. \tag{67}$$

La fonction $\log A(t) + \frac{\alpha}{2} \log(1 + |t|^2)$ est une fonction $U(t) = \overline{\lim}\, U_n(t)$ de la forme étudiée au début de ce travail. Sa régularisée est sous-harmonique. Elle ne lui est inférieure que sur un ensemble ponctuel. On énoncera, en appliquant successivement les deux formes du théorème 38,

THÉORÈME 40. — *Si $f(x, y)$ est une fonction d'ordre total α, sa croissance sur les plans $y = tx$ est d'ordre fini α, sauf pour un ensemble de valeurs de t de capacité extérieure nulle.*

Le type de l'ordre est encore le même, sauf sur un ensemble de directions de capacité intérieure nulle; la partie principale $A(t)$ est telle que la régularisée de $\log A(t)$ soit sous-harmonique.

Si l'on prend ρ comme variable, les points t_i au voisinage desquels $A(t)$ tend vers zéro en satisfaisant à une condition $A(t) < |t - t_i|^{h_i}$, $h_i > 0$, forment un ensemble dénombrable; on a en effet $\Sigma h_i \leqq \alpha$, d'après un énoncé du Chapitre I; le point $t = \infty$ est compté parmi ces points si l'on a $A(t) < \frac{1}{|t|^h}$ quand $|t| \to \infty$.

On pourra de même traduire les théorèmes 38 et 39 pour toute classe de croissance suffisamment précisée; le caractère d'homogénéité obtenu dans ce paragraphe est beaucoup plus précis que celui trouvé au paragraphe 1; il en découle que la croissance d'une fonction entière sera, quelle que soit par ailleurs cette fonction et l'ordre de grandeur maximum de sa croissance, plus facile à comparer en général sur les plans $y = tx$ que sur les plans $x =$ const.

Cas de plus de deux variables. — Les méthodes de comparaison des diverses fonctions de croissance totale s'appliquent encore. Considérons

$$f(x, y, z) = \varphi(x, tx, t'x) = \Sigma x^n P_n(t, t').$$

L'étude de la suite $P_n(t, t')$ conduit à remplacer les ensembles de capacité nulle du plan par la famille déjà rencontrée des ensembles de type E_0 caractérisés au Chapitre II par la propriété suivante : étant donnée une variété caractéristique, ou bien ils la contiennent, ou bien leur trace sur cette variété est un ensemble de capacité nulle.

4. *Croissance d'une fonction entière par rapport à l'une des variables.* — Les résultats du paragraphe 1 de ce Chapitre s'appliquent immédiatement à cette étude, mais ils se précisent, la classe des fonctions entières de y étant définie quel que soit x dans le plan.

Reprenons en effet le tracé des courbes représentatives de $\log M_n(r)$ [$M_n(r)$ est, rappelons-le, le maximum de $|A_n(x)|$ pour $|x| = r$] en fonction de $\log r$, décrit page 139, et tenons compte du fait que la plus grande abscisse considérée peut être aussi grande que l'on veut : la pente des courbes C'_n est alors arbitrairement faible et elles tendent vers la droite $y = -1$ uniformément dans tout intervalle $\varepsilon < r < R$. Soit $\varphi(n) = -\log M_n(r_0)$ une fonction de comparaison; utilisant les résultats du paragraphe 1, nous énoncerons :

THÉORÈME 41. — *Si $f(x, y)$ est une fonction entière des deux variables, le maximum $M_n(r)$ de $|A_n(x)|$, $A_n(x)$ étant le coefficient de la série de Hartogs, satisfait, sur un cercle $|x| = r$, de rayon non nul, à*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M_n(r)}{\varphi(n)} = -1.$$

La convergence est uniforme dans tout intervalle $\varepsilon < r < R$.

THÉORÈME 42. — *Si l'on appelle $\nu(n)$ le nombre des racines de la dérivée $\varphi_n(x, y)$ pour $x \subset d$, $y = y_0$, on a*

$$\lim \frac{\nu(n)}{\varphi(n)} = 0.$$

Considérons maintenant les fonctions $U_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \log|A_n(x)|$ elles-mêmes. Nous obtenons :

THÉORÈME 43. — *Les fonctions sous-harmoniques*

$$U_n(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \log|A_n(x)|$$

convergent vers -1 presque partout dans le plan.

Soit x un point en lequel on ait, pour une infinité de valeurs de n,

$$\log|A_n(x)| < -\varphi(n)(1+h);$$

la suite $U_n(x)$ ne converge pas vers -1 et x appartient à l'ensemble exceptionnel E_0 de l'énoncé précédent. Sinon on a

$$\log|A_n(x)| > -\varphi(n)(1+h)$$

à partir d'une certaine valeur de n, ou encore

$$\log M(x, r') > (1-\varepsilon) \log S\left(r_0, r'^{\frac{1}{1+h}}\right)$$

à partir d'une certaine valeur r'_0 de r' et excepté peut-être (dans le cas d'un ordre de croissance infini) pour un ensemble de valeurs de r', le même quel que soit x, sur lequel la variation de $\log r'$ est finie. Posons

$$S(r_0, r') = \Sigma\, e^{-\varphi(n)} r'^n = S_2(r').$$

Nous avons établi l'énoncé suivant :

Théorème 44. — *Si $f(x, y)$ est une fonction entière de deux variables, on a :*

1° *pour toute valeur de x*

$$\log M(x, r') < S_2(r'^{1+\varepsilon})$$

quel que soit ε, pour $r' > r'_0$;

2° *x étant choisi hors d'un ensemble de capacité intérieure nulle, on a*

$$\log M(x, r') > S_2(r'^{1-\varepsilon})$$

quel que soit ε, pour $r' > r'_0$, r'_0 dépendant de ε et de x en général. Dans le cas où $S_2(r')$ est d'ordre infini, on peut avoir à exclure de cette seconde inégalité des valeurs exceptionnelles de r' indépendantes de x sur lesquelles la variation de $\log r'$ est finie.

Le résultat obtenu est ainsi beaucoup plus serré que l'énoncé 30. Appliquons-le quand $S_2(r')$, qui représente la croissance en y, est supposé d'ordre fini, ce qui n'implique d'ailleurs pas, ainsi qu'on le voit facilement, qu'il en soit de même de la croissance totale.

Théorème 45. — *Si $M(r_0, r')$ est d'ordre fini α, $M(x, r')$ est du même ordre fini α, sauf éventuellement quand x est pris parmi un ensemble de capacité intérieure nulle.*

Remarque sur un résultat de M. J. Sire. — Dans le travail important que nous avons cité plus haut, M. J. Sire a obtenu comme résultat essentiel un énoncé comparable au théorème 45 qui concerne les fonctions d'ordre total fini, pour lesquelles, de plus, $M(r_0, r')$ est d'ordre fini non nul en r'.

Cette dernière hypothèse distingue nettement les fonctions étudiées par M. J. Sire, comme il apparaîtra un peu plus loin quand nous étudierons une classe plus générale que celle de cet auteur, mais soumise également à la condition que la croissance de $M(r_0, r')$ ne soit pas trop différente de la croissance totale. L'énoncé 45 ne contient aucune hypothèse de ce genre, et il établit une propriété générale des classes de fonctions entières d'une variable dépendant analytiquement du paramètre x dans tout le plan. La seule compensation, par rapport au résultat de M. J. Sire, est de limiter l'ensemble exceptionnel en annulant sa capacité intérieure, au lieu de sa mesure extérieure de dimension un.

Étude d'une classe particulière. — Nous supposerons, dans la fin de ce paragraphe, que la croissance de $\log M(r, r)$ n'est pas très différente de celle de $\log M(r_0, r)$, le degré d'homogénéité adopté étant celui déjà rencontré au paragraphe 1. Il existera un nombre ω fini supérieur à 1 et des valeurs r', indéfiniment croissantes pour lesquelles

$$\log M(r_0, r'^{\omega}) > \log M(r', r'). \tag{68}$$

Examinons un instant la restriction ainsi faite. D'après une propriété générale obtenue par M. G. Valiron [1], on a

$$\log M(r, r) < \mu \log M\left(r_0, r'^{\frac{1}{\mu}}\right) + \lambda \log M\left(r^{\frac{1}{\lambda}}, r'_0\right) \tag{69}$$

quels que soient λ et μ satisfaisant à $\lambda + \mu = 1$. L'inégalité contraire à (68), écrite pour les deux croissances en x et en y, donnerait

$$\log M(r_0, r^{\omega_1}) < \log M(r, r) \qquad \text{et} \qquad \log M(r^{\omega_2}, r'_0) < \log M(r, r)$$

dont l'ensemble est incompatible avec (69) pour des valeurs suffisamment grandes de ω_1, ω_2, Ainsi on trouvera toujours un nombre ω assez grand pour que la condition (68) soit vérifiée soit pour la croissance de $\log M(r_0, r')$, soit pour celle de $\log M(r, r'_0)$: *toute fonction est de la classe particulière, si l'on choisit convenablement la variable par rapport à laquelle on l'étudie.*

L'hypothèse (68) étant adoptée, nous préciserons tout d'abord le résultat obtenu plus haut (théorème 41)

$$\lim \frac{\log M_n(r)}{\varphi(n)} = -1 \qquad \varphi(n) = -\log M_n(r_0)$$

---

(1) G. VALIRON, *Bull. Sc. Math.*, t. 47, 1923, p. 177.

et nous étudierons la quantité

$$\Delta_n = \frac{1}{n}[\log M_n(r_1) - \log M_n(r_0)] = \frac{1}{n}[\log M_n(r_1) + \varphi(n)].$$

Admettons que l'on ait, pour $r_1 > r_0$,

$$\varliminf \frac{\Delta_n}{\log r_1 - \log r_0} \geqq k_1 > 0. \tag{70}$$

A partir d'une certaine valeur de n, et pour $k = k_1 - \varepsilon > 0$, serait vérifiée l'inégalité

$$\log M_n(r_1) \geqq kn \log r_1 + \log M_n(r_0) - kn \log r_0. \tag{71}$$

Par suite de la croissance convexe des courbes $C'_n : y = \frac{1}{n}\log M_n(r)$ étudiées en fonction de la variable $\log r$, (71) est vérifiée *a fortiori* quel que soit r supérieur à r_1 ; on a donc

$$\log M_n(r) r'^n \geqq n(k \log r + \log r') + \log M_n(r_0) - k_1 n \log r_0$$

et l'on a ainsi obtenu une majorante de la série

$$\sum M_n(r_0)\left(\frac{r^k}{r_0^k} r'\right)^n = S\left(r_0, \frac{r^k}{r_0^k} r'\right). \tag{72}$$

D'où d'abord

$$S(r, r') \geqq S\left(r_0, \frac{r^k}{r_0^k} r'\right)$$

puis, en se reportant à (39),

$$2M(r, 2r') \geqq M\left(r_0, \frac{r^k r'}{r_0^k}\right).$$

Prenons $r = 2r'$

$$M(r, r) \geqq \frac{1}{2} M\left(r_0, \frac{r^{k+1}}{2r_0^k}\right).$$

A partir d'une certaine valeur de r, on aura donc, en posant

$$\tau = k + 1 - \varepsilon = k_1 + 1 - 2\varepsilon,$$

$$M(r, r) \geqq M(r_0, r^\tau), \tag{72'}$$

qui contredit (68) dès que $\tau > \omega$. Ainsi il existe une suite infinie d'indices n_k pour lesquels on a

$$\frac{\Delta_{n_k}}{\log r_1 - \log r_0} \leqq \omega - 1 + 2\varepsilon = \omega - 1 + \eta, \tag{73}$$

quel que soit $\eta > 0$.

Nous énoncerons :

THÉORÈME 46. — *S'il existe entre la croissance totale et la croissance en y seul la relation traduite par l'inégalité*

$$M(r, r) < M(r_0, r'^{(\omega)}) \qquad (\omega > 1),$$

supposée vérifiée pour une suite infinie de valeurs de r', alors les coefficients $A_n(x)$ de la série de Hartogs satisfont à

$$\frac{\log M_n(r) - \log M_n(r_0)}{\log r - \log r_0} < \omega - 1 + \eta \qquad (\eta > 0,\ r > 0)$$

quel que soit η, pour une suite infinie d'entre eux qui joue le rôle d'une suite principale en ce qui concerne la détermination de la croissance maxima en y.

THÉORÈME 47. — *Pour la même suite d'indices, si $\nu(d, n)$ représente le nombre des zéros des dérivés $\varphi_n(x, y)$ pour $x \subset d$, $y = y_0$, on a*

$$\nu(d, n) \leqq (\omega - 1 + \eta) n,$$

quel que soit η, à partir d'une certaine valeur de n.

Entourons en effet d, supposé borné, d'un cercle $|x| = R$. On aura

$$\log M_n(pR) - \log M_n(R) > \nu(d, n) \log\left(p - \frac{1}{p}\right),$$

en utilisant au second membre une borne inférieure de la fonction de Green, $g(x, a)$ du cercle $|x| = pR$, relativement à un point a pour lequel $|a| \leqq R$. D'où, d'après (73),

$$\nu(d, n)(\log p - \varepsilon) \leqq (\omega - 1 + \eta)(\log pR - \log R),$$

qui démontre l'énoncé après modification, au besoin, du nombre η.

Ainsi les fonctions $A_n(x)$ de la suite principale ont le même comportement asymptotique qu'une suite de polynomes de degré n, tant au point de vue de leur croissance que du nombre de leurs racines, *tant qu'on étudie leur ensemble dans un domaine déterminé. C'est là encore une propriété d'une suite des dérivées partielles* $\varphi_n(x, y)$ *conséquence de l'hypothèse* (68).

Reprenons le procédé de majoration terme à terme employé plus haut pour obtenir (72) et notons $S_1(r_0, r')$ la série déduite de $S(r, r')$ en annulant les termes qui n'appartiennent pas à la suite n_k que nous venons de mettre en évidence. On aura, pour $r < r_0$,

$$S_1(r, r') > S_1\left[r_0, r'\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\omega-1+\eta}\right] = S_1[r_0, \tau^{\omega-1} r'],$$

τ étant un nombre positif inférieur à 1. Cette inégalité dans le cas de croissances irrégulières ne sera peut-être pas réalisée pour toutes les valeurs de r' si l'on remplace S_1 par S, mais elle le sera sûrement avec une certaine valeur τ au voisinage des valeurs r' pour lesquelles l'inégalité (68) est vérifiée, car la série $S'_1(r, r')$ formée avec les termes de $S(r, r')$ pour lesquels (73) n'est pas vérifié satisfait à $S'_1(r, r') < S(r, r')$ et nous énoncerons :

THÉORÈME 48. — *La comparaison des fonctions* $M(r, r')$ *et* $S(r, r')$ *prises chacune pour deux valeurs* r_0, r_1 *de la première variable donne lieu, en supposant* $r_0 < r_1$, *aux inégalités*

$$S(r_0, r'\tau_1^{\omega-1}) < S(r_1, r') < S(r_0, r')$$

et

$$M(r_0, r'\tau_2^{\omega-1}) < M(r_1, r') < M(r_0, r'),$$

τ_1 *et* τ_2 *étant deux nombres inférieurs à* 1. *Les inégalités écrites dans les deux cas en premier lieu sont vérifiées (dans le cas de croissances irrégulières) au moins au voisinage des valeurs* r' *pour lesquelles l'inégalité* (68) *est vérifiée.*

Appelons de même $f_1(x, y)$ la fonction $\sum_{n_k} A_{n_k}(x) y^{n_k}$, obtenue en annulant les termes de la série de Hartogs pour lesquels n'est pas vérifiée une inégalité

$$(73') \qquad \frac{\Delta_{n_k}}{\log r_1 - \log r} < \tau,$$

τ étant un nombre fini supérieur à $\omega - 1$.

Nous écrirons, en modifiant la notation des indices,

$$f_1(x, y) = \Sigma A_p(x) y^p, \qquad S_1(r_0, r') = \Sigma M_p(r_0) r'^p.$$

Les fonctions sous-harmoniques

$$(74) \qquad U_p(x) = \frac{1}{p}[\log|A_p(x)| - \log M_p(r_0)]$$

ont, dans un domaine quelconque, leurs plus petites majorantes harmoniques bornées inférieurement, sinon le théorème 46 serait en défaut. L'ensemble $U_p(x) < -\lambda$ a une capacité bornée par une expression de la forme $k e^{\frac{\lambda}{\mu}}$, μ étant une borne supérieure de la masse des $U_p(x)$, borne qui résulte de l'énoncé 47.

Pour établir un énoncé en vue, nous supposerons, comme déjà plus haut, que $S_1(r_0, r')$ est de croissance suffisamment régulière pour que le rapport de $\log S_1(r_0, r)$ à $\log m(r')$ tende vers un, $m(r')$ étant le terme maximum de la série de rang $P(r')$. Dans ces conditions, on a, sauf si x appartient à l'ensemble $U_P(x) < -\lambda$,

$$\log|A_P(x)| > \log M_P(r_0) + PU_P(x),$$
$$\log|A_P(x)| + P\log r' > \log M_P(r_0) + P\log\left(\frac{r'}{\lambda}\right),$$
$$\log M_1(x, r') > \quad \log m \quad \left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right),$$
$$\log M_1(x, r') > (1-\varepsilon)\log S_1\left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right).$$

Sauf si x appartient à l'ensemble $E_\lambda : \overline{\lim}\, U_p(x) < -\lambda$, $(\lambda > 0)$, il en résulte

$$\log M_1(x, r') > (1-\varepsilon)\log S_1\left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right)$$

pour une infinité de valeurs de r' tendant vers l'infini. Même dans le cas de croissances irrégulières, astreintes toutefois à vérifier la condition précédente, $S_1\left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right)$, $M_1(x, r')$ sont équivalents au voisinage de ces valeurs à $S\left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right)$, $M(x, r')$ respectivement, d'après la propriété du terme maximum calculé plus haut. Nous énoncerons :

THÉORÈME 49. — *La croissance en y d'une fonction entière $f(x, y)$ vérifiant l'hypothèse* (68), *présente le caractère d'homogénéité suivant : si $|x| < r_0$, on a*

$$(1-\varepsilon)\log M\left(r_0, \frac{r'}{\lambda}\right) < \log M(x, r') < \log M(r_0, r'),$$

où la première inégalité est réalisée pour une infinité de valeurs r' indéfiniment croissantes prises parmi celles pour lesquelles l'hypothèse (68) *est vérifiée, cependant que x doit être pris extérieur à un ensemble dont la capacité intérieure tend vers zéro avec $\frac{1}{\lambda}$.*

On peut encore, ainsi que nous l'avons déjà fait, remplacer la première inégalité écrite par une inégalité $\log M(x, r') > \log M[r_0, \lambda(r')r']$, où $\lambda(r')$ est une fonction donnée tendant vers zéro en décroissant. Elle est alors vérifiée sur une certaine suite d'intervalles $E_{r'}$ tendant vers l'infini, dès que x est choisi hors d'un certain ensemble de capacité extérieure nulle.

Conséquences. — L'hypothèse (68) apparaît précise dans ses conséquences ([1]); pour nous en rendre compte, considérons à nouveau la classe des fonctions d'ordre total fini α. Tandis qu'en général nous pouvons seulement assigner la limite $\varphi(n) = \frac{n}{\alpha}\log n$ à l'ordre de grandeur du nombre des zéros de *toutes* les dérivées $\varphi_n(x, y)$ pour $x \subset d$, $y = y_0$, nous avons montré, dans le cas présent, que *pour une suite infinie d'entre elles* cet ordre de grandeur peut être remplacé par kn, k étant une constante finie.

([1]) Par ailleurs les propriétés obtenues, et en particulier l'énoncé 47 qui les conditionne, n'appartiennent pas à une fonction entière quelconque comme le montre l'exemple facile : $f(x, y) = \sum \frac{x^{\alpha_n}}{n!} y^n$, où α_n désigne la partie entière de $\log_2 n$.

En ce qui concerne la croissance des fonctions $f(x, y)$ à x constant, si nous posons

$$\alpha(x) = \overline{\lim} \frac{\log_2 M(x, r')}{\log r'},$$

$\alpha(x)$ est constant sauf sur un ensemble de capacité *extérieure* nulle, à la différence du résultat donné par l'énoncé 45.

En ce qui concerne le type de l'ordre dont la partie principale est donnée par

$$A(x) = \overline{\lim} \frac{\log M(x, r')}{r'^{\alpha}},$$

nous pouvons en reprendre l'expression (67) indiquée plus haut (page 161). Il suffit de remplacer le polynome $P_n(t)$ par $A_n(x)$. La fonction $\log A(x)$ s'exprime comme $\overline{\lim}$ d'une suite de fonctions sous-harmoniques déduites de (74) par l'addition de constantes, et qui sont de masses bornées. D'autre part, l'hypothèse (68) est satisfaite dans le cas où $f(x, y)$ est d'ordre total fini, dès que $M(r_0, r')$ est d'ordre non nul r'. On retrouve alors le cas particulier étudié par M. J. Sire, et l'on voit qu'on peut aller plus loin que cet auteur en indiquant non seulement l'ordre mais le type de l'ordre qui reste le même, sauf sur un ensemble de capacité *intérieure* nulle, la partie principale ayant les propriétés étudiées au Chapitre I.

En résumé, pour la classe que nous venons d'étudier, l'étude de la croissance de $f(x, y)$ en y, pour les différentes valeurs données à x, peut être conduite avec la même précision que l'étude de la croissance sur l'ensemble des plans passant par un point fixe.

6. Nous terminerons ce Mémoire en indiquant comment les notions de croissance que nous avons étudiées s'appliquent à certains problèmes concernant les variétés caractéristiques, c'est-à-dire les variétés de l'espace E_4 définies par une équation $f(x, y) = 0$.

Soit $D(r, r')$ le dicylindre $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$, et w la variété définie par $f(x, y) = 0$; $w(r, r')$ représentera à la fois la portion de cette variété contenue dans $D(r, r')$ et son aire dans E_4.

Par projection sur le plan des x, $w(r, r')$ engendre une surface de Riemann R_x, construite « au-dessus » du cercle $|x| \leqq r$. Son aire sera notée $\sigma_x(r, r')$; $n(x, r')$ sera le nombre des racines de l'équation $f(x, y) = 0$ pour x fixé, qui sont de module inférieur à r'; $n(r, y)$ aura un sens correspondant. On a évidemment

$$\sigma_x(r, r') = \int_0^r \int_0^{2\pi} n(t\, e^{i\theta}, r')\, t\, dt\, d\theta.$$

Pour calculer $\sigma_x(r, r')$ nous sommes ramenés à l'expression du recouvrement moyen

$$l_x(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r\, e^{i\theta}, r')\, d\theta,$$

réalisé par la portion $\sigma_x(r, r')$ de la riemannienne R_x au-dessus du cercle $|x| = r$. On y parvient sans peine en utilisant la quantité

$$\begin{aligned} N(r, r') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(r\, e^{i\theta}, r'\, e^{i\theta'})|\, d\theta\, d\theta' - \log|f(0, 0)| \\ &= \int_0^{r'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r\, e^{i\theta}, t')\, d\theta \frac{dt'}{t'} + \int_0^r n(t, 0) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

introduite par A. Bloch (1)

On a en effet simplement

$$l_x(r, r') = \frac{\partial N(r, r')}{\partial \log r'}. \tag{75}$$

D'autre part, ainsi qu'on le vérifie aisément, $N(r, r')$ est fonction convexe des variables $\log r$, $\log r'$. Nous obtenons donc

$$l_x(r, r') < \frac{N(r, kr') - N(r, r')}{\log k} \qquad (k > 1).$$

On a

$$N(r, r') > 0 \qquad \text{et} \qquad N(r, r') < \log M(r, r') - \log|f(0, 0)|,$$

d'où

$$l_x(r, r') < \frac{N(r, kr')}{\log k} \qquad (k > 1), \tag{76}$$

$$\sigma_x(r, r') = \int_0^r \frac{\partial N(t, r')}{\partial \log r'}\, t\, dt < \frac{1}{\log k} \int_0^r N(t, kr')\, t\, dt. \tag{77}$$

---

(1) A. Bloch, *C. R. Acad. Sc.*, 181, 1925, p. 276; H. Cartan, *ibid.*, 189, 1929, p. 521.

D'où encore

$$(78) \qquad \sigma_x(r, r') < \frac{1}{\log k}\int_0^r [\log M(t, kr') - \log|f(0, 0)|]\, t\, dt$$
$$< \frac{\pi r^2}{\log k}[\log M(r, kr') - \log|f(0, 0)|].$$

THÉORÈME 50. — *L'aire de la riemannienne projection de* $W(r, r')$ *sur le cercle* $|x| \leqq r$, $y = 0$ *est à* r *constant une fonction de* r' *dont la croissance est limitée supérieurement par rapport à celle de la fonction au moyen des inégalités* (78).

Pour passer à l'aire elle-même dans E_4, nous ferons usage d'un théorème de M. Wirtinger qui paraît important [1] pour l'étude des fonctions analytiques : l'aire d'une variété caractéristique est la somme de ses projections sur les deux plans complexes des x et des y. On aura donc

$$(79) \quad W(r, r') = \sigma_x(r, r') + \sigma_y(r, r') = \int_0^r \frac{\partial N(t, r)}{\partial \log r'}\, t\, dt + \int_0^{r'} \frac{\partial N(r, t')}{\partial \log r}\, t'\, dt'.$$

Grâce au théorème cité, un caractère global de la variété W tel que l'aire qu'elle laisse dans le dicylindre $D(r, r')$ *s'exprime en fonction des quantités* $n(x, r')$, $n(r, y)$ *qui s'introduisent par l'étude des équations* $f(x, y) = 0$ *à* x *ou à* y *constant.*

Supposons, pour simplifier l'écriture $|f(0, 0)| = 1$. Nous aurons :

THÉORÈME 51. — *L'aire* $W(r, r')$ *laissée par la variété* $f(x, y) = 0$ *à l'intérieur d'un dicylindre est donnée en fonction de* $N(r, r')$ *par l'expression* (79). *Elle est majorée en fonction de la croissance par*

$$W(r, r') \log k < \int_0^r \log M(t, kr')\, t\, dt + \int_0^{r'} \log M(kr, t')\, t'\, dt',$$

k étant un nombre plus grand que 1.

Supposons r fixe et r' croissant; la quantité $\sigma_x(r, r')$, qui donne l'aire de la riemanienne au-dessus du cercle $|x| \leqq r$, nous a permis de majorer

---

(1) *Monatshefte für Math. und Physik*, t. 44, 1936, p. 343. Nous indiquerons ailleurs une démonstration très simple du résultat général de M. Wirtinger, fondée sur l'expression du $ds^2 = dx_i\, \overline{dx_i}$ utilisé dans l'espace des n variables complexes.

sa croissance par celle, également en r', de $\log M(r, kr')$. Le même procédé s'applique si, au lieu de considérer une fonction entière, on suppose seulement que $f(x, y)$ n'a aucune singularité à distance finie au-dessus d'un cercle $|x| \leqq R$, $r < R$. Il s'applique encore avec une légère modification pour des valeurs r' tendant vers zéro si l'on se place dans le cas envisagé au paragraphe 2 dans lequel $f(x, y)$ possède une variété singulière $y = 0$ plongée dans un domaine d'holomorphie. Laissant ce dernier cas de côté, nous répondrons à la question de savoir si la même homogénéité, établie au paragraphe 1 de ce Chapitre pour la fonction $\log M(r, r')$, demeure pour la fonction $N(r, r')$, et par suite pour $\sigma_x(r, r')$.

Soient r_0, r_1 deux valeurs positives. Comparons $N(r_0, r')$, $N(r_1, r')$ en supposant $0 < r_0 < r_1 < R$, la fonction $f(x, y)$ n'ayant aucune singularité à distance finie au-dessus du cercle $|x| < R$. Posons $u = \log r$, $v = \log r'$, $N(r, r')$ devenant une fonction $\varphi(u, v)$. Considérons une droite variable dans le plan Ouv, passant par le point fixe B : $u = \log R_1$, $v = 0$ où $R_1 < R$. Elle coupe les parallèles à Ov d'abscisses $u_0 = \log r_0$, $u_1 = \log r_1$ en deux points variables A_0, A_1.

Exprimons que la courbe de section de la surface $z = \varphi(u, v)$ par le plan vertical de trace BA_0A_1 est une courbe convexe : nous obtenons une majoration

$$N(r_1, r') < k_1 N(r_0, r'^{\lambda}) + k_2 \varphi(B),$$

avec $k_1 < k_2 < 1$. Plus simplement, B étant fixe, on aura, pour $r' > r'_0$,

$$N(r, r') < K N(r_0, r'^{\lambda}),$$

pour une valeur de λ qui dépend, ainsi que $K < 1$, des rapports des troisnombres u_0, u_1, $\log R$. D'où

$$N(r_0, r') < K N(r_1, r') < K N(r_0, r'^{\lambda}). \tag{80}$$

La même démonstration s'applique à $\log M(r, r')$ et fournit sans valeurs r' exceptionnelles le théorème 28 comme nous l'avions énoncé.

De plus nous avons ainsi obtenu :

Théorème 52. — *Si $f(x, y)$ ne possède aucune singularité à distance finie au-dessus d'un cercle $|x| \leqq R$, la variété $f(x, y) = 0$ présente au-*

dessus des différents cercles concentriques $|x| \leqq r < \mathrm{R}$, *le caractère d'homogénéité défini par* (80) *analogue à celui déjà obtenu dans les mêmes conditions pour la croissance de* $\log \mathrm{M}(r, r')$ *en* r'.

7. Cet énoncé n'empêche pas que, pour certaines valeurs de x, $n(x, r')$ soit de croissance très différente de $\mathrm{N}(r, r')$. On peut avoir $n(x, r') = 0$, ainsi que le montre un exemple aussi simple que $e^y + x = 0$. Indiquons succinctement la possibilité d'exemples plus larges. Soit, pour plus de commodité,

$$\mathrm{N}(x, r') = \int_0^{r'} n(x, t) \frac{dt}{t}, \tag{81}$$

$\mathrm{N}(r, y)$ ayant un sens analogue. On a

$$\mathrm{N}(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{N}(re^{i\theta}, r')\, d\theta + \mathrm{N}(r, 0). \tag{82}$$

Ne considérons que des valeurs fixes $r > \mathrm{R}$; la moyenne de $\mathrm{N}(x, r')$ prise sur le cercle $|x| = r$ ne diffère que d'une constante de $\mathrm{N}(r, r')$.

Considérons d'autre part une fonction $f(x, y)$; il peut se faire que $\mathrm{N}(r, r')$ ait une croissance en r' très différente de $\log \mathrm{M}(r, r')$; s'il en est ainsi, considérons les équations $f(x, y) - a = 0$.

Calculons $\mathrm{N}(r, r', a)$ à partir de $f(x, y) - a$. Supposons que a fasse partie d'un ensemble de capacité positive e, sur lequel $\mu(a)$ désigne la distribution d'équilibre de la masse unité. On aura, d'après un procédé classique dans la théorie des fonctions d'une variable,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{N}(r, r', a)\, d\mu(a) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\, d\theta' \int_e \log |f(re^{i\theta}, r'e^{i\theta'}) - a|\, d\mu(a) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\, d\theta' \log |f(re^{i\theta}, r'e^{i\theta'})| + \mathrm{C}. \\
&= \mathrm{T}(r, r') + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

la quantité C étant bornée.

Nous prendrons

$$f(x, y) = \sum x^n \frac{\mathrm{P}_n(y)}{n!},$$

$P_n(y)$ étant un polynome de la forme $\prod_{i=1}^{i=n}(x - a_i^n)$ dont les racines sont situées sur le segment $0 < y < 1$ de l'axe des y réels; $f(x, y)$ est d'ordre de croissance 1 en y, comme l'indique l'étude de $\log M(r, r')$ ou celle de $T(r, r')$ qui nous montre de plus qu'on peut trouver un nombre a tel que $N(r, r', a)$ soit d'ordre 1 en r'; nous supposerons $a = 0$ pour l'écriture. De (82) et (80), ressort que $N(x, r')$ ne peut être d'ordre inférieur à 1 dans un domaine; car il existerait un cercle $|x| = r_0$ tel que $N(r_0, r')$ soit d'ordre inférieur à 1; $N(r, r')$ serait alors d'ordre inférieur à 1, quel que soit r. *L'ensemble où* $N(x, r')$ *est d'ordre inférieur à* 1 *est ainsi un ensemble ponctuel.*

Remarquons que cet ensemble peut être aussi vaste que l'ensemble sur lequel $f(x, y)$ est d'ordre inférieur à 1 en y, c'est-à-dire, ainsi qu'il est connu (1), avoir la puissance du continu. Il comprendra en effet toutes les valeurs x pour lesquelles $f(x, y)$ sera d'ordre inférieur à un, puisque $N(x, r')$ est de croissance limitée par celle de $\log M(x, r')$.

Les mêmes problèmes métriques se posent donc pour l'étude des variétés caratéristiques comme pour l'étude de la fonction $f(x, y)$ elle-même. Ils constituent d'ailleurs une généralisation de problèmes déjà étudiés où l'on suppose soit $f(x, y) \equiv f(y) - x$, soit $f(x, y)$ réduite à un polynome de degré déterminé en x. La remarque qui précède nous a fait voir toutefois que le caractère dénombrable des valeurs exceptionnelles x_i, définies plus haut, ne se généralisait pas au cas d'une relation entière.

Relativement aux valeurs x_i pour lesquelles $n(x_i, r') = 0$, elles ne peuvent former un domaine sans que l'on ait $f(x, y) = e^{h(x, y)}$, puisqu'on aurait alors $N(r, r') \equiv 0$ d'après (80). M. G. Julia a fait voir, par une méthode différente, que cet ensemble ne contenait aucun continu.

Indiquons un résultat obtenu par la méthode de ce Mémoire et qui améliore celui de M. G. Julia (2) sans résoudre cependant la question de la puissance de cet ensemble qui, dans ce dernier cas, paraît délicate.

---

(1) J. Sire, Mémoire cité, p. 52.

(2) *Bull. Sc. Math.*, t. 54, p. 26 (1926).

Supposons que $f(x, y)$ ne possède aucune singularité à distance finie au-dessous du domaine $x \subset d$ et plaçons-nous en un point $[x_0, y_0]$, où l'on ait $f(x_0, y_0) \neq 0$. La fonction $\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ est holomorphe dans un domaine D ouvert auquel appartient le point $[x_0, y_0]$, et la série de Hartogs

$$\varphi(x, y) = \sum A_n(x)(y - y_0)^n$$

converge dans une région D′ contenant un dicylindre $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < r'$. Si x_i est une valeur telle que $f(x_i, y) = 0$ n'ait aucune racine quel que soit y, le rayon de convergence $\rho(x_i)$ de la série est infini, car $\varphi(x_i, y)$ est entière (1) en y. A tout point de l'ensemble $E(x)$ de M. Julia correspond une épine de longueur infinie pour le développement (1). Ces points sont nécessairement des points d'accumulation des zéros des dérivées $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \frac{\partial^n \frac{1}{f}}{\partial y^n}$, et une restriction qui limite au Chapitre I les épines de longueur infinie nous montre que si la fonction $f(x, y)$ est holomorphe en tout point de la région $[x \subset d, |y| < \infty]$, l'ensemble $E(x)$, des valeurs x pour lesquelles la relation $f(x, y) = 0$ est impossible quel que soit y, est nécessairement un ensemble de capacité intérieure nulle dans l'intérieur du domaine d.

---

(1) $\varphi(x_i, y)$ a même une croissance maxima bien déterminée; utilisant une méthode de ce travail, nous avons démontré depuis, grâce à cette remarque, que $E(x)$ est aussi de capacité extérieure nulle à l'intérieur de d.