GEORGES GIRAUD

# Petits mouvements à courte période et petits mouvements amortis d'une masse tournante composée d'un liquide homogène et d'un noyau solide immergé

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 58 (1941), p. 37-82

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1941_3_58__37_0>

# PETITS MOUVEMENTS A COURTE PÉRIODE

ET

PETITS MOUVEMENTS AMORTIS

D'UNE

# MASSE TOURNANTE

COMPOSÉE

D'UN LIQUIDE HOMOGÈNE ET D'UN NOYAU SOLIDE IMMERGÉ

PAR M. GEORGES GIRAUD.

## INTRODUCTION.

Nous considérons un corps tournant dont les particules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton; il est composé d'un liquide homogène et d'un noyau solide complètement immergé dans le liquide. On connaît par hypothèse une disposition d'équilibre relatif; le problème est d'étudier, au voisinage de cette disposition, les petits mouvements relatifs périodiques et les petits mouvements amortis, c'est-à-dire les mouvements où l'élongation de la projection de chaque particule sur tout axe donné, à partir d'une certaine position moyenne, est la partie réelle de $be^{i\lambda t}$, où la grandeur complexe $b$ est indépendante du temps $t$, et la constante complexe $\lambda$ ne dépend ni du temps, ni de la particule, ni de l'axe de projection; le mouvement est périodique pour $\lambda$ réel, et amorti quand le coefficient de $i$ dans $\lambda$ est positif. Les raisonnements s'appliquent aussi, mais seulement pendant un temps limité, quand ce coefficient de $i$ est négatif.

Les hypothèses ordinairement admises dans les études qui concernent de petits mouvements, sont faites ici, mais, en ce qui concerne la formation des équations du problème (Chap. I), nous ne faisons que des hypothèses très larges sur la nature de la surface du noyau et sur la densité de celui-ci; nous ne supposons rien sur la profondeur de la couche liquide, ni sur la direction des vitesses relatives dont sont animées les particules liquides. Les raisonnements concernent le cas où le corps est soumis à un petit champ dont la fonction des forces, relativement au trièdre tournant par rapport auquel le corps est voisin d'une disposition d'équilibre, est la partie réelle de $\mathcal{V}e^{i\lambda t}$, où $\mathcal{V}$ est indépendant de $t$. Dans ces conditions, le problème est ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires à sept inconnues, dont six sont des constantes et la septième est une fonction à définir dans la région qu'occupe le liquide dans la disposition d'équilibre. Pour cette partie du travail, l'exposé que M. Élie Cartan a donné de la méthode de Poincaré relative à une masse liquide homogène en rotation, a été fort utile [1]. Une des équations du système est celle qui est connue sous le nom de Poincaré.

Cette équation de Poincaré est du type réel hyperbolique quand $\lambda$ est réel et compris entre $-2\omega$ et $2\omega$, où $\omega$ est la vitesse angulaire, c'est-à-dire pour les mouvements qui admettent une plus courte période supérieure à la moitié de la période de rotation; l'équation est du type elliptique, mais à deux variables seulement, quand la demi-période de rotation est la plus courte période du mouvement. Dans les autres cas, l'équation de Poincaré est ou imaginaire ou du type réel elliptique à trois variables; ces derniers cas sont les seuls où soit ici indiquée une méthode, au moins théorique, pour résoudre le système des équations auxquelles le problème a été ramené (Chap. II). Cette méthode recourt à un autre système d'équations linéaires, dont deux sont un système d'équations de Fredholm par rapport à deux des inconnues; les raisonnements sont guidés par une méthode antérieurement appliquée à des problèmes relatifs aux équations du type elliptique, mais l'intervention d'équations imaginaires nécessite une étude nouvelle. Le

---

[1] Élie Cartan, *Bull. Sciences math.*, XLVI, 1922, p. 317 à 352 et 356 à 369, spécialement Section I.

problème peut aussi être traité au moyen d'équations où figure une intégrale double prise en valeur principale, mais celles-ci ne sont pas comprises dans les types pour lesquels une méthode de résolution a été complètement exposée; elles sont comprises dans un type plus général, dont les propriétés correspondantes ont été annoncées (1), mais les démonstrations ne sont pas encore publiées. Il serait possible de suppléer à ces démonstrations pour notre objet, mais, pour ne pas trop allonger ce travail, cette autre méthode a été laissée de côté.

## CHAPITRE I.

### ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

1. *Description du corps tournant; notations.* — Nous choisissons les unités de longueur, de masse et de temps de façon que l'attraction newtonienne entre deux points P et Q, dont les masses sont $m$ et $m'$, soit le quotient de $mm'$ par $4\pi PQ^2$ (2).

Le centre de gravité d'un certain corps est pris pour sommet O d'un trièdre trirectangle $Oxyz$, animé d'un mouvement rotatoire autour de $Oz$, dont la direction est invariable. L'orientation de l'espace est, par définition, celle de ce trièdre, et celle-ci est choisie de façon que la vitesse angulaire $\omega$ de la rotation soit positive.

Le corps est constitué par un solide ou *noyau* et par un fluide parfait, incompressible et homogène. Le noyau est entièrement immergé dans ce liquide. Les particules du corps s'attirent suivant la loi de Newton. Nous connaissons par hypothèse une disposition dans laquelle ce corps est en équilibre relativement au trièdre tournant $Oxyz$; nous ne considérons que les dispositions dans lesquelles la distance entre chaque particule et sa position d'équilibre admet une limite supérieure assez petite.

Outre les forces dues à sa propre attraction newtonienne, le corps

(1) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2124-2126; 203, 1936, p. 292-294; 204, 1937, p. 628-630.

(2) *Bull. Sciences math.*, LXIV, 1940, p. 268-298, spécialement paragraphe 1.

est soumis à un petit champ troublant qui admet la fonction de forces

$$\mathcal{V}^*(x, y\, z;\, t) = [\mathcal{V}_1(x, y, z)\cos(\lambda_1 t) - \mathcal{V}_2(x, y, z)\sin(\lambda_1 t)]\exp(-\lambda_2 t);$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des constantes et $t$ est le temps. On regarde $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et leurs dérivées de tout ordre comme des grandeurs du premier ordre infinitésimal. En posant

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2, \qquad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2,$$

et en désignant par $\mathcal{R}a$ la partie réelle de toute grandeur complexe $a$, nous avons

$$\mathcal{V}^*(x, y, z;\, t) = \mathcal{R}[\mathcal{V}(x, y, z)\, e^{i\lambda t}].$$

Si $\lambda$ est purement imaginaire, nous prenons $\mathcal{V}$ réel, ce qui ne diminue pas la généralité.

Nous considérons les petits mouvements du corps dans lesquels chaque coordonnée cartésienne de chaque particule s'exprime en fonction du temps par $a + \mathcal{R}(be^{i\lambda t})$, plus une grandeur dont l'ordre infinitésimal est supérieur à *un*, les grandeurs $a$ et $b$ étant indépendantes du temps et les grandeurs $b$ étant du premier ordre infinitésimal. Nous nous contentons de déterminer toutes les grandeurs $a$ et $b$, et nous admettons que ce résultat peut être atteint en négligeant, à certaines étapes du calcul, des grandeurs dont l'ordre infinitésimal est supérieur à celui des grandeurs conservées ([1]). Pour $\lambda$ réel, le mouvement est *périodique;* pour $\lambda_2 > 0$, le mouvement est *amorti;* si $\lambda_2$ est négatif, les hypothèses ne sont satisfaites que pendant une durée limitée.

La densité constante du liquide est $\rho_2$. La densité du noyau au point qui, dans la disposition d'équilibre, se trouve en $(x, y, z)$, est $\rho_1(x, y, z)$. Nous désignons par $O'x'y'z'$ un trièdre invariablement lié au noyau et qui, dans la disposition d'équilibre, coïncide avec $Oxyz$.

---

([1]) Au lieu de « grandeurs dont l'ordre infinitésimal est supérieur à *un* », il vaudrait mieux écrire : « grandeurs infiniment petites par rapport au premier ordre infinitésimal », car ces grandeurs peuvent ne pas avoir d'ordre proprement dit. Même observation pour d'autres expressions analogues.

Nous désignons par $p_1$, $p_2$ et $p_3$ les coordonnées de O′ par rapport à $Oxyz$, et nous posons

$$p_4 = \cos(O'y', Oz), \qquad p_5 = \cos(O'z', Ox), \qquad p_6 = \cos(O'x', Oy).$$

Dans les conditions où nous nous plaçons, les six grandeurs $p_n$ sont du premier ordre infinitésimal, et, en négligeant le second ordre infinitésimal, le tableau des cosinus directeurs peut s'écrire

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | 1 | $p_6$ | $-p_5$ |
| $y'$ | $-p_6$ | 1 | $p_4$ |
| $z'$ | $p_5$ | $-p_4$ | 1 |

(*loc. cit.*, § 6).

En négligeant toute grandeur dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*, nous avons, dans le mouvement cherché,

$$p_n = \mathcal{R}(q_n e^{i\lambda t}) \qquad (n = 1, \ldots, 6),$$

où les $q_n$ sont des constantes complexes inconnues, qui doivent être du premier ordre infinitésimal. Au même ordre d'approximation, les coordonnées d'une particule liquide au temps $t$ sont

$$X = x + \mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}), \qquad Y = y + \mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}), \qquad Z = z + \mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t}),$$

et il faut déterminer pour chaque particule liquide les inconnues $\xi$, $\eta$ et $\zeta$, indépendantes du temps et qui doivent être du premier ordre infinitésimal [1].

Si $\lambda$ est purement imaginaire, nous prenons réels $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et tous les $q_n$; cela ne diminue pas la généralité.

---

[1] Nous supposons que les coordonnées moyennes $x$, $y$, $z$ de chaque particule sont indépendantes d'un paramètre infiniment petit auquel $\mathcal{V}$ est proportionnel. On pourrait aussi poser

$$p_n = p'_n + \mathcal{R}(q_n e^{i\lambda t}) \qquad (n = 1, \ldots, 6),$$

les $p'_n$ étant indépendants de ce paramètre; les calculs qui vont suivre ne seraient guère changés, et l'on trouverait encore que la disposition moyenne est une disposition d'équilibre (*voir*, ci-après, § 5). Il peut y avoir lieu de considérer le cas où les positions moyennes varient avec l'amplitude, comme l'a fait J. Chazy dans un problème plus simple (*Comptes rendus*, 211, 1940, p. 621-624).

2. *Incompressibilité du liquide.* — Soit $p(X, Y, Z; t)$ la pression à l'instant $t$ en $(X, Y, Z)$, à l'intérieur du liquide; soient $x$, $y$ et $z$ les coordonnées moyennes de la particule liquide correspondante. Posons

$$(1) \qquad f(X, Y, Z; t) = \rho_2^{-1} p - V - 2^{-1}\omega^2(X^2 + Y^2) - \mathcal{V}^*(X, Y, Z; t),$$

où V désigne le potentiel newtonien. D'après les raisonnements de E. Cartan [1], nous avons, en négligeant tout potentiel dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*,

$$(2) \qquad f(X, Y, Z; t) = \mathcal{R}[\psi(x, y, z)\, e^{i\lambda t}] + h,$$

où $\psi$ est une certaine fonction complexe, qui est du premier ordre infinitésimal, et $h$ est une constante. Les équations

$$(3) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda^2\xi + 2i\omega\lambda\eta, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \lambda^2\eta - 2i\omega\lambda\xi, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \lambda^2\zeta$$

déterminent $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ quand $\psi$ est connu, *pourvu que* $\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)$ *ne soit pas nul.* D'après la nature de la question, $\lambda$ ne peut s'annuler, et nous n'étudions pas le cas où l'on aurait $\lambda = \pm 2\omega$.

Comme le liquide est incompressible, on doit avoir

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0,$$

ce qui, *puisque* $\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)$ *n'est pas nul,* se traduit par *l'équation de Poincaré*

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0.$$

La fonction inconnue $\psi$ satisfait donc à l'équation (4) dans toute la région $\mathcal{D}$ occupée par les positions moyennes des particules liquides.

Observons que si $\lambda$ est purement imaginaire, la partie réelle de $\psi$ intervient seule dans la relation (2), d'où résulte $p$; la fonction $\psi$ sert aussi à déterminer, par les équations (3), les grandeurs $\xi$, $\eta$ et $\zeta$, déjà prises réelles (§ 1). Nous ne diminuons donc pas la généralité en convenant que, *quand* $\lambda$ *est purement imaginaire,* $\psi$ *est réel.*

---

[1] E. Cartan, Mémoire cité dans l'Introduction, I, n$^{os}$ 1 et 2.

3. *Condition sur la surface libre du liquide.* — Nous allons écrire maintenant que la pression est toujours nulle en tout point de la surface libre du liquide (E. Cartan, *loc. cit.*, I, n° 3).

Décomposons le corps en trois masses algébriques : une masse I, qui occupe à chaque instant l'emplacement du noyau, et sa densité en chaque point est $\rho_1 - \rho_2$; une masse II de densité $\rho_2$, qui occupe toute la région des positions moyennes des particules solides et liquides; enfin une masse III ou *bourrelet liquide*, qui, ajoutée aux deux précédentes, donne à chaque instant la distribution effective des masses. La densité de ce bourrelet liquide est donc $\rho_2$ dans certaines régions et $-\rho_2$ dans d'autres. Nous nommons $V_2$ et $V_3$ les potentiels respectifs des masses II et III; $V_1(x, y, z)$ sera le potentiel de la masse I dans sa position d'équilibre.

Calculons le potentiel venant de la masse I à l'instant $t$ pour la particule fluide dont la position moyenne est $(x, y, z)$; nous négligeons tout potentiel dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*. Appliquons à I et à la particule fluide le déplacement qui amène I dans sa position d'équilibre; cela ne change pas le potentiel cherché; or les coordonnées de la molécule après ce déplacement sont, en négligeant toute longueur dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*,

$$x - p_1 + p_6 y - p_5 z + \mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}), \quad y - p_2 - p_6 x + p_4 z + \mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}),$$
$$z - p_3 + p_5 x - p_4 y + \mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t}).$$

Le potentiel cherché est donc, à notre ordre d'approximation,

$$V_1(x, y, z) + [\mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}) - p_1 + p_6 y - p_5 z]\frac{\partial V_1}{\partial x}$$
$$+ [\mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}) - p_2 - p_6 x + p_4 z]\frac{\partial V_1}{\partial y} + [\mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t}) - p_3 + p_5 x - p_4 y]\frac{\partial V_1}{\partial z}.$$

Au même ordre d'approximation et pour la même particule, le potentiel produit par la masse II, dont la position relative à $Oxyz$ est fixe, est

$$V_2(x, y, z) + \mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t})\frac{\partial V_2}{\partial x} + \mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t})\frac{\partial V_2}{\partial y} + \mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t})\frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

La masse III totale, prise en valeur absolue, est du premier ordre infinitésimal. En reproduisant des raisonnements faits ailleurs à propos d'un cas particulier ([1]), nous trouvons que, à notre ordre d'approximation, $V_3$ peut être exprimé même à l'intérieur du bourrelet par la formule

$$V_3(x, y, z) = \rho_2 \int_{S(2)}^{(2)} \frac{\mathcal{R}[(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, e^{i\lambda t}]}{4\pi PQ}\, d\sigma_Q,$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale au point Q de la surface libre du liquide dans sa position moyenne S(2), et cette normale est dirigée dans le sens sortant; $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ sont pris en Q; P est le point $(x, y, z)$ et PQ est la distance entre P et Q; $d\sigma$ est l'élément euclidien de S(2). A notre ordre d'approximation, les coordonnées de la particule peuvent être remplacées dans cette expression par les coordonnées de la position moyenne. En posant, pour toute fonction $U(x, y, z)$,

$$\Theta U = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{2 i \omega}{\lambda} \left(\beta \frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{5}$$

nous trouvons

$$(\lambda^2 - 4\omega^2)(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) = \Theta\psi, \tag{6}$$

ce qui permet d'écrire, $\lambda^2 - 4\omega^2$ n'étant pas nul,

$$V_3(x, y, z) = \mathcal{R}\left(\frac{\rho_2}{\lambda^2 - 4\omega^2} e^{i\lambda t} \int_{S(2)}^{(2)} \frac{\Theta\psi}{4\pi PQ}\, d\sigma_Q\right). \tag{7}$$

Au deuxième ordre infinitésimal près, nous avons enfin

$$2^{-1}\omega^2(X^2 + Y^2) = 2^{-1}\omega^2(x^2 + y^2) + \omega^2 \mathcal{R}[(x\xi + y\eta)\, e^{i\lambda t}].$$

Dans l'expression

$$p = \rho_2[V + 2^{-1}\omega^2(X^2 + Y^2) + \mathcal{V}^\star(X, Y, Z; t) + f(X, Y, Z; t)], \tag{8}$$

il suffit de remplacer $\mathcal{V}^\star$ par son expression du paragraphe 1 et chaque autre terme par la valeur trouvée ci-dessus, pour avoir $p$, sauf un écart dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*. La limite de $p$ quand $\mathcal{V}$ et les amplitudes des mouvements tendent vers zéro, est nulle sur S(2), d'où

$$V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + 2^{-1}\omega^2(x^2 + y^2) + h = 0; \tag{9}$$

---

([1]) Travail cité au début du chapitre, paragraphe 9.

cette relation est donc satisfaite dans l'état d'équilibre; il résulte donc des hypothèses que la seule inconnue $h$ qui y figure a une valeur constante, et cela signifie que S(2) remplit les conditions d'équilibre.

La partie du premier ordre infinitésimal, dans (8), est nulle, elle aussi. Soit $g$ la pesanteur apparente sur S(2); $g$ est une fonction positive d'un point de S(2) (*nous excluons le cas où g s'annulerait en au moins un point*) et nous avons les identités

$$(10) \quad \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial x}+\omega^2 x\right]=\frac{1}{\beta}\left[\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial y}+\omega^2 y\right]=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial z}=-g.$$

Alors la nullité de la partie du premier ordre infinitésimal, dans (8), équivaut à

$$(11) \quad \begin{aligned} &\frac{-g(P)\Theta\psi(P)}{\lambda^2-4\omega^2}+\frac{\rho_2}{4\lambda^2-\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\frac{\Theta\psi(Q)}{4\pi PQ}\,d\sigma_Q \\ &\quad+\psi(P)-(q_1-q_6 y+q_5 z)\frac{\partial V_1}{\partial x}-(q_2+q_6 x-q_4 z)\frac{\partial V_1}{\partial y} \\ &\qquad\qquad-(q_3-q_5 x+q_4 y)\frac{\partial V_1}{\partial z}=-\mathcal{V}(P), \end{aligned}$$

condition où ne figure plus le temps $t$; P représente dans (11) un point courant de S(2).

Notons que si $\lambda$ est purement imaginaire, l'équation (11) reste valable, moyennant les conventions des paragraphes précédents.

4. *Condition sur la surface du noyau.* — La vitesse, relative au noyau, de toute particule fluide qui touche le noyau, est nulle ou tangente au noyau. En négligeant toute grandeur dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*, les composantes de la vitesse de la particule fluide par rapport à $Oxyz$ sont

$$\mathcal{R}(i\lambda\xi\, e^{i\lambda t}),\quad \mathcal{R}(i\lambda\eta\, e^{i\lambda t}),\quad \mathcal{R}(i\lambda\zeta\, e^{i\lambda t}),$$

et les composantes de la vitesse de la particule solide coïncidente sont

$$\mathcal{R}[i\lambda(q_1-q_6 y+q_5 z)\,e^{i\lambda t}],\quad \mathcal{R}[i\lambda(q_2+q_6 x-q_4 z)\,e^{i\lambda t}],$$
$$\mathcal{R}[i\lambda(q_3-q_5 x+q_4 y)\,e^{i\lambda t}],$$

$x$, $y$ et $z$ pouvant, à notre ordre d'approximation, être confondus avec les coordonnées moyennes de la particule solide. Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$

les cosinus directeurs de la normale en un point courant P de la surface d'équilibre S(1) du noyau; cette normale est dirigée dans le sens sortant du liquide. Nous avons alors

$$\alpha(\xi - q_1 + q_6 y - q_5 z) + \beta(\eta - q_2 - q_6 x + q_4 z) + \gamma(\zeta - q_3 + q_5 x - q_4 y) = 0,$$

c'est-à-dire, en définissant encore $\Theta$ par (5),

$$(12) \quad \frac{\Theta\psi(\mathrm{P})}{\lambda^2 - 4\omega^2} - \alpha q_1 - \beta q_2 - \gamma q_3 + (\beta z - \gamma y) q_4 + (\gamma x - \alpha z) q_5 + (\alpha y - \beta x) q_6 = 0.$$

Répétons que, dans cette équation, P ou $(x, y, z)$ est un point courant de la surface d'équilibre S(1) du noyau.

Si $\lambda$ est purement imaginaire, l'équation (12) est valable dans les mêmes hypothèses que (11).

5. *Équations du mouvement du noyau.* — En introduisant les forces d'inertie dues au mouvement relatif du noyau par rapport à $Oxyz$, le système des forces de pression, des forces d'attraction newtonienne, des forces dues au champ troublant, des forces centrifuges, des forces de Coriolis et des forces d'inertie remplit les six conditions universelles d'équilibre. Nous allons écrire ces conditions en négligeant, dans les composantes de la résultante et dans celles du moment résultant, toute grandeur dont l'ordre infinitésimal surpasse *un*.

Occupons-nous d'abord de la pression $p$, qui est exprimée par (8).

Considérons les termes

$$(13) \qquad \rho_2(\mathcal{V}^* + f) = \rho_2 \mathcal{R}[(\mathcal{V} + \psi) e^{i\lambda t}] + \rho_2 h.$$

Les parties de la résultante générale et du moment résultant qui viennent de la constante $\rho_2 h$ sont nulles. Comme $\mathcal{V}$ et ses dérivées sont du premier ordre infinitésimal, nous confondons $\rho_2 \mathcal{R}(\mathcal{V} e^{i\lambda t})$ avec la valeur de la même fonction au point moyen $(x, y, z)$, qui correspond à (X, Y, Z). La valeur de $\rho_2 \mathcal{R}(\psi e^{i\lambda t})$ est, par définition, celle qui correspond à $(x, y, z)$.

Passons à la partie $\rho_2 V_3$ de la pression. Comme elle est du premier ordre infinitésimal, nous la confondons avec ce qu'elle serait dans la position d'équilibre du noyau. Les composantes de la résultante sont donc

$$\rho_2 \int_{S(1)}^{(2)} V_3 \alpha \, d\sigma = -\rho_2 \int_N^{(3)} \frac{\partial V_3}{\partial x} d\tau, \quad -\rho_2 \int_N^{(3)} \frac{\partial V_3}{\partial y} d\tau, \quad -\rho_2 \int_N^{(3)} \frac{\partial V_3}{\partial z} d\tau,$$

où N est l'intérieur du noyau dans sa position d'équilibre, et $d\tau$ est l'élément de volume. Les composantes du moment résultant de cette pression sont de même

$$\rho_2 \int_{S(1)}^{(2)} (\gamma y - \beta z) V_3 \, d\sigma = \rho_2 \int_{N}^{(3)} \left( z \frac{\partial V_3}{\partial y} - y \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) d\tau,$$

$$\rho_2 \int_{N}^{(3)} \left( x \frac{\partial V_3}{\partial z} - z \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) d\tau, \quad \rho_2 \int_{N}^{(3)} \left( y \frac{\partial V_3}{\partial x} - x \frac{\partial V_3}{\partial y} \right) d\tau.$$

Mais en introduisant le potentiel $V_4$ de la masse liquide déplacée par le noyau dans sa position d'équilibre, les composantes de la résultante et du moment résultant de la pression $\rho_2 V_3$ peuvent évidemment être écrites

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial V_4}{\partial x} d\tau, \quad \rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial V_4}{\partial y} d\tau, \quad \rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial V_4}{\partial z} d\tau, \\ \rho_2 \int^{(3)} \left( y \frac{\partial V_4}{\partial z} - z \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) d\tau, \quad \rho_2 \int^{(3)} \left( z \frac{\partial V_4}{\partial x} - x \frac{\partial V_4}{\partial z} \right) d\tau, \\ \rho_2 \int^{(3)} \left( x \frac{\partial V_4}{\partial y} - y \frac{\partial V_4}{\partial x} \right) d\tau, \end{array} \right.$$

où toutes les intégrales sont étendues au bourrelet.

Considérons maintenant la pression $\rho_2 V_2$. En continuant de nommer X, Y et Z les coordonnées d'une particule à l'instant $t$, et $x$, $y$ et $z$ ses coordonnées moyennes, nous trouvons pour les particules du noyau, à notre ordre d'approximation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial X} = \frac{\partial V_2}{\partial x} &+ (p_1 - p_6 y + p_5 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} \\ &+ (p_2 + p_6 x - p_4 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \, \partial y} + (p_3 - p_5 x + p_4 y) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \, \partial z}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial Y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} &+ (p_1 - p_6 y + p_5 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \, \partial x} \\ &+ (p_2 + p_6 x - p_4 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + (p_3 - p_5 x + p_4 y) \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \, \partial z}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial Z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} &+ (p_1 - p_6 y + p_5 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \, \partial x} \\ &+ (p_2 + p_6 x - p_4 z) \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \, \partial y} + (p_3 - p_5 x + p_4 y) \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}; \end{aligned}$$

on en déduit les composantes $-\rho_2\int_N^{(3)}\frac{\partial V_2}{\partial X}d\tau$, ... de la résultante, et les composantes

$$\rho_2\int_N^{(3)}\left(Z\frac{\partial V_2}{\partial Y}-Y\frac{\partial V_2}{\partial Z}\right)d\tau,\quad \ldots$$

du moment résultant.

En remplaçant $V_2(x, y, z)$ par $2^{-1}\omega^2(x^2+y^2)$, nous avons la résultante et le moment résultant de la pression $2^{-1}\rho_2\omega^2(X^2+Y^2)$.

Enfin les composantes de la résultante des pressions $\rho_2 V_1$, suivant les axes liés au noyau, sont

$$(15)\qquad -\rho_2\int_N^{(3)}\frac{\partial V_1}{\partial x}d\tau,\quad -\rho_2\int_N^{(3)}\frac{\partial V_1}{\partial y}d\tau,\quad -\rho_2\int_N^{(3)}\frac{\partial V_1}{\partial z}d\tau,$$

et les composantes du moment résultant suivant les mêmes axes sont

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l}\rho_2\int_N^{(3)}\left(z\frac{\partial V_1}{\partial y}-y\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)d\tau,\quad \rho_2\int_N^{(3)}\left(x\frac{\partial V_1}{\partial z}-z\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)d\tau,\\ \qquad\qquad \rho_2\int_N^{(3)}\left(y\frac{\partial V_1}{\partial x}-x\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)d\tau.\end{array}\right.$$

Nous en avons fini avec les forces de pression. Nous passons aux forces appliquées à tous les points du noyau.

Suivant les axes liés au noyau, les composantes de la résultante et du moment résultant de l'attraction due à la masse I sont

$$(17)\qquad \int_N^{(3)}\rho_1\frac{\partial V_1}{\partial x}d\tau,\quad \int_N^{(3)}\rho_1\frac{\partial V_1}{\partial y}d\tau,\quad \int_N^{(3)}\rho_1\frac{\partial V_1}{\partial z}d\tau,$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l}\int_N^{(3)}\rho_1\left(y\frac{\partial V_1}{\partial z}-z\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)d\tau,\quad \int_N^{(3)}\rho_1\left(z\frac{\partial V_1}{\partial x}-x\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)d\tau,\\ \qquad\qquad \int_N^{(3)}\rho_1\left(x\frac{\partial V_1}{\partial y}-y\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)d\tau.\end{array}\right.$$

Mais nous avons les identités

$$\int_N^{(3)}(\rho_1-\rho_2)\frac{\partial V_1}{\partial x}d\tau=0,\qquad \int_N^{(3)}(\rho_1-\rho_2)\left(y\frac{\partial V_1}{\partial z}-z\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)d\tau=0$$

et les identités analogues. Par suite, les composantes (17) sont opposées aux composantes (15), et les composantes (18) sont opposées aux composantes (16).

Les composantes

$$\int^{(3)} \rho_1 \frac{\partial V_2}{\partial X}\, d\tau, \quad \ldots, \quad \int^{(3)} \rho_1 \left( Y \frac{\partial V_2}{\partial Z} - Z \frac{\partial V_2}{\partial Y} \right) d\tau, \quad \ldots$$

de la résultante et du moment résultant de l'attraction due à la masse II s'exprimeront comme il a été vu à propos des pressions. De même pour les composantes de la résultante et du moment résultant de la force centrifuge, qui s'obtiennent en remplaçant $V_2(x, y, z)$ par $2^{-1}\omega^2(x^2+y^2)$.

Les autres forces qui agissent sur le noyau sont du premier ordre infinitésimal, ainsi que les dérivées de leurs composantes. Cela nous permet de diriger nos calculs comme si le point d'application de chaque force était dans sa position d'équilibre.

Les composantes de la résultante de l'attraction due au bourrelet peuvent s'écrire

$$-\rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial(V_1+V_4)}{\partial x}\, d\tau, \quad -\rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial(V_1+V_4)}{\partial y}\, d\tau, \quad -\rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial(V_1+V_4)}{\partial z}\, d\tau,$$

et celles du moment résultant sont

$$\rho_2 \int^{(3)} \left[ z \frac{\partial(V_1+V_4)}{\partial y} - y \frac{\partial(V_1+V_4)}{\partial z} \right] d\tau$$

et des grandeurs analogues, toutes les intégrales étant étendues au bourrelet. Dans les sommes de ces grandeurs et des grandeurs correspondantes (14), $V_4$ ne figure plus; ces sommes sont

$$-\rho_2 \int^{(3)} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, d\tau, \quad \ldots, \quad \rho_2 \int^{(3)} \left( z \frac{\partial V_1}{\partial y} - y \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) d\tau, \quad \ldots,$$

les intégrales étant étendues au bourrelet. A notre ordre d'approximation, nous confondons ces composantes totales, dues à l'attraction du bourrelet et à la pression qui en provient, avec

$$-\mathcal{R}\left[ \frac{\rho_2}{\lambda^2 - 4\omega^2} e^{i\lambda t} \int_{S(2)}^{(2)} \frac{\partial V_1}{\partial x} \Theta\psi\, d\sigma \right], \quad \ldots$$

pour la résultante, et

$$\mathcal{R}\left[\frac{\rho_2}{\lambda^2-4\omega^2}e^{i\lambda t}\int_{S(2)}^{(2)}\left(z\frac{\partial V_1}{\partial y}-y\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\Theta\psi\,d\sigma\right],\quad \ldots$$

pour le moment résultant.

Pour exprimer la résultante et le moment résultant des forces de Coriolis et des forces d'inertie, soient : $M_1$ la masse du noyau; $x_1$, $y_1$ et $z_1$ les coordonnées de son centre de gravité par rapport au trièdre $O'x'y'z'$; et enfin

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'=1$$

l'ellipsoïde d'inertie du noyau par rapport à $O'$, rapporté au trièdre $O'x'y'z'$.

A notre ordre d'approximation, les composantes de la force de Coriolis qui agit sur la particule solide dont la position d'équilibre est $(x, y, z)$ sont

$$-2\omega\rho_1\mathcal{R}[i\lambda(q_2+q_6x-q_4z)e^{i\lambda t}]\,d\tau,\quad 2\omega\rho_1\mathcal{R}[i\lambda(q_1-q_6y+q_5z)e^{i\lambda t}]\,d\tau,\quad 0.$$

Les composantes de la résultante sont donc

$$-2\omega M_1\mathcal{R}[i\lambda(q_2+q_6x_1-q_4z_1)e^{i\lambda t}],\quad 2\omega M_1\mathcal{R}[i\lambda(q_1-q_6y_1+q_5z_1)e^{i\lambda t}],\quad 0,$$

et celles du moment résultant sont

$$\begin{gathered}-\omega\mathcal{R}\{i\lambda[2q_1M_1z_1+q_5(A+B-C)+2q_6D]e^{i\lambda t}\},\\ -\omega\mathcal{R}\{i\lambda[2q_2M_1z_1-q_4(A+B-C)-2q_6E]e^{i\lambda t}\},\\ 2\omega\mathcal{R}\{i\lambda[M_1(q_1x_1+q_2y_1)+q_4D-q_5E]e^{i\lambda t}\}.\end{gathered}$$

Les composantes de la force d'inertie relative à la particule solide $(x, y, z)$ sont

$$\begin{gathered}\rho_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_1-q_6y+q_5z)e^{i\lambda t}]\,d\tau,\quad \rho_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_2-q_4z+q_6x)e^{i\lambda t}]\,d\tau,\\ \rho_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_3-q_5x+q_4y)e^{i\lambda t}]\,d\tau.\end{gathered}$$

Les composantes de la résultante des forces d'inertie sont

$$\begin{gathered}M_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_1-q_6y_1+q_5z_1)e^{i\lambda t}],\quad M_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_2-q_4z_1+q_6x_1)e^{i\lambda t}],\\ M_1\mathcal{R}[\lambda^2(q_3-q_5x_1+q_4y_1)e^{i\lambda t}],\end{gathered}$$

et les composantes du moment résultant sont

$$\mathcal{R}\{\lambda^2[M_1(q_3 y_1 - q_2 z_1) + q_4 A + q_5 F + q_6 E]e^{i\lambda t}\},$$
$$\mathcal{R}\{\lambda^2[M_1(q_1 z_1 - q_3 x_1) + q_4 F + q_5 B + q_6 D]e^{i\lambda t}\},$$
$$\mathcal{R}\{\lambda^2[M_1(q_2 x_1 - q_1 y_1) + q_4 E + q_5 D + q_6 C]e^{i\lambda t}\}.$$

Les composantes de la résultante de l'action du champ troublant sont

$$\mathcal{R}\left[e^{i\lambda t}\int_{N}^{(3)} \rho_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\, d\tau\right], \quad \ldots,$$

et celles du moment résultant sont

$$\mathcal{R}\left[e^{i\lambda t}\int_{N}^{(3)} \rho_1 \left(y\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right) d\tau\right], \quad \ldots.$$

Mais pour la partie correspondante de la pression, les composantes sont

$$\mathcal{R}\left[\rho_2 e^{i\lambda t}\int_{S(1)}^{(2)} \mathcal{V}\alpha\, d\sigma\right], \quad \ldots$$

pour la résultante, et

$$\mathcal{R}\left[\rho_2 e^{i\lambda t}\int_{S(1)}^{(2)} (y\gamma - z\beta)\mathcal{V}\, d\sigma\right], \quad \ldots$$

pour le moment résultant. En ajoutant les composantes de même sorte, nous trouvons, après application de la formule de Green,

$$\mathcal{R}\left[e^{i\lambda t}\int_{N}^{(3)} (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\, d\tau\right], \quad \ldots$$

pour les composantes de la résultante, et

$$\mathcal{R}\left[e^{i\lambda t}\int_{N}^{(3)} (\rho_1 - \rho_2)\left(y\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right) d\tau\right], \quad \ldots$$

pour celles du moment résultant.

Écrivons maintenant que ces forces remplissent les conditions d'équilibre. Cela arrive en particulier à la limite, quand les grandeurs infiniment petites s'annulent rigoureusement : cela signifie que ces conditions d'équilibre sont remplies quand toutes les particules sont en repos dans leurs positions moyennes; il en était déjà de même pour les conditions étudiées dans les paragraphes 2, 3 et 4. Ensuite, les parties du premier ordre infinitésimal sont égales dans les deux membres de chaque relation d'équilibre, ce qui nous conduit aux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
(19)\quad & M_1\lambda^2(q_1+q_5z_1-q_6y_1)-2i\omega\lambda M_1(q_2-q_4z_1+q_6x_1) \\
&+\int_N^{(3)}(\rho_1-\rho_2)\Big[(q_1-q_6y+q_5z)\Big(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\omega^2\Big) \\
&\qquad+(q_2-q_4z+q_6x)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y}+(q_3-q_5x+q_4y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z}\Big]d\tau \\
&-\frac{\rho_2}{\lambda^2-4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\frac{\partial V_1}{\partial x}\Theta\psi\,d\sigma+\rho_2\int_{S(1)}^{(2)}\psi\alpha\,d\sigma \\
&=\int_N^{(3)}(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(20)\quad & M_1\lambda^2(q_2-q_4z_1+q_6x_1)+2i\omega\lambda M_1(q_1+q_5z_1-q_6y_1) \\
&+\int_N^{(3)}(\rho_1-\rho_2)\Big[(q_1-q_6y+q_5z)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y} \\
&\qquad+(q_2-q_4z+q_6x)\Big(\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\omega^2\Big)+(q_3-q_5x+q_4y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial z}\Big]d\tau \\
&-\frac{\rho_2}{\lambda^2-4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\frac{\partial V_1}{\partial y}\Theta\psi\,d\sigma+\rho_2\int_{S(1)}^{(2)}\psi\beta\,d\sigma \\
&=\int_N^{(3)}(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(21)\quad & M_1\lambda^2(q_3+q_4y_1-q_5x_1), \\
&+\int_N^{(3)}(\rho_1-\rho_2)\Big[(q_1-q_6y+q_5z)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z}+(q_2-q_4z+q_6x)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,dz} \\
&\qquad+(q_3-q_5x+q_4y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\Big]d\tau \\
&-\frac{\rho_2}{\lambda^2-4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\frac{\partial V_1}{\partial z}\Theta\psi\,d\sigma+\rho_2\int_{S(1)}^{(2)}\psi\gamma\,d\sigma \\
&=\int_N^{(3)}(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad & \lambda^2[M_1(q_3 y_1 - q_2 z_1) + A q_4 + F q_5 + E q_6] \\
& - i\omega\lambda[2 M_1 z_1 q_1 + (A + B - C) q_5 + 2 D q_6] \\
& + \int_N^{(3)} (\rho_1 - \rho_2)\Big[(q_1 - q_6 y + q_5 z)\Big(y\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z} - z\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y}\Big) \\
& \qquad + (q_2 - q_4 z + q_6 x)\Big(\frac{\partial V_2}{\partial z} + y\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial z} - z\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} - \omega^2 z\Big) \\
& \qquad + (q_3 - q_5 x + q_4 y)\Big(-\frac{\partial V_2}{\partial y} + y\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} - z\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial z} - \omega^2 y\Big)\Big]\,d\tau \\
& - \frac{\rho_2}{\lambda^2 - 4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\Big(y\frac{\partial V_1}{\partial z} - z\frac{\partial V_1}{\partial y}\Big)\Theta\psi\,d\sigma + \rho_2\int_{S(1)}^{(2)}(\gamma y - \beta z)\psi\,d\sigma \\
& = \int_N^{(3)}(\rho_2 - \rho_1)\Big(y\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\Big)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\quad & \lambda^2[M_1(q_1 z_1 - q_3 x_1) + F q_4 + B q_5 + D q_6] \\
& - i\omega\lambda[2 M_1 z_1 q_2 - (A + B - C) q_4 - 2 E q_6] \\
& + \int_N^{(3)} (\rho_1 - \rho_2)\Big[(q_1 - q_6 y + q_5 z)\Big(-\frac{\partial V_2}{\partial z} + z\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z} + \omega^2 z\Big) \\
& \qquad + (q_2 - q_4 z + q_6 x)\Big(z\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial z}\Big) \\
& \qquad + (q_3 - q_5 x + q_4 y)\Big(\frac{\partial V_2}{\partial x} + z\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z} - x\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} + \omega^2 x\Big)\Big]\,d\tau \\
& - \frac{\rho_2}{\lambda^2 - 4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\Big(z\frac{\partial V_1}{\partial x} - x\frac{\partial V_1}{\partial z}\Big)\Theta\psi\,d\sigma + \rho_2\int_{S(1)}^{(2)}(\alpha z - \gamma x)\psi\,d\sigma \\
& = \int_N^{(3)}(\rho_2 - \rho_1)\Big(z\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - x\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\Big)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(24)\quad & \lambda^2[M_1(q_2 x_1 - q_1 y_1) + E q_4 + D q_5 + C q_6] \\
& + 2 i\omega\lambda[M_1(q_1 x_1 + q_2 y_1) + D q_4 - E q_5] \\
& + \int_N^{(3)} (\rho_1 - \rho_2)\Big[(q_1 - q_6 y + q_5 z)\Big(\frac{\partial V_2}{\partial y} + x\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\Big) \\
& \qquad + (q_2 - q_4 z + q_6 x)\Big(-\frac{\partial V_2}{\partial x} + x\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial y}\Big) \\
& \qquad + (q_3 - q_5 x + q_4 y)\Big(x\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\,\partial z} - y\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z}\Big)\Big]\,d\tau \\
& - \frac{\rho_2}{\lambda^2 - 4\omega^2}\int_{S(2)}^{(2)}\Big(x\frac{\partial V_1}{\partial y} - y\frac{\partial V_1}{\partial x}\Big)\Theta\psi\,d\sigma + \rho_2\int_{S(1)}^{(2)}(\beta x - \alpha y)\psi\,d\sigma \\
& = \int_N^{(3)}(\rho_2 - \rho_1)\Big(x\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\Big)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Si $\lambda$ est purement imaginaire, ces six équations sont valables dans les mêmes conditions que (11) et (12).

Nous écrivons aussi ces six équations sous la forme

$$(18+m)\qquad \sum_{n=1}^{6} a_{m,n}(\lambda) q_n + \int_{S(1)}^{(2)} \varphi_m \psi \, d\sigma + \int_{S(2)}^{(2)} \chi_m(x, y, z; \lambda) \Theta\psi \, d\sigma = b_m$$
$$(m = 1, \ldots, 6),$$

où les $a_{m,n}$ sont des polynomes du second degré par rapport à $\lambda$, les $b_m$ sont des constantes, les $\varphi_m$ ne dépendent que d'un point de S(1) et les $(\lambda^2 - 4\omega^2)\chi_m$ ne dépendent que d'un point de S(2). Le déterminant des $a_{m,n}$ est un polynome du douzième degré par rapport à $\lambda$; en nommant $A_0, \ldots, F_0$ les constantes principales d'inertie du noyau, de sorte qu'on a

$$A_0 = A - M_1(y_1^2 + z_1^2), \qquad D_0 = D + M_1 y_1 z_1$$

et les relations analogues, le coefficient de $\lambda^{12}$ est

$$M_1^3 \begin{vmatrix} A_0 & F_0 & E_0 \\ F_0 & B_0 & D_0 \\ E_0 & D_0 & C_0 \end{vmatrix} > 0.$$

6. *Résumé.* — Quand $\lambda^2 - 4\omega^2$ n'est pas nul, le problème est donc ramené à définir une fonction $\psi$ d'un point du domaine $\mathcal{D}$ occupé par le liquide dans l'état d'équilibre et six constantes $q_1, \ldots, q_6$, de façon à remplir les conditions (4), (11), (12) et (19) à (24). Les deux membres de (4) sont fonctions d'un point de $\mathcal{D}$; ceux de (11) sont fonctions d'un point de S(2); ceux de (12) sont fonctions d'un point de S(1); ceux des équations (19) à (24) sont des constantes. Quand $\lambda$ est purement imaginaire, l'équation (4) est réelle et du type elliptique, et l'opération $\Theta$ est réelle; on doit prendre pour $\mathcal{V}$ une fonction réelle (§ 1), et toutes les inconnues $\psi$ et $q_n$ sont réelles (§ 2 et 3).

Quand $\lambda$ n'est pas un *zéro* du déterminant des $a_{m,n}$, nous pouvons tirer les $q_n$ des six équations (19) à (24), et porter leurs expressions dans les équations (11) et (12), qui deviennent ainsi, en posant $\mathcal{S} = S(1) + S(2)$,

$$(25)\qquad \Theta\psi(P) + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} [K_1(P, Q; \lambda)\Theta\psi(Q) + K_2(P, Q; \lambda)\psi(Q)]\, d\sigma_Q$$
$$+ K_3(P; \lambda)\, \psi(P) = \Phi(P; \lambda),$$

en nommant pour un instant $K_1$, $K_2$, $K_3$ et $\Phi$ des fonctions connues, qui dépendent rationnellement de $\lambda$; les points P et Q varient sur $\mathfrak{S}$; l'opération $\Theta$, définie par (5), dépend de $\lambda$. Nous verrons qu'il est cependant possible, et dès lors avantageux, de diriger les calculs de façon à ne faire jouer aucun rôle spécial aux zéros du déterminant des $a_{m,n}$ dans le cas que concerne le chapitre suivant.

## CHAPITRE II.

### CAS DES MOUVEMENTS A COURTE PÉRIODE ET DES MOUVEMENTS AMORTIS.

1. *Premier problème préliminaire.* — Soit $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ un nombre complexe dont la partie réelle $\mu_1$ remplit la condition $2|\mu_1| < \pi$ (sans égalité). Soient d'autre part $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $h$ et $k$ des nombres réels, soumis aux conditions $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ et $k>0$. Enfin soient $f(x, y, z)$ une fonction complexe donnée d'un point réel de la région

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \leqq h, \tag{1}$$

et $\varphi$ une fonction complexe donnée d'un point réel de la frontière

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = h \tag{2}$$

de cette région; ces deux fonctions remplissent une condition de Lipschitz, c'est-à-dire que les fonctions

$$\frac{\log|f(\mathrm{P})-f(\mathrm{Q})|}{\log \mathrm{PQ}} \quad \text{et} \quad \frac{\log|\varphi(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{Q})|}{\log \mathrm{PQ}}$$

ont des plus petites limites positives quand P et Q varient dans les ensembles où $f$ et $\varphi$ sont définis, de façon que PQ tende vers zéro; nous supposons en outre que $f$ et $\varphi$ s'annulent à l'infini. Nous allons étudier le problème suivant :

*Construire une fonction complexe $\psi$ d'un point de la région* (1), *continue ainsi que ses dérivées dans cette région, deux fois continûment dérivable à l'intérieur de la région, nulle à l'infini ainsi que ses dérivées, remplissant en tout point intérieur à* (1) *la condition*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\cos^{-2}\mu - k^2\psi = f, \tag{3}$$

*et en tout point de* (2) *la condition*

$$(4)\qquad \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos^{-2}\mu+\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\operatorname{tang}\mu=\varphi.$$

Dans le cas, que nous excluons, où l'on aurait $2\mu_1=\pi$, l'équation (3) serait du type réel hyperbolique (naturellement, $\mu_2$ ne devrait pas être nul). Si $\mu$ est réel et qu'on ait $2|\mu|<\pi$, elle est du type réel elliptique, et notre problème est un cas particulier d'un problème traité antérieurement [1]. En inscrivant dans les premiers membres des égalités suivantes les noms des grandeurs introduites comme données dans ce problème antérieur, il faut, pour avoir le problème actuel, prendre

$$m=3,\qquad a_{1,1}=a_{2,2}=1,\qquad a_{3,3}=\cos^{-2}\mu,$$
$$a_{1,2}=-a_{2,1}=\operatorname{tang}\mu,\qquad a_{1,3}=a_{3,1}=a_{2,3}=a_{3,2}=0.$$

De là se déduisent les valeurs suivantes, $\Lambda_4$ désignant la grandeur nommée antérieurement $\Lambda_2\cos\Omega$ :

$$(5)\qquad A_{1,1}=A_{2,2}=1,\qquad A_{3,3}=\cos^2\mu,\qquad A_{1,2}=A_{1,3}=A_{2,3}=0,$$
$$\operatorname{tang}\theta=\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sin^2\mu}{(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\mu+\gamma^2}}\qquad\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\Lambda_1=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\cos^2\mu},$$
$$\Lambda_2=\sqrt{\Lambda_1^2+4\frac{(h-\alpha x-\beta y-\gamma z)(h-\alpha a-\beta b-\gamma c)}{(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\mu+\gamma^2}\cos^2\mu},$$
$$\Lambda_3=2[\beta(x-a)-\alpha(y-b)][(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\mu+\gamma^2]\sin\mu$$
$$+2(\alpha^2+\beta^2)[2h-\alpha(x+a)-\beta(y+b)-\gamma(z+c)]\sin^2\mu\cos\mu,$$
$$\Lambda_4=[2h-\alpha(x+a)-\beta(y+b)-\gamma(z+c)]\cos\mu$$
$$-[\beta(x-a)-\alpha(y-b)]\sin\mu.$$

En posant encore

$$\Psi(L)=\frac{e^{-kL}}{4\pi L},$$

la *fonction de Green* de notre problème est (pour $\mu$ réel)

$$(6)\quad H(P,Q)=\left[\Psi(\Lambda_1)+\Psi(\Lambda_2)\cos(2\theta)-\Lambda_3\int_{\Lambda_4}^{+\infty}\frac{\Psi'\left(\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2+t^2}\right)}{\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2+t^2}}dt\right]\cos\mu;$$

---

(1) *Journ. de Math.*, 9e série, t. 18, 1939, spécialement Chap. I, § 4.

P désigne le point $(x, y, z)$, et Q désigne le point $(a, b, c)$; on a d'ailleurs $\cos(2\theta) = (\alpha^2 + \beta^2)\cos(2\mu) + \gamma^2$. La fonction $\psi$ cherchée, qui existe et est bien déterminée, est

$$(7) \qquad \psi(P) = -\int^{(3)} H(P, Q) f(Q)\, d\tau_Q + \int^{(2)} H(P, Q)\varphi(Q)\, d\sigma_Q,$$

où l'intégrale triple est étendue à la région (1), et l'intégrale double au plan (2).

Nous établirons que tout cela subsiste quand $\mu$ est imaginaire, moyennant les conventions suivantes :

1° *A chaque radical est attribuée la détermination dont la partie réelle est positive;* nous excluons donc les cas où un radical porterait sur un nombre réel et négatif ou nul;

2° *L'intégrale qui figure dans l'expression de* H, *est prise le long d'un chemin complexe terminé par une parallèle au demi-axe réel positif; ni au point* $\Lambda_4$ *ni en aucun autre point de ce chemin,* $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ *ne doit être réel et négatif ou nul.* D'après la première convention, nous attribuons à $\sqrt{\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2}$ la détermination dont la partie réelle est positive.

Notre démonstration comprend d'abord l'étude des points où H, considéré comme fonction de P, cesse d'être défini. H est holomorphe en tout point P où, d'après nos conventions, il est défini. Quand P tend vers un point où cette fonction n'est plus définie, il peut arriver que H tende vers l'infini, ou qu'il tende vers deux limites distinctes, suivant le chemin suivi par P. Nous étudierons seulement le cas où Q appartient au champ où il faut définir $\psi$; ce cas est caractérisé par la condition $\alpha a + \beta b + \gamma c \leqq h$.

D'abord $\Lambda_1^2$ ne doit pas être réel et négatif ou nul. Or le coefficient de $i$, dans $\Lambda_1^2$, est $-2^{-1}(z-c)^2 \sin(2\mu_1)\,\mathrm{sh}(2\mu_2)$. Si $\mu_1\mu_2$ n'est pas nul, ce coefficient ne s'annule que pour $z = c$; mais alors $\Lambda_1^2$ se réduit à $(x-a)^2 + (y-b)^2$, qui s'annule pour $x - a = y - b = 0$ et est positif en tout autre cas. Si $\mu_1$ est nul, $\Lambda_1^2$ se réduit à

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\, \mathrm{ch}^2 \mu_2,$$

qui est réel et positif dans tout l'espace, excepté au point Q. Même conclusion dans le cas, traité antérieurement, où $\mu_2$ est nul. Ainsi $\Lambda_1^2$ n'est jamais négatif; il ne s'annule que quand P vient en Q. Le point Q est évidemment un point de discontinuité de H.

2. *Sur certaines discontinuités de la fonction de Green.* — Nous devons maintenant étudier les points où $\Lambda_2^2$ est négatif ou nul. Nous commençons par simplifier la question : nous faisons tourner le trièdre $Oxyz$ autour de $Oz$, de façon que l'axe $Oy$ devienne parallèle au plan (2); ensuite nous imprimons à ce trièdre une translation qui amène O sur ce plan; alors le problème est ramené au cas particulier où l'on a

$$\beta = h = 0. \tag{8}$$

Dans ces conditions, le coefficient de $i$ dans $\Lambda_2^2$ est

$$\mathcal{J}\Lambda_2^2 = -[2^{-1}(z-c)^2 + 4B(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c)]\sin(2\mu_1)\,\mathrm{sh}(2\mu_2),$$

en posant

$$B = \frac{2\gamma^2}{[\mathrm{ch}(2\mu_2) - \cos(2\mu_1)]^2\alpha^4 - 4[1 - \cos(2\mu_1)\,\mathrm{ch}(2\mu_2)]\alpha^2 + 4}. \tag{9}$$

Le dénominateur du second membre est le carré de la valeur absolue de $2 - 2\alpha^2\sin^2\mu$; il importe de remarquer que ce dénominateur reste supérieur à une fonction continue positive de $\mu_1$; nous avons en effet

$$\begin{array}{lll}
\cos(2\mu_1)\,\mathrm{ch}(2\mu_2) \geqq 1, & & \text{dénom.} \geqq 4, \\
\cos(2\mu_1)\,\mathrm{ch}(2\mu_2) \leqq 1 & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{ch}^2(2\mu_2) + \cos^2(2\mu_1) \leqq 2, \\ \\ \mathrm{ch}^2(2\mu_2) + \cos^2(2\mu_1) \geqq 2, \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{dénom.} \geqq [\mathrm{ch}(2\mu_2) + \cos(2\mu_1)]^2 \\ \qquad \geqq 4\cos^4\mu_1, \\ \text{dénom.} \geqq \left[\dfrac{\sin(2\mu_1)\,\mathrm{sh}(2\mu_2)}{\mathrm{ch}(2\mu_2) - \cos(2\mu_1)}\right]^2 \\ \qquad \geqq \dfrac{1 + \cos(2\mu_1)\sqrt{2 - \cos^2(2\mu_1)}}{2}; \end{array}
\end{array}$$

on vérifie que la dernière limitation est la plus petite des trois, quel que soit $\mu_1$; elle est croissante par rapport à $\cos(2\mu_1)$, et elle tend vers *zéro* avec $\cos(2\mu_1) + 1$. Donc, si $\mu_1\mu_2$ est nul, $\Lambda_2^2$ est réel dans tout l'espace réel; si $\mu_1 \mu_2$ n'est pas nul, $\Lambda_2^2$ n'est réel que sur la quadrique

$$(z-c)^2 + 8B(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c) = 0, \tag{10}$$

qui est un plan double pour $\gamma(\alpha a + \gamma c) = 0$, et un cylindre parabolique pour $\gamma(\alpha a + \gamma c) \neq 0$.

Nous devons chercher parmi ces points ceux où $\Lambda_2^2$ est $\leqq 0$.

Nous avons l'identité

$$\Lambda_2^2 = \frac{\cos^2\mu[\alpha(x+a)+\gamma(z+c)]^2 + [\gamma(x-a)-\alpha(z-c)\cos^2\mu]^2}{1-\alpha^2\sin^2\mu} + (y-b)^2. \tag{11}$$

Si $\mu_1 \mu_2$ est nul, il en résulte que $\Lambda_2^2$ s'annule au point où l'on a

$$\alpha(x+a) + \gamma(z+c) = \gamma(x-a) - \alpha(z-c)\cos^2\mu = y - b = 0,$$

c'est-à-dire au point

$$x = a - 2\alpha\cos^2\mu \frac{\alpha a + \gamma c}{1-\alpha^2\sin^2\mu}, \qquad y = b, \qquad z = c - 2\gamma \frac{\alpha a + \gamma c}{1-\alpha^2\sin^2\mu}, \tag{12}$$

et $\Lambda_2^2$ est positif partout ailleurs; on remarque que *ce point est dans le plan*

$$\alpha x + \gamma z = -\alpha a - \gamma c;$$

on trouve de plus que *le cosinus de l'angle entre la demi-droite* QP *et la direction* $(\alpha, 0, \gamma)$ *reste* $\geqq \frac{2\cos\mu}{1+\cos^2\mu} > 0$. Si $\mu_1 \mu_2$ n'est pas nul, mais que $\alpha a + \gamma c$ le soit, on a $\Lambda_2^2 = \Lambda_1^2$; donc $\Lambda_2^2$ est positif quel que soit P satisfaisant à (10), sauf au point Q, où $\Lambda_2^2$ s'annule. Si l'on a $\mu_1 \mu_2(\alpha a + \gamma c) \neq 0$ et $\gamma = 0$, l'équation (10) se réduit à $z = c$, et l'on a alors $\Lambda_2^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2$; donc alors $\Lambda_2^2$ est nul au point symétrique de Q par rapport au plan $\alpha x + \gamma z = 0$, et il n'est ni négatif ni nul en aucun autre point de l'espace.

Supposons enfin $\mu_1 \mu_2 \gamma(\alpha a + \gamma c) \neq 0$, de sorte que la surface (10) est un cylindre parabolique. En posant

$$A = \frac{2[1+\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)] - [2-\operatorname{ch}^2(2\mu_2) - \cos^2(2\mu_1)]\alpha^2}{[\operatorname{ch}(2\mu_2)-\cos(2\mu_1)]^2\alpha^4 - 4[1-\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)]\alpha^2 + 4}, \tag{13}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\Lambda_2^2 = {} & (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2^{-1}(z-c)^2[1+\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)] \\ & + 4A(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c), \end{aligned} \tag{14}$$

d'où, pour les points du cylindre (10),

$$(15) \quad \mathcal{R}\Lambda_2^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2^{-2}(z-c)^2\{2 + [\operatorname{ch}(2\mu_2) + \cos(2\mu_1)]^2\}$$
$$+ 2\{2A + B[\operatorname{ch}^2(2\mu_2) + \cos^2(2\mu_1)]\}(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c).$$

Or nous avons

$$2A + B[\operatorname{ch}^2(2\mu_2) + \cos^2(2\mu_1)]$$
$$= \frac{4\gamma^2 + 2[\operatorname{ch}(2\mu_2) + \cos(2\mu_1)]^2}{[\operatorname{ch}(2\mu_2) - \cos(2\mu_1)]^2\alpha^4 - 4[1 - \cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)]\alpha^2 + 4};$$

cette grandeur est positive, car le numérateur est $\geqq 8\cos^4\mu_1$. D'après (15), $\Lambda_2^2$ n'est donc réel et négatif ou nul qu'aux points du cylindre (10) qui ne sont pas extérieurs à un certain ellipsoïde entièrement situé dans la région $(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c) < 0$ (il y a dans le plan $y = b$ deux points *réels*, ordinairement distincts, pour lesquels $\Lambda_2^2$ est nul). D'après l'homogénéité, les bornes du rapport $\frac{\alpha x + \gamma z}{\alpha a + \gamma c}$ sur cet ensemble peuvent dépendre de $\mu$, de $\alpha$ et de $\gamma$, mais non de $a$ ni de $b$ ni de $c$. D'après la continuité et la relation $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, *ce rapport reste compris entre deux fonctions continues négatives de* $\mu$. On démontrerait de même que, pour les points P qui rendent $\Lambda_2^2$ réel et négatif ou nul, *l'angle entre la demi-droite* QP *et la direction* $(\alpha, 0, \gamma)$ *reste inférieur à un angle aigu, fonction continue de* $\mu$, *quand* $\alpha a + \gamma c$ *est* $< 0$.

3. *Autres discontinuités de la fonction de Green.* — Nous devons maintenant chercher pour quels points P réels le chemin suivant lequel doit être prise l'intégrale qui figure dans l'expression (6) cesse d'exister. Nous continuons de nous ramener au cas où l'on a (8).

Dans le plan de la variable complexe $t$, le lieu des points où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est réel est une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont l'axe réel et l'axe purement imaginaire. Sur chaque branche de cette hyperbole, $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est négatif depuis le point à l'infini dans la direction de l'axe purement imaginaire jusqu'au point dont l'affixe a pour carré $\Lambda_4^2 - \Lambda_2^2$; en ce point, $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ s'annule, et il est positif sur le reste de la branche. Il y a cependant exception si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est réel, cas où l'hyperbole se réduit au système formé de l'axe réel et de l'axe purement imaginaire; si alors $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est positif, l'ensemble des points où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est négatif est la partie de l'axe purement imaginaire extérieure au segment limité par les points dont le carré de l'affixe est $\Lambda_4^2 - \Lambda_2^2$; si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est négatif, l'ensemble des points où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est négatif se compose de l'axe purement imaginaire et du segment réel ouvert $\left(-\sqrt{\Lambda_4^2 - \Lambda_2^2},\ \sqrt{\Lambda_4^2 - \Lambda_2^2}\right)$; si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est nul, l'ensemble des points où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est $\leqq 0$ est l'axe purement imaginaire.

Pour que le chemin auquel notre intégrale doit être étendue existe, il faut d'abord que $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ ne soit ni nul ni négatif à l'origine $\Lambda_4$ de ce chemin; cela exclut l'ensemble des points où $\Lambda_2^2$ est $\leqq 0$, ensemble qui a été étudié dans le paragraphe précédent.

Cet ensemble étant exclu, notre chemin ne cesse d'exister que si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est $\leqq 0$ et si en outre $\mathcal{R}\Lambda_4$ est $\leqq 0$. En effet, si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ n'est ni négatif ni nul, l'ensemble des points où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ n'est ni négatif ni nul est simplement connexe. Si $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est $\leqq 0$, mais que $\mathcal{R}\Lambda_4$ soit $> 0$, la demi-droite issue de $\Lambda_4$ et parallèle au demi-axe réel positif est un chemin possible (les points où l'on a $0 < \Lambda_4 \leqq \sqrt{\Lambda_4^2 - \Lambda_2^2}$ sont déjà exclus, car $\Lambda_2^2$ y est $\leqq 0$). Donc, en dehors des points où $\Lambda_2^2$ est $\leqq 0$, l'ensemble des points pour lesquels notre chemin cesse d'exister est l'ensemble des points où l'on a à la fois

$$(16)\qquad \mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = 0, \qquad \mathcal{R}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) \leqq 0, \qquad \mathcal{R}\Lambda_4 \leqq 0.$$

Si l'on trace des coupures infranchissables le long des parties de courbes où $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2$ est $\leqq 0$, la fonction $\sqrt{\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 + t^2}$ est holomorphe dans la ou les régions ainsi déterminées. Comme ces régions sont simplement connexes, la façon dont la fonction intégrée tend vers zéro quand $t$ s'éloigne indéfiniment dans la direction du demi-axe réel positif nous assure que *l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi. Cette intégrale est fonction holomorphe de $x$, de $y$ et de $z$.*

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
2\mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) &= \sin(2\mu_1)\,\mathrm{sh}(2\mu_2) \\
&\quad \times \left\{[\alpha(x+a) + \gamma(z+c)]^2 - \alpha^2(y-b)^2 - (z-c)^2 - 8B(\alpha x + \gamma z)(\alpha a + \gamma c)\right\} \\
&\quad + 2\cos(2\mu_1)\,\mathrm{sh}(2\mu_2)\,\alpha(y-b)[\alpha(x+\alpha) + \gamma(z+c)] \\
&= \mathrm{sh}(2\mu_2)\sin(2\mu_1)[\alpha(x+a) + \gamma(z+c) + \alpha(y-b)\cot(2\mu_1) - 4B(\alpha a + \gamma c)]^2 \\
&\quad - \frac{\mathrm{sh}(2\mu_2)}{\sin(2\mu_1)}[\alpha(y-b) - 2B\sin(4\mu_1)(\alpha a + \gamma c)]^2 - \mathrm{sh}(2\mu_2)\sin(2\mu_1)(z-c)^2 \\
&\quad + 8B\,\mathrm{sh}(2\mu_2)\sin(2\mu_1)[1 - 2B\sin^2(2\mu_1)](\alpha a + \gamma c)^2.
\end{aligned}$$

Nous constatons que si $\mu_2 \alpha$ est nul, $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est réel dans tout l'espace (pour $\alpha = 0$, on a $2B = 1$). Si $\mu_2 \alpha$ n'est pas nul, nous devons remarquer qu'on a

$$1 - 2B\sin^2(2\mu_1) = \frac{\{[\operatorname{ch}(2\mu_2) - \cos(2\mu_1)]\alpha^2 + 2\cos(2\mu_1)\}^2}{[\operatorname{ch}(2\mu_2) - \cos(2\mu_1)]^2\alpha^4 - 4[1 - \cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)]\alpha^2 + 4} \geqq 0;$$

la nature de la quadrique $\mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = 0$ pour $\mu_2 \alpha$ non nul résulte alors du tableau suivant :

$\mu_1 = 0$, système de deux plans réels et distincts, qui se coupent,

$$\mu_1 \neq 0 \begin{cases} \gamma(\alpha a + \gamma c)[1 - 2B\sin^2(2\mu_1)] = 0, & \text{cône réel,} \\ \gamma(\alpha a + \gamma c)[1 - 2B\sin^2(2\mu_1)] \neq 0, & \text{hyperboloïde à une nappe.} \end{cases}$$

Nous devons voir en quels points de cet ensemble les deux dernières conditions (16) sont remplies. Remarquons l'identité

$$(17) \quad \begin{aligned} &(1 - \alpha^2\sin^2\mu)(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) \\ &\quad = \{(1 - \alpha^2\sin^2\mu)(y - b) + \alpha\sin\mu\cos\mu[\alpha(x + a) + \gamma(z + c)]\}^2 \\ &\quad\quad + [\gamma(x - a) - \alpha(z - c)\cos^2\mu]^2. \end{aligned}$$

Si $\mu_2$ est nul, $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est nul sur la droite réelle

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha^2\sin^2\mu)(y - b) + \alpha\sin\mu\cos\mu[\alpha(x + a) + \gamma(z + c)] \\ &\quad = \gamma(x - a) - \alpha(z - c)\cos^2\mu = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la droite qui passe par le point (12) et dont les coefficients de direction sont $\alpha\cos^2\mu$, $-\alpha\sin\mu\cos\mu$ et $\gamma$; le cosinus de l'angle entre cette direction et la direction $(\alpha, 0, \gamma)$ est $\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\mu} \geqq \cos\mu$. Le cosinus de l'angle entre la même direction et la direction $(\alpha\cos\mu, -\alpha\sin\mu, \gamma\cos\mu)$ perpendiculaire au plan $\Lambda_4 = 0$ est

$$\frac{\cos\mu}{\sqrt{(1 - \alpha^2\sin^2\mu)(1 - \gamma^2\sin^2\mu)}} \geqq \frac{2\cos\mu}{1 + \cos^2\mu}.$$

Nous savons d'ailleurs, par le travail cité dans le paragraphe 1, que la demi-droite où $\Lambda_4$ est négatif a pour origine le point (12), et qu'elle appartient à la région $\alpha x + \gamma z > 0$ si $\alpha a + \gamma c$ est $\leqq 0$. Au point (12), $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ et $\Lambda_4$ sont nuls. En aucun autre point de l'espace, $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ n'est négatif ni nul.

Pour $\alpha = 0$, nous avons

$$\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 = (y - b)^2 + (x - a)^2, \qquad \Lambda_4 = -\gamma(z + c)\cos\mu.$$

Nous voyons que $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est nul sur la droite $x - a = y - b = 0$, perpendiculaire à $\alpha x + \gamma z = 0$, et est positif partout ailleurs. La demi-droite où $\mathcal{R}\Lambda_4$ est négatif a pour origine le point symétrique de P par rapport à $\alpha x + \gamma z = 0$, et elle est située dans la région $\alpha x + \gamma z > 0$ quand $\alpha a + \gamma c$ est $\leqq 0$ (d'ailleurs $\Lambda_3$ est nul, de sorte que l'intégrale est inutile dans ce cas pour former H).

Étudions encore le cas où $\mu_1$ est nul, $\mu_2 \alpha$ ne l'étant pas. On a alors

$$\mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = \alpha \operatorname{sh}(2\mu_2)(y - b)[\alpha(x + a) + \gamma(z + c)].$$

Si $\alpha(x + a) + \gamma(z + c)$ est nul, $\mathcal{R}\Lambda_4$ l'est aussi; $\Lambda_2^2$ est réel et positif, sauf au point (12), où il s'annule; $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2$ est donc aussi positif, sauf au point (12) où il est nul; le point (12) est donc le seul point cherché qui soit dans le plan $\alpha(x + a) + \gamma(z + c) = 0$, et il est aussi dans le plan $y = b$. Les autres points cherchés sont tous dans ce plan $y = b$; or nous avons dans ce plan

$$\begin{aligned}(1 + \alpha^2 \operatorname{sh}^2\mu_2)(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = &- \alpha^2 \operatorname{sh}^2\mu_2 \operatorname{ch}^2\mu_2[\alpha(x + a) + \gamma(z + c)]^2 \\ &+ [\gamma(x - a) - \alpha(z - c)\operatorname{ch}^2\mu_2]^2, \\ \Lambda_4 = &- [\alpha(x + a) + \gamma(z + c)]\operatorname{ch}\mu_2.\end{aligned}$$

La région de ce plan où l'on a $\mathcal{R}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) \leqq 0$ et $\mathcal{R}\Lambda_4 \leqq 0$ est donc un certain angle dont le sommet est au point (12). *Nous remarquons l'inégalité* $\alpha x + \gamma z \geqq -\alpha a - \gamma c$. Les demi-droites issues du point (12) et qui balayent l'ensemble des points considérés sont portées par les droites

$$(\gamma + s\alpha^2 \operatorname{sh}\mu_2 \operatorname{ch}\mu_2)(x - x_0) - \alpha \operatorname{ch}\mu_2(\operatorname{ch}\mu_2 - s\gamma \operatorname{sh}\mu_2)(z - z_0) = 0,$$

où $x_0$, $b$ et $z_0$ sont, pour un instant, les coordonnées du point (12), et où $s$ est un paramètre réel qui varie de $-1$ à $1$; en effet, pour $s = \pm 1$, nous avons les deux droites qui portent la frontière de l'angle considéré; la valeur $s = \infty$ correspond à la droite $\Lambda_4 = 0$, qui ne contient de notre angle que le sommet; ce n'est donc pas quand $s$ décroît de $-1$ à l'infini puis de l'infini à $1$ que nos droites balayent l'angle; c'est donc quand $s$ croît de $-1$ à $1$. Or le cosinus de l'angle entre la direction $(\alpha, 0, \gamma)$ et la droite dont le paramètre est $s$, est

$$\frac{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \mu_2 + \gamma^2}{\sqrt{s^2\alpha^2 \operatorname{sh}^2\mu_2 \operatorname{ch}^2\mu_2 - 2s\alpha^2\gamma \operatorname{sh}^3\mu_2 \operatorname{ch}\mu_2 + \gamma^2 + \alpha^2 \operatorname{ch}^4\mu_2}};$$

sa valeur minimum s'obtient en donnant à $s$ une des valeurs $\pm 1$, de façon que $s\gamma\mu_2$ soit $\leqq 0$; ce minimum est une fonction continue de $\gamma$ et de $\mu_2$, et il est toujours positif; quand $s$ et $\gamma$ varient de $-1$ à $1$, notre cosinus atteint donc un minimum positif, qui dépend continûment de $\mu_2$. Si $\alpha a + \gamma c$ est négatif et si nous posons pour un instant

$$x = x_0 - \alpha \operatorname{ch}\mu_2 (\operatorname{ch}\mu_2 - s\gamma \operatorname{sh}\mu_2)(\alpha a + \gamma c)u, \qquad y = b,$$
$$z = z_0 - (\gamma + s\alpha^2 \operatorname{sh}\mu_2 \operatorname{ch}\mu_2)(\alpha a + \gamma c)u,$$

nous avons tous les points P qui remplissent les conditions (16) en donnant à $s$ toutes les valeurs de $-1$ à $1$, et à $u$ toutes les valeurs $\geqq 0$; le cosinus de l'angle entre la demi-droite QP et la direction $(\alpha, 0, \gamma)$ est toujours positif, il dépend continûment de $\mu_2$, de $\gamma$, de $s$ et de $u$ et est indépendant de $a$, de $b$ et de $c$, et, quand $u$ augmente indéfiniment, il tend uniformément vers la fonction de $\mu_2$, de $\gamma$ et de $s$ qui vient d'être étudiée. Donc *le cosinus de l'angle entre* QP *et la direction* $(\alpha, 0, \gamma)$ *reste supérieur à une fonction continue positive de* $\mu_2$. Cette conclusion subsiste si $\alpha a + \gamma c$ est nul, car alors le point (12) coïncide avec Q.

Abordons enfin le cas où $\mu_1 \mu_2 \alpha$ n'est pas nul. Comme dans les cas précédents, nous devons étudier le signe de $\alpha x + \gamma z$ et limiter supérieurement le rapport $\dfrac{\alpha x + \gamma z}{\alpha a + \gamma c}$ et l'angle de QP avec la direction $(\alpha, 0, \gamma)$ quand les conditions (16) sont remplies. Sur la surface

$$(18) \qquad \mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = 0,$$

qui est un cône réel ou un hyperboloïde à une nappe, les conditions (16) définissent une région, pour une partie de la frontière de laquelle on a $\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2 = 0$. D'après l'expression (17), les points P qui remplissent cette condition appartiennent soit au plan imaginaire

$$(19) \qquad \alpha \sin\mu \cos\mu [\alpha(x+a) + \gamma(z+c)] + (1 - \alpha^2 \sin^2\mu)(y-b) - i\gamma(x-a) + i\alpha\cos^2\mu(z-c) = 0,$$

soit au plan qui s'en déduit en remplaçant $\alpha$ et $\gamma$ par leurs opposés.

Le lieu des points réels du plan (19) est donné par les équations

$$\alpha \sin(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)[\alpha(x+a)+\gamma(z+c)]$$
$$+[2-\alpha^2+\alpha^2\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)](y-b)+\alpha\sin(2\mu_1)\operatorname{sh}(2\mu_2)(z-c)=0,$$
$$\alpha\cos(2\mu_1)\operatorname{sh}(2\mu_2)[\alpha(x+a)+\gamma(z+c)]-\alpha^2\sin(2\mu_1)\operatorname{sh}(2\mu_2)(y-b)$$
$$-2\gamma(x-a)+\alpha[1+\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)](z-c)=0;$$

on peut vérifier que ces équations déterminent une droite, de sorte que le plan (19) est vraiment imaginaire.

Les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface (18) sont donnés par les équations

$$[\alpha(x+a)+\gamma(z+c)]\sin(2\mu_1)+2\alpha(y-b)\cos^2\mu_1-16\mathrm{B}(\alpha a+\gamma c)\sin\mu_1\cos^3\mu_1$$
$$=s\sin(2\mu_1)\left\{z-c\pm4\gamma\frac{[\operatorname{ch}(2\mu_2)-\cos(2\mu_1)]\alpha^2+2\cos(2\mu_1)}{[\operatorname{ch}(2\mu_2)-\cos(2\mu_1)^2]\alpha^4-4[1-\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)]\alpha^2+4}(\alpha a+\gamma c)\right\},$$
$$s\{[\alpha(x+a)+\gamma(z+c)]\sin(2\mu_1)-2\alpha(y-b)\sin^2\mu_1-16\mathrm{B}(\alpha a+\gamma c)\sin^3\mu_1\cos\mu_1\}$$
$$=\sin(2\mu_1)\left\{z-c\mp4\gamma\frac{[\operatorname{ch}(2\mu_2)-\cos(2\mu_1)]\alpha^2+2\cos(2\mu_1)}{[\operatorname{ch}(2\mu_2)-\cos(2\mu_1)]^2\alpha^4-4[1-\cos(2\mu_1)\operatorname{ch}(2\mu_2)]\alpha^2+4}(\alpha a+\gamma c)\right\},$$

où $s$ est un paramètre, et les signes supérieurs donnent un des systèmes, et les signes inférieurs l'autre système; quand la surface (18) est un cône, la coïncidence des deux systèmes est immédiatement visible. Or les deux droites réelles définies par l'équation $\Lambda_2^2=\Lambda_4^2$ sont situées sur (18); nous trouvons qu'elles sont du système correspondant aux signes inférieurs; ces deux droites s'obtiennent en prenant $s=\dfrac{\gamma\pm\alpha^2\operatorname{sh}\mu_2\operatorname{ch}\mu_2}{\gamma^2+\alpha^2\operatorname{ch}^2\mu_2}$, le signe inférieur correspondant à (19); ces deux valeurs, qui s'écrivent aussi $\dfrac{2\gamma\pm\alpha^2\operatorname{sh}(2\mu_2)}{1+\gamma^2+\alpha^2\operatorname{ch}(2\mu_2)}$, sont comprises entre $-1$ et $1$, d'après les inégalités

$$2|\gamma|\leqq 1+\gamma^2 \qquad \text{et} \qquad |\operatorname{sh}(2\mu_2)|<\operatorname{ch}(2\mu_2).$$

Quand $\mu_2$ tend vers *zéro*, ces deux valeurs viennent se confondre; mais, pour $\mu_2=0$, $\Lambda_2^2-\Lambda_4^2$ est réel et positif dans tout l'espace, sauf sur une demi-droite où il est nul; c'est donc quand $s$ croît de la plus petite à la plus grande des valeurs précédentes que la génératrice balaye la région (16), sans quoi, pour $\mu_2=0$, $\Lambda_2^2-\Lambda_4^2$ serait négatif ou nul sur la limite de la surface (18), limite qui est un hyperboloïde à une nappe ou un cône réel. Calculons l'angle entre la génératrice de paramètre $s$ et la direction $(\alpha, 0, \gamma)$; nous supposons que $s$ est compris entre les deux valeurs extrêmes trouvées. Les coefficients de direction de la génératrice sont

$$2[s\gamma - 1 + (1 - s^2)\sin^2\mu_1], \qquad (1 - s^2)\sin(2\mu_1), \qquad -2s\alpha.$$

Il importe de remarquer que les quotients de ces trois nombres par $\alpha$ sont bornés quand $\mu_2$ est borné; en effet nous avons pour les valeurs extrêmes de $s$

$$1 - s\gamma = \alpha^2 \operatorname{ch}\mu_2 \frac{\operatorname{ch}\mu_2 \mp \gamma \operatorname{sh}\mu_2}{\gamma^2 + \alpha^2 \operatorname{ch}^2\mu_2}, \qquad \gamma - s = \alpha^2 \operatorname{sh}\mu_2 \frac{\gamma \operatorname{sh}\mu_2 \mp \operatorname{ch}\mu_2}{\gamma^2 + \alpha^2 \operatorname{ch}^2\mu_2};$$

les valeurs relatives aux génératrices intermédiaires sont intermédiaires entre celles qui correspondent aux génératrices extrêmes, et, d'après l'identité

$$1 - s^2 = 1 - s\gamma + s(\gamma - s),$$

notre assertion en résulte. Le cosinus de l'angle entre le sens déterminé par ces coefficients sur notre génératrice et la direction $(\alpha, 0, \gamma)$ est donc le quotient de

$$2\alpha[s\gamma - 1 + (1 - s^2)\sin^2\mu_1] - 2s\alpha\gamma = -2\alpha(\cos^2\mu_1 + s^2\sin^2\mu_1)$$

par le produit de $|\alpha|$ par une fonction bornée positive; *la borne inférieure de sa valeur absolue est donc positive*. Le cosinus de l'angle entre le même sens de notre génératrice et la direction

$$(-\alpha\cos\mu_1, \ \alpha\sin\mu_1, \ -\gamma\cos\mu_1),$$

perpendiculaire au plan $\mathcal{R}\Lambda_4 = 0$ dans le sens où $\mathcal{R}\Lambda_4$ croît, est le quotient de

$$2\alpha\cos\mu_1(\cos^2\mu_1 + s^2\sin^2\mu_1) + \alpha(1 - s^2)\sin\mu_1\sin(2\mu_1) = 2\alpha\cos\mu_1$$

par le produit de $|\alpha|$ par une fonction bornée positive; *la borne inférieure de la valeur absolue de ce cosinus est positive*. Puisque les signes de ces deux cosinus sont opposés, nous en déduisons que si P *suit une quelconque de ces génératrices dans le sens où $\alpha x + \gamma z$ croît, $\mathcal{R}\Lambda_4$ décroît.*

Étudions la partie de la frontière de (16) où l'on a $\mathcal{R}\Lambda_4 = 0$, ce qui entraîne $\mathcal{J}\Lambda_4^2 = 0$ et $\mathcal{R}\Lambda_4^2 \leqq 0$. Comme nous avons aussi $\mathcal{J}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) = 0$

et $\mathcal{R}(\Lambda_2^2 - \Lambda_4^2) \leqq 0$, nous en déduisons $\mathcal{I}\Lambda_2^2 = 0$ et $\mathcal{R}\Lambda_2^2 \leqq 0$. Cette partie de frontière appartient donc à l'ensemble étudié dans le paragraphe 2. Donc, si $\alpha a + \gamma c$ est négatif, cette partie de frontière est telle que $\alpha x + \gamma z$ reste supérieur au produit de $\alpha a + \gamma c$ par une fonction continue négative de $\mu$; si $\alpha a + \gamma c$ est nul, cette partie de frontière contient le point Q, mais tous ses autres points appartiennent à la région $\alpha x + \gamma z > 0$.

Or, d'après ce qui précède, nous avons tout l'ensemble (16) en menant par chaque point de cette partie de frontière, dans le sens où $\alpha x + \gamma z$ croît, la demi-génératrice qui est du même système que les génératrices extrêmes; si la surface (18) est un cône réel et que son sommet annule $\mathcal{R}\Lambda_4$, l'ensemble (16) est constitué par toutes les demi-génératrices issues de ce sommet et dont le paramètre $s$ est compris entre les paramètres des génératrices extrêmes. Dans tous les cas, *le seul point de l'ensemble* (16) *qui appartienne au plan* $\alpha x + \gamma z = 0$ *est le point* Q, *quand ce dernier appartient à ce plan; pour* $\alpha a + \gamma c < 0$, $\alpha x + \gamma z$ *est supérieur au produit de* $\alpha a + \gamma c$ *par une fonction continue négative de* $\mu$. En raisonnant comme dans le cas où $\mu_1$ est nul, nous pouvons établir aussi que *le cosinus de l'angle entre* QP *et* $(\alpha, 0, \gamma)$ *reste supérieur à une fonction continue positive de* $\mu$.

Remarquons que ces conclusions sont valables même dans le cas où $\mu_1 \mu_2 \alpha$ est nul, et qu'elles s'appliquent aussi à l'ensemble étudié dans le paragraphe 2. *Elles s'appliquent donc à tous les points* P *où* H(P, Q) *est discontinu, en dehors du point* Q.

*Si l'on échange les rôles de* P *et de* Q, *les mêmes conclusions restent valables*, car on obtiendrait le même résultat en remplaçant $\mu$ par $-\mu$.

4. *Limitation de la fonction de Green.* — D'après l'étude précédente, si P appartient au champ (1), la seule discontinuité que possède la fonction H(P, Q) quand Q varie dans le même champ, est située en P. *Le produit de* H(P, Q) *par la distance* PQ *entre les deux points est borné*, nous allons le voir. Il suffit de traiter le cas où $\alpha x + \gamma z$ est $< 0$.

C'est tout d'abord évident pour le premier terme du second membre de (6), car, quand Q varie sur une sphère de centre P et de rayon donné R, $|\Lambda_1| R^{-1}$ est continu et ne s'annule pas, et par suite sa borne inférieure est positive; or, d'après l'homogénéité, cette borne est indépendante de R, et elle est évidemment indépendante du point P.

Une légère modification de ce raisonnement s'applique au deuxième terme du second membre de (6) : sur une sphère de centre P et de rayon donné $-(\alpha x+\gamma z)s$, où $s$ est un paramètre positif, $\Lambda_2^2(\alpha x+\gamma z)^{-2}s^{-2}$ peut s'écrire pour un instant

$$F_1(u, v)+F_2(u, v)s^{-1}+F_3(u, v)s^{-2},$$

où $u$ et $v$ sont deux paramètres qui fixent la direction de la demi-droite PQ; les fonctions complexes $F_1$, $F_2$ et $F_3$ sont continues, et même la dernière $F_3$ est la constante $\frac{4\cos^2\mu}{1-\alpha^2\sin^2\mu}$, qui n'est pas nulle; donc la valeur absolue de cette somme augmente indéfiniment quand $s$ tend vers *zéro*; comme cette somme est continue pour $s\neq 0$, et qu'elle n'est jamais nulle pour $s\leqq 1$, la borne inférieure de sa valeur absolue est positive. Il en est de même quand $u$, $v$ et $s$ varient dans l'ensemble fermé pour lequel $s$ reste $\geqq 1$ et $\alpha a+\gamma c$ reste $\leqq 0$, car cet ensemble est borné quand on y prend $s^{-1}$ comme variable au lieu de $s$, et notre fonction y est continue et non nulle, même pour $s^{-1}=0$.

Soit $s_1$ un nombre positif supérieur au maximum de

$$\left|\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2}(\alpha x+\gamma z)^{-1}\right|$$

quand PQ est $\leqq -\alpha x-\gamma z$. Le troisième terme entre crochets, au second membre de (6), peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{-\Lambda_3}{4\pi}\int_{\Lambda_4}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2+t^2}^{\,3}}\\
&\qquad-\frac{k^2\Lambda_3}{8\pi}\int_{\Lambda_4}^{-s_1(\alpha x+\gamma z)}\frac{dt}{\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2+t^2}}+\text{fonction bornée}\\
&=\frac{-\Lambda_3}{4\pi\Lambda_2(\Lambda_2+\Lambda_4)}-\frac{k^2\Lambda_3}{8\pi}\log\frac{-s_1(\alpha x+\gamma z)+\sqrt{\Lambda_2^2-\Lambda_4^2+s_1^2(\alpha x+\gamma z)^2}}{\Lambda_2+\Lambda_4}\\
&\qquad+\text{fonction bornée},
\end{aligned}$$

pourvu que PQ soit $\leqq -\alpha x-\gamma z$. Or la somme $\Lambda_2+\Lambda_4$ ne s'annule en aucun point Q de la région $\alpha a+\gamma c\leqq 0$ quand on a $\alpha x+\gamma z<0$, car $\mathcal{R}\Lambda_2$ est positif et nous avons vu que les conditions $\Lambda_2^2-\Lambda_4^2=0$ et $\alpha a+\gamma c\leqq 0$ entraînent $\mathcal{R}\Lambda_4>0$ (§ 3). Il existe une constante positive $K_1$ telle que la valeur absolue de cette somme reste $>-K_1(\alpha x+\gamma z)$

quand Q varie dans la sphère de centre P et de rayon $-\alpha x - \gamma z$. Il en résulte déjà que la partie de notre expression où figure un logarithme est bornée pour $\alpha x + \gamma z$ borné. Comme d'autre part la condition $PQ \leqq -\alpha x - \gamma z$ entraîne $|\Lambda_3| < -K_2(\alpha x + \gamma z)$, où $K_2$ est une certaine constante, nous voyons que le produit de notre terme par PQ est borné pour $PQ \leqq -\alpha x - \gamma z$. Mais sur une sphère de centre $s$ et de rayon $-(\alpha x + \gamma z)s$ ($s \geqq 1$), le produit du même terme par $(\alpha x + \gamma z)s$ ne dépend que de $s$ et de deux paramètres $u$ et $v$ qui fixent la direction PQ; il est continu par rapport à $s^{-1}$, à $u$ et à $v$, même pour $s^{-1} = 0$, quand ces trois variables sont telles que $\alpha a + \gamma c$ soit $\leqq 0$; donc ce produit est borné. Notre démonstration est achevée pour ce troisième et dernier terme, car sa valeur absolue décroît quand on multiplie $x$, $y$, $z$, $a$, $b$ et $c$ par un même facteur $> 1$.

Quand PQ augmente indéfiniment, P et Q variant dans (1), la fonction de Green et ses dérivées de tout ordre par rapport aux coordonnées de P et de Q admettent le même type de limitation que dans le travail cité (*loc. cit.*, I, § 2), c'est-à-dire que la valeur absolue de toute dérivée d'ordre $p \geqq 0$ vaut $O(k^{p+1})\exp(-\nu k PQ)$, où $\nu$ est une constante positive et O est le symbole de Landau [1].

Soit $\nu_1$ une constante positive telle que $\alpha a + \gamma c$ reste $> -\nu_1(\alpha x + \gamma z)$ en tout point Q autre que P où H n'est pas défini. Soit encore $\omega$ un angle aigu supérieur à l'angle de PQ avec $(\alpha, 0, \gamma)$ pour le même ensemble. Alors on peut changer les constantes qui figurent dans nos limitations de façon à obtenir des limitations valables quand ou bien $\alpha a + \gamma c$ est $\leqq -\nu_1(\alpha x + \gamma z)$, ou bien l'angle de PQ avec $(\alpha, 0, \gamma)$ est $\geqq \omega$.

5. *Solution du premier problème préliminaire.* — D'après ces résultats, les opérations indiquées au second membre de (7) sont possibles, et la fonction $\psi$ ainsi construite est continue dans (1). On prouve, comme antérieurement (*loc. cit.*, I, § 3), qu'elle s'annule à l'infini. Il nous reste à établir les relations (3) et (4), à établir que les dérivées de $\psi$ s'annulent à l'infini, et à prouver qu'aucune autre fonction $\psi$ ne remplit toutes ces conditions.

---

[1] $y = O(z)$ signifie que $yz^{-1}$ est borné.

L'existence et la continuité des dérivées de $\psi$ en tout point de l'ensemble (1), et l'existence et la continuité des dérivées secondes en tout point intérieur à cet ensemble se démontrent comme les propositions analogues relatives aux équations du type elliptique ([1]). Le fait que les dérivées de $\psi$ s'annulent à l'infini s'établit aisément ensuite.

Le fait que $\psi$ satisfait à l'équation (3) se ramène à prouver que, si $\mathcal{D}$ est un domaine spatial borné dont la frontière est $\mathcal{S}$, et si l'on pose pour un instant

$$\mathrm{U(P)} = -\int_{\mathcal{D}}^{(3)} \frac{\cos\mu \, d\tau_{\mathrm{Q}}}{4\pi\Lambda_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q})},$$

on a, en tout point P intérieur à $\mathcal{D}$,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2}\cos^{-2}\mu = 1.$$

Or le premier membre de cette relation est, d'après les raisonnements classiques,

$$\cos\mu \int_{\mathcal{S}}^{(2)} \frac{c_1(\mathrm{Q})(a-x) + c_2(\mathrm{Q})(b-y) + c_3(\mathrm{Q})(c-z)}{4\pi\Lambda_1^3} d\sigma_{\mathrm{Q}},$$

où $c_1$, $c_2$ et $c_3$ sont les cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{S}$ dans le sens sortant de $\mathcal{D}$. Sous le signe d'intégration, le coefficient de $d\sigma_{\mathrm{Q}}$ est le produit de

$$(a-x)c_1 + (b-y)c_2 + (c-z)c_3$$

par une fonction positivement homogène et d'ordre $-3$ par rapport à $a-x$, à $b-y$ et à $c-z$; comme, d'autre part, $\mathcal{S}$ n'a pas de frontière, nous ne changeons pas le résultat si nous déformons $\mathcal{S}$ dans l'espace complexe sans rencontrer aucune singularité de la fonction intégrée; il faut seulement remplacer $c_1\, d\sigma$ par $d(b, c)$, et semblablement pour $c_2\, d\sigma$ et pour $c_3\, d\sigma$, et prendre $\mathcal{S}$ dans le sens qui se déduit par continuité du sens initial ([2]). Nous en profitons pour remplacer $\mathcal{S}$ d'abord par une sphère de centre P et de rayon *un*. A chaque point $(a, b, c)$

---

([1]) *Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, XLIII, 1926, p. 1–128, spécialement Chap. II, § 4 et 5. La continuité des dérivées premières sur le plan (2) s'établit comme pour le potentiel newtonien de simple couche; voir, par exemple, *Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, XLIX, 1932, p. 1–104 et 245–308, spécialement Chap. VII.

([2]) Premier travail cité dans la Note précédente, spécialement Chap. I, § 11.

de celle-ci, nous faisons correspondre un point $(a, b, \zeta)$ en posant

$$c = z + (\zeta - z)(1 - s + s\cos\mu),$$

où $s$ est réel, positif et $\leqq 1$; le point $(a, b, \zeta)$ est sur la variété

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (\zeta - z)^2(1 - s + s\cos\mu)^2 = 1,$$

et $(a-x)^2 + (b-y)^2 + (\zeta - z)^2\cos^2\mu$ n'est jamais nul, sans quoi l'on aurait

$$(c-z)^2[(1-s+s\cos\mu)^2 - \cos^2\mu] = (1-s+s\cos\mu)^2,$$

ce qui est impossible, car ou bien l'argument de $(1-s+s\cos\mu)\cos^{-1}\mu$, qui est toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, limites exclues, n'est pas nul, ou bien $\cos\mu$ est réel, mais dans ce dernier cas $(c-z)^2$ devrait être $> 1$ pour $\mu$ réel, et $< 0$ pour $\mu$ purement imaginaire. Donc, quand $s$ varie de *zéro* à *un*, notre surface se déforme de façon à ne jamais rencontrer de singularité; sa position finale est sur la variété $\Lambda_1 = 1$, et $\zeta - z$ est partout le produit de $\cos^{-1}\mu$ par un nombre réel. Remplaçons $a-x$, $b-y$ et $\zeta - z$ par $a$, $b$ et $c$; notre intégrale est égale à

$$\cos\mu \int^{(2)} \frac{a\,d(b,c) + b\,d(c,a) + c\,d(a,b)}{4\pi},$$

étendue à l'ensemble où $a$ et $b$ sont réels, et où $c$ est le produit de $\cos^{-1}\mu$ par un nombre réel, et où l'on a $a^2 + b^2 + c^2\cos^2\mu = 1$; cet ensemble est pris dans le sens associé à celui que déterminent les parties réelles de $a$, de $b$ et de $c$ sur l'ensemble de tous les points déduits du champ d'intégration par des homothéties de centre O et de rapports réels, positifs et $< 1$. Le changement linéaire complexe de variables qui revient à remplacer $c\cos\mu$ par $c$, nous ramène au cas particulier où $\mu$ serait nul; le résultat est donc *un*. C. Q. F. D.

Le fait que $\psi$ remplit la condition (4) se ramène à prouver que si $\mathfrak{A}$ est une région bornée du plan $\alpha x + \gamma z = 0$, et si P tend vers un point intérieur à $\mathfrak{A}$ en restant du côté $\alpha x + \gamma z < 0$, et si l'on pose

$$V(P) = \frac{\cos\mu}{4\pi}\int_{\mathfrak{A}}^{(2)} \left[2\,\frac{1 - \alpha^2\sin^2\mu}{\Lambda_1} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1(\Lambda_1 + \Lambda_4)}\right] d\sigma_Q,$$

l'expression

$$\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\cos^{-2}\mu - \alpha\frac{\partial V}{\partial y}\tan g\,\mu$$

tend vers *un*. Or, pour $\alpha x + \gamma z < 0$, cette expression est

$$\frac{-\cos\mu}{2\pi}\int_{\mathfrak{A}}^{(2)} \frac{\alpha x + \gamma z}{\Lambda_1^3}\, d\sigma_Q.$$

Prenons la position-limite de P comme origine des coordonnées. Déformons $\mathfrak{A}$ dans le plan complexe $\alpha a + \gamma c = 0$, sans changer sa frontière, mais de façon que pour tous les points Q assez voisins de O, $c$ soit le produit de $\cos^{-1}\mu$ par un nombre réel; cela ne change pas notre expression, si du moins nous l'écrivons

$$\frac{-\cos\mu}{2\pi}\int^{(2)} \frac{x\, d(b,\, c) + z\, d(a,\, b)}{\Lambda_1^3},$$

à condition de respecter le sens choisi sur la variété d'intégration ([1]). Remarquons que la limite de la partie d'intégrale qui provient d'une région où la borne inférieure de $|\Lambda_1|$ est positive, est nulle; cela ramène la question au cas où, dans tout le champ d'intégration, $c$ est le produit de $\cos^{-1}\mu$ par un nombre réel. Le changement de variables qui revient à remplacer $c\cos\mu$ par $c$ et $z\cos\mu$ par $z$, nous ramène au cas où $\mu$ serait nul; il est vrai qu'alors $z$ n'est plus réel, mais, $\mathcal{R}\dfrac{\cos\mu}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \gamma^2}}$ étant positif, comme on le voit par continuité à partir du cas où $\gamma$ serait nul, il en résulte que $\dfrac{x\, d(b,\, c) + z\, d(a, b)}{\sqrt{d(b,\, c)^2 + d(c,\, a)^2 + d(a,\, b)^2}}$, transformé de $\dfrac{(\alpha x + \gamma z)\cos\mu}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \gamma^2}}$, a sa partie réelle négative, et, puisque $\mathcal{R}\Lambda_1$ est positif, le raisonnement ordinaire montre que la limite est *un*. C. Q. F. D.

Enfin le fait qu'une seule fonction remplit toutes les conditions du problème s'établit en appliquant la formule de réciprocité, à savoir

$$(20) \qquad \int^{(3)} (\mathrm{W}\mathcal{F}\mathrm{T} - \mathrm{T}\mathcal{F}\mathrm{W})\, d\tau = \int^{(2)} (\mathrm{W}\Theta\mathrm{T} - \mathrm{TZW})\, d\sigma,$$

où W et T sont deux fonctions de $(x, y, z)$, $\mathcal{F}\psi$ est le premier membre de (3), $\Theta\psi$ est le premier membre de (4) dans lequel $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ repré-

---

([1]) É. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, spécialement t. I, Chap. III, section I. La même propriété est établie dans le passage cité dans la note précédente.

senteraient les cosinus directeurs de la normale extérieure à la frontière d'un domaine spatial donné, et l'opération Z se déduit de $\Theta$ en y remplaçant $\mu$ par $-\mu$, en appliquant, disions-nous, cette formule aux fonctions $\psi(Q)$ et $H(P, Q)$, relativement au point Q, dans la partie de la région (1) qui est intérieure à une sphère infiniment grande de centre O et extérieure à une sphère infiniment petite de centre P. Cette formule, ainsi appliquée, conduit à l'expression (7) de la fonction $\psi$.

6. *Second problème préliminaire.* — Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné (ensemble ouvert connexe) dans l'espace, et soit $\mathcal{S}$ sa frontière, qui peut être formée de plusieurs parties sans point commun deux à deux. On suppose chaque point de $\mathcal{S}$ intérieur à une région où les coordonnées d'un point courant s'expriment au moyen de deux paramètres par des fonctions dont les dérivées existent et remplissent des conditions de Lipschitz, et dont les trois déterminants fonctionnels ne s'annulent nulle part ensemble; un nombre fini de telles régions doit suffire pour tout $\mathcal{S}$, et il ne doit y avoir aucun point double. Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale en un point courant de $\mathcal{S}$, dirigée dans le sens sortant de $\mathcal{D}$. Soient $f$ une fonction complexe donnée d'un point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, et $\varphi$ une fonction complexe donnée d'un point de $\mathcal{S}$; on suppose que ces deux fonctions remplissent des conditions de Lipschitz. Nous allons étudier le problème suivant, où $\mu$ a la même signification que dans le paragraphe 1 :

*Construire une fonction $\psi$ d'un point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, continue ainsi que ses dérivées dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et deux fois continûment dérivable dans $\mathcal{D}$, remplissant en tout point de $\mathcal{D}$ la condition*

$$(21) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\cos^{-2}\mu-k^2\psi=f \qquad (k \text{ positif donné}),$$

*et en tout point de $\mathcal{S}$ la condition*

$$(22) \qquad \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos^{-2}\mu+\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\operatorname{tang}\mu=\varphi.$$

Nous traiterons cette question par une méthode qui réussit dans le cas particulier où $\mu$ est réel (*loc. cit.*, Chap. II).

Nous commençons par construire une fonction $w(Q)$ qui jouisse des propriétés suivantes :

1° $w$ est continu dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, et ses dérivées existent et remplissent des conditions de Lipschitz;

2° $w$ est nul en tout point de $\mathcal{S}$ et positif en tout point de $\mathcal{D}$;

3° la dérivée de $w$ suivant la normale à $\mathcal{S}$ n'est nulle en aucun point de $\mathcal{S}$.

Voici une méthode pour construire une telle fonction $w$, mais la fonction ainsi obtenue peut être remplacée par toute autre qui jouisse des propriétés exigées. Plaçons, pour un instant, l'origine O des coordonnées en un point donné de $\mathcal{S}$, l'axe $Oz$ étant dirigé suivant la normale intérieure à $\mathcal{D}$. Les coordonnées $a$, $b$ et $c$ d'un point courant de $\mathcal{S}$ satisfont à une équation

$$c = \Phi(a, b) \tag{23}$$

dès que $a$ et $b$ sont assez voisins de zéro, $\Phi$ étant une fonction dont les dérivées existent et remplissent des conditions de Lipschitz; nous attachons alors au point actuellement pris pour origine la fonction $w^\star(a, b, c) = c - \Phi(a, b)$. En outre, nous attribuons un poids à cette fonction : soit, pour un instant, R une longueur telle que la relation (23) soit valable pour $\sqrt{a^2+b^2} < \mathrm{R}$, et qui soit inférieure à la distance entre l'actuelle origine des coordonnées et tout point de $\mathcal{S}$ dont les coordonnées ne satisfont pas à (23); alors le poids attribué à $w^\star$ en le point $(a, b, c)$ sera $(1 - r^2\mathrm{R}^{-2})^2$ pour $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = r < \mathrm{R}$, et *zéro* pour $r \geqq \mathrm{R}$; on remarque que les dérivées de ce poids remplissent une condition de Lipschitz avec l'exposant *un*. Recommençons ces opérations en un certain nombre fini de points de $\mathcal{S}$, de façon qu'en tout point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ assez voisin de $\mathcal{S}$ une au moins des fonctions $w^\star$ formées ait un poids positif; exprimons toutes ces fonctions $w^\star$ à l'aide d'un même système de coordonnées. Comme il peut rester dans $\mathcal{D}$ des points où aucune de ces fonctions $w^\star$ n'ait un poids positif, choisissons un nombre fini de sphères intérieures à $\mathcal{D}$, de façon que chaque point restant soit intérieur à au moins une d'elles; si $\mathrm{R}'$ est le rayon d'une de ces sphères, le poids en tout point situé à une distance $r$ du centre sera $(1 - r^2\mathrm{R}'^{-2})^2$ pour $r < \mathrm{R}'$, et *zéro* pour $r \geqq \mathrm{R}'$; la fonction continue positive à laquelle ce poids est attribué est choisie arbitrairement (on peut la prendre constante); nous nommons aussi $w^\star$ ces nouvelles fonctions. Alors en tout point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ une fonction $w^\star$, au moins, a un poids positif; nous définissons qu'en chaque point Q la fonction $w$ est la moyenne pondérée des fonctions $w^*$. Une autre fonction $w$ a été indiquée dans le travail cité au début de ce chapitre, où elle était nommée $-w$ (*loc. cit.*, Chap. II, § 2).

Ayant formé une fonction $w$, nous posons, en tout point Q de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$,

$$\alpha=-\frac{\partial w}{\partial a},\qquad \beta=-\frac{\partial w}{\partial b},\qquad \gamma=-\frac{\partial w}{\partial c},\qquad h=w-a\frac{\partial w}{\partial a}-b\frac{\partial w}{\partial b}-c\frac{\partial w}{\partial c}.$$

Puis, dans les définitions des fonctions $\theta$ et $\Lambda_2$ (§ 1), nous remplaçons les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $h$ par les fonctions $\alpha(Q)$, $\beta(Q)$, $\gamma(Q)$ et $h(Q)$ qui viennent d'être définies; nous en faisons autant dans les définitions de $\Lambda_3$ et de $\Lambda_4$, et nous divisons les résultats respectivement par $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^{\,3}$ et par $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Nous nommons $H_1(P, Q)$ ce que devient la fonction H par ces remplacements. Soient maintenant $w_1$ et R deux constantes positives assez petites. Nous posons

$$H_2(H, Q)=\begin{cases} H_1(P, Q) & [w(Q)\leqq w_1],\\ \dfrac{2w_1-w(Q)}{w_1}H_1(P, Q)+\dfrac{w(Q)-w_1}{w_1}\Psi(\Lambda_1)\cos\mu & [w_1\leqq w(Q)\leqq 2w_1],\\ \Psi(\Lambda_1)\cos\mu & [w(Q)\geqq 2w_1];\end{cases}$$

$$H\,(P, Q)=\begin{cases}[1-R^{-2}PQ^2]^3H_2(P, Q) & (PQ\leqq R),\\ 0 & (PQ\geqq R);\end{cases}$$

PQ désigne la distance entre les deux points. R et $w_1$ étant assez petits, on démontre les propriétés suivantes (*loc. cit.*, Chap. II, § 4) :

1° $H(P, Q)$ et ses dérivées premières et secondes par rapport aux coordonnées de P sont continus par rapport à P et à Q quand ces deux points appartiennent à $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et sont distincts;

2° quand P et Q tendent vers un même point-limite situé dans $\mathcal{D}$, le quotient de $H(P, Q)$ par $\Psi(\Lambda_1)\cos\mu$ tend vers *un*;

3° en désignant par $\rho$ et par $\nu$ certaines constantes positives $<1$, nous avons

$$\mathcal{F}\,H(P, Q)=\begin{cases}O(PQ^{\rho-3}) & (\text{quel que soit } PQ),\\ O(k^3)\,PQ^{\rho}\;e^{-\nu k PQ} & (\text{pour } kPQ>1);\end{cases}$$

$$\Theta\,H(P, Q)=\begin{cases}O(PQ^{\rho-2}) & (\text{quel que soit } PQ),\\ O(k^3)\,PQ^{\rho+1}e^{-\nu k PQ} & (\text{pour } kPQ>1);\end{cases}$$

$\mathcal{F}\psi$ et $\Theta\psi$ désignent les premiers membres de (21) et de (22), et ces opérations portent ici sur P.

Si alors nous cherchons la fonction inconnue $\psi$ parmi les fonctions

$$(23)\qquad \psi(P) = -\int_{\mathcal{D}}^{(3)} H(P, Q)\,u(Q)\,d\tau_Q + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} H(P, Q)\,v(Q)\,d\sigma_Q,$$

où $u$ et $v$ sont deux fonctions inconnues, les équations (21) et (22) se traduisent par le système d'équations intégrales

$$(24)\qquad u(P) - \int_{\mathcal{D}}^{(3)} \mathcal{F}\,H(P, Q)\,u(Q)\,d\tau_Q + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} \mathcal{F}\,H(P, Q)\,v(Q)\,d\sigma_Q = f(P),$$

$$(25)\qquad v(P_1) - \int_{\mathcal{D}}^{(3)} \Theta\,H(P_1, Q)\,u(Q)\,d\tau_Q + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} \Theta\,H(P_1, Q)\,v(Q)\,d\sigma_Q = \varphi(P_1),$$

dont la première doit être satisfaite quel que soit P dans $\mathcal{D}$, et la seconde, quel que soit $P_1$ sur $\mathcal{S}$. On démontre que ce système obéit aux théorèmes de Fredholm (*loc. cit.*, Chap. II, § 5). Si $\mu$ varie dans un ensemble borné et fermé, en tout point duquel on a $|2\mu_1| < \pi$, ce système a une et une seule solution dès que la constante positive $k$ est assez grande (*loc. cit.*, Chap. II, § 6). Quand ce système a une et une seule solution, on a

$$(26)\qquad \psi(P) = -\int_{\mathcal{D}}^{(3)} G(P, Q)\,f(Q)\,d\tau_Q + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} G(P, Q)\,\varphi(Q)\,d\sigma_Q,$$

où G est ce qu'on nomme la *fonction de Green* du problème [1].

---

[1] G(P, Q) est holomorphe par rapport aux coordonnées de P et de Q quand ces deux points appartiennent à $\mathcal{D}$ et sont distincts. Pour limiter ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, et pour trouver des cas où les dérivées d'ordre $n-2$ restent continues sur $\mathcal{S}$, nous pouvons remplacer la première fonction $w^*$ du texte par celle que définit l'équation

$$w^* + \frac{p^q}{2\pi\,\Gamma(q)\,w^{*p}} \int^{(2)} \Phi(x, y)\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}^{\,p-2} \times \log^{q-1} \frac{w^*}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\,d(x, y) = c,$$

où les constantes $p$ et $q$ remplissent les conditions $p > n$ et $q \geqq n$, et l'intégrale est étendue au champ $(x-a)^2+(y-b)^2 < w^{*2}$; pour $w^* = 0$, le premier membre se réduit à $\Phi(a, b)$ et sa dérivée par rapport à $w^*$ est égale à $un$, de sorte que la fonction implicite $w^*(a, b, c)$ est bien définie. En outre, le poids sera remplacé par $(1 - r^2 R^{-2})^{n+1}$, et les définitions de $H_1$, de $H_2$ et de H seront modifiées de façons analogues.

On peut établir que si $k$ est assez grand, on a non seulement

$$\mathcal{F}_P\, G(P, Q) = 0 \quad \text{et} \quad \Theta\, G(P_1, Q) = 0, \tag{27}$$

mais aussi, quels que soient Q dans $\mathcal{O}$ et $Q_1$ sur $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{F}_Q\, G(P, Q) = 0 \quad \text{et} \quad ZG(P, Q_1) = 0, \tag{28}$$

où l'opération Z se déduit de $\Theta$ en y remplaçant $\mu$ par $-\mu$. Pour cela, on forme la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{F}$ et Z, et l'on applique la formule de réciprocité (20).

En appliquant alors la formule (20) aux fonctions $\psi(Q)$ et $G(P, Q)$, relativement au point Q dans le champ $\mathcal{O}$, on prouve que si $k$ est assez grand, la fonction $\psi$ exprimée par (26) est la seule solution du problème.

Dans les cas où la compatibilité du système [(24), (25)] est douteuse, soit $k_1$ un nombre positif assez grand pour que, en remplaçant $k$ par $k_1$, la fonction de Green $G_1$ correspondante existe et jouisse des propriétés analogues à (28). Alors on peut poser

$$\psi(P) = -\int_{\mathcal{O}}^{(3)} G_1(P, Q)\, u(Q)\, d\tau_Q + \int_{\mathcal{S}}^{(2)} G_1(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\sigma_Q; \tag{29}$$

l'équation (22) est alors satisfaite quelle que soit la fonction inconnue $u$, et l'équation (21) se traduit par

$$\begin{aligned} u(P) - (k_1^2 - k^2) \int_{\mathcal{O}}^{(3)} G_1(P, Q)\, u(Q)\, d\tau_Q \\ = f(P) - (k_1^2 - k^2) \int_{\mathcal{S}}^{(2)} G_1(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\sigma_Q. \end{aligned} \tag{30}$$

Le problème est alors *équivalent* à l'équation (30) : si cette équation est incompatible, le problème l'est aussi; on peut ajouter qu'à deux solutions distinctes de (30) correspondent deux fonctions $\psi$ distinctes. De là résulte aisément que si G existe, cette fonction jouit toujours des propriétés (28).

Remarquons enfin que la fonction G est holomorphe par rapport à $\mu$, excepté pour les valeurs telles que le problème soit incompatible ou indéterminé; ces dernières valeurs de $\mu$ sont des pôles pour G.

7. *Équations du problème des petits mouvements.* — Nous abordons enfin le problème des petits mouvements, sous la forme où nous l'avons amené dans le Chapitre I. Nous supposons que $\lambda$ varie sur un

ensemble tel que la borne inférieure de la valeur absolue de la différence entre $\lambda$ et les nombres de l'intervalle réel $(-2\omega, 2\omega)$ soit positive; nous n'étudions donc pas les mouvements qui admettraient une plus courte période au moins égale à la moitié de celle de la rotation. Nous posons alors

$$\lambda \operatorname{tang} \mu = 2 i \omega, \tag{31}$$

et nous choisissons pour $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ la détermination telle qu'on ait $2|\mu_1| < \pi$ (sans égalité). Alors l'équation (4) du Chapitre I devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cos^{-2} \mu = 0, \tag{32}$$

et l'opération $\Theta$ du Chapitre I se confond avec celle du paragraphe précédent. Nous désignons par $\mathcal{D}$ le domaine occupé par le liquide homogène dans la position d'équilibre, et par $\mathfrak{S}$ la somme de la surface libre d'équilibre, S(2), et de la surface d'équilibre du noyau, S(1). Nous choisissons la constante positive $k$ assez grande pour que la fonction de Green de notre second problème préliminaire existe quel que soit $\lambda$ dans l'ensemble donné; c'est possible, car $\mu$ reste borné et la borne inférieure de $\pi - 2|\mu_1|$ est $> 0$. Alors cette fonction de Green $G(P, Q; \mu)$ est holomorphe par rapport à $\mu$. En posant $\Theta\psi = v$, nous avons, d'après la formule de réciprocité,

$$\psi(P) = k^2 \int_{\mathcal{D}}^{(3)} G(P, Q; \mu)\, \psi(Q)\, d\tau_Q + \int_{\mathfrak{S}}^{(2)} G(P, Q; \mu)\, v(Q)\, d\sigma_Q. \tag{33}$$

Alors l'équation (4) du Chapitre I est traduite par cette équation (33), où figurent les deux inconnues $\psi$ et $v$. Les équations (11) et (12) du Chapitre I sont traduites par une équation

$$\begin{aligned} v(P_1) &- \frac{1}{\sin^2 \mu} \int_{\mathcal{D}}^{(3)} K_1(P_1, Q; \mu)\, \psi(Q)\, d\tau_Q \\ &- \frac{1}{\sin^2 \mu} \int_{\mathfrak{S}}^{(2)} K_2(P_1, Q; \mu)\, v(Q)\, d\sigma_Q + \sum_{n=1}^{6} \frac{c_n(P_1)}{\sin^2 \mu} q_n = \frac{\Phi(P_1)}{\sin^2 \mu}, \end{aligned} \tag{34}$$

où $P_1$ est un point courant de $\mathfrak{S}$; les fonctions $K_1$, $K_2$ et $\Phi$ (qui diffèrent des fonctions ainsi nommées dans le paragraphe 6 du Chapitre I) et les fonctions $c_n$ ont les expressions suivantes quand $P_1$ appartient à S(1) :

$$K_1 = K_2 = 0, \qquad c_1 = 4\omega^2\alpha, \qquad c_2 = 4\omega^2\beta, \qquad c_3 = 4\omega^2\gamma,$$
$$c_4 = 4\omega^2(\gamma y - \beta z), \qquad c_5 = 4\omega^2(\alpha z - \gamma x), \qquad c_6 = 4\omega^2(\beta x - \alpha y), \qquad \Phi = 0;$$

quand $P_1$ appartient à S(2), les expressions de ces fonctions sont les suivantes :

$$K_1(P_1, Q; \mu) = -4\omega^2 k^2 g^{-1} G(P_1, Q; \mu), \qquad \Phi = -4\omega^2 g^{-1}\mathfrak{V},$$
$$K_2(P_1, Q; \mu) = \begin{cases} -\dfrac{4\omega^2}{g} G(P_1, Q; \mu) + \dfrac{\rho^2 \sin^2\mu}{4\pi g P_1 Q} & [\text{Q sur S(2)}], \\ -4\omega^2 g^{-1} G(P_1, Q; \mu) & [\text{Q sur S(1)}], \end{cases}$$
$$c_1 = -\frac{4\omega^2}{g}\frac{\partial V_1}{\partial x}, \qquad c_2 = -\frac{4\omega^2}{g}\frac{\partial V_1}{\partial y}, \qquad c_3 = -\frac{4\omega^2}{g}\frac{\partial V_1}{\partial z},$$
$$c_4 = \frac{4\omega^2}{g}\left(z\frac{\partial V_1}{\partial y} - y\frac{\partial V_1}{\partial z}\right), \qquad c_5 = \frac{4\omega^2}{g}\left(x\frac{\partial V_1}{\partial z} - z\frac{\partial V_1}{\partial x}\right),$$
$$c_6 = \frac{4\omega^2}{g}\left(y\frac{\partial V_1}{\partial x} - x\frac{\partial V_1}{\partial y}\right).$$

Enfin l'équation $(18 + m)$ du Chapitre I $(m = 1, \ldots, 6)$ se traduit par l'équation

$$(34 + m) \qquad \sum_{n=1}^{6} a_{m,n}(\mu) q_n + \int_{S(1)}^{(2)} \varphi_m \psi \, d\sigma + \sin^2\mu \int_{S(2)}^{(2)} \chi_m v \, d\sigma = b_m \quad (m = 1, \ldots, 6),$$

où les $b_m$ et les $\varphi_m$ sont les fonctions connues ainsi désignées dans le paragraphe 5 du Chapitre I; les $a_{m,n}(\mu)$ sont ce que deviennent les $a_{m,n}(\lambda)$ du même passage, quand on les exprime en fonctions de $\mu$, et par suite ce sont des polynomes du second degré en $\cot\mu$; enfin $\chi_m \sin^2\mu$ est ce que devient la fonction $\chi_m$ du même passage. Notre problème est donc ramené au système des équations (33) à (40), où figurent les inconnues $\psi$, $v$ et $q_n$ $(n = 1, \ldots, 6)$.

Par rapport aux inconnues $\psi$ et $v$, les équations (33) et (34) sont comprises dans la théorie de Fredholm; il y aurait exception pour $\mu = 0$, mais, d'après (31), cette valeur ne se présente pas. Toutes les fonctions données sont holomorphes par rapport à $\mu$. Nous pouvons donc appliquer les résultats qui concernent le cas où le paramètre figure de cette façon. Nous reconnaissons alors que le système des équations (33) à (40) appartient à un type général déjà traité ([1]).

Si $\mu'$ appartient à notre ensemble de valeurs de $\mu$, cette méthode générale enseigne à former éventuellement certaines paires de fonctions $[\psi_r(P;\mu), v_r(P_1;\mu)]$, holomorphes en $\mu'$ et dans un voisinage fixe quand P varie dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et $P_1$ sur $\mathcal{S}$, et parmi lesquelles il peut y en avoir $r'(r=1, \ldots, r')$ qui constituent, quel que soit $\mu$ assez voisin de $\mu'$, des solutions du système d'équations homogènes

$$(41)\qquad \psi_r(P)-k^2\int_{\mathcal{D}}^{(3)}G(P,Q;\mu)\psi_r(Q)\,d\tau_Q-\int_{\mathcal{S}}^{(2)}G(P,Q;\mu)v_r(Q)\,d\sigma_Q=0,$$

$$(42)\qquad \sin^2\mu\, v_r(P_1)-\int_{\mathcal{D}}^{(3)}K_1(P_1,Q;\mu)\psi_r(Q)\,d\tau_Q-\int_{\mathcal{S}}^{(2)}K_2(P_1,Q;\mu)v_r(Q)\,d\sigma_Q=0;$$

les $r''$ autres paires de fonctions $(\psi_r, v_r)$ qu'on peut avoir à former $(r=r'+1, \ldots, r'+r'')$, sont telles que si elles sont introduites dans les premiers membres de (41) et de (42), les résultats sont identiquement nuls pour $\mu=\mu'$, mais non pour $\mu\neq\mu'$; les $r'+r''$ paires de fonctions sont linéairement indépendantes; il peut arriver que $r'$ ou $r''$ soient nuls. Si $r''$ n'est pas nul, nous nommons $s(r)$ l'ordre minimum du *zéro* que les premiers membres de (41) et de (42) ont au point $\mu'$ pour une valeur donnée de $r(r'<r\leqq r'+r'')$. D'après la méthode générale, nous formons encore $r'+r''$ fonctions $\varpi_r(P_1;\mu)$ $(r=1, \ldots, r'+r'')$ et deux fonctions $R_1(P,Q;\mu)$ et $R_2(P_1,Q;\mu)$, toutes ces nouvelles fonctions étant holomorphes en $\mu'$ et dans un voisinage fixe, de façon que, pour toute solution $(\psi, v)$ des équations (33) et (34), on puisse écrire

$$(43)\qquad \psi(P)=\frac{1}{\sin^2\mu}\int_{\mathcal{S}}^{(2)}R_1(P,Q;\mu)\left[\sum_{n=1}^{6}q_nc_n(Q)-\Phi(Q)\right]d\sigma_Q+\Sigma_r h_r\psi_r(P;\mu),$$

$$(44)\qquad v(P_1)=\frac{\Phi(P_1)}{\sin^2\mu}+\frac{1}{\sin^2\mu}\int_{\mathcal{S}}^{(2)}R_2(P_1,Q;\mu)\left[\sum_{n=1}^{6}q_nc_n(Q)-\Phi(Q)\right]d\sigma_Q+\Sigma_r h_r v_r(P_1;\mu),$$

$$(45)\qquad \int_{\mathcal{S}}^{(2)}\left[\sum_{n=1}^{6}q_nc_n(Q)-\Phi(Q)\right]\varpi_r(Q;\mu)\,d\sigma_Q=0\qquad (r\leqq r'),$$

$$(46)\qquad (\mu-\mu')^{s(r)}h_r=\int_{\mathcal{S}}^{(2)}\left[\sum_{n=1}^{6}q_nc_n(Q)-\Phi(Q)\right]\varpi_r(Q;\mu)\,d\sigma_Q\qquad (r>r'),$$

---

([1]) *Bull. Sciences math.*, LXIV, 1940, p. 225-244 (*errata*, p. 298), et suite sous presse dans le même *Bulletin*; spécialement § 11.

où les $h_r$ ne dépendent que de $\mu$. Remplaçons aussi $\psi$ et $v$ par les expressions (43) et (44) dans les équations (35) à (40); soit $(46+m)$ ce que devient ainsi l'équation $(34+m)$ pour $1 \leqq m \leqq 6$. La résolution du système des équations (33) à (40) est alors ramenée, pour $\mu$ assez voisin de $\mu'$, à celle du système des $r'+r''+6$ équations (45) à (52), linéaires par rapport aux $r'+r''+6$ inconnues $h_r$ et $q_n$, qui sont des constantes quand $\mu$ est donné; toute solution du système [(33) à (40)] est ainsi obtenue, et d'une seule façon.

Soit $r'+r''+6-j$ l'ordre maximum des déterminants non identiquement nuls déduits du tableau des coefficients des inconnues dans ces équations, quand $\mu$ varie ($j \geqq 0$). Pour $j=0$, le petit mouvement cherché existe; il se réduit au repos quand $\mathcal{V}$ est nul. Si $j$ n'est pas nul, nous avons à vérifier $j$ conditions linéaires de compatibilité (peut-être non toutes distinctes), relatives aux seconds membres des équations (34) à (40); si ces conditions sont remplies, et en particulier si $\Phi$ est identiquement nul et que, par suite, les constantes $b_m$ soient nulles, le petit mouvement cherché existe et dépend de $j$ constantes arbitraires. Il y a exception quand la valeur de $\mu$ est telle que l'ordre du déterminant principal des équations (45) à (52) soit inférieur à $r'+r''+6-j$; alors on dit que $\mu$ prend une *valeur propre*, et le nombre des constantes arbitraires dont dépend la solution générale, quand elle existe, est supérieur à $j$.

Ces raisonnements n'excluent donc pas que, pour $\mu$ assez voisin de $\mu'$, il y ait toujours de petits mouvements libres ($\mathcal{V}=0$). Si $j$ est le nombre minimum des petits mouvements libres linéairement indépendants quand $\mu$ est assez voisin de $\mu'$, on trouve le même nombre $j$ pour le voisinage de tout autre point $\mu''$, car, d'une part, un chemin joignant $\mu'$ à $\mu''$ est intérieur à l'ensemble recouvert par un nombre fini de cercles dans chacun desquels les raisonnements s'appliquent, et, d'autre part, il est évident que $j$ est le même dans deux cercles qui ont une partie commune. Ajoutons toutefois que l'existence de cas où $j$ ne serait pas nul n'est pas démontrée.

D'après ces raisonnements, les valeurs propres de $\mu$ n'ont certainement aucun point d'accumulation dans l'ensemble défini au début (ensemble qui ne contient pas le point *zéro*). Donc *les valeurs correspondantes de $\lambda$ ne peuvent avoir de point d'accumulation à distance* *finie que dans l'intervalle réel* $(-2\omega, 2\omega)$, auquel ces raisonnements ne s'appliquent pas (pour cet intervalle, on aurait $2\mu_1 = \pm\pi$).

*Si, pour la position d'équilibre relatif* au voisinage de laquelle nous étudions les petits mouvements du corps tournant, *l'énergie de ce corps atteint un minimum relatif, il est certain que j est nul et que toutes les valeurs propres de* $\mu$ *sont purement imaginaires, de façon que les valeurs correspondantes de* $\lambda$ *soient réelles.* En effet, l'énergie reste constante pendant le petit mouvement; or, si $\mathcal{I}\lambda$ était $>0$, la différence, non nulle initialement, entre l'énergie du corps et celle de la disposition d'équilibre, tendrait vers *zéro* quand $t$ croît indéfiniment; si $\mathcal{I}\lambda$ était $<0$, c'est en remontant à un passé infiniment lointain qu'on ferait tendre cette différence vers *zéro*. Cela s'applique notamment à un exemple étudié récemment [1].

---

[1] *Bull. Sciences math.*, LXIV, 1940, p. 268-298, spécialement § 17.