

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

## **Extension de la formule de Savary au mouvement le plus général d'un solide**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 57 (1940), p. 113-200

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1940\\_3\\_57\\_\\_113\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1940_3_57__113_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

EXTENSION  
DE  
LA FORMULE DE SAVARY

AU MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN SOLIDE

PAR M. RENÉ GARNIER.

---

Introduction.

1. Lorsqu'un plan P glisse sur un plan  $P_1$ , chaque courbe C de P occupe relativement à  $P_1$  un ensemble de positions dont l'enveloppe est une courbe  $C_1$  de  $P_1$ , dite courbe ou profil *conjugué* de C. La détermination du centre de courbure de  $C_1$  est une application classique de la cinématique à la géométrie plane; elle résulte de la formule de Savary

$$\frac{I}{R_1} - \frac{I}{R} = \left( \frac{I}{R_f} - \frac{I}{R_m} \right) \frac{I}{\cos \varphi}.$$

(Dans cette formule,  $R_1$  et R sont les abscisses des centres de courbure correspondants de  $C_1$  et C sur la normale commune  $g$  à  $C_1$  et C, ces abscisses étant évaluées à partir du centre instantané I;  $R_f$  et  $R_m$  sont les abscisses des centres de courbure de la base et de la roulante sur la normale en I à ces courbes, et  $\varphi$  mesure l'angle des deux normales.) La formule comporte une double signification, locale et générale :

A. Elle exprime la loi de correspondance qui relie les centres de courbure de deux profils conjugués quelconques, normaux à une droite déterminée,  $g$ , issue de I; cette loi est une homographie du type parabolique;

B. Elle montre comment varie cette homographie quand  $g$  tourne autour de  $I$ , et la construction de Savary-Bobillier traduit cette variation sous une forme très simple.

Les résultats précédents s'étendent au glissement d'une sphère sur une sphère égale, ainsi <sup>(1)</sup> qu'au glissement d'un plan de Lobatchewsky sur un plan analogue. Mais ces extensions sont toujours des problèmes de cinématique à deux dimensions. Si l'on aborde l'espace à trois dimensions, le problème se subdivise en deux, bien distincts, semble-t-il :

I. Il existe une classe de courbes  $C$ , liées au solide mobile  $\mathfrak{C}$  et dont les positions par rapport au repère fixe  $\mathfrak{C}_1$  ont une enveloppe,  $C_1$ ; soit  $M$  un point de contact de  $C$  et  $C_1$ ; peut-on déterminer l'axe de courbure de  $C_1$  en  $M_1$  connaissant celui de  $C$  en  $M$  et les éléments cinématiques du mouvement  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ ? Le problème comprend d'ailleurs celui de la détermination des axes de courbure des trajectoires des points de  $\mathfrak{C}$ .

II. Soient  $S_1$  l'enveloppe des positions par rapport à  $\mathfrak{C}_1$  d'une surface  $S$  liée à  $\mathfrak{C}$  et  $M$  un point de contact des surfaces conjuguées  $S$  et  $S_1$ ; peut-on déterminer le tenseur de courbure (centres de courbure principaux, plans de sections principales) de  $S_1$  en  $M$  connaissant celui de  $S$  en  $M$  et les éléments cinématiques de  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ ? Le problème comprend d'ailleurs celui de la détermination du tenseur de courbure d'une surface  $S_1$ , lieu dans  $\mathfrak{C}_1$  d'une courbe  $C$  de  $\mathfrak{C}$ .

2. Ces deux problèmes se posaient naturellement depuis les recherches de l'Hospital, d'Euler et de Savary. Pourtant, G. Kœnigs paraît être le seul géomètre qui les ait abordés dans toute leur généralité. Il leur a consacré deux Mémoires des plus remarquables : l'un <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> R. GARNIER, *La formule de Savary et la construction de Bobillier en géométrie plane hyperbolique* (Bull. Sc. math., 2<sup>e</sup> série, t. 63, 1939, p. 279).

<sup>(2)</sup> *Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides* (1910), publié dans les *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. 35, 2<sup>e</sup> série, Paris, 1914, n<sup>o</sup> 4, p. 1-215.

relatif au problème I, l'autre <sup>(1)</sup> au problème II; dans la suite, ces Mémoires seront désignés respectivement par les références  $K_1$  et  $K_2$ .

Cependant, malgré l'intérêt des résultats de Kœnigs, ils ne jouent aucunement pour l'espace un rôle correspondant à celui de la formule de Savary pour le plan. Envisageons le problème II, et désignons par  $\mathcal{L}$  le complexe linéaire des droites  $g$  normales en l'instant  $t$  aux trajectoires de leurs points; la normale commune à  $S$  et  $S_1$  en  $M$  doit être une droite  $g$ . Cela étant, d'après A, une véritable généralisation de la formule de Savary devrait être applicable à *tout* couple de surfaces conjuguées normales à une même droite  $g$ . Or ( $K_2$ , p. 106), G. Kœnigs a considéré une telle généralisation comme impossible: « pour y parvenir (à une loi de correspondance simple entre les courbures) il ne suffirait pas de grouper en un ensemble toutes les surfaces normales à une même droite donnée, quelconque d'ailleurs, dans le complexe  $\mathcal{L}$  », et plus loin ( $K_2$ , p. 122): « Mais on conçoit que, si l'on se bornait à grouper toutes les surfaces (F) qui sont à un moment donné normales à une même droite  $a$  du complexe  $\mathcal{L}$ , la loi de correspondance affecterait une forme singulièrement complexe puisqu'il y subsisterait d'arbitraires les trois paramètres de position sur  $a$  des éléments de courbure de (F), auxquels il faudrait faire correspondre les trois paramètres analogues pour (F') ». Aussi se borne-t-il à l'ensemble des surfaces  $S$  telles que les réglées  $R$  formées par les normales communes à  $S$  et  $S_1$  le long de leur courbe de contact à l'instant  $t$  soient tangentes mutuellement le long de la normale  $g$  envisagée; et pour chacun de ces ensembles il obtient une formule de Savary généralisée; d'ailleurs *le trièdre pour lequel la formule est valable varie avec le groupement*. Ainsi, la formule de G. Kœnigs ne jouit pas de la propriété A; *a fortiori* elle ne peut posséder la propriété B de la formule de Savary.

3. Mais, en réalité, il est possible d'établir pour l'espace une loi des courbures jouissant de la double propriété précédente; et, fait remarquable, une telle loi fournit aussi la solution du problème I; elle

---

<sup>(1)</sup> *La loi des courbures des profils superficiels conjugués dans les mouvements à un seul paramètre (Journ. de Math. pures et appl., 6<sup>e</sup> série, t. 8, 1912, p. 103-158).*

comprend comme cas particuliers tous les résultats obtenus par G. Kœnigs dans ses deux Mémoires. C'est cette loi que nous proposons d'exposer avec ses conséquences dans le travail actuel.

La nouvelle loi des courbures tire son origine d'un fait classique : le mouvement  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$  étant donné, les transformations qui relient : 1° une surface S à sa conjuguée S<sub>1</sub>; 2° une courbe C au lieu S<sub>1</sub> (ou éventuellement, à l'enveloppe C<sub>1</sub>) de ses positions; 3° un point M à sa trajectoire C<sub>1</sub> coïncident avec une même *transformation de contact*, bien déterminée. Dans le cas du mouvement d'un plan sur un plan, la propriété précédente, combinée avec la formule qui donne l'accélération d'un point du plan mobile, montre que les centres de courbure conjugués se correspondent dans une même homographie, et par cette voie on retrouve aisément la formule de Savary (n° 17). Dans le cas le plus général du mouvement d'un solide, rapportons S et S<sub>1</sub> à un trièdre trirectangle  $\mathfrak{C}_0$  dont le sommet est au point de contact M, et dont l'axe des z coïncide avec la normale g, les autres axes étant d'ailleurs choisis à volonté, indépendamment de S et S<sub>1</sub>; soient  $z = f(x, y)$  et  $z = f_1(x, y)$  les équations de S et S<sub>1</sub>. Soient encore r, s, t, r<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>, t<sub>1</sub> les valeurs des dérivées secondes de f et f<sub>1</sub> en M; désignons, suivant l'usage, par  $\xi, \eta, \zeta (= 0), p, q, \bar{r}$  les éléments cinématiques classiques relatifs à  $\mathfrak{C}_0$  et posons

$$1 : r : s : t : rt - s^2 = X : Y : Z : T : U,$$

et de même pour r<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>, t<sub>1</sub>. D'après la théorie des transformations de contact X<sub>1</sub>, Y<sub>1</sub>, Z<sub>1</sub>, T<sub>1</sub>, U<sub>1</sub> se déduisent de X, Y, Z, T, U par une substitution linéaire,  $\mathfrak{S}$ , et cette substitution fournit nécessairement comme cas limite la solution du problème I. *La formation de  $\mathfrak{S}$  constitue donc le problème primordial de toute recherche sur la loi des courbures dans l'espace.*

Nous avons formé la substitution  $\mathfrak{S}$  de deux manières différentes : par la méthode du trièdre mobile (nos 8, 9, 10), et en étendant la méthode esquissée plus haut pour le plan (nos 18, 19). Nous montrons d'ailleurs qu'en annulant tout ce qui se rapporte à la troisième dimension (c'est-à-dire les quantités  $\eta, p, Z, T, U, Z_1, T_1, U_1$ ) on transforme  $\mathfrak{S}$  en une substitution linéaire à deux variables qui exprime précisément

l'homographie de la formule plane de Savary (n° 17). Ainsi, sans conteste, la substitution linéaire  $\mathfrak{S}$  doit être considérée comme l'extension à l'espace de la formule de Savary.

4. Nous étudions la structure de  $\mathfrak{S}$  (n° 15). Elle possède les diviseurs élémentaires  $(\lambda - \zeta')^2$ ,  $(\lambda - \zeta)^2$ ,  $\lambda - \zeta'$  (où  $\zeta' = \frac{d\zeta}{dt}$ ) et peut être regardée ainsi comme une homographie parabolique. En posant

$$A = r\zeta + s\eta + q, \quad B = s\zeta + t\eta - p,$$

on peut remplacer  $\mathfrak{S}$  par les relations

$$\frac{r_1 - r}{A^2} = \frac{s_1 - s}{AB} = \frac{t_1 - t}{B^2} = \frac{-1}{\zeta' + A\zeta + B\eta},$$

d'écriture plus simple, mais où n'apparaît plus immédiatement le caractère d'une substitution linéaire. On en déduit aisément les conditions nécessaires (1) pour que  $S$  ait avec  $S_1$  un contact du second ordre, soit accidentel, soit permanent. Dans ce dernier cas, G. Kœnigs avait montré (K<sub>1</sub>, p. 189-206) par une belle analyse que les conditions sont suffisantes; nous y arrivons par une autre voie très directe (n° 12).

Plaçons-nous toujours au point de vue local. La substitution à  $S$ ,  $S_1$  d'un couple de surfaces parallèles passant par le pied sur  $g$  de la perpendiculaire commune à  $g$  et à l'axe instantané  $\Delta$ , permet de donner à la formule fondamentale une *forme canonique* remarquablement simple (n° 20); le trièdre de référence  $\mathfrak{C}_0$  est toujours indépendant du choix de  $S$  et  $S_1$ . On est amené ainsi à se poser la question suivante : dans le cas d'un mouvement plan, il existe pour chaque droite  $g$  issue de  $I$  une transformation simple, l'homographie, qui relie les centres de courbure conjugués; dans le mouvement le plus général on peut se proposer de trouver pour chaque droite  $g$  du complexe  $\mathcal{L}$  une transformation de contact simple associant les tenseurs de courbure conjugués. Un tel problème, évidemment indéterminé, comporte une solution effectivement très simple (n° 21) : la transformation de contact dérivant des relations génératrices

$$x' = x, \quad (y' - y)^2 + (z' + kx'y' - z - kxy)^2 = a^2.$$

---

(1) Ces conditions ont été obtenues différemment par G. Kœnigs (K<sub>2</sub>, p. 137-140).

5. Supposons maintenant que l'on choisisse le plan des  $xz$  de  $\mathfrak{C}_0$  de manière à annuler l'expression B; un tel choix dépend de S (ou plutôt de la réglée R du n° 2); mais il est remarquable que la substitution  $\mathfrak{S}$  puisse être remplacée par les relations très simples (n° 23)

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A} = \frac{\zeta}{\zeta'}, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t$$

(où  $A_1 = r_1 \xi + s_1 \eta + q$ ). Les deux dernières expriment un fait évident *a priori* : les indicatrices de S et  $S_1$  sont bitangentes; la première, du type classique de Savary, comprend (n° 24) comme cas très particulier le résultat essentiel obtenu par Kœnigs dans son second Mémoire ( $K_2$ , p. 142) : c'est le cas où  $\mathfrak{C}_0$  est le trièdre central de la réglée R. La détermination de  $\mathfrak{C}_0$ , obligatoire si l'on veut suivre la méthode de Kœnigs, nécessite d'ailleurs des formules que nous faisons connaître au n° 25. Or, il résulte de ces formules que, dans certains cas, la méthode de Kœnigs peut devenir inapplicable; ce sont, notamment, les cas où M est un point méplat de S (le trièdre central est indéterminé) ou encore un ombilic ou un point parabolique : la méthode de Kœnigs substituée à S et  $S_1$ , un couple de surfaces conjuguées parallèles qui présentent des singularités au point central. On peut sortir de cette dernière difficulté en utilisant la substitution linéaire  $\mathfrak{S}$ ; mais, de toutes façons, même si le choix du trièdre central de R ne soulève aucune objection, sa détermination n'en constitue pas moins une complication inutile.

6. Abordons maintenant le point de vue général. L'extension à l'espace de la propriété B repose essentiellement sur le calcul de  $\zeta'$  qui, fait important, ne dépend que de la droite  $g$ . Nous l'effectuons (n° 29) dans les trois cas possibles : les axoïdes  $\Sigma, \Sigma_1$  sont quelconques (c'est-à-dire admettent des cônes directeurs); ils sont cylindriques; le mouvement est tangent à une translation; dans les deux premiers cas, il faudra envisager en outre la position de  $g$  par rapport aux axoïdes. De la discussion à laquelle on est conduit nous retiendrons seulement ici le cas général (n° 31) et le cas du roulement (n° 33). Dans le cas général l'expression de  $\zeta'$  dépend du pas instantané  $h$  et de sa dérivée  $\frac{dh}{dt}$ , de sorte que  $\zeta'$  est fonction d'éléments différentiels

du troisième ordre des axoïdes, et la loi de variation ne peut être aussi simple que dans le cas du plan (n° 31). Le cas du roulement est particulièrement digne de remarque : bornons-nous à un bref énoncé : *la relation classique de Savary reste valable dans tout plan perpendiculaire à l'axe instantané*; si les axoïdes sont des cônes, on retrouve là une propriété évidente qui fournit, sans calcul, la formule de Savary pour la sphère.

7. L'étude du problème I fait l'objet des n°s 38-41; nous retrouvons très simplement les résultats énoncés par G. Kœnigs dans son premier Mémoire; nous en développons la discussion générale dans les trois cas signalés tout à l'heure et suivant la position du point de contact par rapport aux axoïdes.

Nous appliquons ensuite (n°s 42-56) les formules fondamentales aux cas où  $S$  et  $S_1$  sont deux réglées tangentes le long d'une génératrice  $\gamma$  (variable avec le temps  $t$ ); le problème se scinde en deux, selon que  $S$  et  $S_1$  sont développables ou non. Le premier cas a été étudié par G. Kœnigs ( $K_1$ , p. 151-168); les formules fondamentales permettent de retrouver rapidement ses résultats (n°s 42-44), comme aussi d'étudier le second cas, qui ne semble pas avoir été abordé jusqu'ici. Mentionnons pourtant que le cas où la réglée  $S$  se réduirait à une droite a fait l'objet d'un Mémoire remarquable de M. Disteli (<sup>1</sup>); la formule fondamentale (74) qu'il donne page 286 (*loc. cit.*) peut être retrouvée par la méthode actuelle et sous une forme applicable au cas général où  $S$  est réglée (n° 56).

La construction effective d'un couple de surfaces réglées conjuguées a été donnée par Kœnigs ( $K_1$ , p. 151-168 et 176-181) au moyen d'une extension de la méthode des roulettes; mais on peut se poser le problème autrement, et chercher à construire les couples de réglées conjuguées  $S, S_1$  tels que l'une de ces réglées possède une image sphérique donnée; nous montrons (n°s 49-54) que le problème dépend d'une quadrature si  $S$  et  $S_1$  sont développables; de l'intégration d'un système différentiel linéaire du deuxième ordre, si  $S$  et  $S_1$  sont

---

(<sup>1</sup>) *Ueber das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der kinematischen Geometrie des Raumes* (*Zeitschr. für Math. und Phys.*, t. 62, 1914, p. 261-309).



gauches; et les résultats précédents vérifient d'une manière remarquable les relations obtenues aux n<sup>os</sup> 42-48, comme application de nos formules de Savary généralisées. De plus, connaissant  $S$  et  $S_1$ , on peut en déduire les éléments centraux des axoïdes (n<sup>o</sup> 55), ce qui complète des résultats de Resal.

Dans une autre publication nous montrerons que la méthode adoptée ici s'applique aux espaces  $\infty^3$  à courbure constante  $>$  ou  $<$  0; nous avons établi (n<sup>o</sup> 57) qu'elle s'applique aussi à l'étude du roulement ponctuel de deux surfaces; elle fournit trois équations dont deux avaient déjà été obtenues par Resal dans ses beaux travaux sur le roulement.

## PREMIÈRE PARTIE.

### LES FORMULES FONDAMENTALES.

8. Nous désignerons par  $\mathcal{T}_1$  un trièdre trirectangle direct lié au solide fixe, par  $\mathcal{T}$  un trièdre trirectangle direct lié au solide mobile, les mots « fixe » et « mobile » n'ayant d'ailleurs qu'une signification conventionnelle. Les surfaces et les courbes, ainsi que les variables qui leur sont attachées, seront désignées par des lettres affectées de l'indice 1, si elles sont liées à  $\mathcal{T}_1$ , et par des lettres sans indice, si elles sont liées à  $\mathcal{T}$ .

Considérons une surface  $S$  et supposons que l'enveloppe de ses positions par rapport à  $\mathcal{T}_1$  soit une surface,  $S_1$ . A un instant quelconque,  $t$ ,  $S$  touche  $S_1$  le long d'une courbe caractéristique  $c(t)$ . Nous introduirons un trièdre trirectangle  $\mathcal{T}_0$  (ou  $mxyz$ ) de vecteurs-unités  $\mathbf{i}(t)$ ,  $\mathbf{j}(t)$ ,  $\mathbf{k}(t)$ , tel que son sommet  $m(t)$ , soit, quel que soit  $t$ , sur  $c(t)$  et que  $\mathbf{k}(t)$  soit constamment normal à  $S$  (et à  $S_1$ );  $m(t)$  décrira d'ailleurs sur  $S_1$  (par exemple) une trajectoire qui pourra être choisie arbitrairement.

D'après le théorème de la composition des vitesses appliqué à  $m$ , on a

$$\mathbf{V}_1(m) = \mathbf{V}(m) + \mathbf{V}_c(m),$$

d'où, en multipliant intérieurement par  $\mathbf{k}$ ,

$$(1) \quad \mathbf{k}(t) \mathbf{V}_c[m(t)] = 0$$

( $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}$  sont les vitesses de  $m$  par rapport à  $\mathfrak{C}_1$  et à  $\mathfrak{C}$ ;  $\mathbf{V}_e$  est la vitesse d'entraînement de  $m$ ; cette signification de l'indice  $e$  sera maintenue dans la suite). Ainsi, la normale à  $S$  et  $S_1$  est normale à la trajectoire d'un de (et par suite de tous) ses points, considéré comme lié à  $\mathfrak{C}$ , résultat classique. Cela étant, les deux équations vectorielles d'où dérive la formule généralisée de Savary s'obtiendront comme en cinématique plane (1) :

1° On appliquera le théorème de la composition des vitesses au vecteur  $\mathbf{k}$  (supposé mené par un point fixe, tel que l'origine  $O_1$  de  $\mathfrak{C}_1$ ) (2).

2° On dérivera (1) par rapport à  $t$  dans  $\mathfrak{C}$  (3).

Ces opérations seront effectuées à un instant déterminé que nous désignerons actuellement par  $t_0$ .

Soient  $z = f(x, y)$ ,  $z_1 = f_1(x, y)$  les équations de  $S$  et  $S_1$  par rapport à  $\mathfrak{C}_0$ , et (4)  $r, s, t, r_1, s_1, t_1$  les dérivées secondes de  $f$  et  $f_1$  en  $m$ . Soient  $\xi_1, \eta_1, \omega$  les composantes de la vitesse de  $m(t)$  par rapport à  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\xi, \eta, \omega$  les composantes de sa vitesse d'entraînement,  $p, q$ , et  $\bar{r}$  (qui ne jouera aucun rôle) celles de la rotation instantanée de  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ , toutes ces composantes étant prises par rapport à  $\mathfrak{C}_0$ ; elles sont supposées évaluées à l'instant  $t_0$ .

1° Nous aurons ainsi l'équation

$$\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)_{\mathfrak{C}_1} = \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)_{\mathfrak{C}} + [\omega(t) \wedge \mathbf{k}],$$

où  $\omega(t)$  désigne la rotation instantanée de  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ . A l'instant  $t_0$  cette

(1) Voir, par exemple, le n° 3 de notre travail cité plus haut (n° 1).

(2) Kœnigs obtient des équations équivalentes par un calcul notablement plus compliqué [K<sub>2</sub>, p. 132, formation des équations (35), (41), (42) et (53)<sub>1</sub>, (53)<sub>2</sub>].

(3) Ce procédé a été employé par Kœnigs [K<sub>2</sub>, p. 131; équations (33), (39), (44), (46)<sub>3</sub>, (53)<sub>3</sub>].

(4) La notation  $t$  employée pour la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  est la même que pour le temps. Aucune confusion n'étant à craindre, il a paru préférable de conserver ces notations dont le sens est consacré par l'usage.

équation s'écrit :

$$(2) \quad - (r_1 \xi_1 + s_1 \eta_1) \mathbf{i} - (s_1 \xi_1 + t_1 \eta_1) \mathbf{j} \\ = - [r(\xi_1 - \xi) + s(\eta_1 - \eta)] \mathbf{i} - [s(\xi_1 - \xi) + t(\eta_1 - \eta)] \mathbf{j} + q \mathbf{i} - p \mathbf{j}.$$

2° A un instant  $t$  quelconque explicitons (1) sous la forme

$$(1') \quad \mathbf{k}(t) \{ \mathbf{V}_e(\mathbf{M}) + [\boldsymbol{\omega}(t) \wedge m(t) - \mathbf{M}] \} = 0,$$

$\mathbf{M}$  désignant le point de  $S$  avec lequel  $m(t)$  coïncide à l'instant  $t_0$ . En dérivant, on obtient pour  $t$  quelconque :

$$\left( \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} \{ \mathbf{V}_e(\mathbf{M}) + [\boldsymbol{\omega}(t) \wedge m(t) - \mathbf{M}] \} \\ + \mathbf{k} \left( \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} + \mathbf{k} \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge m - \mathbf{M} \right) + \mathbf{k} \left[ \boldsymbol{\omega} \wedge \left( \frac{dm}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} \right] = 0,$$

c'est-à-dire, en  $t_0$  :

$$(3) \quad - [r(\xi_1 - \xi) + s(\eta_1 - \eta)] \xi \\ - [s(\xi_1 - \xi) + t(\eta_1 - \eta)] \eta + \zeta' + p(\eta_1 - \eta) - q(\xi_1 - \xi) = 0,$$

en désignant par

$$\zeta' = \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)_{t_0} = \left[ \mathbf{k} \left( \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} \right]_{t_0}$$

la dérivée de la troisième composante  $\zeta(t)$  de  $\mathbf{V}_e(\mathbf{M})$  par rapport à un trièdre lié à  $\mathfrak{S}$  et coïncidant avec  $\mathfrak{S}_0$  en  $t_0$  : ainsi  $\zeta(t_0) = 0$ . On notera que pour le mouvement inverse  $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}$  les nombres  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\zeta'$  sont remplacés par les nombres opposés.

Cela étant, posons

$$(4) \quad r\xi + s\eta + q = A, \quad s\xi + t\eta - p = B;$$

les équations (2) et (3) équivalent au système

$$(5) \quad \begin{cases} (r_1 - r)\xi_1 + (s_1 - s)\eta_1 = -A, \\ (s_1 - s)\xi_1 + (t_1 - t)\eta_1 = -B, \\ A\xi_1 + B\eta_1 = A\xi + B\eta + \zeta', \end{cases}$$

9. Avant d'aller plus loin, observons que les calculs précédents donnent aussitôt la tangente à  $c(t_0)$  en  $m(t_0)$ . En effet, (1) est vérifiée non seulement quand,  $t$  variant,  $m(t)$  se déplace en restant toujours en un point de contact de  $S$  et  $S_1$  (cas de tout à l'heure), mais encore

quand,  $t$  restant fixe (soit pour  $t = t_0$ ),  $m$  se déplace le long de  $c(t_0)$ . Dans la variation de  $(1)'$  calculée toujours dans  $\mathfrak{C}$ ,  $m$  et  $\mathbf{k}(m)$  varieront seuls. En M on aura

$$dm = \alpha i + \beta j;$$

$\alpha$  et  $\beta$  mesurant les composantes d'un vecteur tangent à  $c(t_0)$  en M; ainsi dans (3) on remplacera  $\xi_1 - \xi$ ,  $\eta_1 - \eta$  par  $\alpha$  et  $\beta$  et  $\zeta'$  par 0, de sorte que, d'après (5)<sub>3</sub>, on aura aussitôt

$$(6) \quad A\alpha + B\beta = 0.$$

10. Revenons maintenant aux équations (5); regardons-les comme des équations en  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  et supposons d'abord qu'elles soient vérifiées pour des valeurs finies de  $\xi_1$  et  $\eta_1$ . Si elles admettent pour  $\xi_1$  et  $\eta_1$  une solution unique, ce ne peut être que  $\xi_1 = 0 = \eta_1$ , car la trajectoire de  $m(t)$  sur S pouvant être choisie arbitrairement le rapport  $\xi_1 : \eta_1$  doit rester arbitraire. Dans l'hypothèse d'une solution unique,  $\xi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = 0$ , on aura donc  $A = 0$ ,  $B = 0$  et  $\zeta' = 0$ ;  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $t_1$  ne seront assujettis par (5) à aucune condition.

Supposons maintenant que les équations (5) soient vérifiées par une infinité de valeurs finies de  $\xi_1$  et  $\eta_1$ ; le rang du tableau des coefficients de  $\xi_1$  et  $\eta_1$  devra être  $\leq 1$ . Si le rang est nul, on aura

$$(7) \quad r_1 = r, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad \text{d'où } \zeta' = 0$$

et  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  sont complètement indéterminés. Supposons le rang égal à 1. Un au moins des coefficients de  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  doit être  $\neq 0$ : c'est nécessairement l'une des différences  $r_1 - r$ ,  $s_1 - s$ ,  $t_1 - t$ , sinon (5)<sub>1</sub> et (5)<sub>2</sub> donneraient  $A = 0 = B$  et le rang serait nul. Soit d'abord  $r_1 - r \neq 0$ . Le système se réduit à (5)<sub>1</sub>, et l'on doit avoir

$$(8) \quad \begin{vmatrix} r_1 - r & s_1 - s \\ s_1 - s & t_1 - t \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r_1 - r & A \\ s_1 - s & B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r_1 - r & -A \\ A & A\xi + B\eta + \zeta' \end{vmatrix} = 0.$$

Si  $A = 0$ , (5)<sub>1</sub> montre que  $\xi : \eta$  est bien déterminé; il faut donc que  $A \neq 0$  (et  $B \neq 0$ ) et les équations (8) donnent

$$s_1 - s = \frac{B}{A}(r_1 - r), \quad t_1 - t = \frac{B^2}{A^2}(r_1 - r),$$

avec

$$r_1 - r = -\frac{A^2}{A\xi + B\eta + \zeta'},$$

le dernier dénominateur étant  $\neq 0$  (sinon  $r_1, s_1, t_1$  seraient infinis et de rapports déterminés). Or on peut écrire ces équations sous la forme symétrique

$$(9) \quad \frac{r_1 - r}{A^2} = \frac{s_1 - s}{AB} = \frac{t_1 - t}{B^2} = \frac{-1}{A\xi + B\eta + \zeta'}$$

qui s'applique aussi au cas où l'on aurait  $r_1 - r = 0 \neq t_1 - t$ . L'hypothèse  $r_1 - r = 0 = t_1 - t, s_1 - s \neq 0$  est d'ailleurs inadmissible.

Mais on doit examiner aussi le cas où les équation (5) en  $\xi_1, \eta_1$  n'admettraient que des solutions infinies, de rapport  $\xi_1 : \eta_1$  indéterminé. A cet effet, on remplacera  $\xi_1$  et  $\eta_1$  par  $x : z$  et  $y : z$  et l'on recherchera si le système transformé admet des solutions où  $z = 0$ ,  $x : y$  étant indéterminé. Pour cela, il faut et il suffit que

$$r_1 = r, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t, \quad A = 0, \quad B = 0.$$

En définitive, on aboutit aux conclusions suivantes pour  $r_1, s_1, t_1$  :

Si  $\zeta' \neq 0$  (cas régulier),  $r_1, s_1, t_1$  s'expriment en fonction de  $r, s, t$ , par les formules (9) et  $\xi_1, \eta_1$  seront en général finis; en particulier, si  $A = 0 = B$ , on aura  $r_1 = r, s_1 = s, t_1 = t$ , avec  $\xi_1$  et  $\eta_1$  infinis et de rapport indéterminé.

Si  $\zeta' = 0$  (cas singulier), soit d'abord  $A = 0 = B$ ;  $r_1, s_1, t_1$  seront indéterminés [ce qui est encore une conséquence de (9)] et l'on aura  $\xi_1 = 0 = \eta_1$ , sauf si l'on prend  $r_1 = r, s_1 = s, t_1 = t$ . Si  $\zeta' = 0$ ,  $A\xi + B\eta \neq 0$ , les équations (9) sont applicables; mais posons

$$(10) \quad A_1 = r_1\xi + s_1\eta + q, \quad B_1 = s_1\xi + t_1\eta - p;$$

on trouve aisément  $A_1 = 0 = B_1$ , et cela, quels que soient  $r, s, t$ : le résultat était d'ailleurs à prévoir par la considération du mouvement inverse  $\frac{\zeta}{\xi_1}$ . Enfin, dans le cas  $\zeta' = 0$ , avec  $A$  ou  $B \neq 0$ , mais  $A\xi + B\eta = 0$ , il résulte de (5)<sub>3</sub> que (5) doit admettre la solution unique  $\xi_1 = 0 = \eta_1$ ; mais d'après (5)<sub>1</sub> et (5)<sub>2</sub> la chose est impossible si  $r_1, s_1, t_1$  sont finis tous les trois, et ceci est encore une conséquence de (9).

En résumé, dans chaque cas concret on pourra calculer ou discuter les valeurs de  $r_1, s_1, t_1$  au moyen des équations (9). Ces équations consti-

tuent ainsi la première forme des « *relations fondamentales* » entre  $r_1, s_1, t_1, r, s, t$ .

11. Notons dès maintenant une conséquence immédiate de la discussion précédente. Tout d'abord, d'après (9) *les indicatrices de S et S<sub>1</sub> en m sont bitangentes*; la première ayant pour équation

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1,$$

la seconde sera définie par

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 - \frac{(Ax + By)^2}{A\xi + B\eta + \zeta} = \pm 1,$$

et la corde des contacts est  $Ax + By = 0$ ; d'après (6), *c'est donc la tangente à c(t<sub>0</sub>) en m*. Ce résultat, comme d'ailleurs le double contact des indicatrices, étaient à prévoir puisque S et S<sub>1</sub> sont tangentes tout le long de  $c(t_0)$ .

Cherchons alors la *condition pour que S et S<sub>1</sub> soient osculatrices*, c'est-à-dire pour que  $r_1 = r, s_1 = s, t_1 = t$ . Le problème peut être posé de deux manières différentes, suivant que l'osculation doit avoir lieu pour une valeur particulière de  $t$ , ou, au contraire, quel que soit  $t$ . Si l'osculation n'a lieu que *pour une valeur t<sub>0</sub> de t*, [en certains points de  $c(t_0)$  ou tout le long de  $c(t_0)$ ], on ne peut exclure l'hypothèse où  $\xi_1$  et  $\eta_1$  sont infinis <sup>(1)</sup>; *on pourra donc avoir en ces points  $\zeta' \neq 0$ , avec  $A = 0 = B$  (n° 10), et cette condition est évidemment suffisante*.

Ainsi, en tout point de toute droite  $g$  pour laquelle  $\zeta = 0$ , il existe  $\infty^1$  éléments du second ordre  $(r, s, t)$  tels que  $r_1 = r, s_1 = s, t_1 = t$ . Les indicatrices de S et S<sub>1</sub> correspondant à ces éléments auront pour équation commune :

$$-\frac{q}{\xi}x^2 + \frac{p}{\eta}y^2 - \frac{s}{\xi\eta}(\eta x - \xi y)^2 = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

où  $s$  peut être choisi arbitrairement. Quand  $s$  varie, ces indicatrices sont bitangentes aux deux points

$$x : y : 1 = \xi : \eta : \pm \sqrt{\varepsilon(p\eta - q\xi)},$$

(1) On constatera aisément que si l'on fait rouler à l'intérieur d'une parabole, avec une vitesse angulaire constante, le cercle osculateur au sommet, la vitesse absolue du point de contact  $m(t)$  devient infinie quand ce point arrive au sommet.

les tangentes communes étant  $py - qx = \pm \sqrt{\varepsilon(p\eta - q\xi)}$ . Les centres de courbure principaux varient dans une involution

$$(z' - z_0)(z'' - z_0) + h^2 = 0$$

dont le centre ( $z = z_0$ ) est le pied sur  $Mz$  de la perpendiculaire commune à  $Mz$  et à l'axe instantané;  $h$  est le pas réduit instantané. Enfin la courbe de contact de  $S$  et  $S_1$  présente alors un point double en  $m$ , comme on le voit en développant (1) dans le voisinage de ce point.

Au contraire, si l'osculatation doit avoir lieu quel que soit  $t$ , il doit exister sur  $S_1$  une courbe au moins,  $L_1$ , lieu des points d'osculatation  $m(t)$ ;  $\xi_1$  et  $\eta_1$  ne peuvent être constamment infinis; l'hypothèse  $\zeta' \neq 0$  est donc inadmissible. Les surfaces  $S$  et  $S_1$  doivent être telles que leurs normales vérifient en tout point de  $L_1$  (et pour la valeur correspondante de  $t$  d'ailleurs quelconque) les conditions

$$\zeta = 0 = \zeta' \quad (\text{avec } A = 0 = B).$$

12. Réciproquement, montrons que si une surface  $S$  est telle qu'en l'un quelconque,  $M$ , de ses points elle vérifie les conditions  $\zeta = 0 = \zeta'$  [à l'instant  $t$  où  $c(t)$  passe par  $M$ ], elle est constamment osculatrice à sa conjuguée  $S_1$ . En effet, soit  $M$  un point lié à  $\mathcal{C}$ ; au cours du mouvement il existe en tout instant un vecteur  $\mathbf{K}(M, t)$  vérifiant les conditions

$$(11) \quad \mathbf{K} \mathbf{V}_c(M, t) = 0 = \mathbf{K} \left[ \frac{d\mathbf{V}(M, t)}{dt} \right]_{\mathcal{C}}.$$

Quand  $t$  varie, le lieu des supports des vecteurs  $\mathbf{K}$ , menés de  $M$  comme origine, est un certain cône  $\mathcal{N}(M)$ ; et, si la surface  $S$  vérifie les relations  $\zeta = 0 = \zeta'$  (dans les conditions précitées), la normale en l'un quelconque,  $M$ , de ses points devra appartenir au cône  $\mathcal{N}(M)$  correspondant. En d'autres termes,  $S$  sera une surface intégrale  $z = z(x, y)$  d'une certaine équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) = 0 \quad \left( \bar{p} = \frac{\partial z}{\partial x}, \bar{q} = \frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

par suite, en tout point de  $S$  on aura

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} r + \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} s + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{p} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} s + \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} t + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{q} = 0, \end{cases}$$

$r, s, t$  désignant les dérivées secondes de  $z(x, y)$  en  $M$ . Or, je dis que ces équations ne sont autres que les conditions d'osculation  $A = 0 = B$ .

Présentons d'abord une remarque préliminaire. Soient

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + \dots, \\ Y(t) &= Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2 + \dots, \\ Z(t) &= Z_0 + Z_1 t + Z_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

les composantes d'un vecteur

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1 t + \mathbf{h}_2 t^2 + \dots$$

Supposons  $\mathbf{h}_0 \neq 0$ ; soit, par exemple,  $Z_0 \neq 0$ ; on pourra écrire

$$(13) \quad \frac{X}{Z} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad \frac{Y}{Z} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots,$$

avec

$$a_0 = \frac{X_0}{Z_0}, \quad b_0 = \frac{Y_0}{Z_0}, \quad a_1 = \frac{X_1 Z_0 - Z_1 X_0}{Z_0^2}, \quad b_1 = \frac{Y_1 Z_0 - Z_1 Y_0}{Z_0^2}, \quad \dots$$

Supposons encore  $a_1$  ou  $b_1 \neq 0$ ; soit, par exemple,  $a_1 \neq 0$ . On déduira de (13) le développement de l'équation du cône lieu du support de  $\mathbf{h}$  (mené à partir de  $O$ ):

$$(14) \quad \frac{Y}{Z} = b_0 + m_1 \left( \frac{X}{Z} - a_0 \right) + m_2 \left( \frac{X}{Z} - a_0 \right)^2 + \dots,$$

équation où l'ensemble des termes du premier degré peut s'écrire :

$$(15) \quad \frac{Y}{Z} - b_0 - m_1 \left( \frac{X}{Z} - a_0 \right) \equiv \frac{(\mathbf{h}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1)}{Z(X_1 Z_0 - Z_1 X_0)};$$

d'ailleurs l'ensemble des conditions énoncées équivaut à  $\mathbf{h}_0 \wedge \mathbf{h}_1 \neq 0$ .

Appliquons ce résultat au problème actuel, et cherchons l'équation du cône  $\mathcal{X}(M)$ . Puisque  $\mathbf{K}(M, t)$  satisfait à (11), on pourra écrire,  $\lambda$  étant un scalaire quelconque :

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{K}(M, t) &= \left( \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'_e t + \frac{1}{2} \mathbf{v}''_e t^2 + \dots \right) \wedge \left( \mathbf{v}'_e + \mathbf{v}''_e t + \frac{1}{2} \mathbf{v}'''_e t^2 + \dots \right) \\ &= (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{v}'_e) + (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{v}''_e) t + \dots, \end{aligned}$$

en désignant par  $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}''_e, \dots$  le vecteur  $\mathbf{v}_e(M, t)$  et ses dérivées successives, calculées dans  $\mathcal{E}$ , et à l'instant  $t = 0$ . Ainsi, en prenant



$\mathbf{h}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{M}, t)$ , on aura

$$\lambda^2(\mathbf{h}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1) = (\mathbf{K}, \mathbf{V}_e \wedge \mathbf{V}'_e, \mathbf{V}_e \wedge \mathbf{V}''_e) = (\mathbf{V}_e, \mathbf{V}'_e, \mathbf{V}''_e)(\mathbf{K}\mathbf{V}_e).$$

Supposons toujours  $\mathbf{h}_0 \wedge \mathbf{h}_1 \neq \mathbf{o}$ , ou  $(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}'_e, \mathbf{V}''_e) \neq \mathbf{o}$ ; d'après (14) et (15), l'équation cherchée sera de la forme

$$(16) \quad \lambda_1(\mathbf{K}\mathbf{V}_e) = m_2 \left( \frac{X}{Z} - a_0 \right)^2 + \dots$$

En particulier, supposons que l'origine  $O$  du trièdre  $\mathfrak{T}$  appartienne à  $S$ , le plan des  $xy$  de  $\mathfrak{T}$  étant tangent à  $S$ ; plaçons-nous toujours à un instant  $t$  voisin de  $\mathbf{o}$  et supposons que  $\mathbf{M}(x, y, z)$  soit un point voisin de  $O$  et appartenant à la courbe de contact  $c(t)$  de  $S$  et  $S_1$ ; nous aurons en  $\mathbf{M}$ , pour les composantes de  $\mathbf{V}_e$ :

$$\xi + qz - ry, \quad \eta + rx + pz, \quad py - qx,$$

celles de  $\mathbf{K}$  pouvant être écrites  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  et  $-1$ . En vertu de (16) l'équation de  $\mathcal{N}(\mathbf{M})$  par rapport à  $\mathfrak{T}$  s'écrira

$$(17) \quad \lambda_1[\xi\bar{p} + \eta\bar{q} - (py - qx)] + \dots = 0,$$

les termes non écrits étant du second degré en  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; et puisqu'on a  $\bar{p} = \mathbf{o} = \bar{q}$  en  $O$ , les combinaisons (12) formées sur (17) se réduisent aussitôt, en  $O$ , à  $A = \mathbf{o} = B$ .

C. Q. F. D.

13. Revenons maintenant aux formules fondamentales (9). Il est aisé de former explicitement les expressions de  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $t_1$  en fonction de  $r$ ,  $s$ ,  $t$  et de  $p$ ,  $q$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta'$ ; on obtiendra ainsi *la seconde forme des formules fondamentales*

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{-q^2 + (\zeta' - p\eta - q\xi)r - 2q\eta s + \eta^2(rt - s^2)}{\zeta' - p\eta + q\xi + \xi^2 r + 2\xi\eta s + \eta^2 t}, \\ s_1 = \frac{pq + p\xi r + \zeta' s - q\eta t - \xi\eta(rt - s^2)}{\zeta' - p\eta + q\xi + \xi^2 r + 2\xi\eta s + \eta^2 t}, \\ t_1 = \frac{-p^2 + 2p\xi s + (\zeta' + p\eta + q\xi)t + \xi^2(rt - s^2)}{\zeta' - p\eta + q\xi + \xi^2 r + 2\xi\eta s + \eta^2 t}, \\ r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{-p^2 r - 2pqs - q^2 t + (\zeta' + p\eta - q\xi)(rt - s^2)}{\zeta' - p\eta + q\xi + \xi^2 r + 2\xi\eta s + \eta^2 t}. \end{array} \right.$$

Introduisons des variables homogènes  $X, Y, Z, T, U$  telles que

$$1 : r : s : t : rt - s^2 = X : Y : Z : T : U$$

et de même pour  $r_1, s_1, t_1$ . On voit alors que  $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1$  sont liées à  $X, Y, Z, T, U$  par une substitution linéaire  $\mathcal{S}$  :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} X_1 = (\zeta' - p\eta + q\zeta)X + \zeta^2 Y + 2\zeta\eta Z + \eta^2 T \\ Y_1 = -q^2 X + (\zeta' - p\eta - q\zeta)Y - 2q\eta Z + \eta^2 U \\ Z_1 = pq X + p\zeta Y + \zeta' Z - q\eta T - \zeta\eta U \\ T_1 = -p^2 X + 2p\zeta Z + (\zeta' + p\eta + q\zeta)T + \zeta^2 U \\ U_1 = -p^2 Y - 2pq Z - q^2 T + (\zeta' + p\eta - q\zeta)U \end{cases}$$

de matrice

$$(\mathcal{N}) \begin{bmatrix} \zeta' - p\eta + q\zeta & \zeta^2 & 2\zeta\eta & \eta^2 & 0 \\ -q^2 & \zeta' - p\eta - q\zeta & -2q\eta & 0 & \eta^2 \\ pq & p\zeta & \zeta' & -q\eta & -\zeta\eta \\ -p^2 & 0 & 2p\zeta & \zeta' + p\eta + q\zeta & \zeta^2 \\ 0 & -p^2 & -2pq & -q^2 & \zeta' + p\eta - q\zeta \end{bmatrix}$$

On pouvait affirmer *a priori* que  $X_1, \dots, U_1$  sont liés linéairement à  $X, \dots, U$ ; nous reviendrons plus loin sur ce fait essentiel. Pour l'instant indiquons quelques propriétés de la substitution  $\mathcal{S}$ .

14. Il est clair que  $\mathcal{S}$  doit conserver à un facteur près la forme  $XU - YT + Z^2$ ; effectivement, on trouve

$$X_1 U_1 - Y_1 T_1 + Z_1^2 = \zeta'^2 (XU - YT + Z^2).$$

Dès lors le déterminant de  $(\mathcal{N})$  est égal à  $(\zeta'^2)^{\frac{5}{2}} = \pm \zeta'^5$ , donc, nécessairement à  $\zeta'^5$ . Effectivement, d'après la remarque faite au n° 8 (p. 122) sur le mouvement inverse de  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_1}$ , on doit obtenir la substitution inverse de  $\mathcal{S}$  en remplaçant  $\zeta'$  par  $-\zeta'$  (peut-être à un facteur d'ensemble près). Multiplions donc les matrices  $(\mathcal{N})$  correspondant à deux valeurs opposées de  $\zeta'$ ; on trouve que le produit est une matrice à éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont égaux à  $\zeta'^2$ ; le produit des déterminants de matrices est donc égal à  $\zeta'^{10}$ , ce qui montre bien que le déterminant de  $(\mathcal{N})$  est égal à  $\zeta'^5$ .

15. On aboutit au même résultat par les considérations suivantes, qui ont en outre l'intérêt de donner la structure de  $\mathfrak{S}$ . Bornons-nous au cas régulier  $\zeta' \neq 0$ , et supposons  $\xi\eta(p\eta - q\xi) \neq 0$ ; posons (1)

$$\begin{aligned} x &= \xi Y + \eta Z + qX, \\ y &= \xi Z + \eta T - pX, \\ v &= (p\eta - q\xi)Z + pqX, \\ u &= p^2Y + 2pqZ + q^2T + (q\xi - p\eta)U; \end{aligned}$$

ces équations seront résolubles en Y, T, Z, U et la substitution  $\mathfrak{S}$  s'écrira

$$(19) \quad \begin{cases} x_1 = \zeta' x, \\ y_1 = \zeta' y, \\ X_1 = \xi x + \eta y + \zeta' X, \\ u_1 = \zeta' u, \\ v_1 = \xi \eta u + \zeta' v. \end{cases}$$

On retrouve bien la valeur du déterminant de  $(\mathfrak{M})$ , ainsi que l'invariance des équations  $A = 0$ ,  $B = 0$  (ou  $x = 0$ ,  $y = 0$ ); on voit de plus que l'équation en  $\lambda$  de la matrice  $(\mathfrak{M})$  admet la racine quintuple  $\zeta'$  et les diviseurs élémentaires  $(\lambda - \zeta')^2$ ,  $(\lambda - \zeta')^2$ ,  $\lambda - \zeta'$ . (On pourra remplacer  $y$  par la variable canonique  $\xi x + \eta y = z$ .)

Si l'on a  $\xi = 0$ ,  $p\eta - q\xi \neq 0$ , donc  $\eta \neq 0$ , on verra que

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta' x, \\ y_1 &= \zeta' y, \\ X_1 &= \eta y + \zeta' X, \\ u_1 &= \zeta' u, \\ U_1 &= -u + \zeta' U. \end{aligned}$$

Pour  $p\eta - q\xi = 0$ , avec  $\xi\eta \neq 0$ , on conservera  $x$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $T$  et l'on introduira

$$V = 2py + \xi^2 U + p^2 X;$$

on aura

$$\begin{aligned} V_1 &= \zeta' V, \\ T_1 &= V + \zeta' T, \end{aligned}$$

$x_1, y_1, X_1$  étant donnés par (19).

---

(1) Les notations  $x, y, z, u, v, V, W, P, Q$  ne seront utilisées avec la signification actuelle que dans ce numéro.

Si  $\xi = 0 = p$  et  $\eta \neq 0$ , on utilisera les variables  $x, y, X, Y$  et

$$W = -q^2 X - 2q\eta Z + \eta^2 U,$$

d'où

$$W_1 = \zeta' W \quad \text{et} \quad Y_1 = W + \zeta' Y.$$

Si  $\xi = 0 = \eta$  et  $p$  ou  $q \neq 0$ , soit  $q \neq 0$ , on prendra les variables  $X, Y, U$ ,

$$P = pY + qZ, \quad Q = p^2 Y + 2pqZ + q^2 T,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} X_1 = \zeta' X, \\ Y_1 = -q^2 X + \zeta' Y, \\ P_1 = \zeta' P, \\ Q_1 = \zeta' Q, \\ U_1 = -Q + \zeta' U. \end{cases}$$

Enfin, si  $\xi = 0 = \eta = p = q$ ,  $\mathcal{S}$  se réduit à la substitution-unité; ainsi, ce seul cas excepté, l'équation en  $\lambda$  conserve toujours les diviseurs élémentaires indiqués plus haut.

16. Avant d'aller plus loin nous développerons une seconde démonstration des formules fondamentales. Nous avons rappelé (n° 3) que le mouvement  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_1}$  étant donné, il existe une transformation de contact bien déterminée qui associe à toute surface  $S$  liée à  $\mathcal{C}$  sa conjuguée  $S_1$  dans  $\mathcal{C}_1$ . Cette transformation est permutable avec les dilatations; elle change un point en sa trajectoire : elle est donc définie par deux équations directrices. Les dérivées  $r, s, t, r_1, s_1, t_1$  ayant leur signification habituelle pour  $S$  et pour  $S_1$ , la transformation de contact induit sur les variables  $X, Y, Z, T, U$  du n° 13 une substitution linéaire

$$(20) \quad \begin{cases} X_1 = c_{11} X + c_{12} Y + c_{13} Z + c_{14} T + c_{15} U, \\ Y_1 = c_{21} X + c_{22} Y + c_{23} Z + c_{24} T + c_{25} U, \\ Z_1 = c_{31} X + c_{32} Y + c_{33} Z + c_{34} T + c_{35} U, \\ T_1 = c_{41} X + c_{42} Y + c_{43} Z + c_{44} T + c_{45} U, \\ U_1 = c_{51} X + c_{52} Y + c_{53} Z + c_{54} T + c_{55} U. \end{cases}$$

17. Nous allons voir qu'en cinématique plane la propriété analogue entraîne comme conséquence la formule classique de Savary.

Car, soient  $C_0$  une courbe du plan mobile,  $C_{0,1}$  sa conjuguée; envisageons toutes les courbes  $C$  du plan mobile et leurs conjuguées  $C_1$ , admettant l'élément de contact commun à  $C_0$  et  $C_{0,1}$ , et soient  $y = f(x)$ ,  $y_1 = f_1(x)$  les équations de  $C$  et  $C_1$  par rapport à la tangente  $Mx$  et à la normale  $My$  communes à  $C_0$  et  $C_{0,1}$ . Comme au n° 16, on montre que les dérivées secondes  $r = f''(x)$ ,  $r_1 = f_1''(x)$  satisfont en  $M$ , point de contact de  $C_0$  et  $C_{0,1}$ , à une relation homographique

$$(21) \quad r_1 = \frac{c_{22}r + c_{21}}{c_{12}r + c_{11}},$$

les  $c_{ij}$  ne pouvant dépendre *a priori* que de l'élément de contact commun à  $C_0$  et  $C_{0,1}$ . Mais la transformation de contact qui change les  $C$  en les  $C_1$  est permutable avec une dilatation d'amplitude quelconque : donc, sur un rayon donné  $D$ , issu du centre instantané  $I$ , les centres de courbure  $\mu$  et  $\mu_1$  de  $C$  et  $C_1$  se correspondent dans une homographie (21) dont les coefficients ne dépendent que de  $D$ . Une telle homographie ne peut présenter à distance finie qu'un seul point double, le point  $I$  (supposé à distance finie) : car un point double de l'homographie est un rebroussement de sa trajectoire, propriété caractéristique de  $I$ . D'autre part le point à l'infini ne saurait être point double (à moins d'être centre instantané) : car la figure formée par  $I$ , par un point  $P$  de  $D$  et le centre de courbure  $\mu_1$  de sa trajectoire resterait semblable à elle-même quand  $P$  décrirait  $D$  : or ceci est contradictoire avec les formules de la vitesse et de l'accélération d'entraînement de  $P$

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{V}_e(P) = \boldsymbol{\omega} \wedge P - I, \\ \mathbf{J}_e(P) = (\boldsymbol{\omega}' \wedge P - I) - \omega^2(P - I) - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}, \end{cases}$$

où  $\mathbf{W} \left[ = \left( \frac{dI}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} \right]$  est en général  $\neq 0$ . L'homographie reliant  $\mu$  et  $\mu_1$  ne peut donc présenter qu'un seul point double, le centre instantané (1).

Or soit  $y$  l'ordonnée de  $P$  sur la normale  $My$ ; avec les notations classiques de la cinématique plane, les composantes  $V_x$  de  $\mathbf{V}_e(P)$  et  $J_y$  de  $\mathbf{J}_e(P)$  s'écrivent

$$V_x = \dot{\xi} - \omega y, \quad J_y = \eta' + \omega \dot{\xi} - \omega^2 y$$

---

(1) Le même résultat peut s'obtenir aussi par la considération du cercle des inflexions dont l'existence est d'ailleurs une conséquence directe de (22)<sub>2</sub>.

et I a pour ordonnée  $\frac{\xi}{\omega}$ . L'homographie (21) entre les ordonnées  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r_1}$  de  $\mu$  (ou P) et  $\mu_1$  s'écrira donc, d'après ce qui précède

$$(23) \quad \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{\xi}{\omega}}{\frac{1}{r} - \frac{\xi}{\omega}} = k,$$

la constante  $k$  étant telle que pour  $r_1^{-1} = \infty$  on ait  $J_1 = 0$  : donc

$$\eta' + \omega\xi - \omega^2 r^{-1} = 0, \quad k = -\frac{\omega^2}{\eta'},$$

et l'on en déduit aussitôt la relation d'homographie sous la forme

$$r_1 = \frac{(\eta' + \omega\xi)r - \omega^2}{\xi^2 r + \eta' - \omega\xi}.$$

Le rapprochement avec (18)<sub>1</sub> devient encore plus apparent si l'on construit un trièdre trirectangle, de sommet M, de premier vecteur-unité  $\mathbf{i}_0$  relatif à  $Mx$ , le troisième  $\mathbf{k}_0$  définissant la normale à  $C_0$  et  $C_{01}$ ; enfin on prendra  $\mathbf{j}_0 = \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{i}_0 = -\mathbf{i}_0 \wedge \mathbf{k}_0$  de façon que le trièdre soit direct. Ainsi

$$\omega = \omega \mathbf{i}_0 \wedge \mathbf{k}_0 = -\omega \mathbf{j}_0,$$

de sorte que  $\omega$  devra être remplacé par la notation  $-q$  du n° 13; d'ailleurs  $\xi$  se sera pas changé et  $\eta'$  sera remplacé par  $\zeta'$ . Il viendra ainsi

$$r_0 = \frac{-q^2 + (\zeta' - q\xi)r}{\zeta' + q\xi + \xi^2 r},$$

et  $r_1$  s'exprime en fonction de  $r$  par la première formule fondamentale (18), où l'on aurait annulé les variables  $\eta$  et  $p$ .

Il est d'ailleurs facile de ramener (23) au type classique de Savary. Car soient, pour un instant P — I ou  $\mu - I = \rho \mathbf{k}_0$ ,  $\mu_1 - I = \rho_1 \mathbf{k}_0$ ; (23) s'écrira

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = k,$$

avec la condition (exprimée plus haut) que  $\rho_1 = \infty$  quand P est tel que  $J_e(P)\mathbf{k}_0 = 0$ , et ceci, d'après (22)<sub>2</sub> donne pour la valeur correspondante  $\bar{\rho}$  de  $\rho$

$$\omega^2 \bar{\rho} + (\omega \wedge \mathbf{W})\mathbf{k}_0 = 0,$$

c'est-à-dire, avec  $\mathbf{W} = W\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\tau}\mathbf{i}_0 = \cos\varphi$  :

$$\bar{\rho} + \frac{W}{\omega} (-\mathbf{j}_0 \wedge \boldsymbol{\tau})\mathbf{k}_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{\rho} + \frac{W}{\omega} \cos\varphi = 0.$$

On a donc <sup>(1)</sup>

$$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\cos\varphi},$$

ou

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{1}{\cos\varphi},$$

en appliquant la formule à la base et à la roulante.

18. Nous allons employer un procédé analogue pour établir les formules fondamentales dans l'espace; nous commencerons par donner un résultat que nous utiliserons d'ailleurs ultérieurement. Soient  $C_0$  une courbe quelconque (*fig. 1*) et MTNB le trièdre de Frenet en un point

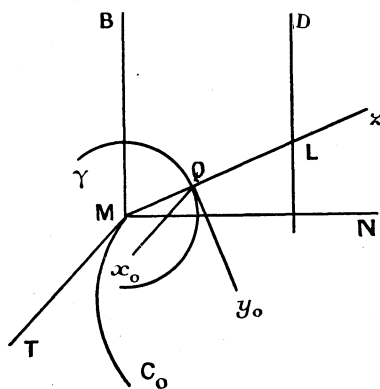


Fig. 1.

quelconque  $M$  de  $C_0$ . Considérons la surface canal  $S_0$  enveloppe des sphères de rayon constant,  $\varepsilon$ , centrées sur  $C_0$ ; l'un,  $\gamma$ , des cercles carac-

<sup>(1)</sup> On peut encore remarquer que pour  $t$  quelconque le centre instantané de rotation a pour abscisse  $x = -\frac{\eta}{\omega}$ ; on a donc  $W \cos\varphi = x' = -\frac{\eta'}{\omega}$  à l'instant envisagé ( $\eta = 0$ ) et

$$k = -\frac{\omega^2}{\eta'} = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\cos\varphi}.$$

téristiques est contenu dans le plan normal à  $C_0$  en  $M$ . Soit  $Q$  un point de  $\gamma$ , donc de  $S_0$ ; construisons le trièdre trirectangle  $\mathfrak{C}$ , de sens direct de sommet  $Q$ , l'axe  $Qy_0$  tangent à  $\gamma$ , l'axe  $Qz$ , de vecteur-unité  $\mathbf{k}$ , normal à  $\gamma$  et tel que  $M$  ait pour cote  $z = -\varepsilon$ . Soit  $z = \Phi_0(x_0, y_0)$  l'équation de  $S_0$  par rapport à  $\mathfrak{C}$ ; les centres de courbure principaux de  $S_0$  en  $Q$  ont pour cotes

$$z_1 = e - \varepsilon, \quad z_2 = -\varepsilon,$$

le point  $L = M + e\mathbf{k}$  appartenant à l'axe de courbure  $D$  de  $C_0$  en  $M$ ; ainsi

$$(24) \quad e\mathbf{k}\mathbf{n} = R$$

( $\mathbf{n}$ , vecteur-unité de la normale principale à  $C$  en  $M$ ;  $R$ , rayon de courbure de  $C_0$  en  $M$ ). On aura donc pour les dérivées secondes de  $\Phi_0(x_0, y_0)$  en  $Q$

$$r_0 = \frac{1}{e - \varepsilon}, \quad s_0 = 0, \quad t_0 = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Imprimons maintenant à  $S_0$  une rotation  $\mathcal{R}$ , d'amplitude  $\varphi$ , autour de  $Qz$ ; nous obtiendrons l'équation  $z = \Phi(x, y)$  de la nouvelle surface, soit  $S$ , en faisant dans  $\Phi_0$

$$x_0 = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y_0 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi;$$

et pour les dérivées secondes de  $\Phi$  on aura

$$(25) \quad r = -\frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon} + \dots, \quad s = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\varepsilon} + \dots, \quad t = -\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon} + \dots,$$

$$rt - s^2 = r_0 t_0 - s_0^2 = -\frac{1}{e\varepsilon} - \dots,$$

les termes non écrits étant finis lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Mais  $\varepsilon$  variant ainsi, la surface canal  $S$  tend vers la déférente  $C$  (déduite de  $C_0$  par  $\mathcal{R}$ ); et si  $\mathfrak{C}$  se meut par rapport à un trièdre  $\mathfrak{C}_1$ , l'enveloppe des positions de  $S$  par rapport à  $\mathfrak{C}_1$  tend vers le lieu  $\Sigma_1$  des courbes  $C$ . Supposons alors que  $\mathfrak{C}$  soit identique à la position du trièdre  $\mathfrak{C}_0$  (n° 8) relativement au solide mobile, en l'instant  $t_0 = 0$ ; dans les formules (20) remplaçons respectivement  $X, Y, Z, T, U$  par

$$\varepsilon, \quad -\sin^2 \varphi, \quad \sin \varphi \cos \varphi, \quad -\cos^2 \varphi, \quad -e^{-1},$$



il est clair que, pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, les valeurs limites des quotients de  $Y_1, Z_1, T_1, U_1$  par  $X_1$  définiront  $r_1, s_1, t_1, r_1 t_1 - s_1^2$  pour  $\Sigma_1$ . Mais, comme nous allons voir, on peut calculer directement ces dernières valeurs; on conçoit donc que par le rapprochement des résultats on puisse obtenir des renseignements sur les coefficients  $c_{ij}$  de (20).

19. Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\mathfrak{C}$  tend vers un trièdre  $\bar{\mathfrak{C}}$ , de sommet M (sur C), d'axe  $Mz$  normal à C en M (fig. 2), et par rapport à  $\bar{\mathfrak{C}}$  la tan-

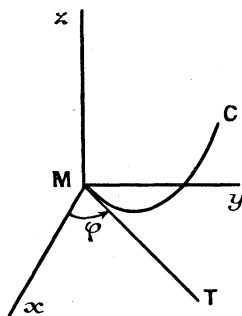


Fig. 2.

gente  $MT$  aura pour équation  $y = x \tan \varphi$ ; d'ailleurs, on peut toujours supposer Q choisi de telle sorte que  $Mz$  soit normal en M au lieu  $\Sigma_1$  de C. Soient alors N un point voisin de M sur C et P un point voisin de N sur la trajectoire de N par rapport à  $\bar{\mathfrak{C}}$ ; P est donc un point de  $\Sigma_1$ , et l'on aura

$$N = M + \bar{s} \mathbf{t} + \frac{\bar{s}^2}{2R} \mathbf{n} + \dots,$$

$\bar{s} = \widehat{MN}$  de C;  $\mathbf{t}$ , vecteur-unité de la tangente à C en M; de plus,  $\bar{t}$  désignant ici le temps

$$P = N + [\mathbf{V}_e(M) + (\boldsymbol{\omega} \wedge N - M)] \bar{t} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_e(N) \bar{t}^2 + \dots,$$

d'où

$$P = M + \mathbf{V}_e(M) \bar{t} + \mathbf{t} \bar{s} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_e(M) \bar{t}^2 + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{t}) \bar{t} \bar{s} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{n}}{R} \bar{s}^2 + \dots$$

et les coordonnées  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  de P par rapport à  $\bar{\mathfrak{C}}$  sont

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \xi \bar{t} + \bar{s} \cos \varphi + \dots, \\ \mathfrak{Y} &= \eta \bar{t} + \bar{s} \sin \varphi + \dots, \\ \mathfrak{Z} &= \frac{1}{2} (\zeta' + p\eta - q\xi) \bar{t}^2 + (p \sin \varphi - q \cos \varphi) \bar{t} \bar{s} + \frac{\bar{s}^2}{2e} + \dots, \end{aligned}$$

la valeur du coefficient de  $s^2$  dans  $\mathfrak{Z}$  résultant de (24). On en déduit l'équation de  $\Sigma$ ,

$$\mathfrak{Z} = \frac{\zeta' + p\eta - q\zeta}{2(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)^2} (\mathfrak{X} \sin \varphi - \mathfrak{Y} \cos \varphi)^2 + \frac{p \sin \varphi - q \cos \varphi}{(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)^2} (\xi \mathfrak{Y} - \eta \mathfrak{X}) (\mathfrak{X} \sin \varphi - \mathfrak{Y} \cos \varphi) + \frac{1}{2e} \frac{(\xi \mathfrak{Y} - \eta \mathfrak{X})^2}{(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)^2},$$

d'où, pour les dérivées secondes  $r_1, s_1, t_1$  de  $\mathfrak{Z}$

$$r_1 = \frac{(\zeta' - p\eta - q\zeta) \sin^2 \varphi + 2q\eta \sin \varphi \cos \varphi + \eta^2 e^{-1}}{(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)^2}, \quad \dots;$$

de plus, en utilisant la propriété d'invariance du discriminant

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{e \{ (\zeta' + p\eta - q\zeta) - (p \sin \varphi - q \cos \varphi)^2 \}}{(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)^2}.$$

Mais d'après (10) et (25) on doit avoir aussi

$$r_1 = \frac{c_{22} \sin^2 \varphi - c_{23} \sin \varphi \cos \varphi + c_{24} \cos^2 \varphi + c_{25} e^{-1}}{c_{12} \sin^2 \varphi - c_{13} \sin \varphi \cos \varphi + c_{14} \cos^2 \varphi + c_{15} e^{-1}}.$$

Les deux expressions obtenues pour  $r_1$  devant coïncider quel que soit  $\varphi$ , on peut prendre (1)

$$\begin{aligned} c_{12} &= \zeta^2, & c_{13} &= 2\zeta\eta, & c_{14} &= \eta^2, & c_{15} &= 0, \\ c_{22} &= \zeta' - p\eta - q\zeta, & c_{23} &= -2q\eta, & c_{24} &= 0, & c_{25} &= \eta^2, \end{aligned}$$

et l'on procéderait de même pour calculer les  $c_{jk}$  ( $j=3, 4, 5$ ;  $k=2, 3, 4, 5$ ). Reste à déterminer les  $c_{j1}$  ( $j=1, 2, 3, 4, 5$ ). A cet effet, il suffira d'observer comme au n° 14 que le produit  $(\mathfrak{M})(\mathfrak{M}')$  de matrice  $(\mathfrak{M})$  ou  $(c_{jk})$  par la matrice  $(\mathfrak{M}')$  qui s'en déduit moyennant le changement de  $\zeta'$  en  $-\zeta'$  est égal au produit de la matrice-unité par un multiplicateur scalaire. On trouvera immédiatement les éléments cherchés en utilisant, par exemple, la seconde colonne de  $(\mathfrak{M}')$  pour  $c_{11}, c_{31}, c_{41}, c_{51}$  et la quatrième pour  $c_{21}$ .

20. En tous les points (liés à S) de la droite de S coïncidant en  $t$  avec la normale  $Mk_0$  (ou  $g$ ) la fonction  $\zeta(t)$  a la même valeur, et

(1) La transformation de contact qui change S en  $S_1$  est définie par deux relations génératrices, ce qui permettait de prévoir l'égalité  $c_{15} = 0$ .

cela quel que soit  $t$ ; donc  $\zeta'(t)$ , et en particulier  $\zeta'(t_0)$  ( $=\zeta'$ ), a une valeur ne dépendant que de  $g$ ; nous la calculerons plus loin (n° 29). Pour l'instant nous allons utiliser la circonstance précédente afin de simplifier les équations fondamentales.

La transformation de contact qui change  $S$  en  $S_1$  est permutable avec la dilatation; or pour deux surfaces parallèles les centres de courbure principaux et les plans principaux relatifs à la même normale sont les mêmes. Actuellement, on peut donc remplacer  $S$  et  $S_1$  par un couple de surfaces parallèles, soient  $S'$  et  $S'_1$ , passant par un point quelconque,  $M'$ , de  $g$ . Or il est tout indiqué de choisir  $M'$  et les axes normaux à  $g$ , soient  $M'x'$ ,  $M'y'$  du trièdre  $\mathfrak{C}'_0$  de façon à annuler le plus grand nombre possible d'éléments  $\xi, \eta, p, q$ . Supposons d'abord que l'expression  $h = p\xi + q\eta$ , invariante pour tous les changements de trièdres trirectangles (conservant  $g$  comme troisième axe), soit  $\neq 0$ ; on ne peut annuler au plus que  $p$  et  $\xi$  (ou  $q$  et  $\eta$ ). La chose est d'ailleurs possible, et d'une seule façon; car, quel que soit  $M''$ , le point

$$P = M'' + \frac{\omega \wedge \mathbf{V}_e(M'')}{\omega^2}$$

appartient à l'axe instantané  $\Delta$  de  $\frac{\mathfrak{C}'_0}{\mathfrak{C}'_1}$ . En particulier, si  $M''$  coïncide avec le point cherché  $M'$ , le vecteur  $\omega \wedge \mathbf{V}_e$ , orthogonal à  $\Delta$ , sera dirigé suivant l'axe des  $x$  de  $\mathfrak{C}'_0$  (car  $\xi = 0 = p$ ); cet axe est donc la perpendiculaire commune à  $\Delta$  et  $g$  et  $M'$  est le pied sur  $g$  de cette perpendiculaire. D'ailleurs le trièdre  $\mathfrak{C}'_0$  ainsi construit répond manifestement à la question.

Or, pour  $\xi = 0 = p$  (et  $\zeta' \neq 0$ ) les formules fondamentales (18) donnent

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \frac{\eta^2}{\zeta'}, \\ \frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = -\frac{q\eta}{\zeta'}, \\ \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} - \frac{rt - s^2}{t} = -\frac{q^2}{\zeta'}. \end{array} \right.$$

Ces formules deviennent illusoires pour  $t = 0$ . Mais alors les formules fondamentales donnent

$$r_1 - r = -\frac{(q + \eta s)^2}{\zeta'}, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t = 0.$$

On peut simplifier encore les formules (26). Posons en effet :

$$(27) \quad s^* = s + \frac{q}{\eta}, \quad s_1^* = s_1 + \frac{q}{\eta};$$

il viendra

$$(28) \quad \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \frac{\eta^2}{\zeta'}, \quad \frac{s_1^*}{t_1} = \frac{s}{t}, \quad \frac{r_1 t_1 - s_1^{*2}}{t_1} = \frac{r t - s^2}{t}.$$

Les formules (26), ou (27), (28), constituent la forme canonique des formules fondamentales. Elles supposent seulement que le trièdre trirectangle  $\mathcal{C}'_0$  admet pour arête la perpendiculaire commune à  $\Delta$  et  $g$  (ce qui le détermine).

21. Les formules (27) sont induites par la transformation

$$z^* = z + \frac{q}{\eta} xy$$

effectuée sur  $S'$  et  $S'_1$ . Appelons  $\Theta S'$  et  $\Theta S'_1$  les surfaces ainsi obtenues (et auxquelles correspondent  $r, s^*, t, r_1, s_1^*, t_1$ ). Si l'on connaissait une transformation de contact simple,  $\tau$ , réalisant (28), on pourrait dire que la correspondance entre les tenseurs de courbure de  $S'$  et de  $S'_1$  est réalisée par la transformation  $\Theta^{-1} \tau \Theta$ .

Dans un autre travail <sup>(1)</sup> j'ai donné une méthode régulière qui permet de trouver une transformation de contact induisant (28). Actuellement, il nous suffira de vérifier qu'on peut adopter pour  $\tau$  la transformation définie simplement par les relations génératrices

$$(\tau) \quad x_1 - x = 0, \quad (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = a^2$$

(en supprimant les astérisques). Suivant la méthode classique, exprimons qu'on a identiquement, quels que soient  $dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1$ ,

$$(y_1 - y)(dy_1 - dy) + (z_1 - z)(dz_1 - dz) + \mu(dx_1 - dx) \\ = \lambda(dz - \bar{p} dx - \bar{q} dy) + \lambda_1(dz_1 - \bar{p}_1 dx_1 - \bar{q}_1 dy_1);$$

il viendra

$$y_1 - y = -\lambda_1 \bar{q}_1 = \lambda \bar{q}, \\ z_1 - z = \lambda_1 = -\lambda, \\ \mu = -\lambda_1 \bar{p}_1 = \lambda \bar{p},$$

(<sup>1</sup>) *Bull. Sc. Math.*, 2<sup>e</sup> sér., t. 64, (1940), p. 12.

d'où

$$\bar{p}_1 = \bar{p}, \quad \bar{q}_1 = \bar{q}, \quad \frac{y_1 - y}{\bar{q}} = \frac{z_1 - z}{-1} = \frac{a}{\sqrt{1 + \bar{q}^2}},$$

en choisissant, par exemple, le radical positivement. Dans le voisinage de l'élément de contact  $(x, y, z, \bar{p} = 0, \bar{q} = 0)$  on aura, en négligeant les termes en  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  devant l'unité,

$$dx_1 = dx, \quad dy_1 = dy + a(s dx + t dy) + \dots,$$

d'où

$$dp_1 = r_1 dx + s_1 [(as + \dots) dx + (1 + at + \dots) dy] = r dx + s dy,$$

et de même pour  $dq_1$ . Ainsi, pour les éléments  $(r, s, t)$ ,  $(r_1, s_1, t_1)$  supportés par l'élément de contact envisagé, on a

$$r_1 = \frac{r + a(rt - s^2)}{1 + at}, \quad s_1 = \frac{s}{1 + at}, \quad t_1 = \frac{t}{1 + at},$$

ce qui équivaut à (28) si l'on prend  $a = \frac{\eta^2}{\zeta}$ . On remarquera que la transformation adoptée pour  $\tau$  change un point M en un cercle de centre M, de rayon constant  $a$ , et de plan parallèle à un plan fixe. La transformation  $\Theta^{-1} \tau \Theta$  change  $(x, y, z)$  en l'ellipse

$$x_1 = x, \quad (y_1 - y)^2 + \left( z_1 + \frac{q}{\eta} x y_1 - z - \frac{q}{\eta} x y \right)^2 = \frac{\eta^4}{\zeta'^2}.$$

22. Supposons maintenant  $p\xi + q\eta = 0$ . Pour  $\omega \neq 0$  le mouvement est tangent à une rotation et la normale  $g$  rencontre l'axe  $\Delta$  ou lui est parallèle. Dans le premier cas on prendra  $M'$  à l'intersection de  $g$  et de  $\Delta$  et l'on dirigera l'axe des  $x$  de  $\mathfrak{C}'_0$  perpendiculairement à  $g$  et  $\Delta$ , ce qui donnera, comme tout à l'heure,  $p = 0 = \xi$ ; mais on aura en plus  $\eta = 0$  et l'on pourra écrire les formules réduites

$$r_1 - r = -\frac{q^2}{\zeta'}, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t$$

qui sont d'ailleurs un cas particulier de (26). Si  $g$  est parallèle à  $\Delta$ , on prendra  $M'$  quelconque sur  $g$  et l'axe des  $x$  de  $\mathfrak{C}'_0$  dans le plan  $(g, \Delta)$ , d'où

$$p = 0 = q = \xi$$

et

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \frac{\eta^2}{\zeta'}, \quad \frac{s_1}{t_1} = \frac{s}{t}, \quad \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} = \frac{rt - s^2}{t}.$$

Ces relations, qui servent également dans le cas d'un mouvement tangent à une translation, sont encore un cas particulier de (26).

23. Les formes canoniques précédentes sont applicables uniformément à tous les couples  $(S, S_1)$  normaux à  $g$ ; ils relient les deux tenseurs de courbure communs respectivement aux surfaces parallèles à  $S$  et aux surfaces parallèles à  $S_1$ , suivant une loi simple, exprimée au moyen d'un système de référence qui ne dépend que de  $g$ . Au contraire, les formules que nous allons donner seront valables pour des trièdres de référence  $\mathfrak{T}_0$  variant en général avec  $S$  et  $S_1$ ; le trièdre ne restera fixe que pour les couples passant par un point déterminé (qui pourra être quelconque) de  $g$  et se touchant suivant une courbe  $c$  de tangente déterminée normale à  $g$  (et pouvant être quelconque). Nous construirons d'ailleurs  $\mathfrak{T}_0$  de façon que  $\mathbf{j}_0$  soit parallèle à la tangente à  $c$ . L'équation (6) devra donc se réduire à  $\alpha = 0$ , ce qui entraînera  $B = 0$ , et par suite  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t$ , avec

$$r_1 = r - \frac{A^2}{A\xi + \zeta'};$$

et  $A_1$  étant toujours défini par (10), les formules fondamentales (9) s'écriront (pour  $\xi \neq 0$ )

$$(29) \quad \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A} = \frac{\xi}{\zeta'}, \quad s_1 = s, \quad t_1 = t.$$

24. La formule (60) obtenue par Koenigs ( $K_2$ , p. 142) n'est qu'un cas très particulier des formules précédentes. Effectivement, proposons-nous de remplacer  $S$  et  $S_1$  par deux surfaces parallèles,  $S'$ ,  $S'_1$ , passant par un point  $M'$  de  $g$  choisi de telle sorte que pour le trièdre  $\mathfrak{T}'_0$ , construit comme au n° 23 relativement à  $S'$  et  $S'_1$ , on ait en outre  $t = 0$ . Soit  $c'$  la courbe de contact de  $S'$  et  $S'_1$ . Le long de  $c'$ , à partir de  $M'$ , on aura sur  $S'$ ,  $\varepsilon$  étant un infiniment petit et  $\mathbf{k}'$  le vecteur-unité de la normale à  $S'$  et  $S'_1$

$$(30) \quad dM = \varepsilon \mathbf{j}_0, \quad d\mathbf{k}' = -\varepsilon s \mathbf{i}_0,$$

d'où

$$(31) \quad dM d\mathbf{k}' = 0$$

et

$$(32) \quad \frac{(\mathbf{k}', d\mathbf{k}', dM)}{d\mathbf{k}'^2} = -\frac{1}{s},$$

car en  $M'$  on a  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_0$ . D'ailleurs, puisque  $B = 0$  et  $t = 0$  (les notations  $r, s, t$  se rapportant à  $S'$ ), on a  $s\xi - p = 0$ . Réciproquement, (31) et (30)<sub>1</sub> entraînent (30)<sub>2</sub> ou  $t = 0$ . Or d'après (31),  $M'$  est le point central de la réglée  $R$  lieu des normales communes à  $S'$  et  $S'_1$  le long de  $c'$ ; et d'après (32) le paramètre de distribution de  $g$  sur  $R$  est

$$\frac{1}{s} = \frac{\xi}{p}.$$

Cela étant, les formules (29) s'écriront

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A} = \frac{\xi}{\xi'}, \quad s_1 = s \left( = \frac{p}{\xi} \right), \quad t_1 = t (= 0)$$

avec

$$A = r\xi + \frac{p\eta}{\xi} + q, \quad A_1 = r_1\xi + \frac{p\eta}{\xi} + q.$$

Observons d'ailleurs que le point central peut être déterminé à partir de  $S$  et  $S_1$ , car  $S'$  et  $S'_1$  étant parallèles à  $S$  et  $S_1$ ,  $R$  est aussi la réglée lieu des normales communes à  $S$  et  $S_1$ . On a ainsi retrouvé la construction de G. Kœnigs (1).

25. *Pratiquement, cette construction exige un calcul supplémentaire* : la détermination du point central, que l'on pourra effectuer comme il suit. Les axes  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0$  de  $\mathfrak{C}_0$  ayant été menés tangentiellement aux lignes de courbure de  $S$  et  $S_1$ , on aura pour  $rt \neq 0$

$$r = \frac{1}{R_1}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{R_2},$$

$R_1$  et  $R_2$  étant les rayons de courbure principaux de  $S$ , de sorte que les centres de courbure principaux seront les points  $M + R_1 \mathbf{k}_0$ ,

(1) Voici le tableau de concordance des notations (G. K.) de Kœnigs avec les nôtres (R. G.)

(G. K.).....	$\Lambda$	$\Lambda'$	$R$	$S$	$T$	$R_1$	$S_1$	$T_1$	$\omega_1$	$\omega_2$	$u_1$	$u_2$	$u'$
(R. G.).....	$A\xi^{-1}$	$A_1\xi^{-1}$	$r$	$s$	$t$	$r_1$	$s_1$	$t_1$	$p$	$q$	$\xi$	$\eta$	$\zeta'$

D'ailleurs  $r, s, t, r_1, s_1, t_1$  se rapportent à  $S'$  et  $S'_1$ .

$M + R_2 \mathbf{k}_0$ . L'équation (6) s'écrira

$$(33) \quad (\xi + qR_1)r\alpha + (\eta - pR_2)t\beta = 0.$$

Posons

$$(34) \quad \text{tang } \psi = -\frac{\xi + qR_1}{\eta - pR_2};$$

le point central de R sera  $M + a \mathbf{k}_0$  [voir (42), p. 148], avec

$$(35) \quad a = \frac{r\alpha^2 + t\beta^2}{r^2\alpha^2 + t^2\beta^2} = R_1 \cos^2 \psi + R_2 \sin^2 \psi,$$

et le paramètre de distribution de  $g$  sur R sera égal à

$$k = \frac{(t-r)\alpha\beta}{r^2\alpha^2 + t^2\beta^2} = (R_1 - R_2) \sin \psi \cos \psi.$$

Pour  $t = 0$  on trouverait aussitôt

$$a = \frac{1}{r} = R_1, \quad k = -\frac{\beta}{\alpha r} = -\frac{\xi r + q}{pr}.$$

Mais, pratiquement, le choix du point central ne présente aucun intérêt particulier qui puisse justifier ces calculs. On peut même ajouter que *dans certains cas l'adoption du point central comme origine de  $\mathcal{E}_0$  peut conduire à des complications qui rendent inapplicable la méthode de G. Kœnigs*. En effet, en procédant comme au n° 21, on trouve pour la surface  $S'$  parallèle à  $S$  et menée par le point  $M' = M + a\mathbf{k}_0$  (l'axe  $\mathbf{i}_0$  perpendiculaire à  $g$  a une direction quelconque, et  $r', s', t'$  sont évalués en  $M'$ ):

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r - a(rt - s^2)}{1 - a(r + t) + a^2(rt - s^2)}, \\ s' &= \frac{s}{1 - a(r + t) + a^2(rt - s^2)}, \\ t' &= \frac{t - a(rt - s^2)}{1 - a(r + t) + a^2(rt - s^2)}. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{i}_0$  est tangent à une ligne de courbure de  $S$ ,  $s = 0$  et  $r', s'$  sont indéterminées pour  $at = 1$ , tandis que  $t'$  devient infini; une circonstance analogue se produit pour  $ar = 1$ : ce sont les cas où le point central de  $g$  coïncide avec un centre de courbure principal de  $S$ . Or d'après



(35) ceci exige, pour  $rt \neq 0$  : soit  $R_1 = R_2$ , soit  $\sin \psi = 0$ , soit  $\cos \psi = 0$ . Mais d'après (34)  $\cos \psi = 0$  entraîne  $\eta - pR_2 = 0$  ou  $B = 0$  : on est donc dans un cas où l'on peut écrire d'emblée la formule réduite (29) sans avoir à modifier le trièdre de coordonnées adopté au début. De même, dans le cas de l'ombilic ( $R_1 = R_2$ ), du point parabolique  $t = 0$  (ou  $r = 0$ ) on aura encore  $a = R_1$  (ou  $R_2$ ). Enfin si  $r = 0 = t = (s)$ , c'est-à-dire si M est un point méplat, le point central devient complètement indéterminé.

Or dans tous ces cas les formules fondamentales (18) ou (29) restent applicables au point initial; les formules (S) permettent en outre de calculer  $r'_1, s'_1, t'_1$  pour la surface  $S'_1$  passant par le point central, même dans le cas où  $r', s', t'$  se présentent sous forme de fractions à numérateurs non tous nuls et à dénominateurs nuls : on sort ainsi de la difficulté soulevée par la méthode de G. Kœnigs.

26. Si l'on revient aux notations X, Y, Z, T, U,  $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1$  du n° 13, on voit que les valeurs de  $r, s, t, r_1, s_1, t_1$  correspondant aux formules de Kœnigs satisfont aux relations

$$(36) \quad \frac{X_1}{X} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{U_1}{U}$$

avec  $T_1 = 0 = T$ . Plus généralement, nous allons chercher tous les cas où les formules fondamentales entraînent les trois relations que l'on déduit de

$$(37) \quad \frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{U_1}{U}$$

par la suppression de l'un des rapports (et vérifient  $XU - YT + Z^2 = 0$ ). Considérons, par exemple, le système (36), et désignons par  $\lambda$  la valeur commune des rapports; (36) équivaudra au système

$$(38) \quad \bar{X}_1 = 0, \quad \bar{Z}_1 = 0, \quad \bar{T}_1 = 0, \quad \bar{U}_1 = 0,$$

les symboles  $\bar{X}_1, \dots, \bar{U}_1$  désignant des formes linéaires en X, Z, T, U qui se déduisent des formes  $X_1, \dots, U_1$  du n° 13 [formules (S)] moyennant la substitution de  $\zeta' - \lambda$  à  $\zeta'$ . Or en vertu de la propriété des mouvements inverses (n° 14), les équations (38) admettent en X, ..., U

une solution bien déterminée, à un multiplicateur près, si  $\zeta' \neq \lambda$ ; et l'on obtient une telle solution en remplaçant dans les formes (S) les variables X, Z, T et U par o, et  $\zeta'$  par  $-\zeta' + \lambda$ . Pour  $\zeta' \neq \lambda$ , la solution de (38) est donc

$$\frac{X}{\xi^2} = \frac{Y}{\lambda - \zeta' - p\eta - q\xi} = \frac{Z}{p\xi} = \frac{T}{o} = \frac{U}{-p^2};$$

on a  $XU - YT + Z^2 = o$ , et l'on retrouve bien les données de Kœnigs :

$$s = \frac{p}{\xi}, \quad t = o, \quad rt - s^2 = -\frac{p^2}{\xi^2}.$$

Supposons  $\lambda = \zeta'$ . Des équations  $T_1 = \zeta'T$ ,  $U_1 = \zeta'U$  on tire X et Y (pour  $p \neq o$ ); les valeurs obtenues satisfont à  $X_1 = \zeta'X$ ,  $Z_1 = \zeta'Z$ , ainsi d'ailleurs qu'à  $Y_1 = \zeta'Y$ ; on aura donc  $r_1 = r$ ,  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t$ ; c'est le cas de l'osculation, solution qu'on pouvait prévoir *a priori*. Si  $p = o \neq q$  et  $\xi \neq o$ , la relation  $U_1 = \zeta'U$  entraîne  $Z_1 = \zeta'Z$  et  $T_1 = \zeta'T$ ; de  $X_1 = \zeta'X$  on tire alors  $Y_1 = \zeta'Y$  et la conclusion reste la même. Pour  $p = o = \xi \neq q$ , on retrouve  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t = o$ . Si  $p = o = q$ , on trouve, soit  $rt - s^2 \neq o$  et alors  $\xi = o = \eta$  (osculation), soit pour  $rt - s^2 = o$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{s_1}{s} = \frac{t_1}{t} = \frac{\zeta'}{\zeta' + \xi^2 r + 2\xi\eta s + \eta^2 t}.$$

Remarquons que dans ce dernier cas, ou bien  $g$  rencontre l'axe instantané  $\Delta$  ( $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$  tangent à une rotation), ou bien  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$  est tangent à une translation.

On traiterait de même les systèmes déduits de (37) par la suppression d'un rapport autre que  $\frac{Y_1}{Y}$ . Dans tous les cas, on trouvera que les systèmes obtenus sont vérifiés si S et S<sub>1</sub> sont osculatrices. Cette solution banale écartée, on aboutira aux résultats suivants [où  $\lambda$  désigne la valeur commune des rapports (37)].

I :  $\lambda \neq \zeta'$ . 1° Les équations

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T}$$

sont vérifiées pour

$$(\alpha) \quad X = 0, \quad Y = \eta^2, \quad Z = -\xi\eta, \quad T = \xi^2, \quad U = \lambda - \zeta' + p\eta - q\xi$$

et l'on a d'ailleurs

$$U_1 = \lambda(\zeta' + p\eta - q\xi) - \zeta'^2.$$

S admet une singularité avec  $r, s, t, rt - s^2$  infinis, mais de rapports mutuels déterminés, la même circonstance se produisant pour  $S_1$ ; et, en particulier, le cas se présente si S et  $S_1$  se réduisent à deux courbes. Nous y reviendrons.

2° Les équations

$$\frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{U_1}{U}$$

sont vérifiées pour

$$(\beta) \quad X = \lambda - \zeta' - p\eta + q\xi, \quad Y = -q^2, \quad Z = pq, \quad T = -p^2, \quad U = 0;$$

S et  $S_1$  se touchent en un point qui est parabolique pour ces deux surfaces, et, en particulier, le cas se présente si S et  $S_1$  sont deux développables tangentes suivant une génératrice. Nous y reviendrons.

La suppression de  $\frac{Z_1}{Z}$  ne donne rien (car elle entraîne  $\lambda = \zeta'$ ).

II :  $\lambda = \zeta'$ . On trouve les systèmes suivants :

1° Pour  $\xi = 0 = \eta, X = 0$  :

$$X = 0 = X_1; \quad \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \zeta', \quad U_1 = -p^2Y - 2pqZ - q^2T + \zeta'U,$$

S et  $S_1$  admettent une singularité de la même nature que précédemment (I, 1°) ou se réduisent à des courbes;  $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}$  est tangent à une rotation;  $g$  coupe l'axe  $\Delta$ .

2° Pour  $p = 0 = q, U = 0$ ,

$$U = 0 = U_1, \quad \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \zeta'; \quad X_1 = \zeta'X + \xi^2Y + 2\xi\eta Z + \eta^2T.$$

Mêmes circonstances que plus haut (I, 2°);  $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}$  est tangent à une rotation ( $g$  étant parallèle à  $\Delta$ ) ou à une translation.

## DEUXIÈME PARTIE.

## APPLICATIONS.

## I. — Variation de la loi des courbures (surfaces).

27. Nous avons vu que, dans l'espace comme dans le plan, la loi des courbures s'exprime par des homographies valables chacune pour une droite  $g$  (normale à la vitesse d'entraînement de l'un quelconque de ses points). Mais dans le plan la formule de Savary montre en outre comment varie la relation d'homographie quand  $g$  tourne autour du centre instantané. Dans l'espace peut-on donner un résultat analogue quand  $g$  varie dans le complexe linéaire  $\mathcal{L}$  des normales aux trajectoires? Afin de répondre à la question nous allons montrer d'abord comment on peut évaluer géométriquement  $\zeta'$  pour une droite quelconque de  $\mathcal{L}$ . Auparavant, nous rappellerons des résultats relatifs à la courbure des surfaces réglées non cylindriques, résultats que nous utiliserons d'ailleurs à diverses reprises.

28. Désignons <sup>(1)</sup> par  $\Delta_0$  une génératrice d'une surface réglée  $\Sigma_0$ , par  $\mathbf{H}_0$  un vecteur-unité de  $\Delta_0$ , et supposons que  $\Sigma_0$  ne soit pas un cylindre. L'extrémité du vecteur  $\mathbf{H}_0$  mené par un point fixe  $O$  décrit l'indicatrice sphérique  $\gamma$  de  $\Sigma_0$ ; soient  $\nu$  l'arc de  $\gamma$  et  $\mathbf{T}_0$  le vecteur-unité de la tangente à  $\gamma$ ; posons  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{T}_0$ . Nous aurons les formules de Frenet sphériques pour  $\gamma$ :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{T}_0}{d\nu} = \frac{\mathbf{G}_0}{\rho_0} - \mathbf{H}_0, \\ \frac{d\mathbf{G}_0}{d\nu} = -\frac{\mathbf{T}_0}{\rho_0}, \\ \frac{d\mathbf{H}_0}{d\nu} = \mathbf{T}_0; \end{array} \right.$$

(1) L'indice 0 dans les notations actuelles  $\Delta_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{G}_0, \dots$  a pour but d'éviter toute confusion entre la signification actuelle de ces lettres et celle que nous donnerons ultérieurement à  $\Delta, \mathbf{H}, \mathbf{T}, \mathbf{G}, \dots$

$\varphi_0 = \text{tang} \varphi_0$  désigne le rayon de courbure géodésique de  $\gamma$  sur la sphère, et  $\varphi_0$  son rayon de courbure sphérique.

Cela étant, la réglée  $\Sigma_0$  sera définie par la donnée d'une courbe directrice  $\mathcal{C}$ , lieu d'un point  $M(v)$  pris arbitrairement sur la génératrice variable  $\Delta_0(v)$ ; et en dérivant sur  $\mathcal{C}$  il viendra

$$(40) \quad \frac{dM}{dv} = -a\mathbf{T}_0 + k_0\mathbf{G}_0 + c_0\mathbf{H}_0.$$

Le point central de la génératrice est

$$(41) \quad I_0 = M + a\mathbf{H}_0,$$

et l'on a d'ailleurs

$$(42) \quad a = -\frac{d\mathbf{H}_0}{d\mathbf{H}_0^2} \frac{dM}{dv};$$

le paramètre de distribution de la génératrice a pour valeur

$$(43) \quad k_0 = \frac{(\mathbf{H}_0, d\mathbf{H}_0, dM)}{d\mathbf{H}_0^2}.$$

En particulier si  $\mathcal{C}$  est la ligne de striction,  $M = I$ ,  $a = 0$  et

$$(44) \quad c_0 = k_0 \cot V,$$

$V$  étant l'angle sous lequel la ligne de striction coupe  $\Delta_0$  (cet angle est évalué dans le sens direct pour un observateur dirigé suivant  $\mathbf{T}_0$ ).

Le trièdre  $I_0\mathbf{T}_0\mathbf{G}_0\mathbf{H}_0$  sera dit le *trièdre central* de  $\Sigma_0$  relatif à  $\Delta_0$ .

Un point quelconque de la génératrice  $\Delta_0$  peut être représenté par

$$(45) \quad P = M + u_1\mathbf{H}_0,$$

$u_1$  étant son abscisse sur  $\Delta_0$  à partir de  $M$ . On aura sur  $\Sigma$  :

$$(46) \quad dP = \mathbf{H}_0 du + [(u_1 - a)\mathbf{T}_0 + k_0\mathbf{G}_0 + c_0\mathbf{H}_0] dv.$$

Si  $M$  coïncide avec le point central, on écrira plus simplement avec  $u = u_1 - a$  :

$$(47) \quad P = I_0 + u\mathbf{H}_0,$$

$$(48) \quad dP = \mathbf{H}_0 du + (u\mathbf{T}_0 + k_0\mathbf{G}_0 + c_0\mathbf{H}_0) dv.$$

Définissons un angle  $\alpha$  par les formules

$$(49) \quad -\frac{\sin \alpha}{u} = \frac{\cos \alpha}{k_0} = \frac{1}{b} \quad (b = \sqrt{u^2 + k_0^2}),$$

et posons

$$(50) \quad \begin{cases} \mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_0 \cos \alpha + \mathbf{G}_0 \sin \alpha, \\ \mathbf{g}_0 = -\mathbf{T}_0 \sin \alpha + \mathbf{G}_0 \cos \alpha; \end{cases}$$

le vecteur  $\mathbf{g}_0$  est dans le plan tangent à  $\Sigma_0$  en M;  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{g}_0 \wedge \mathbf{H}_0$  sera normal à  $\Sigma_0$  en M et nous pourrons considérer  $\mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{t}_0$  comme les vecteurs-unités respectifs d'un trièdre trirectangle direct MX, MY, MZ dont l'axe MZ est normal à  $\Sigma_0$  en M.

Soit  $Z = F(X, Y)$  l'équation de  $\Sigma_0$  par rapport à ce trièdre; nous allons calculer les dérivées secondes de F au point M. On a, d'après (48), (49) et (50)<sub>2</sub> :

$$dP = \mathbf{H}_0 du + (b \mathbf{g}_0 + c_0 \mathbf{H}_0) dv,$$

soit

$$(51) \quad dP = \mathbf{g}_0 dX + \mathbf{H}_0 dY,$$

avec

$$dX = b dv, \quad dY = du + c_0 dv,$$

d'où

$$du = \frac{b dY - c_0 dX}{b}, \quad dv = \frac{dX}{b}.$$

Différentions dP; il viendra

$$\mathbf{t}_0 d^2P = (\mathbf{t}_0 d\mathbf{g}_0) dX + (\mathbf{t}_0 d\mathbf{H}_0) dY;$$

mais d'après (39) et (50),

$$\mathbf{t}_0 d\mathbf{g}_0 = -\frac{dv}{\rho_0} - d\alpha, \quad \mathbf{t}_0 d\mathbf{H}_0 = \cos \alpha dv;$$

d'autre part, d'après (49) :

$$d\alpha = \frac{uk'_0 dv - k_0 du}{b^2} = \frac{uk'_0}{b^2} dX + \frac{k_0}{b^3} (c_0 dX - b dY) \quad \left(k'_0 = \frac{dk_0}{dv}\right).$$

On aura donc

$$\mathbf{t}_0 d^2P = -\frac{dX^2}{b\rho_0} - \frac{uk'_0}{b^3} dX^2 - \frac{k_0}{b^3} (c_0 dX - b dY) dX + \frac{k_0}{b^2} dX dY,$$

d'où pour les dérivées cherchées,  $r_0, s_0, t_0$  :

$$(52) \quad -b^2 r_0 = \frac{u^2 + k_0^2}{\rho_0} + uk'_0 + k_0 c_0, \quad b^2 s_0 = k_0, \quad t_0 = 0.$$

29. Abordons maintenant le calcul de  $\zeta'$ . Supposons d'abord qu'à l'instant envisagé le mouvement  $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1}$  ne soit pas tangent à une translation et que les axoïdes  $\Sigma, \Sigma_1$  ne soient pas des cylindres. Adoptons les notations  $\mathbf{I}, \mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, k$ , pour la génératrice  $\Delta$  de  $\Sigma$  qui est l'axe instantané; ces notations resteront d'ailleurs valables sur  $\Sigma_1$ ; enfin, le coefficient  $c_0$  sera désigné par  $c_m$  ou  $c_f$  suivant que  $\Delta$  sera considérée comme appartenant à  $\Sigma$  ou à  $\Sigma_1$ .

Cela étant, on peut écrire pour la vitesse d'un point M de  $\mathfrak{E}$

$$\mathbf{V}(\mathbf{M}) = \omega(\mathbf{H} \wedge \mathbf{M} - \mathbf{I}) + \mathbf{V}_c(\mathbf{I}) = \omega(\mathbf{H} \wedge \mathbf{M} - \mathbf{I}) + \omega h \mathbf{H},$$

$\omega \mathbf{H}$  désignant la rotation instantanée et  $h$  le pas réduit instantané de  $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1}$ . On en tire :

$$(53) \quad \left[ \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{M})}{dt} \right]_{\mathfrak{E}} = \frac{\omega'}{\omega} \mathbf{V}(\mathbf{M}) + \mathbf{A}$$

avec

$$\mathbf{A} = \omega \mathbf{W}(\mathbf{T} \wedge \mathbf{M} - \mathbf{I}) - \omega \mathbf{W}[\mathbf{H} \wedge (k\mathbf{G} + c_m \mathbf{H})] + \omega h' \mathbf{H} + \omega \mathbf{W} h \mathbf{T};$$

on a posé d'ailleurs :

$$(54) \quad \omega' = \frac{d\omega}{dt}, \quad \mathbf{W} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad h' = \frac{dh}{dt},$$

les trois dérivées étant calculées à l'instant envisagé,  $t_0$ . On en déduit

$$(55) \quad \mathbf{A} = \omega \mathbf{W} \left[ (\mathbf{T} \wedge \mathbf{M} - \mathbf{I}) + (h + k) \mathbf{T} + \frac{h'}{\mathbf{W}} \mathbf{H} \right].$$

Or nous avons posé  $\zeta' = \mathbf{k} \left[ \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{M})}{dt} \right]_{\mathfrak{E}}$ , la dérivée étant calculée en  $t_0$  (n° 8); d'après (1) et (53) on aura donc

$$(56) \quad \zeta' = \mathbf{A} \mathbf{k}.$$

En vertu de (55) et (56),  $\zeta'$  est le moment résultant par rapport à  $g$  d'un certain système de vecteurs glissants, et l'on vérifie bien que  $\zeta'$  ne

dépend que de  $g$  (n° 20). Les droites satisfaisant à  $\zeta' = 0$  constituent le complexe auxiliaire  $\mathcal{L}'$  de Kœnigs ( $K_1$ , p. 41); la congruence linéaire intersection des complexes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  est le lieu des droites vérifiant  $\zeta = 0 = \zeta'$ , et que nous appellerons *normales singulières* (normales stationnaires de G. Kœnigs,  $K_1$ , p. 37).

Supposons maintenant que les axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  soient deux cylindres. Nous désignerons par  $I$  la trace de l'axe instantané  $\Delta$  sur un plan quelconque  $\Pi_1$ , lié à  $\mathfrak{C}_1$  et choisi une fois pour toutes, normal aux génératrices de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ . On trouvera actuellement que (56) reste encore valable, mais avec

$$\mathbf{A} = -\omega \left( \mathbf{H} \wedge \frac{dI}{dt} \right) + \omega h' \mathbf{H},$$

$\mathbf{H}$  étant toujours le vecteur unité de  $\Delta$ . Or

$$\left( \frac{dI}{dt} \right)_{\mathfrak{C}} = \left( \frac{dI}{dt} \right)_{\mathfrak{C}_1} - h \omega \mathbf{H};$$

nous poserons

$$\left( \frac{dI}{dt} \right)_{\mathfrak{C}_1} = \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{T}, \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{G};$$

ainsi

$$(57) \quad \mathbf{A} = \omega (-\mathbf{W}_1 \mathbf{G} + h' \mathbf{H}).$$

Enfin, supposons  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}_1}$  tangent à une translation en l'instant  $t_0$ ; nous écrirons,  $O$  étant un point lié à  $\mathfrak{C}$ , choisi une fois pour toutes, et  $t$  étant quelconque

$$\mathbf{V}(M, t) = \mathbf{V}_0(t) + \omega(t) \wedge M - O,$$

$\mathbf{V}_0$  désignant la vitesse de  $O$ ; d'où, en  $t_0$  :

$$\left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\mathfrak{C}} = \left( \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} \right)_{\mathfrak{C}} + \omega' \wedge M - O.$$

On pourra donc conserver encore (56) à condition de prendre

$$(58) \quad \mathbf{A} = \left( \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} \right)_{\mathfrak{C}} + \omega' \wedge M - O$$

et dans les deux derniers cas  $\mathbf{A}$  est encore le moment résultant par rapport à  $g$  d'un certain système de vecteurs glissants.



30. Ces préliminaires établis, nous distinguerons, pour établir les formules réduites les différents cas suivants :

1° Le mouvement $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_1}$ possède en $t_0$ un axe instantané $\Delta$ :	Cas.
$h \neq 0$ {	Les axoïdes sont quelconques { $g$ ne rencontre pas $\Delta$ . . . . . I
	$g$ rencontre $\Delta$ orthogonalement . . . . . II
	Les axoïdes sont cylindriques { $g$ ne rencontre pas $\Delta$ . . . . . III
$h = 0 = h'$ {	Les axoïdes sont quelconques { $g$ rencontre $\Delta$ . . . . . V
	$g$ est parallèle à $\Delta$ . . . . . VI
	Les axoïdes sont cylindriques { $g$ rencontre $\Delta$ . . . . . VII
2° Le mouvement est tangent à une translation . . . . . IX	

Nous n'envisagerons pas le cas où  $h = 0 \neq h'$ . D'ailleurs, dans tout ce qui suit, le point de contact de  $S$  et  $S_1$  sera désigné par  $M$ . Ce point est choisi sur  $g$  comme il est indiqué dans chaque cas, ce qui n'implique d'ailleurs aucune restriction (n° 20).

31. Cas I. — Désignons par  $M$  et  $J$  les intersections respectives de  $g$

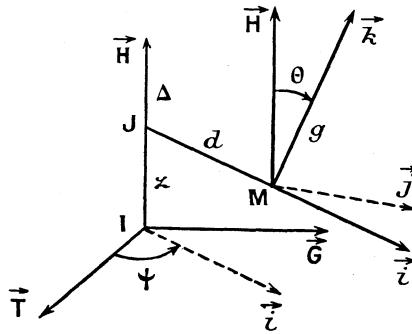


Fig. 3.

et  $\Delta$  avec leur perpendiculaire commune; et soient  $x, y, z$  les coordonnées de  $M$  par rapport au trièdre central des axoïdes; on a ainsi

$$M = I + x\mathbf{T} + y\mathbf{G} + z\mathbf{H}$$

et d'après (55), (56)

$$(59) \quad \zeta' = \omega W \mathbf{k} \left[ (h + k)\mathbf{T} - z\mathbf{G} + \left( y + \frac{h'}{W} \right) \mathbf{H} \right].$$

Nous introduisons les notations suivantes, dont nous nous servirons constamment dans la suite. Nous poserons

$$(60) \quad x = d \cos \psi, \quad y = d \sin \psi;$$

pour l'étude d'une droite  $g$  particulière on pourra prendre  $d > 0$ , quitte à attribuer un signe à  $d$  si  $g$  varie par continuité. L'orientation du trièdre  $\mathcal{T}(M, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  du n° 8 par rapport au trièdre central sera définie par le tableau de cosinus.

$$(61) \quad \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{T} & \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \\ \hline \mathbf{G} & \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ \hline \mathbf{H} & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array}$$

Or on a

$$\mathbf{V}_e(M) = \omega(\mathbf{H} \wedge M - \mathbf{I}) + \omega h \mathbf{H} = \omega(x \mathbf{G} - y \mathbf{T} + h \mathbf{H}),$$

soit, d'après (60) et (61),

$$\mathbf{V}_e(M) = \omega(d \cos \theta - h \sin \theta) \mathbf{j} + (d \sin \theta + h \cos \theta) \mathbf{k};$$

donc, en vertu de (1)

$$(62) \quad d \sin \theta + h \cos \theta = 0.$$

ce qui définit  $\theta$  à un multiple de  $\pi$  près. Nous poserons pour simplifier l'écriture

$$(63) \quad \frac{\sin \theta}{-h} = \frac{\cos \theta}{d} = \frac{1}{l} \quad (l = \sqrt{h^2 + d^2});$$

nous aurons ainsi

$$\xi = 0, \quad \eta = \omega l, \quad p = 0, \quad q = -\omega \sin \theta.$$

Enfin, d'après (59) et (61),

$$(64) \quad \zeta' = \omega W \left[ -(h+k) \sin \theta \sin \psi - z \sin \theta \cos \psi + \left( y + \frac{h'}{W} \right) \cos \theta \right].$$

On peut ainsi expliciter complètement les formules (26) connaissant les coordonnées  $z, d, \psi$  qui définissent  $g$  dans le complexe  $\mathcal{L}$ , ainsi que

les éléments cinématiques  $\omega$  et  $W$ ; rappelons d'ailleurs la formule de Poinot <sup>(1)</sup> (qu'on obtient en appliquant à  $\mathbf{T}$  ou  $\mathbf{G}$  le théorème de la composition des vitesses)

$$(65) \quad \frac{\omega}{W} = \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m},$$

$\rho_f$  et  $\rho_m$  désignant les rayons de courbure géodésiques des images sphériques de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma$ . On trouvera ainsi

$$(66) \quad \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{l^2}{(h+k) \sin \theta \sin \psi - z \sin \theta \cos \psi + \left( y + \frac{h'}{W} \right) \cos \theta}$$

et deux autres formules analogues.

Le second membre de (66) contient la dérivée  $\frac{h'}{W}$  ou  $\frac{dh}{dv}$ ; or  $h$  dépend déjà des éléments du second ordre des axoïdes. Car, en appliquant à  $\mathbf{I}$  le théorème de la composition des vitesses et en utilisant (40) (pour  $a=0$ ), on trouve

$$(67) \quad h \frac{\omega}{W} = c_f - c_m;$$

posons, conformément à (44),

$$(68) \quad c_f = k \cot V_f, \quad c_m = k \cot V_m,$$

et utilisons (65); il viendra <sup>(2)</sup>, avec  $\rho_f = \text{tg } \bar{\rho}_f$ ,  $\rho_m = \text{tg } \bar{\rho}_m$

$$\frac{h}{k} = \frac{\cot V_f - \cot V_m}{\cot \bar{\rho}_f - \cot \bar{\rho}_m}.$$

Or  $k$ ,  $V_f$ ,  $V_m$  sont des éléments différentiels du premier ordre, et  $\rho_f$ ,  $\rho_m$  des éléments différentiels du deuxième ordre (relativement aux variations de  $\mathbf{M}$  et de  $\mathbf{H}$ ). La formule (66) introduit donc des éléments différentiels du troisième ordre; ainsi, on ne peut obtenir, dans le cas de l'espace, une formule aussi simple que celle de Savary pour le plan.

Utilisant une remarque faite pour  $\zeta'$  (n° 29), on peut simplifier

<sup>(1)</sup> *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Paris, Bachelier, 1851, p. 22.

<sup>(2)</sup> Cette formule remarquable a été obtenue par M. J. Haag, *Journ. de Math. pures et appl.*, 6<sup>e</sup> série, t. 6, 1910, p. 347. Indépendamment de lui, G. Kœnigs avait donné une formule équivalente [K<sub>1</sub>, p. 105, form. (98)].

l'écriture de la manière suivante. Considérons le système de vecteurs glissants dont l'axe central est la droite  $y + \frac{h'}{W} = 0 = z$  et dont le moment résultant central est  $(h + k)\mathbf{T}$ . Soit  $\mathbf{G}$  le moment résultant de ce système par rapport à  $g$  (orientée suivant  $\mathbf{k}$ ); on pourra remplacer (66) et ses analogues par

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{l^2}{\mathbf{G}}, \\ \frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{l \sin \theta}{\mathbf{G}}, \\ \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} - \frac{rt - s^2}{t} = - \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\mathbf{G}}. \end{array} \right.$$

Si  $t = 0$  on modifiera ces formules comme il a été dit au n° 20. Le cas d'une normale singulière ( $\zeta' = 0$  ou  $\mathbf{G} = 0$ ) a d'ailleurs été étudié au n° 10.

32. *Cas II.* — Les axes étant définis comme pour le cas I, on peut conserver le tableau (61), avec  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , pour obtenir  $\mathbf{j} = \mathbf{H}$ . Il viendra

$$\zeta' = W[(h + k) \sin \psi + z \cos \psi].$$

Actuellement  $h'$  a disparu, et l'on a  $l = h$  d'après (63). Comme au n° 28, introduisons la normale aux axoïdes en  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{G} \sin \alpha,$$

$\alpha$  étant défini par les formules (49) dans lesquelles on fait  $u = z$ ; le

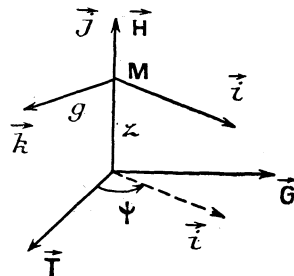


Fig. 4.

vecteur-unité  $\mathbf{j}$  du trièdre  $\mathcal{E}_0$  coïncidant avec  $\mathbf{H}$ , on pourra appliquer

les formules du n° 28 (avec  $u = z$ ) :

$$k \sin \psi + z \cos \psi = b \sin(\psi - \alpha) = b \mathbf{tk};$$

on aura alors, pour  $t \neq 0$ ,

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{h^2}{h \sin \psi + b \sin(\psi - \alpha)}$$

et deux autres formules analogues. Si  $t = 0$ , il viendra  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t = 0$ , avec

$$r_1 - r = - \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{(hs + 1)^2}{h \sin \psi + b \sin(\psi - \alpha)}.$$

A titre de vérification, appliquons cette dernière formule aux axoïdes eux-mêmes. Identifiant  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{k}$ , on trouve  $\psi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ,

$$h \sin \psi + b \sin(\psi - \alpha) = h \cos \alpha + b = \frac{hk + b^2}{b};$$

d'ailleurs pour  $\Sigma$  la dérivée seconde  $s$  (ou  $s_m$ ) =  $\frac{k}{b^2} = s_f$ , les indices  $f$  et  $m$  se rapportant ici, comme plus loin à  $\Sigma_1$  et à  $\Sigma$ ; on aura donc

$$r_f - r_m = - \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{hk + b^2}{b^3}.$$

Or on tire de (52)

$$-(r_f - r_m) = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{1}{b} + \frac{k}{b^3} (c_f - c_m),$$

formule qui coïncide bien avec la précédente, en vertu de (67) et (65).

*Cas III.* — Par rapport au trièdre **ITGH** défini au n° 29 on adoptera pour repérer  $g$  les mêmes notations  $z$ ,  $d$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  que dans le cas I. D'après (57) on pourra donc conserver les formules (69), mais en remplaçant le produit

$$\left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{1}{\mathbf{G}} \quad \text{par} \quad - \left( \frac{1}{\mathbf{R}_f} - \frac{1}{\mathbf{R}_m} \right) \frac{1}{\cos \psi \sin \theta - \frac{h'}{\mathbf{W}_1} \cos \theta};$$

$\mathbf{R}_f$  et  $\mathbf{R}_m$  sont les rayons de courbure des intersections des axoïdes par le plan  $\Pi_1$ , estimés suivant  $\mathbf{G}$ .

*Cas IV.* — On conserve pour le trièdre précédent les notations de II,  $d = 0$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ; on aura  $\zeta' = \omega W_1 \cos \psi$ , d'où par exemple, si  $t \neq 0$

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \right) \frac{h^2}{\cos \psi}.$$

Si  $t = 0$ , on aura  $t_1 = 0$ ,  $s_1 = s$  et

$$r_1 - r = - \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \right) \frac{(hs + 1)^2}{\cos \psi}.$$

Cette formule se vérifie aussitôt pour les axoïdes, puisque  $\mathbf{k} = \mathbf{G}$  donne  $\cos \psi = -1$ .

33. *Cas V.* — Nous définirons toujours les vecteurs-unités  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  de  $\mathcal{C}_0$ , relativement à  $\mathbf{ITGH}$  par le tableau (61), mais cette fois on a  $h = 0$ ,

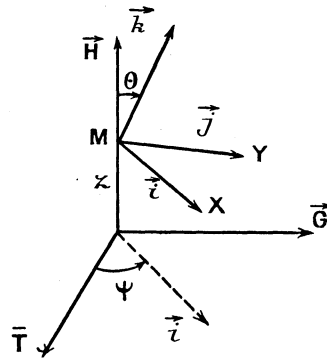


Fig. 5.

$d = 0 = y$ , et  $\theta$  peut être quelconque. Dès lors  $\eta = 0$ ,  $q = -\omega \sin \theta$  et

$$\zeta' = -\omega W(z \cos \psi + k \sin \psi) \sin \theta,$$

soit

$$\zeta' = -\omega W b \sin(\psi - \alpha) \sin \theta,$$

en introduisant toujours pour le point M de  $\Delta$  les notations  $\alpha$  et  $b$  du n° 28 (avec  $u = z$ ). Ainsi (n° 22) dans tous les cas ( $t \neq 0$  ou  $t = 0$ ) on a  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t$  et

$$(70) \quad r_1 - r = \frac{\omega}{W} \frac{\sin \theta}{b \sin(\psi - \alpha)}.$$

Cette formule entraîne des conséquences remarquables. La section de S par le plan  $Y = 0$  a pour centre de courbure le point

$$\mu = M + \frac{1}{r} \mathbf{k} = M + \frac{1}{r} (\mathbf{l} \sin \theta + \mathbf{H} \cos \theta)$$

avec

$$(71) \quad \mathbf{l} = -\mathbf{T} \sin \psi + \mathbf{G} \cos \psi;$$

sa projection sur la droite  $g'$  menée par M et de vecteur-unité  $\mathbf{l}$  est donc le point

$$\mu' = M + R' \mathbf{l}$$

avec

$$R' = \frac{\sin \theta}{r}.$$

Posant de même

$$R'_1 = \frac{\sin \theta}{r_1},$$

on peut écrire (70)

$$(72) \quad \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{1}{b \sin(\psi - \alpha)}.$$

Or si  $\mathbf{l}$  coïncide avec la normale

$$(50)_1 \quad \mathbf{t} = \mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{G} \sin \alpha$$

aux axoïdes en M, on a, d'après (71) et (50)<sub>1</sub> :  $\psi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ; les centres de courbure des sections  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'$  des axoïdes par le plan  $\Pi$  normal à  $\Delta$  en M sont donc les points

$$\mu_f = M + R_f \mathbf{t}, \quad \mu_m = M + R_m \mathbf{t}$$

avec

$$(73) \quad \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = -\frac{1}{b} \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right),$$

résultat qui s'accorde bien avec (52), puisque pour  $h = 0$  on a  $c_f = c_m$ . Posons alors

$$\cos \varphi = \mathbf{l} \mathbf{t} = \sin(\alpha - \psi)$$

et (72) s'écrira

$$(74) \quad \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'} = \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \right) \frac{1}{\cos \varphi},$$

où  $\varphi$  est l'angle des vecteurs-unités,  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{l}$ , des axes sur lesquels sont

situés les centres de courbure  $\mu_f$ ,  $\mu_m$  et  $\mu'_1$ ,  $\mu'$ . En définitive, dans le cas du roulement la loi des courbures présente un caractère très simple et très général. Les égalités  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t$  montrent que *les indicatrices de S et S<sub>1</sub> sont bitangentes suivant la droite X = 0, intersection du plan tangent commun par le plan  $\Pi''$  contenant g et  $\Delta$  (on a d'ailleurs B = 0; n° 11); pour achever de déterminer l'indicatrice de S<sub>1</sub> connaissant celle de S, il suffira d'écrire que les points  $\mu_1$  et  $\mu$ , centres de courbure des sections de S et S<sub>1</sub> par le plan normal à  $\Pi''$  mené par g, se correspondent dans une homographie qui ne dépend que de g (et non de S); cette homographie se projette précisément sur le plan  $\Pi'$  suivant l'homographie classique de Savary qui serait déterminée sur la projection g' de g par le roulement de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma_1$ .*

34. Cas VI. — Prenons pour point M l'intersection de la droite g par le plan normal à  $\Delta$  mené par I. Construisons le trièdre MXYZ

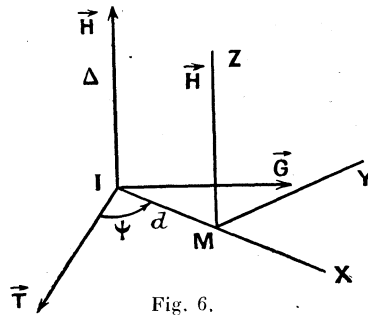


Fig. 6.

de vecteurs-unités

$$\mathbf{i} = \mathbf{T} \cos \psi + \mathbf{G} \sin \psi, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{H},$$

et soit

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + d(\mathbf{T} \cos \psi + \mathbf{G} \sin \psi) = \mathbf{I} + d\mathbf{i}.$$

Il viendra

$$\xi = 0, \quad \eta = \omega d, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad \zeta' = \omega W d \sin \psi$$

et pour  $t \neq 0$ ;

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{d}{\sin \psi},$$

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s}{t}, \quad \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} = \frac{rt - s^2}{t}.$$



Si  $t = 0$ , on écrira

$$r_1 - r = - \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{ds^2}{\sin \psi}, \quad s_1 = s, \quad t_1 = 0 = t.$$

Cas VII. — Les notations  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{W}_1$  étant définies comme pour III et les axes étant ceux de V, on a actuellement

$$\zeta' = -\omega \mathbf{W}_1 \cos \psi \sin \theta$$

et pour  $t \neq 0$  ou  $= 0$  on a les équations  $s_1 = s$ ,  $t_1 = t$  et

$$(75) \quad r_1 - r = \frac{\omega \sin \theta}{\mathbf{W}_1 \cos \psi}.$$

Le théorème donné dans le cas V pour les projections  $\mu'_1$  et  $\mu'$  des centres de courbure  $\mu_1$  et  $\mu$  sur un plan  $\pi'$  normal à  $\Delta$  en M reste valable :  $\mu'$  et  $\mu'_1$  se correspondent dans l'homographie classique de Savary relative aux sections droites des axoïdes. Observons d'ailleurs que le cas actuel comprend lui-même comme cas particulier le problème analogue de la cinématique plane : il suffit de supposer que S et  $S_1$  sont des cylindres, de génératrices parallèles à  $\Delta$ . La droite  $g$  rencontre alors  $\Delta$  à angle droit ; et pour les sections planes de S,  $S_1$ ,  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  par un plan  $\Pi'$  perpendiculaire à  $\Delta$  le problème se réduit au problème classique de Savary.

Cas VIII. — En reprenant les axes du cas VI, on voit que

$$\zeta' = \omega \mathbf{W}_1 \mathbf{Gk} = 0.$$

Le cas est singulier : pour  $t \neq 0$ , on a  $r_1 - r = \frac{s^2}{l}$ ,  $s_1 = 0 = t_1$  ; pour  $t = 0$ ,  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $t_1$  sont indéterminés.

35. Cas IX. — Supposons d'abord  $\omega' \neq 0$ . Le système de vecteurs glissants dont le moment résultant en M est donné par (58) admet un axe central  $\Delta'$ . Prenons pour  $\mathfrak{C}$  un trièdre dont le sommet O est un point de cet axe et dont l'axe des  $z$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{V}$  (M) (indépendant de M et égal à  $\mathbf{V}_0$ ) ; son axe des  $y$  sera pris normal à  $\Delta'$  et à  $\mathbf{V}_0$  ; en général il sera bien déterminé ; les vecteurs-unités de  $Ox$ ,

$Oy$ ,  $Oz$  seront désignés par  $\mathbf{i}_0$ ,  $\mathbf{j}_0$ ,  $\mathbf{k}_0$ . Toutes les droites  $g$  seront parallèles au plan des  $xy$ ; l'une quelconque d'entre elles sera définie

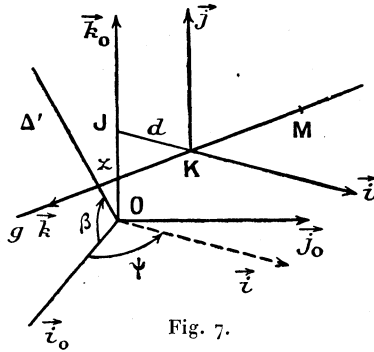


Fig. 7.

par les coordonnées semi-polaires  $d$ ,  $\psi$ ,  $z$  du pied  $K$  sur  $g$  de la perpendiculaire commune  $JK$  à  $Oz$  et à  $g$ . Soient alors

$$\omega' = \omega'(\mathbf{i}_0 \cos \beta + \mathbf{k}_0 \sin \beta),$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}\right)_{\mathfrak{E}} = \alpha(\mathbf{i}_0 \cos \beta + \mathbf{k}_0 \sin \beta),$$

les axes de  $\mathfrak{E}_0$  seront définis en direction, et quel que soit le point  $M$  sur  $g$  par le tableau

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}_0$	$\cos \psi$	0	$\sin \psi$
$\mathbf{j}_0$	$\sin \psi$	0	$-\cos \psi$
$\mathbf{k}_0$	0	1	0

On aura bien  $\xi = 0$ ,  $\eta$  étant égal à la mesure  $V_0$  de  $\mathbf{V}_0$  sur son support, orienté par  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{j}$ , et d'après (56), (58) et (26) il viendra

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = \frac{V_0^2}{\alpha \cos \beta \sin \psi - \omega'(d \sin \beta - z \cos \beta \cos \psi)},$$

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s}{t}, \quad \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} = \frac{rt - s^2}{t}.$$

Ces formules continueraient à être valables si  $\omega' = 0 \neq \alpha$ , et alors le point  $O$  pourrait être choisi arbitrairement dans l'espace. En ce cas,

si  $\alpha \cos \beta = 0$ , toute droite  $g$  est singulière. Réciproquement, on vérifiera sans peine que ce cas est le seul où les complexes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  puissent coïncider.

36. Montrons que *le cas IX n'est qu'un cas-limite des cas antérieurs*. Supposons d'abord que  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  ne soient pas des cylindres, et que, pour une certaine valeur  $\nu_0$  de  $\nu$ ,  $I$  et  $\Delta$  soient rejetés à l'infini. Posons  $\nu - \nu_0 = \varepsilon$  et bornons-nous au cas le plus simple où la ligne de striction de  $\Sigma$  est définie dans  $\mathcal{T}$  par un développement

$$(76) \quad I = O + \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{b} + \dots,$$

les vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ... étant indépendants de  $\varepsilon$ . On aura d'après (39)

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 - \frac{\varepsilon}{\rho_0} \mathbf{T}_0 + \dots, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{T}_0 + \dots$$

En vertu de (76) et de (40) (où  $M = I$  et  $a = 0$ ), on devra prendre

$$k = \frac{k_0}{\varepsilon^2} + \frac{k_1}{\varepsilon} + k_2 + \dots, \quad c = \frac{c_0}{\varepsilon^2} + \frac{c_1}{\varepsilon} + c_2 + \dots$$

et l'on aura, en identifiant les deux expressions de  $\frac{dI}{d\nu}$  résultant de (40) et de (76),

$$\begin{aligned} -\mathbf{a} &= k_0 \mathbf{G}_0 + c_0 \mathbf{H}_0, \\ 0 &= \left( -\frac{k_0}{\rho_0} + c_0 \right) \mathbf{T}_0 + k_1 \mathbf{G}_0 + c_1 \mathbf{H}_0, \end{aligned}$$

d'où

$$k_1 = 0 = c_1, \quad c_0 = \frac{k_0}{\rho_0}.$$

Posons enfin

$$\begin{aligned} \omega &= \omega \mathbf{H} = (\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) (\mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{T}_0 + \dots), \\ h &= \frac{h_0}{\varepsilon} + h_1 + \dots; \end{aligned}$$

il viendra, pour  $M$  indépendant de  $\varepsilon$ ,

$$\mathbf{V}(M) = h \omega + (\omega \wedge M - I) = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= h_0 \omega_1 \mathbf{H}_0 - \omega_1 k_0 \mathbf{T}_0, \\ \mathbf{A}_1 &= (h_0 \omega_1 - k_0 \omega_2) \mathbf{T}_0 - \frac{k_0 \omega_1}{\rho_0} \mathbf{G}_0 + (h_0 \omega_2 + h_1 \omega_1 + k_0 \omega_1) \mathbf{H}_0 + \omega_1 \mathbf{H}_0 \wedge M - O; \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_0$  est la vitesse d'entraînement commune  $\mathbf{V}_0$ , et  $\mathbf{A}_1$  n'est autre que le quotient de (58) par  $W$ .

L'analyse précédente doit être modifiée dans le cas où  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont des cylindres, car  $v$  reste alors constamment nul. Bornons-nous au cas VII du roulement. Posons  $t - t_0 = \tau$ ; soit  $O$  tel que

$$\mathbf{I} = O + \frac{\mathbf{a}}{\tau} + \tau \mathbf{b} + \dots,$$

et soit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{M}) &= (\omega_1 \tau + \omega_2 \tau^2 + \dots) \mathbf{H} \wedge \left( \mathbf{M} - O - \frac{\mathbf{a}}{\tau} - \dots \right) \\ &= -\omega_1 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{a}) + \tau [\omega_1 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{M} - O) - \omega_2 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{a})]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\omega_1 \neq 0$ , on devra avoir  $(\mathbf{k}, \mathbf{H}, \mathbf{a}) = 0$ . Choisissons  $\mathcal{C}$  d'origine  $O$  de telle sorte que  $\mathbf{a} = a \mathbf{i}_0$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{k}_0$ ; on pourra prendre

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0, \quad \text{donc} \quad \mathbf{i} = -\mathbf{k}_0,$$

et il viendra pour les coordonnées de  $l$

$$x = \frac{a}{\tau} + b_1 \tau + \dots, \quad y = b_2 \tau + \dots,$$

de sorte que  $O$  est sur l'asymptote de la section droite roulante  $\Gamma_m$

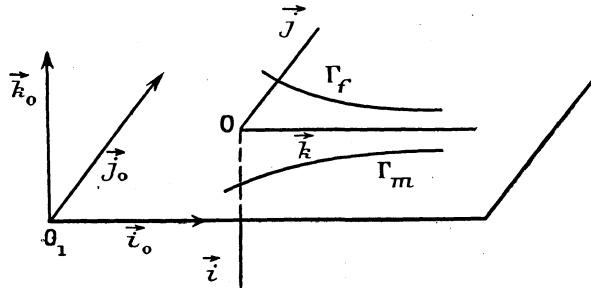


Fig. 8.

et  $\mathbf{k}$  sera parallèle à cette droite. Soit  $\mathbf{M} = O + x \mathbf{i}_0 + y \mathbf{j}_0$ ; on a

$$\omega_1 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{M} - O) - \omega_2 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{a}) = \omega_1 (x \mathbf{j}_0 - y \mathbf{i}_0) - \omega_2 a \mathbf{j}_0,$$

d'où

$$\zeta' = -\omega_1 y.$$

D'ailleurs  $\eta = -\omega_1 (\mathbf{j}, \mathbf{H}, \mathbf{a}) = -a \omega_1$  et l'on aura

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} = -\frac{\omega_1 a^2}{y} \quad \text{avec} \quad \frac{s_1}{t_1} = \frac{s}{t}, \quad \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{t_1} = \frac{rt - s^2}{t}.$$

La première équation est une dégénérescence de la formule classique de Savary; la construction de Bobillier correspondante a été donnée par M. Raoul Bricard (1).

Nous traiterons enfin le cas où  $\Gamma_m$  a une branche parabolique telle que

$$I = O + \frac{a}{\tau^2} + \frac{b}{\tau} + \dots \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_2 \tau^2 + \omega_3 \tau^3 + \dots$$

Il viendra

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\omega_2 \tau^2 + \omega_3 \tau^3 + \dots) \left[ \mathbf{H} \wedge \mathbf{M} - O - \frac{\mathbf{a}}{\tau^2} - \frac{\mathbf{b}}{\tau} - \dots \right] \\ &= -\omega_2 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{a}) - \tau [\omega_2 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{b}) + \omega_3 (\mathbf{H} \wedge \mathbf{a})]. \end{aligned}$$

Conservant pour  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  les notations antérieures, on trouvera

$$\frac{\eta^2}{\zeta'} = \frac{\omega_2 a^2}{b_2}.$$

Dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}_0$ , on passe du centre de courbure d'une courbe (plane) liée à  $\mathcal{C}$  au centre de courbure conjugué au moyen d'une translation parallèle à  $\mathbf{i}_0$ .

37. *Les résultats établis aux nos 34-35 s'appliquent en particulier à l'étude de la courbure des surfaces  $S_1$  lieux des positions des courbes  $C$  liées à  $\mathcal{C}$ .* On choisira parmi les normales à  $C$  en un point donné  $P$  celle qui appartient à  $\mathcal{L}$  et l'on remplacera  $C$  par la surface parallèle passant par le point  $M$  adopté sur  $g$  dans chacun des cas précédents. D'ailleurs, si  $M$  coïncidait avec  $P$ , il n'y aurait aucune difficulté, les quantités  $t^{-1}$  ( $= 0$ ),  $st^{-1}$  et  $(rt - s^2)t^{-1}$  restant finies sur  $C$  (n° 18) et aisément calculables. Si toutes les normales à  $C$  en  $P$  appartiennent à  $\mathcal{L}$ ,  $S_1$  aura en général une singularité, et si le fait se produit quel que soit  $t$ , les positions de  $C$  admettront une enveloppe  $C_1$ , qui sera en général une courbe singulière de  $S_1$ . Nous allons étudier ce cas dans un instant. Enfin, si à l'instant  $t_0$  toutes les normales à  $C$  en chacun de ses points appartiennent à  $\mathcal{L}$ ,  $C$  est une hélice; et ce sera, en général, une courbe singulière de  $S_1$ ; d'ailleurs, si ce fait se produisait quel que soit  $t$ , le mouvement  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_1}$  serait hélicoïdal et  $S_1$  se réduirait aussi à une hélice.

(1) RAOUL BRICARD, *Leçons de Cinématique*, t. I, Paris Gauthier-Villars, 1926, p. 219.

## II. — Variation de la loi des courbures (courbes).

38. En recherchant des cas de simplification pour les formules fondamentales (n° 26), nous avons obtenu deux cas particuliers : celui des courbes  $C$  douées d'enveloppes  $C_1$ , et celui des développables. Nous allons examiner successivement ces deux cas. Nous commencerons par celui des courbes, et nous allons voir que les formules fondamentales fournissent les éléments du second ordre de  $C_1$ , par exemple, en fonction de ceux de  $C$ .

Indiquons d'abord la méthode et les notations que nous emploierons, uniformément, dans tous les cas de figure. Nous introduirons deux trièdres  $\mathfrak{T}_0$ ,  $\mathfrak{T}_0^*$  ayant leur sommet en un point de contact  $m(t)$  de  $C$  et  $C_1$ , et nous affecterons d'un astérisque les notations se rapportant à  $\mathfrak{T}_0^*$ . Les axes  $my_0$ ,  $my_0^*$  seront tangents à  $C$  et  $C_1$  et auront le même sens; le vecteur  $\mathbf{V}_e(m)$  les admettra donc pour support, et l'on aura  $\xi = 0 = \xi^*$ . Dans chacun des cas que nous examinerons, le trièdre  $\mathfrak{T}_0$  sera bien défini et  $\mathfrak{T}_0^*$  s'en déduira par les formules

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}^* \cos \varpi - \mathbf{k}^* \sin \varpi, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i}^* \sin \varpi + \mathbf{k}^* \cos \varpi,$$

où  $\varpi$  est un angle variable, que l'on pourra choisir à volonté, de sorte que  $\mathfrak{T}_0^*$  dépendra d'un paramètre arbitraire. Les notations  $e^*$  et  $e_1^*$  ayant pour  $C$ ,  $C_1$  et  $mz_0^*$  la même signification que  $e$  au n° 18 pour  $C$  et  $Mz$ , les points

$$L = m + e^* \mathbf{k}^*, \quad L_1 = m + e_1^* \mathbf{k}^*$$

appartiendront aux axes de courbure  $D$  et  $D_1$  de  $C$  et  $C_1$ ; leurs coordonnées

$$x_0 = -e^* \sin \varpi, \quad z_0 = e^* \cos \varpi \quad \text{et} \quad x_{01} = -e_1^* \sin \varpi, \quad z_{01} = e_1^* \cos \varpi,$$

par rapport aux axes  $mx_0$ ,  $mz_0$  de  $\mathfrak{T}_0$ , vérifieront donc deux relations

$$(77) \quad z_0 = \lambda x_0 + \nu, \quad z_{01} = \lambda_1 x_{01} + \nu_1,$$

où  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\nu_1$  sont indépendants de  $\varpi$ , et l'on aura

$$(78) \quad e^* = \frac{\nu}{\cos \varpi + \lambda \sin \varpi}, \quad e_1^* = \frac{\nu_1}{\cos \varpi + \lambda_1 \sin \varpi}.$$

Or dans chaque cas nous établirons une relation (R) entre  $e^*$ ,  $e_1^*$  et  $\varpi$ ; remplaçant dans cette relation  $e^*$  et  $e_1^*$  par leurs valeurs (78) et écrivant que l'équation obtenue est vérifiée quel que soit  $\varpi$ , nous aurons les relations cherchées entre les axes de courbure de C et  $C_1$ .

Dès maintenant nous allons établir une formule générale qui donnera dans chaque cas particulier la relation (R) correspondante. D'après les résultats des nos 18, 19, où l'on doit prendre actuellement  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , les variables homogènes X, Y, Z, T, U, relatives à C et  $\mathfrak{C}_0^*$ , ont les valeurs 0, 1, 0, 0,  $(e^*)^{-1}$ , ce qui vérifie les relations ( $\alpha$ ) du n° 26; de même, le quotient  $r_1 : (r_1 t_1 - s_1^2)$ , ou  $Y_1 : U_1$  relatif à  $C_1$  et  $\mathfrak{C}_0^*$  est égal à  $e_1^*$ . Les formules ( $\mathfrak{S}$ ) donnent alors aussitôt :

$$e_1^* = - \frac{(\zeta' - p^* \eta) e^* + \eta^2}{p^{*2} e^* - (\zeta'^* + p^* \eta)}$$

Si  $p^* \neq 0$ , on remplacera cette relation par

$$(79) \quad \frac{1}{p^* e_1^* - \eta} - \frac{1}{p^* e^* - \eta} = - \frac{p^*}{\zeta'^*};$$

et si  $p^* = 0$ , elle se réduit à

$$(80) \quad e_1^* - e^* = \frac{\eta^2}{\zeta'^*}.$$

Cela étant, nous allons distinguer les différents cas auxquels nous avons fait allusion.

1° Le mouvement $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ possède un axe instantané $\Delta$ :	Cas.
$h \neq 0.$ {	Axoïdes quelconques { $m$ n'est pas sur $\Delta \dots$ I
	{ $m$ est sur $\Delta \dots \dots \dots$ II
	Axoïdes cylindriques { $m$ n'est pas sur $\Delta \dots$ III
$h = 0,$ {	Axoïdes quelconques { $m$ n'est pas sur $\Delta \dots$ V
	{ $m$ est sur $\Delta \dots \dots \dots$ VI
$h' = 0.$ {	Axoïdes quelconques { $m$ n'est pas sur $\Delta \dots$ VII
	Axoïdes cylindriques { $m$ est sur $\Delta \dots \dots \dots$ VIII
2° Le mouvement $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ est tangent à une translation $\dots \dots \dots$	IX

39. *Cas I.* — Le point  $m$  est nécessairement le pied sur  $my_0$  de la perpendiculaire commune  $Jm$  à cet axe et à  $\Delta$ . Reprenons alors les notations du n° 31 relatives à  $\mathfrak{T}_0$ ,  $m$  jouant le rôle de  $M$ , et  $mx_0$  étant dirigé suivant  $Jm$ , *fig. 9* (ou  $JM$ , *fig. 3*);  $x = d \cos \psi$ ,  $y = d \sin \psi$  seront les coordonnées de  $m$  par rapport au trièdre central; nous aurons ainsi  $\eta = \omega l$ ,

$$\omega = \omega \mathbf{H} = \omega [-\mathbf{j} \sin \theta + (\mathbf{i}^* \sin \varpi + \mathbf{k}^* \cos \varpi) \cos \theta],$$

d'où  $p^* = \omega \cos \theta \sin \varpi$ , tandis que le vecteur  $\mathbf{A}$  s'écrit

$$(81) \quad \mathbf{A} = \omega W(\mathbf{E}\mathbf{i} + \mathbf{E}'\mathbf{j} + \mathbf{F}\mathbf{k})$$

avec

$$(82) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = (h + k) \cos \psi - z \sin \psi, \\ \mathbf{F} = -[(h + k) \sin \psi + z \cos \psi] \sin \theta + \left(y + \frac{h'}{W}\right) \cos \theta \end{cases}$$

et  $\mathbf{E}'$  étant un scalaire qui n'interviendra pas; on aura donc

$$(83) \quad \zeta'^* = \omega W(-\mathbf{E} \sin \varpi + \mathbf{F} \cos \varpi).$$

Or, en vertu de (63)  $p^*$  ne peut être nul actuellement; les valeurs (78) introduites dans (79) donneront donc l'équation (R) cherchée

$$\frac{X + \lambda_1}{\nu_1 \cos \theta - l(X + \lambda_1)} - \frac{X + \lambda}{\nu \cos \theta - l(X + \lambda)} = \frac{\omega \cos \theta}{W \mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{X}},$$

où l'on a posé  $X = \cotg \varpi$ . Or une telle identité en  $X$  entraîne les relations

$$(84) \quad \nu \cos \theta = l \left( \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{F}} + \lambda \right), \quad \nu_1 \cos \theta = l \left( \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{F}} + \lambda_1 \right);$$

les pôles des trois fractions sont alors égaux et l'identité se réduit à la relation

$$(85) \quad \lambda_1 - \lambda = \frac{\omega}{W} \frac{l \cos \theta}{\mathbf{F}}.$$

D'après (77), le point  $N$  commun à  $D$  et  $D_1$  a pour coordonnées

$$x_0 = -\frac{\nu - \nu_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad z_0 = \frac{\lambda \nu_1 - \nu \lambda_1}{\lambda - \lambda_1};$$



en vertu de (84) il viendra donc

$$(86) \quad x_0 = -\frac{l}{\cos\theta} = -\frac{l^2}{d}, \quad z_0 = \frac{E}{F} \frac{l}{\cos\theta} = \frac{E}{F} \frac{l^2}{d}.$$

En utilisant le tableau (61) il serait facile de calculer les coordonnées de N par rapport au trièdre central des axoïdes. Mais on peut déterminer le point N géométriquement. Tout d'abord d'après (86)

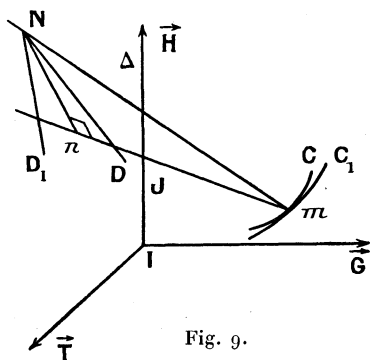


Fig. 9.

la droite  $mN$  est dirigée suivant  $F\mathbf{i} - E\mathbf{k}$ ; elle est donc perpendiculaire à  $\mathbf{j}$ , ainsi qu'à  $\mathbf{A}$ , d'après (81). Ainsi  $N$  est la normale singulière issue de  $m$ . Or soit  $n$  la projection de  $N$  sur  $mJ$ ; d'après (86) on a

$$n = m - \frac{l^2}{d}\mathbf{i} = J + \left(d - \frac{l^2}{d}\right)\mathbf{i} = J - \frac{h^2}{d}\mathbf{i},$$

d'où

$$(n - J)(m - J) = -h^2.$$

Ainsi  $n$  et  $N$  appartiennent au plan polaire de  $m$  par rapport au cylindre d'équation

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{h}^2 = 0$$

(les coordonnées  $\bar{x} = d \cos\psi$ ,  $\bar{y} = d \sin\psi$  se rapportant au trièdre central); la correspondance entre  $m$  et  $N$  est donc birationnelle et réciproque. Enfin (85) montre que les axes de courbure  $D$  et  $D_1$  sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques de sommet  $N$ , l'homographie ayant pour rayon double unique la droite  $Nn$ ; dès que l'on connaîtra l'un des axes (ou l'un des plans

osculateurs) on aura donc aisément le second. On a retrouvé ainsi très simplement les résultats fondamentaux de G. Kœnigs<sup>(1)</sup>.

La théorie s'applique en particulier aux trajectoires des points M de  $\mathcal{C}$  : il suffit de supposer que C se réduit à un point M (ou  $m$ ); l'axe D se confond alors avec Nm; par suite

$$v = 0, \quad \lambda = -\frac{E}{F}, \quad v_1 = \frac{\omega}{W} \frac{l^2}{F} = \frac{\omega}{W} \frac{d^2 + h^2}{F},$$

la valeur de  $\lambda_1$  étant donnée par (85).

On pourrait, d'ailleurs, rattacher directement l'étude de la courbure des trajectoires aux équations fondamentales; pour une sphère S de rayon infiniment petit les rapports de  $r, s, t$  à  $rt - s^2$  sont infiniment petits; on attribuera donc aux variables X, Y, Z, T, U du n° 13 les valeurs 0, 0, 0; 0, 1 et l'on calculera comme plus haut le rapport  $r_1 : r, t_1 - s_1^2$ .

40. *Cas II.* — La tangente à C et C<sub>1</sub> coïncide avec l'axe  $\Delta$ ; on a  $d = 0, \cos \theta = 0, l = h$  (avec  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ) et  $j = \mathbf{H}$ . Choisissons  $i$  de telle sorte que

$$(h + k) \sin \psi + z \cos \psi = 0;$$

$\mathcal{C}_0$  est ainsi déterminé et il viendra  $F = 0, \zeta'^* = -\omega WE \sin \varpi$ . On devra s'adresser à la formule (80) qui donnera

$$e_1^* - e^* = -\frac{\omega}{W} \frac{h^2}{\sin \varpi [(h + k) \cos \psi - z \sin \psi]}.$$

Dès lors les axes de courbure D, D<sub>1</sub> sont perpendiculaires à  $i$ , leurs abscisses respectives étant liées par

$$x_{01} - x_0 = \frac{\omega}{W} \frac{h^2}{(h + k) \cos \psi - z \sin \psi}.$$

(<sup>1</sup>) K<sub>11</sub>, p. 76-82, ..., 95-99, .... Voici le tableau de concordance de nos notations avec celles de Kœnigs :

G. K.....	$x$	$y$	$z$	$h$	$k$	$p$	$h_1$
R. G.....	$y$	$x$	$-z$	$h$	$-k$	$W$	$-\frac{h'}{W}$

Si l'on précise la définition de  $i$  en prenant

$$\frac{\cos \psi}{h+k} = -\frac{\sin \psi}{z} = \frac{+1}{\sqrt{(h+k)^2 + z^2}},$$

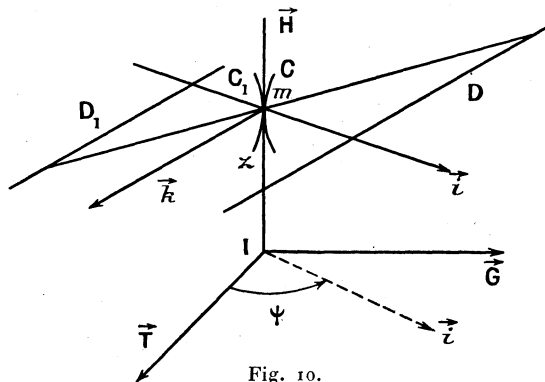


Fig. 10.

on aura

$$x_{10} - x_0 = \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m} \right) \frac{h^2}{\sqrt{(h+k)^2 + z^2}}.$$

*Cas III.* — Les notations  $\theta$ ,  $\psi$  étant définies comme pour le cas I relativement au trièdre  $ITGH$  du n° 29,  $\zeta'^*$  conservera la forme (83) pourvu que dans (83) et (85) on ait remplacé  $W$  par  $W_1$  et que, conformément à (57) et (81) on ait pris

$$E = -\sin \psi, \quad F = -\cos \psi \sin \theta + \frac{h'}{W_1} \cos \theta.$$

*Cas IV.* — Comme pour le cas II, sauf que l'on fera

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta'^* = \omega W_1 \sin \varpi;$$

et la relation entre les abscisses de  $D$  et  $D_1$  sera

$$x_{10} - x_0 = -\frac{\omega}{W_1} h^2.$$

*Cas V.* — L'étude de ce cas se déduit de celle du cas I. On prendra  $\theta = 0$ , d'où  $l = d$ ,  $F = y$ ,

$$x_0 = -d, \quad z_0 = \frac{k \cos \psi - z \sin \psi}{y} d = \frac{kx}{y} - z.$$

Le point N est sur  $\Delta$ , la droite  $mN$  étant tangente en N aux axoïdes [d'après (51) et (50) où  $\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}$ ]; d'ailleurs, si  $k = 0$ , on a  $z_0 = -z$  et N coïncide avec I ( $K_1$ , p. 130). La relation entre D et  $D_1$  se traduit par

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\sin \psi}.$$

Elle a été formée par G. Koenigs qui en a signalé l'analogie avec la formule classique de Savary [ $K_1$ , (128), p. 127]. Ajoutons que si les axoïdes sont des cônes, les courbes C douées d'enveloppes ont leur plan normal passant par un point fixe et la formule précédente n'est autre que celle de Savary pour les courbes sphériques.

41. *Cas VI.* — On a alors  $\mathbf{V}_e(m) = 0$ , en sorte que la tangente commune à C et  $C_1$  peut avoir une direction quelconque. Nous choisirons toujours  $m\gamma_0$  suivant cette tangente, et  $\mathfrak{T}_0$  étant orienté suivant (61) nous aurons  $\xi = 0 = \eta$ ,  $p^* = \omega \cos \theta \sin \varpi$ ;  $\zeta^*$  sera donné par (83) avec

$$E = k \cos \psi - z \sin \psi, \quad F = -(k \sin \psi + z \cos \psi) \sin \theta.$$

L'équation (R) s'écrira actuellement

$$\frac{X + \lambda_1}{\nu_1} - \frac{X + \lambda}{\nu} = \frac{\omega}{W} \frac{\cos^2 \theta}{E - FX}.$$

Or une telle identité en X entraîne d'abord  $\nu_1 = \nu$ ,  $F = 0$ , puis

$$(87) \quad \frac{\lambda_1}{\nu_1} - \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\omega}{W} \frac{\cos^2 \theta}{E}.$$

Ainsi les axes de courbure D et  $D_1$  concourent en un point de  $mz_0$ ; désignons alors par  $\mu = m + Ri$  le point où D rencontre  $mz_0$ , et de même pour  $D_1$ ; on aura  $R = -\frac{\nu}{\lambda}$  et (87) s'écrira

$$(88) \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = -\frac{\omega}{W} \frac{\cos^2 \theta}{E}.$$

Cela étant,  $F = 0$  exige, soit  $\sin \theta = 0$ , soit  $k \sin \psi + z \cos \psi = 0$ .

Dans le premier cas <sup>(1)</sup>, d'après (65) et  $\alpha$  étant défini en  $m$  sur  $\Delta$  conformément au n° 28, on a

$$-\frac{\omega}{W} \frac{\cos^2 \theta}{E} = -\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m}\right) \frac{1}{b \cos(\psi - \alpha)}.$$

Mais, soient  $R_f$  et  $R_m$  les rayons de courbure des sections planes de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma$  menées en  $m$ , normalement à  $\Delta$  et les rayons étant évalués suivant le vecteur  $\mathbf{g}_0$  de (50) (avec  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$ ); on a, d'après (52),

$$-\frac{1}{b} \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m}\right) = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

[car d'après (67)  $c_f = c_m$ ]; on peut donc écrire

$$(a) \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) \frac{1}{\cos(\psi - \alpha)}.$$

or  $\psi - \alpha$  mesure l'angle du plan normal à  $C$  et  $C_1$  avec le plan normal à  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  en  $m$ ; envisageons alors le cas où les plans osculateurs à  $C$  et  $C_1$  sont normaux à  $\Delta$ ;  $\mu$  et  $\mu_1$  sont les centres de courbure et d'après la signification de  $\psi - \alpha$  la formule est du type classique de Savary.

Dans le second cas  $\theta$  peut être quelconque, mais  $\psi = \alpha$ ; donc  $C$  et  $C_1$  sont tangentes aux axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  en  $m$ ; on sait qu'en particulier  $C$  peut être choisie arbitrairement sur  $\Sigma$ : elle aura toujours une enveloppe  $C_1$ . Or dans ce cas (88) devient

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) \cos^2 \theta,$$

et l'on peut vérifier qu'elle résulte aussitôt de (52) quand  $C$  et  $C_1$

(1) Il n'est pas évident, *a priori*, qu'il existe des courbes  $C$ ,  $C_1$  répondant à cette condition. Mais en projetant sur le trièdre central des axoïdes l'équation

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\mathcal{E}} + \lambda \mathbf{V}_e(M) = 0 \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{f(v)}{v}, \quad (f, \text{ fonction continue pour } v = 0),$$

et en appliquant la méthode des approximations successives de M. Émile Picard au système linéaire ainsi obtenu, on montre (Cf. n° 53) qu'il existe de telles courbes et qu'elles vérifient bien (88). Le mouvement autour d'un point fixe en fournit d'ailleurs des exemples, et la formule (a) se réduit alors à la formule de Savary pour la sphère.

appartiennent à  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ . En effet

$$\mathbf{j} = \mathbf{g}_0 \cos \theta - \mathbf{H} \sin \theta;$$

d'après (51) on aura donc les courbures normales de  $C$  et  $C_1$  sur  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  en remplaçant  $X$  et  $Y$  par  $\cos \theta$  et  $-\sin \theta$  dans les équations des indicatrices de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ , et d'après (52) on en déduit aussitôt la dernière relation entre  $R$  et  $R_1$ .

*Cas VII.* — Le vecteur  $\mathbf{T}$  étant défini comme au n° 29 pour des axoïdes cylindriques, soit  $I$  le pied de la perpendiculaire abaissée

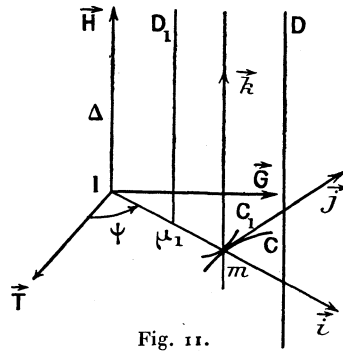


Fig. 11.

de  $m$  sur  $\Delta$ ; posons  $m - I = d\mathbf{i} = d(\mathbf{T} \cos \psi + \mathbf{G} \sin \psi)$ ; on aura

$$\theta = 0, \quad l = d, \quad p^* = \omega \sin \varpi, \quad \zeta'^* = \omega W_1 \sin \psi \sin \varpi$$

et (R) s'écrira

$$\frac{1}{e_1^* \sin \varpi - d} - \frac{1}{e^* \sin \varpi - d} = -\frac{\omega}{W_1} \frac{1}{\sin \psi}.$$

Or actuellement les courbes pourvues d'enveloppes sont planes, leurs plans étant perpendiculaires à  $\Delta$ ; le centre de courbure de  $C$  est le point

$$m - e^* \sin \varpi \cdot \mathbf{i} = I + (d - e^* \sin \varpi) \mathbf{i}.$$

La relation (R) se réduit bien à la formule de Savary pour le plan ( $K_1$ , p. 147-149).

*Cas VIII.* — La théorie ne diffère de celle du cas VI que par les particularités suivantes : on remplacera  $W$  par  $W_1$ ,  $E$  par  $-\sin \psi$ ,

F par  $-\cos\psi\sin\theta$ . La condition  $F=0$  donnera  $\sin\theta=0$  ou  $\cos\psi=0$ , ce qui conduira à des interprétations analogues à celles du cas VI.

*Cas IX.* — Les notations étant les mêmes qu'au n° 35, supposons que le point de contact de C et  $C_1$  soit le point K de la figure 7. On aura

$$e_1^* - e^* = \frac{\eta^2}{A \cos\omega + B \sin\omega},$$

avec

$$\begin{aligned} A &= x \cos\beta \sin\psi + \omega'(z \cos\beta \cos\psi - d \sin\beta), \\ B &= -(x \cos\psi - \omega'z \sin\psi) \cos\beta. \end{aligned}$$

On en déduit que les axes de courbure de C et  $C_1$  auront pour équations, dans le plan mené par K normalement à la vitesse

$$A z_0 - B x_0 = \lambda \quad \text{et} \quad A z_1 - B x_1 = \lambda_1$$

avec

$$\lambda_1 - \lambda = \eta^2.$$

### III. — Variation de la loi des courbures (développables).

42. Nous allons étudier maintenant le second des cas signalés plus haut (n° 26) : S et  $S_1$  sont deux développables; leurs indicatrices devant être bitangentes, S et  $S_1$  sont tangentes le long d'une génératrice  $\delta$ , et l'on est amené ainsi à déterminer les éléments de courbure d'une des surfaces, soit  $S_1$ , le long de  $\delta$  connaissant les éléments de courbure de S.

Plaçons-nous d'abord dans le cas général :  $h \neq 0$ , axoïdes non cylindriques. Soit M le pied sur  $\delta$  de la perpendiculaire commune à  $\Delta$  et  $\delta$ ; j sera dirigé suivant  $\delta$ ; i, k, d,  $\psi$ , z et  $\theta$  auront pour M et  $\delta$  la même signification qu'au n° 31 pour M et pour le support de  $\mathbf{V}_e(M)$  (cf. fig. 3). Un point quelconque P de  $\delta$  sera désigné par

$$(89) \quad P = M + u j.$$

Il sera commode d'introduire le trièdre  $\mathbf{H}, \mathbf{i}, \mathbf{l}$ , de sens direct,

ainsi

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{T} \sin \psi + \mathbf{G} \cos \psi, \\ \mathbf{j} = \mathbf{l} \cos \theta - \mathbf{H} \sin \theta, \\ \mathbf{k} = \mathbf{l} \sin \theta + \mathbf{H} \cos \theta, \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{i} \cos \theta, \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{l} = \mathbf{i} \sin \theta, \end{array} \right.$$

d'où

$$\omega^{-1} \mathbf{V}_e(\mathbf{P}) = h \mathbf{H} + [\mathbf{H} \wedge (d\mathbf{i} + u\mathbf{j})] = h \mathbf{H} + d\mathbf{l} - u \cos \theta \cdot \mathbf{i}$$

et

$$(91) \quad \omega^{-1} \mathbf{j} \wedge \mathbf{V}_e(\mathbf{P}) = (h \cos \theta + d \sin \theta) \mathbf{i} + u \cos \theta \cdot \mathbf{k};$$

or ce dernier vecteur doit être normal à  $S$  et  $S_1$  en  $P$ , donc indépendant de  $u$ , puisque  $S$  et  $S_1$  sont développables; mais il ne peut en être ainsi que si  $\theta$  satisfait à (62) ou à  $\cos \theta = 0$ . Dans le premier cas la normale est bien déterminée (pour  $\cos \theta \neq 0$ ) et dirigée suivant  $\mathbf{k}$  <sup>(1)</sup>; mais  $\cos \theta = 0$  joint à (62) donne  $d = 0$ ;  $\delta$  est alors confondue avec  $\Delta$ . Dans le second cas la normale est dirigée suivant  $\mathbf{i}$  (sauf dans le cas d'exception précédent,  $d = 0$ ). Nous examinerons d'abord l'hypothèse où  $\theta$  satisfait à (62), avec  $\cos \theta \neq 0$ .

Nous appliquerons à  $S$  et  $S_1$  les notations du n° 28; ainsi, nous désignerons par  $a$  et  $a_1$  les valeurs de  $u$  correspondant aux contacts de  $\delta$  avec les arêtes de rebroussement de  $S$  et de  $S_1$ ; d'après (89) et (45) les notations  $\mathbf{H}_0$  et  $u_1$  du n° 28 peuvent être confondues avec les notations actuelles  $\mathbf{j}$  et  $u$ ; dans les formules du n° 28, nous remplacerons donc  $u = u_1 - a$  par  $u - a$ . De plus,  $S$  et  $S_1$  étant développables, nous poserons  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ce qui donnera

$$b = -(u - a)$$

et nous prendrons actuellement

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{t}_0 = \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_0 = -\mathbf{g}_0 = -\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{t}_0 = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{i}.$$

Pour  $S$  et  $S_1$  les dérivées secondes  $s_0$ ,  $t_0$  du n° 28 sont nulles le long de  $\delta$ ; tout le problème revient donc à étudier les variations de la

---

(1) Ce double résultat (valeur de  $\theta$ , direction de la normale) a été obtenu par H. Resal (*Traité de Cinématique pure*, p. 130).



dérivée seconde  $r_0$  que nous désignerons par  $r_0$  ou  $r_{01}$ , suivant qu'il s'agira de  $S$  ou de  $S_1$ . Or on a, relativement au trièdre  $PXYZ$ , orienté suivant  $\mathbf{g}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{t}_0$ , c'est-à-dire suivant  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$p = 0, \quad q = -\omega \sin \theta, \quad \xi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}_e(P) = -\omega u \cos \theta, \\ \eta = \omega(-h \sin \theta + d \cos \theta) = \omega l,$$

[la dernière formule d'après (63)]; les relations ( $\beta$ ) du n° 26 sont donc vérifiées. Enfin pour  $\zeta'$  calculé relativement à la normale  $PZ$ , on trouve, en posant  $\zeta'(M\mathbf{k}) = \zeta'_0$  [valeur donnée par (64)] et en utilisant (55) et (56)

$$\zeta' = \zeta'_0 + \omega W(\mathbf{k}, \mathbf{T}, P - M) = \zeta'_0 + \omega W u \mathbf{i} \cdot \mathbf{T} = \zeta'_0 + \omega W u \cos \psi.$$

Enfin si  $S$  et  $S_1$  ne se réduisent pas à des cylindres, on a d'après (52)

$$(92) \quad r_0 = \frac{1}{(u-a)\rho}, \quad r_{01} = \frac{1}{(u-a_1)\rho_1},$$

les notations  $\rho$  et  $\rho_1$  se rapportant à  $S$  et  $S_1$ .

Cela étant, on peut appliquer la formule réduite (29) au cas actuel, puisque  $B = 0$ , et l'on a

$$\frac{1}{\xi r_{01} + q} - \frac{1}{\xi r_0 + q} = \frac{\xi}{\zeta'},$$

c'est-à-dire

$$(93) \quad \frac{(u-a_1)\rho_1}{u \cos \theta + (u-a_1)\rho_1 \sin \theta} - \frac{(u-a)\rho}{u \cos \theta + (u-a)\rho \sin \theta} = \frac{\omega^2 u \cos \theta}{\zeta'_0 + \omega W u \cos \psi}.$$

Or soit  $\zeta'_0 \neq 0$ ; on a  $\zeta'_0 \cos \theta \neq 0$ ; l'identité en  $u$  (93) exige donc d'abord que les pôles des trois fractions coïncident, ce qui donne

$$(94) \quad \frac{1}{a} = -\frac{\omega W \cos \psi}{\zeta'_0} \frac{\rho}{\rho + \cot \theta}, \quad \frac{1}{a_1} = -\frac{\omega W \cos \psi}{\zeta'_0} \frac{\rho_1}{\rho_1 + \cot \theta}.$$

Les deux membres de (93) s'annulant pour  $u = 0$ , il nous suffit d'écrire qu'ils sont égaux pour  $u = \infty$ , d'où

$$(95) \quad \frac{\rho_1}{\cos \theta + \rho_1 \sin \theta} - \frac{\rho}{\cos \theta + \rho \sin \theta} = \frac{\omega \cos \theta}{W \cos \psi}.$$

Ainsi, d'après (92), (94), (95), les éléments de courbure sont bien déterminés en tout point de  $\delta$  dès que l'on connaît  $\rho$ , par exemple.

D'ailleurs, si l'on pose

$$(96) \quad \rho = \operatorname{tang} \bar{\rho}, \quad \rho_1 = \operatorname{tang} \bar{\rho}_1, \quad \bar{\rho} = \frac{\pi}{2} + \theta - \rho', \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta - \rho'_1,$$

(95) s'écrit

$$(97) \quad \cot \bar{\rho}'_1 - \cot \bar{\rho}' = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\cos \psi}.$$

C'est la relation même de Savary que l'on pouvait former *a priori* pour les indicatrices sphériques  $\sigma, \sigma_1$  des développables  $S$  et  $S_1$ . En effet cette formule s'écrit

$$\cot \bar{r}_1 - \cot \bar{r} = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\cos \varphi},$$

les notations étant définies, conformément à la théorie classique, par les formules suivantes, où  $\mathbf{H}, \mathbf{T}, \mathbf{T}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0, \bar{\rho}, \bar{\rho}_1$  conservent leur signification antérieure

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}_0 \sin \lambda + \mathbf{H}_0 \cos \lambda, \quad \bar{r} = \bar{\rho} - \lambda, \quad \bar{r}_1 = \bar{\rho}_1 - \lambda, \quad \cos \varphi = \mathbf{T}\mathbf{T}_0;$$

actuellement

$$\mathbf{T}_0 = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{j};$$

donc

$$\lambda = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \bar{r} = -\rho', \quad \bar{r}_1 = -\rho'_1, \quad \mathbf{T}\mathbf{T}_0 = -\cos \psi.$$

Les formules (94), (95) montrent que  $a$  et  $a_1$  satisfont à la relation

$$(98) \quad \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} = -\frac{\omega^2}{\zeta'_0} \sin \theta \cos \theta.$$

Les formules (95) et (98) ont été données par G. Kœnigs <sup>(1)</sup> qui signale que la formule jouant le rôle de (98) « doit frapper par son analogie avec celle qui a trait aux courbures ». Pour nous l'origine

(1) K<sub>1</sub>, p. 164, 165, formules (200), (200'), (202). Tableau de concordance des notations.

G. K....	$x_D$	$y$	$z$	$\theta$	$\varphi$	$l$	$l'$	$\Psi'$	$u$	$r$	$r'$	$\xi$	$\zeta$	$\zeta'$
R. G....	$y$	$x$	$-z$	$-\theta$	$-\psi$	$a$	$a_1$	$\frac{\zeta'_0}{\omega W}$	$z \cos \theta$	$\rho \bar{r}^{-1}$	$\rho'_m^{-1}$	$kW$	$-c_f W$	$-c_m W$

de cette analogie est évidente, car (98) est la transformée par (94) de la relation de Savary (97). Si cette origine n'apparaît pas dans le Mémoire K<sub>1</sub> de Königs, cela tient à ce que la signification géométrique des paramètres désignés par  $\rho$  et  $\rho'$  dans K<sub>1</sub> n'y est pas indiquée; or, précisément ces paramètres se rattachent aux courbures de  $\sigma$  et  $\sigma_1$ ; avec nos notations, le premier, par exemple, a pour expression

$$-\frac{\cos\psi \sin(\rho' - \theta)}{\sin^2\theta}.$$

Si  $\zeta'_0 = 0$ , on trouvera  $\cos\theta = 0$  ou

$$\rho = -\cot\theta = \rho_1, \quad a_1 = a, \quad \sin\theta = 0.$$

Si S est un cylindre (on admet une indicatrice  $\sigma$  avec  $\rho = 0$ ),  $r_0$  est alors constant le long de  $\delta$  et (93) doit être remplacée par

$$\frac{(u-a)\rho_1}{u \cos\theta + (u-a_1)\rho_1 \sin\theta} - \frac{1}{ur_0 \cos\theta + \sin\theta} = \frac{\omega^2 u \cos\theta}{\zeta'_0 + \omega W u \cos\psi}.$$

La première relation (94) est alors remplacée par

$$\frac{\text{tang}\theta}{r_0} = \frac{\zeta'_0}{\omega W \cos\psi},$$

et (95) par la relation qu'on en déduit en y prenant  $\rho = 0$ ; c'est-à-dire par la formule de Savary pour les trajectoires sphériques. On constate d'ailleurs que  $r_0$  et  $r_{01}$  ne peuvent être constants en même temps sur  $\delta$  (du moins pour  $\zeta'_0 \neq 0$ ).

43. Étudions maintenant le *second cas* :  $\cos\theta = 0$ , et soit  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , d'où  $\mathbf{j} = \mathbf{H}$ . La génératrice  $\delta$  est alors parallèle à  $\Delta$ ;  $\mathbf{i}$  est toujours le vecteur-unité de la normale P—J à  $\Delta$ ; les notations  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{G}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  se rapportent toujours à  $(\Sigma, \Sigma_1)$  et  $(S, S_1)$ , et  $\mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{g}_0$  sont encore définies comme au n° 28 avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; de plus, d'après (91), on peut prendre  $\mathbf{i}$  comme vecteur-unité de la normale à S et S<sub>1</sub>, et l'on écrira ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \mathbf{G}_0 = \mathbf{i}, \\ \mathbf{g}_0 &= -\mathbf{T}_0 = -\mathbf{k}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H} = \mathbf{j}; \end{aligned}$$

d'autre part, on aura encore les formules (92),  $u$  désignant la cote du point P par rapport au plan I T G (de sorte que le point M, intersection de ce plan par  $\delta$ , joue le même rôle que le point désigné par la même lettre au n° 28). On obtiendra ainsi pour le trièdre PXYZ (n° 28) :

$$\begin{aligned}\xi &= \omega d, & \eta &= \omega h, & p &= 0, & q &= \omega, \\ \zeta' &= \omega W[(h+k)\cos\psi - u\sin\psi],\end{aligned}$$

et l'on trouvera la relation

$$\frac{\rho_1(u-a_1)}{d+\rho_1(u-a_1)} - \frac{\rho(u-a)}{d+\rho(u-a)} = \frac{\omega}{W} \frac{d}{(h+k)\cos\psi - u\sin\psi}$$

qui exige

$$a_1 - \frac{d}{\rho_1} = (h+k)\cot\psi = a - \frac{d}{\rho}$$

et

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{W} \frac{1}{\sin\psi}.$$

Cette dernière formule est celle de Savary pour  $\sigma, \sigma_1$  : car, actuellement,

$$\lambda = 0, \quad \bar{r} = \bar{\rho}, \quad \bar{r}_1 = \bar{\rho}_1, \quad \mathbf{T}\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}\mathbf{k} = \sin\psi.$$

Les résultats précédents s'appliquent encore, si  $d = 0$ .

Si les axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont des cylindres, on introduira le trièdre ITGH comme au n° 29; supposons  $\theta$  quelconque; le dénominateur du second membre de (93) se réduira à la quantité

$$\zeta'_0 = -\omega W_1 \left( \cos\psi \sin\theta - \frac{h'}{W_1} \cos\theta \right),$$

et l'on aura les relations

$$\rho = -\cot\theta = \rho_1, \quad \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} = -\frac{\omega^2}{\zeta'_0} \sin\theta \cos\theta.$$

Si  $h = 0 = h'$ , on pourra avoir  $\sin\theta = 0$  ou  $\cos\theta = 0$  ou  $d = 0$ . Dans le premier cas, les relations (94) sont remplacées par  $\sin\psi = 0$ , et  $a_1\rho_1 = a\rho$ ; (95) subsiste; les autres cas n'introduisent que des simplifications de calculs.

44. Examinons enfin le cas où le mouvement est tangent à une translation. Le trièdre Oxyz de vecteurs-unités  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  sera défini



matrice commune  $\delta$ . Nous conserverons les notations  $\mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{g}_0$ ,  $u$  et  $b$  du n° 28 pour S et S<sub>1</sub>; les autres notations seront appliquées avec ou sans indices, pour  $\Sigma, \Sigma_1, S, S_1$  conformément au tableau suivant, où la première ligne contient les notations données au n° 28.

$\Sigma_0 \dots$	$\nu$	$\mathbf{H}_0$	$\mathbf{T}_0$	$\mathbf{G}_0$	$k_0$	$\rho_0$	$c_0$	$k'_0$
$\Sigma \dots$ $\Sigma_1 \dots$	$\nu$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{G}$	$k$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_m \\ \rho_f \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} c_m \\ c_f \end{array} \right.$	
$S \dots$ $S_1 \dots$	$\left. \begin{array}{l} \nu_0 \\ \nu_{01} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_{01} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_{01} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_{01} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} k_0 \\ k_{01} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho_1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} c \\ c_1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} k' \left( = \frac{dk_0}{d\nu_0} \right) \\ k'_1 \left( = \frac{dk_{01}}{d\nu_{01}} \right) \end{array} \right.$

Écrivons d'abord qu'au point P défini par (89) le vecteur  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{V}_e(\mathbf{P})$  du n° 42 est parallèle au vecteur  $\mathbf{t}_0$ ; en appelant  $a$  la valeur de  $u$  correspondant au point central de S et S<sub>1</sub>, et  $\lambda$  étant un certain scalaire, nous devons avoir, quel que soit  $u$ ,

$$(h \cos \theta + d \sin \theta) \mathbf{i} + u \cos \theta \cdot \mathbf{k} = \lambda [k_0 \mathbf{T}_0 - (u - a) \mathbf{G}_0].$$

Nous prendrons  $\mathbf{k} = \mathbf{G}_0$ ,  $\lambda = -\cos \theta$ , et, comme aux nos 42-44,  $\mathbf{j} = \mathbf{H}_0$ ; ceci entraîne  $\mathbf{i} = -\mathbf{T}_0$ , d'où  $a \cos \theta = 0$ . Or, on ne peut avoir  $\cos \theta = 0$ , sauf si  $d = 0$ , cas que nous examinerons plus loin (n° 46); ainsi :

*Cas I.* — Le point central de  $\delta$  pour S et S<sub>1</sub> est le pied I<sub>0</sub> de la perpendiculaire commune à  $\Delta$  et  $\delta$ , et le plan central est parallèle à  $\Delta$  (1). Enfin le paramètre de distribution  $k_0$  de S et S' est donné (2) par

$$(99) \quad k_0 = h + d \tan \theta.$$

Introduisons le trièdre trirectangle PX, PY, PZ du n° 28, aux vecteurs unités respectifs  $\mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{t}_0$  et étudions les courbures de S

(1) Cf. H. RESAL, *Traité de Cinématique pure*, p. 146; G. KOENIGS, *Leçons de Cinématique*, Paris, A. Hermann, 1897, p. 211.

(2) G. KOENIGS, *loc. cit.*

et  $S_1$  en P. Comme  $a = 0$ , on a

$$b\mathbf{g}_0 = -u\mathbf{i} + k_0\mathbf{k},$$

d'où, grâce à (61) et (90),

$$\omega^{-1}\xi = \omega^{-1}\mathbf{V}_c(\mathbf{P})\mathbf{g}_0 = k_0b^{-1}(h\cos\theta + d\sin\theta) + u^2b^{-1}\cos\theta = b\cos\theta,$$

$$\omega^{-1}\eta = -h\sin\theta + d\cos\theta,$$

$$bp = \omega k_0\cos\theta, \quad q = -\omega\sin\theta.$$

Pour S (et  $S_1$ ) la dérivée seconde  $s_0$  est égale à  $k_0b^{-2}$  et la dérivée seconde  $t_0$  est nulle : ainsi  $\mathbf{B} = s_0\xi + t_0\eta - p = 0$ . Dès lors, on appliquera la formule réduite (29) et l'on trouvera

$$-b^2\omega^{-1}\mathbf{A} = -b^2\omega^{-1}(r_0\xi + s_0\eta + q) = \mathbf{H}u^2 + \mathbf{K}u + \mathbf{L},$$

avec

$$\mathbf{H} = \frac{\cos\theta}{\rho} + \sin\theta, \quad \mathbf{K} = k'\cos\theta,$$

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \sin\theta\right)k_0^2 + k_0(c\cos\theta + h\sin\theta - d\cos\theta)$$

et  $\mathbf{A}_1$  a une expression analogue,  $\rho, k', c$  étant remplacés par  $\rho_1, k'_1, c_1$  (et  $\mathbf{H}, \mathbf{K}, \mathbf{L}$  par  $\mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1, \mathbf{L}_1$ ). Enfin, on peut écrire pour la normale PZ,

$$b\zeta' = -\omega\mathbf{W}\left[(h+k)\mathbf{T} - z\mathbf{G} + \left(y + \frac{h'}{\mathbf{W}}\right)\mathbf{H} + u(\mathbf{k}\cos\psi + \mathbf{i}\sin\theta\sin\psi)\right](k_0\mathbf{i} + u\mathbf{k}),$$

d'où

$$b\zeta' = -\omega\mathbf{W}(\mathbf{H}_2u^2 + \mathbf{K}_2u + \mathbf{L}_2)$$

avec

$$\mathbf{H}_2 = \cos\psi,$$

$$\mathbf{K}_2 = (k_0 - h - k)\sin\theta\sin\psi - z\sin\theta\cos\psi + \left(y + \frac{h'}{\mathbf{W}}\right)\cos\theta,$$

$$\mathbf{L}_2 = k_0[(h+k)\cos\psi - z\sin\psi],$$

et  $y$  étant toujours égal à  $d\sin\psi$ . On trouvera ainsi l'identité en  $u$

$$(100) \quad \frac{1}{\mathbf{H}_1u^2 + \mathbf{K}_1u + \mathbf{L}_1} - \frac{1}{\mathbf{H}u^2 + \mathbf{K}u + \mathbf{L}} = \frac{\omega}{\mathbf{W}} \frac{\cos\theta}{\mathbf{H}_2u^2 + \mathbf{K}_2u + \mathbf{L}_2}.$$

Or, si S et  $S_1$  sont *en chaque instant* tangentes le long d'une génératrice commune  $\delta$  (cas auquel nous nous bornerons), les deux points de  $\delta$  où S et  $S_1$  sont oscultrices satisfont nécessairement à  $\zeta' = 0$ , ainsi qu'à  $\mathbf{A} = 0 = \mathbf{A}_1$  (n° 11). Chacune des fractions du premier membre de (100) admet donc les mêmes pôles que le second membre,

et s'il en est ainsi l'identité (100) exigera seulement que

$$\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H} = \frac{\omega}{W} \frac{\cos \theta}{H_2},$$

relation qui n'est autre que la formule de Savary (95) pour les indicatrices de S et S<sub>1</sub>. Si l'on pose alors

$$(101) \quad \frac{\cos \theta}{\rho} + \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\rho^*}, \quad \frac{\cos_1 \theta}{\rho_1} + \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\rho_1^*},$$

les conditions précitées donneront

$$(102) \quad k' \rho^* = \frac{K_2}{\cos \psi} = k_1' \rho_1^*,$$

$$(103) \quad \rho^*(c - d + h \tan \theta) = k - d \tan \theta - z \tan \psi = \rho_1^*(c_1 - d + h \tan \theta),$$

la valeur commune des trois membres de (103) pouvant être remplacée par  $h + k - k_0 - z \tan \psi$ .

En égalant les membres extrêmes de (103), on trouvera la formule où ne figurent que des angles

$$\frac{\sin \bar{\rho}_1 \sin(V_1 - \theta + \varepsilon)}{\sin V_1 \cos(\bar{\rho}_1 - \theta)} = \frac{\sin \bar{\rho} \sin(V - \theta + \varepsilon)}{\sin V \cos(\bar{\rho} - \theta)}$$

[V et V<sub>1</sub> désignent, conformément à (68), les angles des lignes de striction de S et S<sub>1</sub> avec  $\delta$ , et l'on a posé

$$d = h \cot \varepsilon;$$

$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  est l'angle de  $\mathbf{V}_e(I_0)$  avec  $\mathbf{H}$ ]. Les équations (99), (102), (103) fournissant  $k_0$ ,  $k'$ ,  $k_1'$ ,  $c$  et  $c_1$  permettent de calculer la courbure des surfaces réglées S et S<sub>1</sub> en tout point de la génératrice  $\delta$  (n° 28).

Pour  $\rho = 0$  elles donnent la courbure de la réglée, lieu d'une droite liée au trièdre mobile  $\mathcal{C}$ .

46. Cas II. —  $d = 0 = \cos \theta$ ;  $\delta$  est alors confondue avec  $\Delta$  (et réciproquement) (1); la relation (99) disparaît. Soit  $I_0 = I + a\mathbf{H}$  le point central de S et S<sub>1</sub>; au point  $P = I + (u + a)\mathbf{H}$  nous introduisons le

(1) Ce cas a été signalé par H. Resal, *loc cit.*, p. 144.



trièdre (PX, PY, PZ) de vecteurs-unités  $\mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{t}_0$ , les vecteurs  $\mathbf{g}_0$  et  $\mathbf{t}_0$  se déduisant par (49) et (50) des vecteurs

$$(104) \quad \mathbf{T}_0 = \mathbf{T} \cos \varphi + \mathbf{G} \sin \varphi, \quad \mathbf{G}_0 = -\mathbf{T} \sin \varphi + \mathbf{G} \cos \varphi.$$

Il viendra ainsi  $p = 0$ ,  $q = \omega$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = h\omega$ ,

$$b\omega^{-1}\mathbf{W}^{-1}\zeta' = [(h+k)\mathbf{T} - (u+a)\mathbf{G}] [k_0\mathbf{T}_0 - u\mathbf{G}_0] \\ = \mathbf{H}_3 u^2 + \mathbf{K}_3 u + \mathbf{L}_3,$$

avec

$$\mathbf{H}_3 = \cos \varphi, \\ \mathbf{K}_3 = a \cos \varphi + (h+k-k_0) \sin \varphi, \\ \mathbf{L}_3 = k_0 [(h+k) \cos \varphi - a \sin \varphi],$$

et la formule

$$r_1 - r = -\frac{(q + \eta s)^2}{\zeta'} \quad \left( s = \frac{k_0}{u^2 + k_0^2} = s_1 \right),$$

conséquence de (18) et de  $p = 0 = \xi = t$ , donnera, d'après (52),

$$\frac{u^2 + k_0^2}{\rho_1} + uk_1 + k_0 c_1 - \frac{u^2 + k_0^2}{\rho} - uk' - k_0 c = \frac{\omega}{\mathbf{W}} \frac{(u^2 + hk_0 + k_0^2)^2}{\mathbf{H}_3 u^2 + \mathbf{K}_3 u + \mathbf{L}_3}.$$

Dans cette identité en  $u$  les trinomes en  $u$  doivent admettre les mêmes racines; on aura donc

$$(105) \quad k_1 = k', \quad a = -(h+k-k_0) \operatorname{tang} \varphi,$$

puis,  $k_0$  n'étant pas nul par hypothèse,

$$k_0 = k - a \operatorname{tang} \varphi,$$

d'où

$$(106) \quad a = -h \sin \varphi \cos \varphi$$

et

$$(107) \quad c_1 - c = h \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Enfin, en écrivant que l'identité en  $u$  est vérifiée pour  $u = \infty$ , on obtiendra la relation de Savary pour les indicatrices sphériques de S et S<sub>1</sub>,

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{\mathbf{W}} \frac{1}{\cos \varphi}.$$

A titre d'exemple, on peut prendre  $a = 0 = \varphi$ , d'où  $k_0 = k$ ; les

axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  vérifient donc les relations précédentes et (107) se réduit à (67).

On notera le cas du roulement

$$h = 0, \quad a = 0, \quad k_0 = k, \quad c_1 = c.$$

47. *Cas III.* — Les axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont des cylindres. Les développements du cas général restent valables, sauf en ce qui concerne la forme de  $\zeta'$ . Avec les notations des n<sup>os</sup> 28 et 29 on a

$$b\zeta' = \omega(W_1 \mathbf{G} - h' \mathbf{H})(k_0 \mathbf{i} + u \mathbf{k}) = \omega W_1 (K_3 u + L_3),$$

avec

$$K_3 = \sin \theta \cos \psi - \frac{h'}{W_1} \cos \theta, \quad L_3 = k_0 \sin \psi.$$

L'identité (100) est donc remplacée par

$$\frac{1}{H_1 u^2 + K_1 u + L_1} - \frac{1}{H u^2 + K u + L} = -\frac{\omega}{W_1} \frac{\cos \theta}{K_3 u + L_3}.$$

Ceci devant avoir lieu quel que soit  $u$ , il faut et il suffit (voir n<sup>o</sup> 45) que

$$H_1 = 0 = H, \quad \frac{L_1}{K_1} = \frac{L_3}{K_3} = \frac{L}{K}, \quad \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K} = -\frac{\omega}{W_1} \frac{\cos \theta}{K_3}.$$

Ainsi

$$(108) \quad \frac{c - d + h \operatorname{tang} \theta}{k'} = \frac{\frac{1}{\rho_1} = -\operatorname{tang} \theta = \frac{1}{\rho}}{\sin \theta \cos \psi - \frac{h'}{W_1} \cos \theta} = \frac{c_1 - d + h \operatorname{tang} \theta}{k_1}$$

et

$$(109) \quad \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k'} = \frac{\omega}{W_1} \frac{\cos^2 \theta}{-\sin \theta \cos \psi + \frac{h'}{W_1} \cos \theta}.$$

48. Reste enfin le cas où  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$  est tangent à une translation. Reprenons les notations du n<sup>o</sup> 35. Puisque les surfaces réglées  $S$  et  $S_1$  ne sont pas développables et que la normale à  $S$ ,  $S_1$  en un point quelconque de la génératrice commune  $\delta$  doit être perpendiculaire à la vitesse  $\mathbf{V}_e(\mathbf{M})$  (parallèle à  $\mathbf{k}_0$ ),  $\delta$  est nécessairement parallèle à  $\mathbf{k}_0$ . Désignons par  $x$  et  $y$

les coordonnées cartésiennes de la trace  $J$  de  $\delta$  sur le plan des  $xy$ ;  
soient  $z = a$  la cote du point central  $I_0$  de  $\delta$ ,

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{i}_0 \cos \varphi + \mathbf{j}_0 \sin \varphi, \quad \mathbf{G}_0 = -\mathbf{i}_0 \sin \varphi + \mathbf{j}_0 \cos \varphi$$

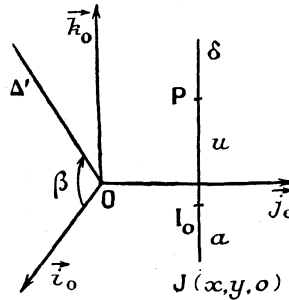


Fig. 13.

et  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$  les vecteurs-unités du trièdre central de  $S$  et  $S_1$  pour  $\delta$ .  
Le trièdre  $(PX, PY, PZ)$  relatif au point

$$P = J + (a + u)\mathbf{k}$$

de  $\delta$  et de vecteurs-unités  $\mathbf{g}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{t}_0$  sera défini par (50), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \mathbf{T}_0 \cos \alpha + \mathbf{G}_0 \sin \alpha = \mathbf{i}_0 \cos(\varphi + \alpha) + \mathbf{j}_0 \sin(\varphi + \alpha), \\ \mathbf{g}_0 &= -\mathbf{T}_0 \sin \alpha + \mathbf{G}_0 \cos \alpha = -\mathbf{i}_0 \sin(\varphi + \alpha) + \mathbf{j}_0 \cos(\varphi + \alpha), \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{k}_0, \end{aligned}$$

et l'on aura pour la normale  $\mathbf{t}_0$  en  $P$  à  $S$  et  $S_1$ , d'après (58),

$$\zeta' = \left[ \left( \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} \right)_{\mathfrak{S}} + \omega' \wedge P - O \right] \mathbf{t}_0.$$

Posons toujours  $b^2 = u^2 + k_0^2$ ,  $k_0$  étant le paramètre de distribution de  $\delta$  et utilisons (49); il viendra

$$b\zeta' = H_t u^2 + K_t u + k_0 L_t,$$

avec

$$\begin{aligned} H_t &= \omega' \cos \beta \cos \varphi, \\ K_t &= x \sin \beta \sin \varphi - \omega' [(k_0 \cos \beta + y \sin \beta) \sin \varphi + (x \sin \beta - a \cos \beta) \cos \varphi], \\ L_t &= x \cos \beta \cos \varphi + \omega' [ -y \sin \beta \cos \varphi + (x \sin \beta - a \cos \beta) \sin \varphi ]. \end{aligned}$$

Actuellement, pour le trièdre  $PXYZ$ , on a  $p = 0 = q$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = V_0$ ;

les formules fondamentales (18) donnent pour les dérivées secondes

$$b^2 r_{01} = b^2 r_0 - \frac{V_0^2}{b^2 \zeta'} b^4 s_0^2,$$

où  $r_0, s_0$  (et  $z_1$ ) doivent être calculés par les formules (52). On aura donc, quel que soit  $u$ ,

$$\frac{u^2 + k_0^2}{\rho_1} + uk'_1 + k_0 c_1 - \frac{u^2 + k_0^2}{\rho} - uk' - k_0 c = \frac{V_0^2 k_0^2}{H_4 u^2 + K_4 u + k_0 L_4};$$

dès lors

$$H_4 = 0, \quad K_4 = 0, \quad \rho_1 = \rho, \quad k'_1 = k', \quad c_1 - c = \frac{V_0^2}{L_4}.$$

Soit d'abord  $\cos \beta \neq 0$ ; il faudra  $\cos \varphi = 0$  : le plan central sera parallèle à  $\mathbf{V}_c(M)$  et  $\omega'$ ; de plus,

$$k_0 \cos \beta + y \sin \beta = \frac{x}{\omega'} \sin \beta;$$

enfin, avec  $\sin \varphi = 1$ ,

$$c_1 - c = \frac{V_0^2}{\omega' (x \sin \beta - a \cos \beta)}.$$

Si l'on a  $\cos \beta = 0, \sin \beta = 1$ , on trouvera les relations

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{x}{\omega'} \sin \varphi,$$

$$c_1 - c = \frac{V_0^2}{\omega' (x \sin \varphi - y \cos \varphi)}.$$

#### V. — Construction d'un couple de réglées conjuguées et détermination des axoïdes à partir des réglées.

49. Si l'on se donne *a priori* le mouvement  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ , la méthode du trièdre mobile permet, comme nous allons le voir, de construire effectivement tous les couples de surfaces réglées  $S, S_1$  (développables ou non) tangentes en tout instant suivant une génératrice, et  $S_1$ , par exemple, admettant une indicatrice sphérique donnée; elle fournit en même temps une vérification des relations que nous avons obtenues aux

paragrapes III et IV comme conséquences de nos formules fondamentales. Inversement, si l'on se donne deux développables ou deux réglées quelconques  $S$  et  $S_1$ , on peut chercher à mouvoir  $S$  par rapport à  $S_1$  de manière que les deux surfaces soient constamment tangentes le long d'une génératrice commune; nous verrons ensuite comment on peut déterminer en tout instant les éléments centraux des axoïdes de  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ .

50. Commençons par le premier problème et supposons d'abord que  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  ne soient pas des cylindres. Un premier groupe de relations résultera de la considération des indicatrices sphériques  $\sigma$  et  $\sigma_1$  de  $S$  et  $S_1$ ; ces relations sont d'ailleurs les mêmes, que  $S$  et  $S_1$  soient développables ou non. Pour les obtenir, calculons d'abord, dans  $\mathfrak{C}$ , par exemple, les dérivées des vecteurs centraux  $\mathbf{T}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0$  de  $S$  et  $S_1$ ; ces dérivées sont données par des formules (39); mais  $\mathbf{T}_0 (= -\mathbf{i}), \mathbf{G}_0 (= \mathbf{k}), \mathbf{H}_0 (= \mathbf{j})$  s'expriment en fonction de  $\mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  grâce au Tableau (61) et  $\mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  vérifient aussi des relations (39). Les formules qu'on obtient par identification appartiennent à la cinématique sphérique; il nous suffira donc de les écrire

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dv} = \sin\psi, \\ \frac{d\psi}{dv} = -\frac{1}{\rho_m} + \cotg\rho' \cos\psi = -\frac{1}{\rho_f} + \cotg\rho'_1 \cos\psi; \end{array} \right.$$

$$(111) \quad \frac{dv_0}{dv} = \rho^* \frac{\cos\psi}{\cos\theta}, \quad \frac{dv_{01}}{dv} = \rho^*_1 \frac{\cos\psi}{\cos\theta}.$$

Réciproquement, supposons connue la représentation sphérique de  $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1}$ , c'est-à-dire supposons connues dans  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}_1$  les composantes de  $\mathbf{T}(v), \mathbf{G}(v), \mathbf{H}(v)$ ; soient  $\theta(v), \psi(v), \rho^*(v), \rho^*_1(v), v_0(v)$  et  $v_{01}(v)$  [ $\rho', \rho'_1$  étant définis par (96) et (101)] des fonctions satisfaisant aux relations précédentes. Définissons relativement à  $\mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  trois vecteurs-unités  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  à l'aide du Tableau (61) où l'on aura remplacé  $\theta$  et  $\psi$  par les fonctions précédentes  $\theta(v)$  et  $\psi(v)$ ; l'extrémité du vecteur  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{j}$  mené d'un point fixe  $O_1$  comme origine décrira par rapport à deux trièdres d'origines  $O_1$ , équipollents à  $\mathfrak{C}$  et à  $\mathfrak{C}_1$ , deux

courbes  $\sigma$  et  $\sigma_1$ , constamment tangentes; leurs arcs seront  $v_0$  et  $v_{01}$ ; les rayons de courbure sphériques seront  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\rho}_1$ ; et  $\mathbf{T}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0$  sera à tout instant le trièdre géodésique commun de ces deux courbes sphériques; enfin de (110)<sub>2</sub> et de (65) on déduira (95).

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que S et S<sub>1</sub> sont développables ou non.

51. *Les surfaces S et S<sub>1</sub> sont développables.* — Cherchons à déterminer  $z, d$  et  $a$  en fonction de  $v$  de façon que le point

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} + z\mathbf{H} + d\mathbf{i} + a\mathbf{j}$$

décrive dans  $\mathfrak{E}$  une courbe C tangente à  $\mathbf{j}$ ;  $s_0$  désignant l'arc de C, on aura

$$\begin{aligned} (112) \quad \left(\frac{d\mathbf{N}}{dv}\right)_{\mathfrak{E}} &= k\mathbf{G} + c_m\mathbf{H} + \frac{dz}{dv}\mathbf{H} + \frac{dd}{dv}\mathbf{i} + z\mathbf{T} + \frac{da}{dv}\mathbf{j} \\ &+ d\left[\mathbf{l}\left(\frac{d\psi}{dv} + \frac{1}{\rho_m}\right) - \mathbf{H}\cos\psi\right] \\ &- a\left[\mathbf{k}\frac{d\theta}{dv} + \mathbf{T}\sin\theta + \mathbf{i}\left(\frac{d\psi}{dv} + \frac{1}{\rho_m}\right)\cos\theta - \mathbf{H}\sin\psi\cos\theta\right] \\ &= \mathbf{j}\frac{ds_0}{dv}. \end{aligned}$$

Formons successivement les produits intérieurs des deux membres de la relation précédente par les vecteurs  $\mathbf{i}, \mathbf{H}, \mathbf{l}$ , rectangulaires deux à deux, puis opérons de même pour le lieu C<sub>1</sub> dans  $\mathfrak{E}_1$  du point N<sub>1</sub> qu'on déduit de N en remplaçant  $a$  par  $a_1$ ; et soit  $s_{01}$  l'arc de C<sub>1</sub>; il viendra, compte tenu de (110) et (101),

$$(113) \quad \frac{dd}{dv} + k\sin\psi + z\cos\psi = a\rho^* \frac{\cos\psi}{\cos\theta} = a_1\rho_1^* \frac{\cos\psi}{\cos\theta},$$

$$(114) \quad \frac{dz}{dv} - d\cos\psi = -c_m + \frac{d(a-s_0)}{dv}\sin\theta = -c_f + \frac{d(a-s_{01})}{dv}\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} (115) \quad z\sin\psi - k\cos\psi &= d\cos\psi \cotg\rho' + \cos\theta \frac{d(a-s_0)}{dv} \\ &= d\cos\psi \cotg\rho'_1 + \cos\theta \frac{d(a_1-s_{01})}{dv}. \end{aligned}$$

Réciproquement, il est clair que si  $z, d, a, a_1, s_0, s_{01}$  satisfont aux

relations précédentes, le point  $N(N_1)$  décrira dans  $\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_1)$  une courbe  $C(C_1)$  constamment tangente à  $\mathbf{j}$ . Or, les équations (113), (114), (115) constituent un système de six équations à six inconnues,  $d, z, a, a_1, s_0, s_{01}$ ; nous allons voir que leur intégration n'exige que des quadratures. Tout d'abord, en éliminant  $\frac{ds_0}{dv}$  et  $\frac{ds_{01}}{dv}$  de (114) et (115), on en tire, grâce à (110),

$$(116) \quad \frac{d}{dv}(z \cos \theta) + k \sin \theta \cos \psi = -c_m \cos \theta + \frac{d \cos \psi}{\cos \theta + \rho \sin \theta} (\equiv \mathfrak{Q}) \\ = -c_f \cos \theta + \frac{d \cos \psi}{\cos \theta + \rho_1 \sin \theta} (\equiv \mathfrak{Q}_1).$$

En s'appuyant sur (67) et (95) on déduit de (116) que  $d$  satisfait à (62) et  $z$  sera donné ensuite par une quadrature. Puis (113), fournira pour  $a$  et  $a_1$  des expressions que l'on identifiera aisément à (94); enfin, les formules (115) donneront les courbures  $\frac{dv_0}{ds_0}, \frac{dv_{01}}{ds_{01}}$  de  $C$  et  $C_1$  (estimées positivement suivant  $\mathbf{i}$ ) et l'on en déduira  $s_0$  et  $s_{01}$  par des quadratures.

On a déjà rappelé que G. Kœnigs a obtenu les expressions de  $a$  et  $a_1$ ; son équation <sup>(1)</sup> (185)<sub>4</sub>, formée suivant une autre voie, est identique à notre équation (116). Pour identifier ses résultats avec les nôtres <sup>(2)</sup> on notera que la variable  $\mu$  de G. Kœnigs a pour expression  $\mathfrak{Q}W$ , avec

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{\rho_m} - \frac{\cos \psi}{\sin \theta (\cos \theta + \rho \sin \theta)}.$$

52. Étudions le cas où  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont des cylindres.  $\mathbf{H}$  est un vecteur constant; on a, avec les notations du n° 29,

$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right)_{\mathfrak{E}} = \frac{\mathbf{G}}{R_m} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right)_{\mathfrak{E}_1} = \frac{\mathbf{G}}{R_f},$$

$R_m$  et  $R_f$  désignant les rayons de courbure des sections droites  $\gamma$  et  $\gamma_1$  de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ , estimés positivement suivant  $\mathbf{G}$ . En formant de deux manières différentes, comme au n° 50, les dérivées de  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  par

<sup>(1)</sup> K<sub>1</sub>, p. 155.

<sup>(2)</sup> Voir aussi la note <sup>(1)</sup> de la p. 177, (n° 42).

rapport à l'arc  $s$  de  $\gamma$  (ou de  $\gamma_1$ ), on obtiendra les relations

$$(117) \quad \rho_1 = -\cotg \theta = \rho, \quad \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

$$(118) \quad \frac{d\psi}{ds} = -\frac{1}{R_m} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{dv_0}{ds} = -\frac{1}{R_f} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{dv_{01}}{ds}.$$

Les relations (117)<sub>1</sub> avaient été obtenues déjà à la fin du n° 43; d'ailleurs les normales sphériques aux indicatrices  $\sigma$  et  $\sigma_1$  de  $S$  et  $S_1$  passant par un point fixe, ces courbes sont des cercles et l'on pouvait prévoir que  $\theta$  reste constant. Si l'on choisit arbitrairement  $\psi(s)$ , on aura ensuite  $v_0$  et  $v_{01}$  par des quadratures.

D'autre part, introduisons le point

$$N = I + z\mathbf{H} + d\mathbf{i} + a\mathbf{j},$$

et de même pour  $N_1$ , et observons que le plan  $\Pi_1$  contenant  $I$  (n° 29) a été choisi lié à  $\mathfrak{C}_1$ , de sorte que

$$(119) \quad \left(\frac{dI}{dt}\right)_{\mathfrak{C}_1} = W_1 \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dI}{dt}\right)_{\mathfrak{C}} = W_1 \mathbf{T} - h\omega \mathbf{H};$$

écrivons que dans  $\mathfrak{C}$ , comme dans  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\mathfrak{C}} = \left(\frac{ds_0}{dt}\right) \mathbf{j}$  et multiplions intérieurement les relations ainsi obtenues par  $\mathbf{i}$ , puis par  $\mathbf{H}$  et par  $\mathbf{1}$ ; il viendra

$$(120) \quad \frac{dd}{ds} + \cos \psi = a \frac{dv_0}{ds} = a_1 \frac{dv_{01}}{ds},$$

$$(121) \quad \frac{dz}{ds} = h \frac{\omega}{W_1} + \frac{d(a-s_0)}{ds} \sin \theta; \quad \frac{d(a_1-s_{01})}{ds} \sin \theta,$$

$$(122) \quad \sin \psi = \frac{d}{\cos \theta} \frac{dv_0}{ds} + \frac{d(a-s_0)}{ds} \cos \theta = \frac{d}{\cos \theta} \frac{dv_{01}}{ds} + \frac{d(a_1-s_{01})}{ds} \cos \theta.$$

Réciproquement, si ces équations sont vérifiées,  $N(N_1)$  décrit dans  $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{C}_1)$  une courbe  $C(C_1)$  tangente à  $\mathbf{j}$ .

Comme dans le cas général, le système (120), (121), (122) est formé de six équations à six inconnues,  $d, z, a, a_1, s_0, s_{01}$ . Il est d'une intégration facile. De (121) et (122) on tire, en éliminant  $\frac{ds_0}{ds}$  et  $\frac{ds_{01}}{ds}$ ,

$$\frac{dz}{ds} \cos \theta - \sin \psi \sin \theta = h \frac{\omega}{W_1} \cos \theta - \frac{d}{\cos \theta} \frac{dv_0}{ds} \sin \theta = -\frac{d}{\cos \theta} \frac{dv_{01}}{ds} \sin \theta;$$



dès lors, en vertu des équations (118) et de la relation

$$\frac{\omega}{W_1} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m},$$

on voit que  $d$  sera donné par (62) et que  $z$  s'en déduira par une quadrature. Puis, d'après (120) et la valeur trouvée pour  $d_1$ , on aura

$$\cos \psi - \frac{h'}{W_1} \cot \theta = a \frac{dv_0}{ds} = a_1 \frac{dv_{01}}{ds},$$

ce qui donne

$$\cos \psi - \frac{h'}{W_1} \cot \theta = \frac{\omega}{W_1} \frac{aa_1}{a - a_1} \cos \theta,$$

conformément aux relations obtenues à la fin du n° 43. Enfin les formules (122) donneront les courbures  $\frac{dv_0}{ds_0}$  et  $\frac{dv_{01}}{ds_{01}}$  de  $C$  et  $C_1$  (estimées positivement suivant  $\mathbf{i}$ ); on en déduira les arcs  $s_0$ ,  $s_{01}$  par des quadratures.

53. *Les surfaces S et S<sub>1</sub> sont gauches.* — Écrivons que le point

$$I_0 = 1 + z\mathbf{H} + d\mathbf{i}$$

est le point central sur S et S<sub>1</sub> de la génératrice  $\delta$  définie par  $z$ ,  $\psi$ ,  $d$  et  $\theta$ . Il viendra, en différentiant d'abord dans  $\mathfrak{C}$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI_0}{dv}\right)_{\mathfrak{C}} &= k\mathbf{G} + c_m\mathbf{H} + \frac{dz}{dv}\mathbf{H} + \frac{dd}{dv}\mathbf{i} + z\mathbf{T} + d\left(\mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{G}_0}{\rho}\right)\frac{dv_0}{dv} \\ &= (k_0\mathbf{G}_0 + c\mathbf{H}_0)\frac{dv_0}{dv}. \end{aligned}$$

Multiplions intérieurement les deux membres de cette relation par  $\mathbf{H}$ , puis par  $\mathbf{i}$  et enfin par  $\mathbf{l}$  (vecteurs-unités d'un trièdre rectangle); il viendra, d'après (111)<sub>1</sub>, et en opérant de même dans  $\mathfrak{C}$ ,

$$\begin{aligned} (123) \quad \frac{dz}{dv} - d \cos \psi &= -c_m + (k_0 \cos \theta - c \sin \theta) \frac{\rho^*}{\cos \theta} \cos \psi \\ &= -c_f + (k_0 \cos \theta - c_1 \sin \theta) \frac{\rho_1^*}{\cos \theta} \cos \psi, \end{aligned}$$

$$(124) \quad \frac{dd}{dv} + k \sin \psi + z \cos \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} (125) \quad -k \cos \psi + z \sin \psi &= \left[ d \cos \theta - k_0 \sin \theta - \left( \frac{d \sin \theta}{\rho} + c \cos \theta \right) \right] \frac{\rho^* \cos \psi}{\cos \theta} \\ &= \left[ d \cos \theta - k_0 \sin \theta - \left( \frac{d \sin \theta}{\rho_1} + c_1 \cos \theta \right) \right] \frac{\rho_1^* \cos \psi}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un système de cinq équations renfermant cinq fonctions inconnues de  $\nu$  :  $d$ ,  $z$ ,  $k_0$ ,  $c$  et  $c_1$ . Or, on peut tirer  $c$  et  $c_1$  de (125); on, a par exemple,

$$c + k_0 \operatorname{tg} \theta = \left( \frac{1}{\rho} + \operatorname{tang} \theta \right) (k - z \operatorname{tang} \psi) + d \left( 1 - \frac{\operatorname{tang} \theta}{\rho} \right).$$

Portant dans (123) on aura deux équations en  $\frac{dz}{d\nu} - d \cos \psi$  et  $k_0$ ; en s'appuyant sur (95) on verra que  $k_0$  vérifie (99), tandis que  $z$  est donné par l'équation

$$\begin{aligned} (126) \quad \frac{dz}{d\nu} - d \frac{\cos \psi}{\cos^2 \theta} - z \sin \psi \operatorname{tang} \theta + k \cos \psi \operatorname{tang} \theta \\ = -c_m + h \frac{\cos \psi}{\cos^2 \theta} \rho^* \\ = -c_f + h \frac{\cos \psi}{\cos^2 \theta} \rho_1^*, \end{aligned}$$

les deux derniers membres étant égaux d'après (67) et (95). D'autre part, en différentiant (99) par rapport à  $\nu_0$  (et  $\nu_{01}$ ) et en utilisant (110)<sub>1</sub>, (111) et (124), on retrouve les deux équations (102). C'est, pour le cas I du n° 45, la vérification annoncée plus haut (n° 49).

De plus, soient  $h$ ,  $k$ ,  $c_m$ ,  $c_f$ ,  $\rho^*$ ,  $\rho_1^*$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  des fonctions de  $\nu$ , les quatre dernières liées par (96), (101) et (110); introduisons-les dans les équations (124), (126) qui deviendront ainsi un système différentiel du second ordre en  $d$  et  $z$ . Toute solution de ce système fournira un point  $I_0$  et une droite  $\delta$ , de coordonnées  $(z, d, \psi, \theta)$ ; et, en vertu même de la manière dont nous avons obtenu le système (123), (124),  $I_0$  sera le point central de  $\delta$  pour les réglées  $S$  et  $S_1$  qu'elle décrit dans  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}_1$ ; enfin les valeurs des coefficients  $c$  et  $c_1$  relatifs à  $S$  et  $S_1$  seront donnés par (125). On peut ainsi obtenir une infinité de couples de réglées ( $S, S_1$ ) dont les indicatrices seront des courbes conjuguées déjà construites (l'une, par exemple, étant choisie arbitrairement).

A l'aide du système (110), (124), (126) nous allons établir que le cas II du n° 46 est effectivement réalisable, et nous vérifierons du même coup les formules que nous avons obtenues à ce propos. Supposons, en effet, que  $\rho_m^{-1}$ ,  $\cotg \rho'$ ,  $k$ ,  $h$ ,  $c_m$  soient des fonctions de  $\nu$

continues pour  $\nu = 0$  ( $h$  et  $k$  dérivables, par exemple) et supposons que pour  $\nu = 0$  on ait  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi = \psi_0$ . D'après (110) et (101) on pourra écrire

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \nu \sin \psi_0 + \dots,$$

$$\rho^* = -\nu \sin \psi_0 + \dots, \quad \rho_1^* = -\nu \sin \psi_0 + \dots,$$

les points désignant des infiniment petits par rapport aux termes écrits. Cela étant, éliminons  $z$  entre (124) et (126); il viendra

$$(127) \quad \frac{d^2 d}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{dd}{d\nu} + \frac{d}{\nu^2} \cot^2 \psi_0 = \frac{h \cos^2 \psi_0 - k}{\nu \sin \psi_0} + \dots,$$

les termes non écrits au second membre représentant une fonction linéaire en  $\frac{dd}{d\nu}$  et  $d$ , à coefficients continus pour  $\nu = 0$ . Or, en employant, par exemple, la méthode des approximations successives de M. Émile Picard, on établit aisément que l'équation (127) possède une intégrale et une seule s'annulant pour  $\nu = 0$ ; et cette intégrale est de la forme

$$d = \nu [h(0) \cos^2 \psi_0 - k(0)] \sin \psi_0 + \nu^2 \Phi(\nu),$$

$\Phi(\nu)$  étant continue pour  $\nu = 0$ . Dès lors, quand  $\nu$  tendra vers zéro,  $z$  tendra vers

$$(128) \quad z(0) = -h(0) \sin \psi_0 \cos \psi_0.$$

Or, appliquons au couple de réglées ainsi introduit les résultats du n° 46; la comparaison de (104) (où  $\mathbf{T}_0 = -\mathbf{i}$ ) avec (61) montre qu'il faudra prendre  $\varphi = \psi_0 + \pi$  et l'on aura  $h = h(0)$ ; dès lors (128) équivaut à (106), et les équations (105) sont des conséquences de (102). Enfin si dans (103) on exprime  $\rho^*$  et  $\rho_1^*$  en fonction de  $\rho$  et  $\rho_1$  au moyen de (101), l'équation qu'on obtient en rapprochant les membres extrêmes se réduit à (107) pour  $\nu = 0$ .

54. Passons maintenant au cas où  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont cylindriques. Nous obtiendrons d'abord les mêmes équations (117) et (118) que dans le cas où  $S$  et  $S_1$  sont développables. Puis l'on écrira que le point  $I_0 = I + z\mathbf{H} + d\mathbf{i}$  est le point central des surfaces réglées décrites par  $\delta$ ; en procédant comme dans le cas général et en utilisant (119)

on obtiendra deux relations qui multipliées par  $i$ , puis par  $\mathbf{H}$  et par  $\mathbf{l}$ , donneront

$$(129) \quad \frac{dd}{ds} + \cos\psi = 0,$$

$$(130) \quad \frac{dz}{ds} = h \frac{\omega}{W_1} - [(d \operatorname{tang}\theta - k_0) \cos\theta + (c - d) \sin\theta] \frac{dv_0}{ds} \\ = - [(d \operatorname{tang}\theta - k_0) \cos\theta + (c_1 - d) \sin\theta] \frac{dv_{01}}{ds};$$

$$(131) \quad \sin\psi = [(d \operatorname{tang}\theta - k_0) \sin\theta + (d - c) \cos\theta] \frac{dv_0}{ds} \\ = [(d \operatorname{tang}\theta - k_0) \sin\theta + (d - c_1) \cos\theta] \frac{dv_{01}}{ds}.$$

On a là un système de cinq équations à cinq fonctions inconnues :  $d$ ,  $z$ ,  $k_0$ ,  $c$ ,  $c_1$ . Tirant  $c$  et  $c_1$  de (131), portant dans (130) et utilisant (118), on voit que  $k_0$  satisfera encore à (99), tandis que  $z$  et  $d$  (donc  $c$  et  $c_1$ ) seront donnés par des quadratures. D'autre part, en différentiant (99) on trouve

$$(132) \quad k' = \left( \frac{h'}{W_1} + \frac{dd}{ds} \operatorname{tang}\theta \right) \frac{ds}{dv_0} = \left( \frac{h'}{W_1} - \operatorname{tang}\theta \cos\psi \right) \frac{ds}{dv_0},$$

et de même pour  $k'_1$ ; et d'après (118), (131) et (99) on en déduit les relations (108). Enfin, d'après (132) et (118),

$$\frac{1}{k'_1} - \frac{1}{k'} = \frac{\cos\theta}{\frac{h'}{W_1} - \operatorname{tang}\theta \cos\psi} \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \right),$$

ce qui redonne (109).

55. Abordons maintenant le *second des problèmes posés à la fin du n° 49*; et nous plaçant dans le cas général où les axoïdes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  ne sont pas cylindriques, nous allons montrer comment, à partir d'un couple donné  $(S, S_1)$  de réglées conjuguées, on pourra *déterminer le trièdre central  $(\mathbf{I}, \mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$  des axoïdes, et les éléments centraux,  $k, c_f, c_m, h$ , ainsi que  $\rho_m$  et  $\rho_f$* . Connaissant  $S$  et  $S_1$ , on connaît  $\mathbf{T}_0 = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{j}$ ; donc, d'après (61), la détermination de  $\mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  revient à celle de  $\psi$  et  $\theta$ ; et celle de  $\mathbf{I}$  se ramène au calcul de  $z$ , de  $d$  (et de  $a$  si  $S$  et  $S_1$  sont développables).

1°  $S$  et  $S_1$  sont développables. — La seule donnée des positions de  $S$  et  $S_1$  à l'instant  $t$  ne suffit pas pour la détermination du trièdre

central. Nous supposons que l'on connaît le rapport  $\frac{ds_0}{ds_{01}}$  des vitesses de glissement, dans  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}_1$ , des points de contact  $N$  et  $N_1$  de la génératrice commune  $\delta$  avec  $C_0$  et  $C_{01}$ , ces vitesses étant estimées positivement toutes deux dans la même direction, celle de  $j$ , par exemple. Or on a

$$\frac{ds_0}{dv_0} = R, \quad \frac{ds_{01}}{dv_{01}} = R_1,$$

$R$  et  $R_1$  étant les rayons de courbure estimés positivement dans la direction de  $\mathbf{T}_0$  (donc de  $-\mathbf{i}$ ); on en déduira  $\rho^* : \rho_1^*$  d'après (111). Bornons-nous au cas où  $\rho^* : \rho_1^* \neq 1$ ; on calculera  $\theta$  d'après (101) en utilisant les indicatrices des réglées, c'est-à-dire de  $C_0$  et  $C_{01}$ , ou en observant que,  $T$  et  $T_1$  étant les rayons de torsion de  $C_0$  et  $C_{01}$ , on a  $\rho = -\frac{T}{R}$ ,  $\rho_1 = -\frac{T_1}{R_1}$ . On aura ensuite  $\text{tang} \psi$  en formant  $\frac{d\theta}{dv_0}$  d'après (110)<sub>1</sub> et (111), et d'après (110)<sub>2</sub> on en déduira  $\rho_m$  et  $\rho_f$ . Or on connaît  $a_1 - a$ , ainsi que  $\frac{ds_0}{dv}$ ,  $\frac{ds_{01}}{dv}$ ; donc (115) et (62) fourniront  $d$  et  $h$  (du moins pour  $\cos \psi \cotg \rho' \neq \cos \psi \cotg \rho'_1$ , et  $\cos \theta \neq 0$ ). Les formules (94) donneront alors

$$\frac{a}{a_1 - a} = \frac{\rho \sin \theta + \cos \theta}{(\rho_1 - \rho) \cos \theta} \rho_1,$$

et, par suite,  $a$ , et  $a_1$ ; dès lors (113) et (115) définiront  $k$  et  $z$ ; enfin (114) fournira  $c_m$  et  $c_f$ .

2° *Set  $S_1$  sont gauches.* — Connaissant la distribution des courbures le long de  $\delta$ , on aura  $k'$  et  $k'_1$  d'après (52) (on formera, par exemple, la différence des courbures des sections planes de  $S$  normales à  $\delta$  en deux points de  $\delta$  symétriques par rapport à  $I_0$ ); on aura ainsi  $\rho^* : \rho_1^*$  d'après (102), et si ce rapport est  $\neq 1$  (c'est-à-dire si  $k' : k'_1 \neq 1$ ) on en déduira comme tout à l'heure  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\frac{dv_0}{dv}$ ,  $\frac{dv_{01}}{dv}$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_f$ . Les équations (99) et (103) donneront  $d$  et  $h$ ; on en déduira  $\frac{dd}{dv_0}$ ,  $\frac{dd}{dv}$ , d'où  $k$  et  $z$  d'après (124) et (125), et l'on aura  $c_m$  et  $c_f$  au moyen de (123).

## VI. — Extension d'une formule de Disteli.

56. Proposons-nous de déterminer les axes instantanés des mouvements  $\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_1}$  et  $\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_1}$ , où  $\mathfrak{C}_0$  désigne le trièdre central commun des surfaces

gauches S et S<sub>1</sub> (n° 53). La rotation de  $\frac{\mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}}$  est

$$\omega_0 = \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \mathbf{k} \right) \frac{dv_0}{dt},$$

( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  ayant toujours le même sens qu'au n° 45), ce qui définit la direction de l'axe instantané de  $\frac{\mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}}$ . On a alors

$$\omega_0 \wedge \left( \frac{dI_0}{dt} \right)_{\mathfrak{E}} = \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \mathbf{k} \right) \wedge (k_0 \mathbf{k} + c \mathbf{j}) \left( \frac{dv_0}{dt} \right)^2 = \left( \frac{k_0}{\rho} - c \right) \left( \frac{dv_0}{dt} \right)^2 \mathbf{i} = \frac{\alpha}{\rho^*} \left( \frac{dv_0}{dt} \right)^2 \mathbf{i},$$

avec

$$\alpha = k_0(1 - \rho^* \tan \theta) - c\rho^* = h - k + z \tan \psi + d(2 \tan \theta - \rho^* \sec^2 \theta),$$

la dernière égalité résultant de (99) et (103). Cela étant, l'axe hélicoïdal instantané de  $\frac{\mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}}$  est la parallèle à  $\omega_0$  menée par le point

$$J_0 = I_0 + \frac{\omega_0 \wedge \left( \frac{dI_0}{dt} \right)_{\mathfrak{E}}}{\omega_0^2},$$

soit

$$J_0 = I + z \mathbf{H} + l \mathbf{i},$$

avec

$$l = d + \frac{\alpha \rho^*}{1 - 2\rho^* \tan \theta + \rho^{*2} \sec^2 \theta},$$

ou

$$l = \frac{d + \rho^*(h - k + z \tan \psi)}{1 - 2\rho^* \tan \theta + \rho^{*2} \sec^2 \theta}.$$

L'axe est ainsi bien déterminé. Or on peut écrire, d'après (90),

$$W^{-1} \omega_0 = \mathbf{l} \cos \psi + \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \left( \frac{\rho^*}{\cos \theta} - \sin \theta \right) \mathbf{H};$$

désignons par  $\chi$  l'angle de  $\omega_0$  avec  $\mathbf{H}$ , de telle sorte que

$$\sin^2 \chi = \frac{\cos^2 \theta}{1 - 2\rho^* \tan \theta + \rho^{*2} \sec^2 \theta};$$

il viendra

$$\frac{l}{\sin^2 \chi} = \frac{d + \rho^*(h - k + z \tan \psi)}{\cos^2 \theta},$$

et l'on pourra écrire, en procédant de même pour  $\frac{\mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}_1}$ ,

$$\frac{l_1}{\sin^2 \chi_1} - \frac{l}{\sin^2 \chi} = \frac{\omega}{W} \frac{h - k + z \tan \psi}{\cos \psi}.$$

Cette formule a été donnée par M. Disteli dans le cas particulier où S se réduit à une droite ( $\rho^* = 0, \pm \chi = \frac{\pi}{2} - \theta, l = d$ ) (1).

### VII. — Roulement ponctuel.

57. La méthode du n° 8 fournit encore des résultats importants dans le cas où  $S_1$  désigne, non plus l'enveloppe des positions de S par rapport à  $\mathfrak{C}_1$ , mais seulement *une surface de  $\mathfrak{C}_1$ , à laquelle S reste constamment tangente, le contact ayant lieu, non plus suivant une ligne, mais en un point (ou des points) isolé.* En effet, on pourra toujours procéder sur le point de contact, que nous appellerons encore  $m(t)$ , comme au n° 8; le seul fait nouveau, c'est qu'*actuellement la trajectoire de  $m(t)$  par rapport à  $S_1(S)$  ne pourra plus être choisie arbitrairement;* ce sera une courbe bien déterminée  $C_1(C)$ . Dès lors le rapport  $\xi_1 : \eta_1$ , ne peut plus être pris arbitrairement; et l'on ne peut plus écrire que les équations (5) sont indéterminées, mais seulement qu'elles sont compatibles, ce qui se traduira en général par l'annulation d'un déterminant du troisième ordre.

Nous nous arrêtons seulement sur le cas, important en pratique, où S *roule et pivote sans glisser sur  $S_1$ .* Les courbes C et  $C_1$  sont les *courbes de roulement*; la vitesse d'entraînement de m est alors constamment nulle;  $C_1$  *est donc l'enveloppe des positions de C par rapport à  $\mathfrak{C}_1$ .* L'axe instantané de rotation  $\Delta$  passe constamment par  $m(t)$ ; avec les notations du n° 8 on a donc  $\xi = 0 = \eta_1, A = q, B = -p$ . Nous choisirons l'axe  $mx_0$  de  $\mathfrak{C}_0$  de manière que  $p = 0$ ; les équations (5) se réduiront alors à

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} (r_1 - r)\xi_1 + (s_1 - s)\eta_1 = -q, \\ (s_1 - s)\xi_1 + (t_1 - t)\eta_1 = 0, \\ q\xi_1 = \zeta'; \end{array} \right.$$

(1) Voici le tableau de concordance de nos notations avec celles de M. Disteli :

M. D....	$h_0$	$l$	$\varphi$	$p$	$\bar{p}$	$\bar{\rho}$	$\rho$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{F}$	(axes)	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{Z}$	$x$	$y$	$z$
R. G....	$h$	$z$	$\psi - \frac{\pi}{2}$	$\rho e^{-1}$	$\rho m^{-1}$	$d$	$l_1$	$\chi_1$	$\chi$	(vecteurs-unités)	$-j$	$i$	$k$	$H$	$T$	$G$

et le vecteur  $\xi_1 \mathbf{i} + \eta_1 \mathbf{j}$  sera une tangente commune à C et C<sub>1</sub>. Supposons  $t_1 - t \neq 0$ ; il viendra

$$\eta_1 = -\frac{s_1 - s}{t_1 - t} \xi_1, \quad \left[ r_1 - r - \frac{(s_1 - s)^2}{t_1 - t} \right] \xi_1 = -q,$$

d'où

$$(134) \quad r_1 - r - \frac{(s_1 - s)^2}{t_1 - t} = -\frac{q^2}{\zeta'}.$$

Le cas  $t_1 - t = 0 \neq s_1 - s$  exige  $\xi_1 = 0 = \zeta'$ , avec  $(s_1 - s)\eta_1 = -q$ ; c'est un cas singulier (n° 10). Enfin, si  $t_1 - t = 0 = s_1 - s$ , avec  $r_1 - r \neq 0$ , les équations (133) se réduisent à

$$(r_1 - r)\xi_1 = -q, \quad q\xi_1 = \zeta',$$

et l'on aura, en général,

$$r_1 - r = -\frac{q^2}{\zeta'}.$$

Dans le cas général du roulement ( $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  non cylindriques), (134) donnera, avec les notations du n° 33,

$$r_1 - r - \frac{(s_1 - s)^2}{t_1 - t} = \frac{\omega}{W} \frac{\sin \theta}{b \sin(\psi - \alpha)},$$

soit encore

$$r_1 - r - \frac{(s_1 - s)^2}{t_1 - t} = \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \right) \frac{\sin \theta}{\cos \varphi}.$$

Dans le cas où S, par exemple, se réduirait à une courbe C, on remplacerait  $r, s, t, rt - s^2$  par leurs expressions (n° 18); mais les équations (133) se ramèneraient à l'équation unique

$$\xi_1 \sin \varphi - \eta_1 \cos \varphi = 0;$$

cette équation exprime que la courbe roulante C est tangente à la courbe de roulement C<sub>1</sub>.

58. Les deux premières équations (133) ont déjà été obtenues sous une autre forme par Resal. Pour le voir, désignons par  $\gamma$  et  $\gamma_1$  les angles de la tangente commune  $mt$  à C et C<sub>1</sub> avec ses conjuguées relatives aux indicatrices de Dupin de S et S<sub>1</sub> en  $m$  (ces angles étant comptés à partir de  $mt$  dans le sens direct); soient  $\rho$  et  $\rho_1$  les rayons



de courbure des sections normales menées par  $mt$  dans  $S$  et  $S_1$  (ces rayons étant estimés positivement suivant  $mz_0$ ). On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r\xi_1^2 + 2s\xi_1\eta_1 + t\eta_1^2}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad \cot\gamma = \frac{s\eta_1^2 + (r-t)\xi_1\eta_1 - s\xi_1^2}{r\xi_1^2 + 2s\xi_1\eta_1 + t\eta_1^2}$$

et des formules analogues pour  $S_1$ . Ajoutons alors membre à membre les équations (133)<sub>1</sub> et (133)<sub>2</sub> après les avoir multipliées d'abord par  $\eta_1$  et  $-\xi_1$ , puis par  $\xi_1$  et  $\eta_1$ ; il viendra

$$\frac{\cot\gamma_1}{\rho_1} - \frac{\cot\gamma}{\rho} = -\frac{q\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}$$

et

$$(135) \quad \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = -\frac{q\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

d'où, par division membre à membre,

$$(136) \quad \cot V = \frac{\frac{1}{\rho_1} \cot\gamma_1 - \frac{1}{\rho} \cot\gamma}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}},$$

$V$  désignant l'angle  $mt$  avec la projection de  $\Delta$  sur le plan tangent (cet angle étant compté à partir de  $mt$ ). Or, les équations (135) et (136) ont été données par Resal dans son *Traité de Cinématique pure* [formules (2), p. 158, ou p. 160 et (1), p. 157].

Observons enfin que, dans le cas actuel du roulement ( $\xi = 0 = \eta$ ), les équations (133), où le second membre de (133)<sub>2</sub> est remplacé maintenant par  $p$ , pour plus de symétrie établissent une relation d'involution entre la tangente  $mt(\xi_1, \eta_1)$  aux courbes de roulement et la projection  $(p, q)$  de la rotation instantanée sur le plan tangent

$$(r_1 - r)\xi_1 p + (s_1 - s)(\xi_1 q + \eta_1 p) + (t_1 - t)\eta_1 q_1.$$

C'est l'involution des directions « cinématiquement conjuguées », étudiée par Beltrami et par Bianchi.

