

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

**Sur la réductibilité des systèmes automorphes dont le groupe  
d'automorphie est un groupe continu fini simplement transitif**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 57 (1940), p. 1-60

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1940\\_3\\_57\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1940_3_57__1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANNALES**  
SCIENTIFIQUES  
DE  
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

---

SUR LA  
**RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES AUTOMORPHES**  
DONT LE GROUPE D'AUTOMORPHIE  
EST UN GROUPE CONTINU FINI SIMPLEMENT TRANSITIF

PAR M. ERNEST VESSIOT.

---

Introduction.

1. L'extension des idées de Galois aux équations différentielles ordinaires linéaires, telle qu'elle a été faite par M. Émile Picard <sup>(1)</sup> et poursuivie par l'auteur <sup>(2)</sup>, repose sur la rationalité des transformations linéaires homogènes qui changent tout système fondamental d'intégrales en un autre. Elle suppose donc que toutes les constantes numériques (soit réelles, soit complexes, suivant le point de vue analytique adopté) font partie du domaine de rationalité dans lequel on opère.

---

<sup>(1)</sup> *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1884. Voir aussi le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. 3, Chapitre XVII. Ce Chapitre a fait l'objet d'une brochure éditée en 1936 par la librairie Gauthier-Villars, et ayant pour titre : *Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques*.

<sup>(2)</sup> *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1892.

Dans un article récent <sup>(1)</sup> M. Élie Cartan a insisté sur ce fait, et rappelé qu'il avait depuis longtemps <sup>(2)</sup> posé la question de savoir ce qui subsisterait des résultats de la théorie ainsi fondée, si on laissait tomber cette hypothèse. Le présent travail répond à cette question en ce qui concerne l'existence et les propriétés des groupes de rationalité <sup>(3)</sup>.

J'y traite, plus généralement, des systèmes différentiels automorphes <sup>(4)</sup> dont le groupe d'automorphie est un groupe continu simplement transitif <sup>(5)</sup>. Le nombre des variables indépendantes est, de plus, supposé quelconque.

Cette étude s'applique immédiatement à l'équation linéaire d'ordre  $m$

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dt^m} + p_1(t) \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + p_m(t) y = 0.$$

Celle-ci devient, en effet, quand on prend pour inconnues les éléments  $y_1, \dots, y_m$  d'un système fondamental d'intégrales, un système automorphe dont le groupe d'automorphie est le groupe linéaire homogène général <sup>(6)</sup>

$$(2) \quad \bar{y}_i = a_{i\alpha} y_\alpha \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, m).$$

Et il suffit de considérer comme inconnues, en même temps que les  $y_i$ ,

<sup>(1)</sup> *Commentarii mathematici Helvetici*, t. 11, 1937, p. 9-25.

<sup>(2)</sup> *Revue du mois*, t. 17, 1914, p. 445.

<sup>(3)</sup> Les résultats en ont été donnés, partiellement, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, le 20 mars 1939 (t. 208, p. 875).

<sup>(4)</sup> Suivant une dénomination que j'ai introduite autrefois (*Ann. de l'Éc. Normale sup.*, série 3, t. 21, 1904, p. 10-12; *Acta Mathematica*, t. 28, 1904, p. 308), un système d'équations, finies ou différentielles, est dit *automorphe* si ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les transformations d'un groupe, effectuées sur les inconnues. Ce groupe est le *groupe d'automorphie* du système. Je l'avais appelé *groupe associé* au système; d'autres auteurs disent *groupe fondamental*.

<sup>(5)</sup> Un groupe continu fini est dit *simplement transitif* s'il y a une transformation du groupe, et une seule, qui change un point, arbitrairement donné, en un autre point arbitrairement donné : cela s'exprime analytiquement par le fait que le nombre des paramètres de la transformation générale du groupe est égal au nombre des variables, et que ses équations sont résolubles par rapport aux paramètres.

<sup>(6)</sup> Comme on le fait dans le calcul tensoriel, j'emploierai couramment la notation

$a_\alpha b_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) pour désigner la somme  $\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha b_\alpha$ .

leurs dérivées  $y_i^{(h)}$  ( $h = 1, 2, \dots, \overline{m-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ), pour remplacer ce système automorphe par un autre, à  $m^2$  inconnues, dont le groupe d'automorphie sera simplement transitif, car il s'obtiendra en adjoignant aux équations (2) celles qu'on en déduit en y remplaçant successivement les  $y_i$  et les  $\bar{y}_i$  par les dérivées  $y_i^{(h)}$ ,  $\bar{y}_i^{(h)}$ , pour  $h = 1, 2, \dots, \overline{m-1}$ .

On traitera, du reste, au n° 24, un exemple relatif à une équation linéaire homogène du second ordre.

Quant au système linéaire homogène du premier ordre, à  $m$  inconnues [dont l'équation (1) est un cas particulier],

$$(3) \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_{i\alpha}(t)y_\alpha \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, m),$$

il devient un système automorphe quand on prend pour inconnues les  $m^2$  éléments  $y_{h,i}(h, i = 1, 2, \dots, m)$ , de  $m$  solutions indépendantes

$$(4) \quad y_1 = y_{h,1}, \quad y_2 = y_{h,2}, \quad \dots, \quad y_m = y_{h,m}, \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Le groupe d'automorphie est simplement transitif : il s'obtient en remplaçant, dans les équations (2), les  $y_i$  et les  $\bar{y}_i$  successivement par les  $y_{ij}$  et les  $\bar{y}_{ij}$ , pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ; de sorte qu'il est holoédriquement isomorphe au groupe linéaire homogène général (2).

2. Ma nouvelle théorie, dont la méthode est entièrement différente de celle de Galois, est fondée sur une étude préliminaire des *sous-systèmes*  $\Sigma$  du système automorphe  $S$  considéré, c'est-à-dire des systèmes d'équations, finies ou différentielles, dont toute solution appartient à  $S$ , mais qui n'admettent pas toutes les solutions de  $S$ . Cette étude met en évidence les sous-systèmes, que j'appelle *principaux*, qui sont automorphes et ont pour groupes d'automorphie des sous-groupes  $g$  du groupe d'automorphie  $G$  de  $S$ . Ces sous-systèmes principaux se distribuent en *classes* : ceux qui constituent une de ces classes se déduisent les uns des autres par les diverses transformations de  $G$ , et les solutions de  $S$  se partagent entre eux.

3. Comme dans l'analyse de la réductibilité des équations différen-

tielles ordinaires linéaires que j'avais faite dans mon mémoire couronné de 1902 <sup>(1)</sup>, le fait essentiel qui permet de caractériser le mode de réductibilité des systèmes automorphes  $S$  considérés ici est que tout sous-système  $\Sigma$  rationnel donne naissance à des sous-systèmes principaux rationnels, appartenant à une même classe, et que les solutions de  $\Sigma$  se répartissent entre des sous-systèmes principaux (rationnels ou non) faisant partie de cette classe. Mais la constatation de ce fait et le moyen d'obtenir ces sous-systèmes principaux rationnels sont ici beaucoup plus aisés.

Cela tient à l'introduction du groupe simplement transitif  $H$ , *réci-proque* <sup>(2)</sup> du groupe d'automorphie  $G$  de  $S$ , et des transformations obtenues en remplaçant les paramètres, dans la transformation générale de  $H$ , par des fonctions des variables indépendantes. Celles de ces transformations qui laissent  $S$  invariant forment un groupe  $K$ , holoédriquement isomorphe à  $G$ , que j'appelle le *groupe d'invariance* de  $S$ . Il joue, pour  $S$ , le rôle d'un second groupe d'automorphie : les solutions de  $S$  résultant de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de  $K$ , et le passage d'une solution donnée de  $S$  à une autre solution donnée se faisant par une seule transformation de  $K$ .

Tout sous-système principal de  $S$  a, de même, outre son groupe d'automorphie  $g$ , sous-groupe de  $G$ , un *groupe d'invariance*  $k$ , qui est un sous-groupe de  $K$  et qui est holoédriquement isomorphe à  $g$ . De plus, tous les sous-systèmes principaux d'une même classe ont le même groupe d'invariance, tandis que leurs groupes d'automorphie sont seulement des sous-groupes *homologues* de  $G$ .

Tout sous-groupe  $k$  de  $K$  est groupe d'invariance pour une classe de sous-systèmes principaux. Si  $k$  est le plus grand sous-groupe de  $K$  qui laisse invariant un sous-système donné  $\Sigma$ , il définit ainsi une classe de sous-systèmes principaux que j'appelle les *adjoints* de  $\Sigma$ . Les solutions de  $\Sigma$  se répartissent entre certains de ses adjoints.

Si  $\Sigma$  est rationnel, il y a, dans la classe de ses adjoints, des sous-

(1) Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations : *Annales de l'École Normale supérieure*, série 3, t. 21, 1904, Chap. II, p. 29.

(2) Les groupes simplement transitifs s'associent en couples de groupes, dits *réci-proques*, tels que toute transformation  $S$  d'un groupe simplement transitif quelconque et toute transformation  $T$  de son réciproque sont *permutables* : c'est-à-dire que l'on a  $ST = TS$ .

systèmes rationnels. Tels sont ceux dont une solution a *un point rationnel* : j'entends par là que si  $x_1, \dots, x_n$  sont les fonctions inconnues, et  $t_1, \dots, t_p$  les variables indépendantes, il existe un système de valeurs rationnelles des  $t_h$  pour lesquelles les  $x_i$ , dans la solution considérée, prennent des valeurs rationnelles. C'est là le *lemme fondamental* sur lequel est fondée notre analyse de la réductibilité des systèmes S considérés.

4. Ce lemme est établi dans l'hypothèse où les équations du groupe d'automorphie G sont rationnelles par rapport aux variables et aux paramètres, et résolubles rationnellement par rapport à ceux-ci (le mot rationnel étant pris avec le sens qu'il a dans l'algèbre élémentaire). Ces conditions sont manifestement remplies dans le cas des équations et systèmes différentiels ordinaires linéaires.

Le *domaine de rationalité* contient, par définition, les variables  $t_h$  et  $x_i$ , ainsi que les indéterminées qui interviennent comme paramètres. Comme constantes numériques, il ne contient obligatoirement, *a priori*, que les nombres réels rationnels (au sens élémentaire du mot), tant négatifs que positifs (zéro compris).

Il peut contenir, en outre, des fonctions de  $t_1, \dots, t_p$  données; mais cela entraîne alors qu'il doit contenir aussi leurs dérivées, et les valeurs numériques prises par les unes et les autres pour des valeurs numériques quelconques des  $t_h$ , appartenant déjà au domaine de rationalité.

Les équations du système S considéré doivent faire partie du domaine de rationalité. Elles sont de la forme

$$(5) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t_h} = \lambda_{h,\alpha}(t_1, \dots, t_p) \zeta_{\alpha,i}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p),$$

les  $\zeta_{j,i}$  étant les coefficients de  $n$  transformations infinitésimales indépendantes

$$(6) \quad Z_j f = \zeta_{j,\alpha}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, j = 1, 2, \dots, n),$$

du réciproque H du groupe d'automorphie G. Vu les hypothèses faites sur les équations de G, on peut supposer que les  $\zeta_{j,i}$  sont rationnels. Si les  $\lambda_{h,i}(t_1, \dots, t_p)$  n'appartenaient pas, d'emblée, au domaine de

rationalité choisi, il faudrait les y adjoindre, dans les conditions indiquées ci-dessus.

5. Le mode de réductibilité propre à un système  $S$  rationnel donné est caractérisé par le plus grand sous-groupe  $k_0$  du groupe d'invariance  $K$  de  $S$  qui laisse invariants tous les sous-systèmes rationnels de  $S$ . J'appelle ce groupe  $k_0$ , en conséquence, *groupe spécifique* de  $S$ . Les sous-systèmes principaux de  $S$  qui ont ce groupe spécifique  $k_0$  pour groupe d'invariance sont dits *sous-systèmes spécifiques*.

Il résulte de ces définitions que les solutions de tout sous-système rationnel  $\Sigma$  de  $S$  se répartissent entre des sous-systèmes spécifiques, rationnels ou non. Je démontre, et c'est là le point capital, qu'il y a toujours des sous-systèmes spécifiques rationnels. Tels sont ceux dont une solution  $a$  (au sens indiqué plus haut) un point rationnel. Ce ne sont pas, du reste, en général, les seuls, comme je le montre sur un exemple (n° 24).

Si l'on appelle *conjuguées* deux solutions de  $S$  telles que l'on passe de l'une à l'autre par une transformation du groupe spécifique, on peut dire que tout sous-système rationnel de  $S$  qui admet une solution particulière de  $S$  admet aussi ses conjuguées : de sorte qu'au point de vue de la détermination des diverses solutions de  $S$  par des systèmes rationnels, chaque solution est inséparable de ses conjuguées.

Chaque *famille de solutions conjuguées* (deux à deux) forme l'ensemble des solutions d'un sous-système spécifique, et réciproquement. Les solutions d'une telle famille s'échangent donc entre elles, non seulement par les transformations du groupe spécifique  $k_0$ , mais aussi par celles du groupe d'automorphie  $g$  du sous système spécifique  $\sigma$  dont elles sont les solutions.

Si ce sous-système  $\sigma$  est rationnel,  $g$  sera dit le *groupe de rationalité* relatif à chacune des solutions de la famille et celles-ci seront dites des *solutions primitives* de  $S$ . A l'égard de ces solutions et de ce groupe a lieu, en effet, le théorème suivant, auquel il est naturel de donner le nom de *théorème de Galois*.

« Pour qu'une fonction rationnelle de  $x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p$  se réduise à une fonction rationnelle de  $t_1, \dots, t_p$  quand on y remplace  $(x_1, \dots, x_n)$  par une *solution primitive* de  $S$ , il faut et il suffit qu'elle

se réduise à la même fonction de  $t_1, \dots, t_p$  quand on y remplace  $(x_1, \dots, x_n)$  par cette solution et par ses diverses conjuguées. »

Le mot rationnel indique ici que les fonctions en question appartiennent au domaine de rationalité considéré.

Comme les diverses conjuguées d'une solution primitive s'obtiennent en lui appliquant les diverses transformations du groupe de rationalité  $g$  qui lui est relatif, on peut dire, plus rapidement.

« Pour qu'une fonction rationnelle <sup>(1)</sup> des éléments d'une *solution primitive* de S ait une *valeur numérique* rationnelle, il faut et il suffit qu'elle admette *numériquement le groupe de rationalité* relatif à cette solution. »

On pourrait, du reste, remplacer, dans cet énoncé, le groupe de rationalité relatif à la solution considérée par le *groupe spécifique* de S.

Il convient d'observer que, pour une solution de S non primitive, on peut encore affirmer qu'une fonction rationnelle de  $x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p$  ne se réduit à une fonction rationnelle de  $t_1, \dots, t_p$  quand on y remplace  $(x_1, \dots, x_n)$  par cette solution que si elle se réduit à la même fonction de  $t_1, \dots, t_p$  quand on y remplace  $(x_1, \dots, x_n)$  par les conjuguées de cette solution. Mais cette condition n'est plus alors suffisante. C'est ce que nous vérifions sur l'exemple du n° 24, déjà mentionné.

6. Si toutes les constantes numériques appartiennent au domaine de rationalité considéré, tous les points de toute solution de S sont rationnels. Toutes les solutions de S sont donc alors primitives, et tous les sous-systèmes spécifiques sont rationnels. Le « théorème de Galois » s'applique, par suite, à toute solution de S : de sorte que la théorie exposée donne alors l'exacte généralisation des principes sur lesquels Galois a fondé sa théorie des équations algébriques.

7. Bien que cela dût accroître très sensiblement l'étendue de ce mémoire, je l'ai rédigé de manière à le rendre accessible à des lecteurs n'ayant sur les groupes de transformations que les notions les plus

---

(1) Il est ici sous-entendu que les variables indépendantes peuvent intervenir dans les coefficients de cette fonction rationnelle, pourvu que ce soit sous forme rationnelle.



élémentaires. C'est ainsi que j'ai repris, par une méthode qui me paraît nouvelle, la théorie des groupes simplement transitifs.

J'espère que la simplicité des idées qui m'ont guidé dans l'analyse de la réductibilité des systèmes automorphes considérés n'en sera pas moins manifeste (1).

I. — Sur les systèmes automorphes dont le groupe d'automorphie est simplement transitif.

1. **Définition des systèmes automorphes considérés.** — Suivant une dénomination que j'ai introduite autrefois (2), un système d'équations, finies ou différentielles, est dit *automorphe*, si ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles en y effectuant, *sur les inconnues*, les substitutions ou transformations d'un groupe, lequel est dit *groupe d'automorphie* du système.

Nous considérerons dans ce travail les systèmes automorphes différentiels dont le groupe d'automorphie est un *groupe continu fini simplement transitif* (3). Nous désignerons un tel système par la lettre S et son groupe d'automorphie par la lettre G.

Soient  $t_1, \dots, t_p$  les variables indépendantes,  $x_1, \dots, x_n$  les fonctions inconnues. Soient, d'autre part,

$$(1) \quad x_i = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Je rappelle, en terminant cette introduction, que j'avais montré, dès 1894, que les idées de Galois s'appliquaient aux systèmes automorphes considérés ici, aussi bien qu'aux équations différentielles ordinaires linéaires; et, par suite, indirectement à tous les systèmes de Lie, voir *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. VIII, mémoire 4 (Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre, qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales).

(2) Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, *Annales de l'École Normale supérieure*, (3), 21, 1904, p. 10 à 12 : Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, *Acta Mathematica*, 28, 1904, p. 308. Dans ces mémoires le groupe d'automorphie était désigné par le terme de *groupe associé*; d'autres auteurs emploient celui de *groupe fondamental*.

(3) Cela signifie qu'il y a une transformation du groupe et une seule qui change un point, arbitrairement donné, en un autre point arbitrairement donné : ce qui s'exprime par le fait que le nombre des paramètres du groupe est égal au nombre des variables, et que ses équations sont résolubles par rapport aux paramètres.

ou, sous forme ponctuelle abrégée,

$$(1 \text{ bis}) \quad x' = f(x, c),$$

les équations finies de G. Si

$$(2) \quad x_i = u_i(t_1, \dots, t_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou, sous forme abrégée,

$$(2 \text{ bis}) \quad x = u(t)$$

est une solution particulière quelconque de S, la solution générale sera, par définition,

$$(3) \quad x_i = f_i(u^1, \dots, u_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou, sous forme abrégée,

$$(3 \text{ bis}) \quad x = f(u, c),$$

les  $c_i$  étant des constantes arbitraires.

Les équations (1) de G sont, par hypothèse, *résolubles* <sup>(1)</sup> par rapport aux paramètres  $c_1, \dots, c_n$ , sauf peut-être en certains points exceptionnels, qui seront dits, le cas échéant, *singuliers*. Les solutions de S dans lesquelles les  $u_i$  seraient liés par les conditions d'impossibilité ou d'indétermination caractérisant ces points singuliers seront elles-mêmes considérées comme singulières et il en sera fait abstraction.

Les équations (3) de l'intégrale générale de S seront ainsi résolubles par rapport aux constantes arbitraires  $c_1, \dots, c_n$ , sauf peut-être pour certains systèmes exceptionnels de valeurs des  $t_p$  [pour lesquels le point  $x = u(t)$  deviendrait singulier], qui seront de ce fait, le cas échéant, considérés comme *singuliers* pour la solution  $(u_1, \dots, u_n)$ .

Il résulte de cette résolubilité qu'il y a une transformation de G et une seule qui change une solution de S donnée en une autre solution donnée.

Il en résulte aussi que S a une solution et une seule satisfaisant à

<sup>(1)</sup> Par cette *résolubilité*, il faut entendre l'existence d'une solution, et d'une seule : ce qui pourra exiger que l'on se place à un *point de vue local*, en supposant que les points  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n), (c_1, \dots, c_n)$  appartiennent à des domaines convenablement délimités.

des conditions initiales de la forme

$$(4) \quad x_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{pour} \quad t_h = t_h^0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

pourvu que le système des valeurs  $t_h^0$  des  $t_h$  ne soit pas singulier pour toute solution : auquel cas il devrait être considéré comme *singulier* pour le système S lui-même.

**2. Formes normales d'un groupe simplement transitif.** — Pour la commodité du lecteur, nous établirons, dans ce numéro et dans le suivant, quelques propriétés fondamentales des groupes simplement transitifs, dont nous aurons besoin dans la suite.

G sera donc un groupe simplement transitif quelconque, ayant pour équations finies les équations (1). Soit  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  un point déterminé, non singulier, arbitrairement choisi du reste. Les équations

$$(5) \quad a_i = f_i(\omega_1, \dots, \omega_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

définissent, pour G, un *changement de paramètres*. Les nouveaux paramètres  $a_i$  sont, d'après ces équations, les coordonnées de la position que la transformation générale de G fait prendre au point  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Nous dirons que ce sont, pour G, des *paramètres normaux*, et que  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  est le *pôle* de ce système de paramètres.

Les équations de G résultant de l'introduction de ces paramètres,

$$(6) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et l'équation ponctuelle équivalente

$$(6 \text{ bis}) \quad x' = \varphi(x, a)$$

seront dites une *forme normale* de G. Les valeurs  $a_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des paramètres y donnent, d'après la définition de ceux-ci, la transformation identique  $x'_i = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). On a donc, identiquement,

$$(7) \quad x = \varphi(x, \omega),$$

en même temps que

$$(8) \quad a = \varphi(\omega, a),$$

qui exprime la définition même des  $a_i$ .

Désignons par  $T_a$  la transformation (6) de  $G$  et considérons le produit  $T_a T_{a'}$ , obtenu en faisant suivre  $T_a$  de  $T_{a'}$  : la transformation  $T_a$  changeant  $\omega$  en  $a$ , et  $T_{a'}$  donnant au point  $a$  la position  $a''$ , dont les coordonnées sont

$$(9) \quad a''_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; a'_1, \dots, a'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ce produit  $T_a T_{a'}$  change  $\omega$  en  $a''$ , et il est, de ce fait, identique à la transformation  $T_{a''}$  définie par les formules (9).

Les formules (9), et la formule ponctuelle équivalente

$$(9 \text{ bis}) \quad a'' = \varphi(a, a'),$$

définissent donc la *structure* (1) de  $G$ .

Cela revient à dire que le système  $\varphi$  des fonctions  $\varphi_i$  satisfait à l'identité ponctuelle

$$\varphi[\varphi(x, a), a'] = \varphi[x, \varphi(a, a')]$$

ou, avec des notations plus symétriques,

$$(10) \quad \varphi[\varphi(a, b), c] = \varphi[a, \varphi(b, c)].$$

C'est ce que nous appellerons la *loi d'associativité* de ce système de fonctions.

**3. Groupes simplement transitifs réciproques.** — Cherchons toutes les transformations de l'espace  $(x_1, \dots, x_n)$  qui sont *permutables* (2) avec chaque transformation

$$(11) \quad x' = \varphi(x, a)$$

de  $G$ .

Une transformation quelconque de cet espace peut toujours s'écrire

$$(12) \quad x'_i = \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou, en abrégé,

$$(12 \text{ bis}) \quad x' = \varphi(\xi, x),$$

(1) Par ce mot de *structure* d'un groupe, nous entendons ici la *loi de composition* (multiplication) des transformations de ce groupe.

(2) Deux transformations  $T$  et  $U$  sont dites *permutables* si  $TU = UT$ .

les  $\xi_i$  étant des fonctions de  $x_1, \dots, x_n$  convenablement choisies. La condition pour qu'elle soit permutable avec (11) est alors que l'équation ponctuelle

$$\varphi\{\varphi[\xi(x), x], a\} = \varphi[\xi(x'), x']$$

soit une conséquence de (11).

Or, d'après la loi d'associativité (10), cette équation s'écrit

$$\varphi[\xi(x), \varphi(x, a)] = \varphi[\xi(x'), x']$$

ou, compte tenu de (11),

$$\varphi[\xi(x), x'] = \varphi[\xi(x'), x'],$$

ce qui, en raison de la résolubilité des équations de G par rapport aux  $a_i$ , équivaut à

$$(13) \quad \xi_0(x_1, \dots, x_n) = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La permutabilité de (11) et de (12) devant avoir lieu quels que soient les  $a_i$ , ceci indique <sup>(1)</sup> qu'on aura toutes les transformations (12) cherchées en prenant pour les  $\xi_i$  des constantes arbitraires.

La forme générale des transformations cherchées est donc

$$(14) \quad x'_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou

$$(14 \text{ bis}) \quad x' = \varphi(a, x),$$

les  $a_i$  étant des paramètres arbitraires.

*A priori*, elles doivent former un groupe. On a effectivement, d'après la loi d'associativité (10),

$$\varphi[a', \varphi(a, x)] = \varphi[\varphi(a', a), x];$$

ce qui donne, pour la structure de ce groupe H,

$$(15) \quad a'' = \varphi(a', a).$$

---

(1) Car les  $x_i$ , étant définis par (11), sont arbitraires, aussi bien que les  $x_i$ , si les  $a_i$  le sont.

Les identités (7) et (8) prouvent, par ailleurs, que, pour ce groupe, qui est simplement transitif, les  $a_i$  sont des paramètres normaux, et que le pôle correspondant est, comme pour la forme (11) de G, le point  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

Les formules précédentes montrent qu'il y a réciprocity entre les deux groupes G et H, qui sont dits, pour cette raison, *groupes simplement transitifs réciproques*.

3 bis. *Remarque I.* — Les deux groupes G et H sont *semblables*. On passe, en effet, de l'un à l'autre par la transformation

$$(16) \quad \omega_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ou, en abrégé,

$$(16 \text{ bis}) \quad \omega = \varphi(x, x'),$$

que nous appellerons *l'inversion*, de pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , associée à G et à H, parce que, d'après la loi de structure de l'un ou de l'autre, les formules

$$(17) \quad \omega_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ou, en abrégé,

$$(17 \text{ bis}) \quad \omega = \varphi(a, \bar{a})$$

établissent les relations qui lient les paramètres  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  de deux transformations inverses, dans G et dans H. Et cette origine de cette *inversion* montre que c'est une transformation involutive (réciproque).

Pour prouver, par exemple, qu'elle change G en H, posons

$$(18) \quad \omega = \varphi(x, z), \quad \omega = \varphi(x', z'),$$

et nous aurons, comme conséquence de (11), compte tenu de la loi d'associativité (10),

$$\omega = \varphi[\varphi(x, a), z'] = \varphi[x, \varphi(a, z')],$$

et, par suite,

$$\omega = \varphi(x, z) = \varphi[x, \varphi(a, z')].$$

D'où résulte

$$(19) \quad z = \varphi(a, z'),$$

que le changement de paramètres (17) ramènera à la forme, résolue en  $z'$ ,

$$(20) \quad z' = \varphi(\bar{a}, z),$$

qui est, aux notations près, l'équation ponctuelle (14 bis) de H.

*Remarque II.* — L'identité  $TU = UT$ , qui définit la permutabilité de deux transformations T et U, peut s'écrire  $U^{-1}TU = T$ , ou  $T^{-1}UT = U$ . Elle exprime ainsi que la transformée de chacune des transformations par l'autre est identique à la première; ou, en d'autres termes, que *chacune des transformations laisse l'autre invariante*.

On peut, par ailleurs, faire intervenir, au lieu des transformations finies de G et H, leurs transformations infinitésimales. On voit ainsi que les transformations infinitésimales de G (aussi bien que ses transformations finies), sont toutes celles qui laissent invariante chaque transformation finie, ou chaque transformation infinitésimale de G; ou encore toutes celles qui admettent chaque transformation finie, ou chaque transformation infinitésimale de G.

Rappelons enfin que la condition qui exprime qu'une transformation infinitésimale  $Yf$  est permutable avec une autre,  $Xf$ , ou, ce qui revient au même, la laisse invariante, est que le crochet de Jacobi  $(Xf, Yf) = XYf - YXf$  soit identiquement nul.

**4. Groupe auxiliaire et transformations réductrices.** — Revenons au système automorphe S. En vue de son étude, nous associerons au réciproque H de son groupe d'automorphie G le groupe infini  $\mathcal{H}$  de l'espace  $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p)$  qu'on en déduit en remplaçant, dans ses équations (14), les paramètres  $a_i$  par des fonctions arbitraires  $\theta_i(t_1, \dots, t_p)$  des variables indépendantes, et en leur adjoignant les équations  $t'_h = t_h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ), qui expriment que les variables  $t_h$  demeureront invariantes, par définition, vis-à-vis de ce groupe  $\mathcal{H}$ .

Ce groupe  $\mathcal{H}$ , que nous appellerons *groupe auxiliaire* de S, sera donc représenté par les équations

$$(21) \quad x'_i = \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad t'_h = t_h \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

ou, en abrégé,

$$(21 \text{ bis}) \quad x' = \varphi(\theta, x),$$

l'invariance des  $t_h$  étant sous-entendue.

La loi de composition des transformations (21), c'est-à-dire la *structure* de  $\mathcal{H}$ , s'exprimera par

$$(22) \quad \theta'' = \varphi(\theta', \theta),$$

d'après la structure (15) de H.

La forme de l'intégrale générale de S, qui correspond à la forme normale (6) de G,

$$(23) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

conduit à considérer les transformations de  $\mathcal{H}$

$$(24) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad t'_h = t_h \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

ou, en abrégé,

$$(24 \text{ bis}) \quad x = \varphi(u, x').$$

Elles ont, en effet, la propriété évidente de changer l'intégrale générale de S en

$$(25) \quad x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

et, par conséquent, de réduire S au système

$$(26) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial t'_h} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p)$$

ou, sous forme condensée,

$$(26 \text{ bis}) \quad dx'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Cette *forme réduite* de S sera désignée par  $\mathcal{S}$  et les transformations *auxiliaires* (24), qui y ramènent S, seront dites *réductrices*.

Ce sont du reste, les seules transformations de  $\mathcal{H}$  qui réduisent S à  $\mathcal{S}$ . Car si

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \varphi_i[\tau_1(t_1, \dots, t_p), \dots, \tau_n(t_1, \dots, t_p); x'_1, \dots, x'_n] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ t'_h = t'_h \quad (h = 1, 2, \dots, p) \end{array} \right.$$



en est une, elle change une multiplicité intégrale quelconque de S,

$$x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en une certaine multiplicité intégrale de  $\mathfrak{S}$ ,

$$x'_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On a donc, identiquement,

$$\varphi_i = \varphi_i(\tau_1, \dots, \tau_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ou, par l'inversion (17),

$$\tau_i = \varphi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de sorte que, d'après l'automorphie de S,  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  est une solution de S, puisque  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  en est une (1). C. Q. F. D.

5. **Le groupe d'invariance de S.** — Si l'on adjoint aux équations générales (14) de H, les équations  $t'_h = t_h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ), on obtient un sous-groupe  $\bar{H}$  de  $\mathcal{H}$ . C'est le plus grand sous-groupe de  $\mathcal{H}$  qui laisse  $\mathfrak{S}$  invariant. Car, pour qu'une transformation (21) de  $\mathcal{H}$  laisse  $\mathfrak{S}$  invariant, il faut et il suffit qu'elle change toute multiplicité intégrale de  $\mathfrak{S}$ ,  $x_i = a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, u$ ), en une autre

$$x'_i = a'_i \quad (i = 1, 2, \dots, u).$$

Les fonctions  $\theta_i$  devront donc être telles que les équations

$$x'_i = \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(où  $b_i a_i$  sont des constantes), donnent pour les  $x'_i$  des valeurs

(1) Plus généralement, on pourrait appeler *réductrice* toute transformation

$$x'_i = F_i(t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad t'_h = t_h \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

qui réduit S à  $\mathfrak{S}$ . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que S ait pour intégrale générale

$$a_i = F_i(t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

c'est-à-dire que les  $F_i$  soient des intégrales premières (distinctes) de S.

constantes. Ce seront donc elles-mêmes des constantes, qui pourront être arbitraires : et alors les équations (21) seront celles de  $\bar{H}$ .

C. Q. F. D.

Si l'on effectue dans  $H$  l'inverse d'une transformation réductrice (24) quelconque, on obtiendra un nouveau sous-groupe  $K$  de  $\mathcal{H}$ , puisque cette transformation appartient à  $\mathcal{H}$ ; et  $K$ , ainsi défini, sera *le plus grand sous-groupe de  $\mathcal{H}$  qui laisse  $S$  invariant*. Nous l'appellerons le *groupe d'invariance* de  $S$ .

Comme  $H$ , ce groupe d'invariance est fini et a  $n$  paramètres, et n'a pas d'autres invariants que ceux de  $\mathcal{H}$ , qui sont toutes les fonctions de  $t_1, \dots, t_p$ .

Pour trouver ses équations, nous aurons à exprimer que la transformation

$$(\Theta) \quad x' = \varphi(\theta, x)$$

est la transformée de la transformation générale

$$(A) \quad x' = \varphi(a, x)$$

de  $H$  par la transformation

$$(U) \quad x' = \varphi(u, x),$$

inverse d'une transformation réductrice, arbitrairement choisie, c'est-à-dire que l'on a

$$\Theta = U^{-1}AU \quad \text{ou} \quad U\Theta = AU.$$

D'après la structure (22) de  $\mathcal{H}$ , cela s'écrit

$$(28) \quad \varphi(\theta, u) = \varphi(u, a).$$

Cette formule, où les  $a'$  sont des paramètres arbitraires, et où  $(u_1, \dots, u_n)$  est une solution quelconque de  $S$ , arbitrairement choisie, donne donc les  $\theta_i$  pour lesquels la transformation générale (21) de  $\mathcal{H}$  se réduit à la transformation générale du groupe d'invariance  $K$ .

On remarquera que  $K$ , ainsi déduit de  $\bar{H}$ , a la même formule de structure que lui, à savoir

$$(29) \quad a'' = \varphi(a', a).$$

*Remarque.* — La formule (28) exprime que, pour les mêmes valeurs  $a_i$  des paramètres, la transformation générale

$$(30) \quad x' = \varphi(\theta, x)$$

de K et la transformation générale

$$(31) \quad x' = \varphi(x, a)$$

de G changent la solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de S en une même autre solution.

Vis-à-vis d'une solution quelconque de S,

$$(32) \quad u' = \varphi(u, c),$$

les choses se passent un peu différemment. Si on lui applique la transformation (30) de K et la transformation

$$(33) \quad x' = \varphi(x, a')$$

de G, on obtient respectivement, compte tenu de (28) et de la loi d'associativité (10), les solutions

$$u'' = \varphi(\theta, u') = \varphi[\theta, \varphi(u, c)] = \varphi[\varphi(\theta, u), c] = \varphi[\varphi(u, a), c] = \varphi[u, \varphi(a, c)]$$

et

$$u''' = \varphi(u', a') = \varphi[\varphi(u, c), a'] = \varphi[u, \varphi(c, a')],$$

qui se confondent si les  $a'_i$  sont liés aux  $a_i$  par la relation biunivoque

$$(34) \quad \varphi(c, a') = \varphi(a, c).$$

On aura, du reste, pour  $u''$  une solution quelconque donnée

$$(35) \quad u'' = \varphi(u, c'),$$

en déterminant les  $a_i$  par la condition

$$(36) \quad c' = \varphi(a, c).$$

Les solutions de S se déduisent donc de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de K, et il y a une transformation de K, et une seule, changeant une solution donnée de S en une autre solution donnée.

Le groupe d'invariance  $K$  de  $S$  se comporte donc, vis-à-vis des solutions de  $S$ , comme un second groupe d'automorphie.

**6. Forme générale des systèmes automorphes considérés.** — Tout système  $S$  de l'espèce considérée, étant le transformé du système réduit  $\mathcal{S}$  d'équations (26) ou (26 bis), par une transformation

$$x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad t_h = t'_h \quad (h=1, 2, \dots, p),$$

dans laquelle les  $u_i$  sont des fonctions de  $t_1, \dots, t_p$ , sera de la forme

$$(37) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t_h} = \eta_{h,i}(t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, p)$$

ou

$$(37 \text{ bis}) \quad dx_i = \eta_{\rho,i} dt_\rho \quad (\rho=1, 2, \dots, p; i=1, 2, \dots, n).$$

Comme  $\mathcal{S}$ , c'est un système complètement intégrable, ce qui équivaut à dire que le système

$$(38) \quad \frac{\partial f}{\partial t_h} + Y_h f = 0 \quad (h=1, 2, \dots, p),$$

dans lequel les  $Y_h f$  sont les transformations infinitésimales

$$(39) \quad X_{h\alpha} f = \eta_{h\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, p),$$

système qui définit les intégrales premières de  $S$ , est, au sens de Clebsch, un *système complet*.

Par ailleurs,  $S$ , ayant pour groupe d'automorphie le groupe  $G$ , d'équations (6), admet le groupe  $\bar{G}$ , de l'espace  $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ , qui s'en déduit par l'adjonction des équations  $t'_h = t_h$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ). Cela équivaut à dire que  $\bar{G}$  laisse invariant le système (38), et, par suite, vu l'invariance des  $t_h$  par ce groupe, que les  $Y_h f$ , si l'on y considère les  $t_h$  comme des paramètres constants, admettent le groupe d'automorphie  $G$ . On en conclut, d'après la remarque finale du n° 3, que les  $Y_h f$  sont des transformations infinitésimales du réciproque  $H$  de  $G$ , c'est-à-dire sont de la forme

$$(40) \quad Y_h f = \lambda_{h\alpha}(t_1, \dots, t_p) Z_\alpha f \quad (\alpha=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, p),$$

les  $Z_i f$  étant  $n$  transformations infinitésimales (indépendantes) de ce groupe H.

Nous poserons

$$(41) \quad Z_i f = \zeta_{i\alpha}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui donnera, d'après (39) et (40),

$$(42) \quad \eta_{hi} = \lambda_{h\alpha} \zeta_{\alpha i} \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p).$$

Les formes (37) et (37 bis) de S deviendront ainsi

$$(43) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t_h} = \lambda_{h\alpha}(t_1, \dots, t_p) \zeta_{\alpha i}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p)$$

et

$$(43 \text{ bis}) \quad dx_i = \lambda_{\alpha} \zeta_{\alpha i}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n),$$

les  $\lambda_i$  étant les expressions de Pfaff.

$$(44) \quad \lambda_i = \lambda_{\rho i}(t_1, \dots, t_p) dt_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n).$$

Par ailleurs, si l'on introduit les *formules de structure* du groupe

$Z_1, \dots, Z_n$ , qui seront de la forme

$$(45) \quad (Z_i, Z_k) = c_{ik\alpha} Z_\alpha \quad (\alpha, i, k = 1, 2, \dots, n),$$

on trouve sans peine, pour les conditions qui expriment que le système (38) est complet, les relations

$$(46) \quad \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial t_h} - \frac{\partial \lambda_{hk}}{\partial t_j} + c_{\beta\gamma k} \lambda_{h\beta} \lambda_{j\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p),$$

auxquels les  $\lambda_{hi}$  devront satisfaire.

*Réciproquement*, tout système (43) dans lequel les  $\zeta_{hi}$  et les  $\lambda_h$  satisfont, sous le bénéfice des notations (41), à des relations simultanées de la forme (45) et (46), où les  $c_{ijk}$  sont des constantes, est automorphe et a pour groupe d'automorphie le réciproque G du groupe simplement transitif H défini par les transformations infinitésimales  $Z_1, \dots, Z_n$ .

Nous pouvons, en effet, supposer que le groupe G a pour l'une de

ses formes normales les équations (6), et désigner, comme ci-dessus, par  $\bar{G}$  le groupe en  $x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p$  qu'on en déduit par l'adjonction, à ces équations, des équations  $t'_h = t_h$ , ( $h = 1, 2, \dots, p$ ). Si alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est une solution quelconque de ce système (43), les fonctions

$$(47) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

en constitueront aussi, pour chaque système de valeurs attribuées aux constantes arbitraires  $a_i$ , une solution. Car le système (38) admet  $\bar{G}$ , sous le bénéfice des notations (40); et il en est, par conséquent, de même pour le système (43).

Et, de plus, le système n'admet pas d'autre solution (non singulière), que ces solutions (47). Car chacune de ses solutions (non singulières) est définie par des conditions initiales de la forme (4), vu qu'il est de la forme (37) et complètement intégrable, le système (38) étant complet en vertu de (46); et les fonctions (47) peuvent satisfaire à de telles conditions initiales, pour un choix convenable des  $a_i$ , ainsi qu'il a été constaté au n° 1, *in fine*.

**7. Cas des systèmes linéaires.** — On sait que les équations finies de tout groupe continu fini  $\Gamma$ , à  $n$  paramètres  $a_1, \dots, a_n$ , donnent naissance à deux groupes simplement transitifs réciproques,  $G$  et  $H$ , de l'espace  $(a_1, \dots, a_n)$ , qu'on appelle le *premier* et le *second groupe paramétrique* de  $\Gamma$ .

En désignant, en effet, par  $\Theta_a$  la transformation générale de  $\Gamma$ , on a, pour la transformation produit,

$$\Theta_{a''} = \Theta_a \Theta_{a'},$$

des formules (*formules de structure* de  $\Gamma$ ), de la forme

$$(48) \quad a'_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; a'_1, \dots, a'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La loi d'associativité de ce produit,

$$(\Theta_a \Theta_b) \Theta_c = \Theta_a (\Theta_b \Theta_c),$$

donne alors la formule

$$(49) \quad \varphi[\varphi(a, b), c] = \varphi[a, \varphi(b, c)].$$

Si, d'autre part, les valeurs  $a_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des paramètres sont celles qui donnent la transformation identique, on a

$$\Theta_a = \Theta_a \Theta_\omega = \Theta_\omega \Theta_a,$$

c'est-à-dire

$$(50) \quad a = \varphi(a, \omega), \quad \omega = \varphi(\omega, a).$$

Il suffit, dès lors, de se reporter aux considérations des nos 2 et 3, dont les formules (10), (7) et (8) se retrouvent dans les formules présentes (49) et (50), pour conclure que, ici comme alors, les équations

$$x' = \varphi(x, a), \quad x = \varphi(a, x)$$

sont, sous forme normale, celles de deux groupes simplement transitifs réciproques G et H.

Ce sont *les deux groupes paramétriques* de  $\Gamma$  annoncés.

On peut, du reste, obtenir ainsi tous les couples de groupes simplement transitifs réciproques; car, pour les groupes G et H des nos 2 et 3, on constate sans peine que ce sont, dans l'un et l'autre ordre, les deux groupes paramétriques de chacun d'eux.

Prenons en particulier, pour  $\Gamma$ , le *groupe linéaire homogène général* à  $m$  variables.

$$(51) \quad (\Gamma) \quad x'_i = a_{i\alpha} x_\alpha \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, m),$$

qui est à  $n = m^2$  paramètres  $a_{ij}$ . Les formules de structure

$$(52) \quad a''_{ij} = a'_{i\alpha} a_{\alpha j} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m)$$

donnent les deux groupes réciproques

$$(53) \quad (\text{G}) \quad x'_{ij} = a_{i\alpha} x_{\alpha j} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m)$$

et

$$(54) \quad (\text{H}) \quad x'_{ij} = a_{\alpha j} x_{i\alpha} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m).$$

On remarquera que la transformation générale de G se déduit de celle de  $\Gamma$  en appliquant celle-ci, par cogrédience, aux  $m$  points

$$(55) \quad x_1 = x_{1j}, \quad x_2 = x_{2j}, \quad \dots, \quad x_m = x_{mj} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Les paramètres de la transformation identique sont, pour  $\Gamma$ ,

G et H,

$$(56) \quad \alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad [\varepsilon_{ii} = 1, \varepsilon_{ij} = 0 \ (i \neq j = 1, 2, \dots, m)].$$

Les *formes normales* (53), (54) de G et H sont donc relatives au pôle  $x_{ij} = \varepsilon_{ij} \ (i, j = 1, 2, \dots, m)$ .

On peut prendre pour base de H les transformations infinitésimales

$$(57) \quad Z_{ij}f = x_{\alpha i} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha j}} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m);$$

de sorte que tout système automorphe S ayant G pour groupe d'automorphie est, sous forme de système de Pfaff, du type linéaire

$$(58) \quad dx_{ij} = \varpi_{\alpha j} x_{i\alpha} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m),$$

les  $\varpi_{ij}$  étant des expressions de Pfaff

$$(59) \quad \varpi_{ij} = \lambda_{ij\rho}(t_1, \dots, t_p) dt_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, p; i, j = 1, 2, \dots, m),$$

qui ne dépendent que des  $t_h$ . Nous omettrons, pour abrégier, le calcul, à partir des formules (46), des conditions d'intégrabilité de ce système (58).

Les solutions d'un tel système sont formées de  $m$  solutions

$$(60) \quad x_1 = x_{j1}, \quad x_2 = x_{j2}, \quad \dots, \quad x_m = x_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

du système linéaire à  $m$  inconnues

$$(61) \quad dx_i = \varpi_{\alpha i} x_\alpha \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, m).$$

La solution générale de S étant, d'après les équations (53) de G, en fonction d'une solution particulière quelconque  $x_{ij} = u_{ij}$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ ,

$$(62) \quad x_{ij} = a_{i\alpha} u_{\alpha j} \quad (\alpha, i, j = 1, 2, \dots, m),$$

la solution générale du système linéaire (61) sera, en fonction de  $m$  solutions particulières quelconques,

$$(63) \quad x_1 = u_{j1}, \quad x_2 = u_{j2}, \quad \dots, \quad x_m = u_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

et des constantes arbitraires  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ,

$$(64) \quad x_i = a_\alpha u_{\alpha i} \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, m).$$



On retrouve donc les propriétés classiques des systèmes linéaires. Les formules (62) sont celles du passage d'un *système fondamental* de solutions à un autre. Leur résolubilité par rapport aux  $a_{ij}$ , implicitement supposée [la solution  $x_{ij} = u_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ), ne devant pas être singulière] équivaut à l'*indépendance* des  $m$  solutions (63).

## II. — Étude des sous-systèmes des systèmes automorphes considérés.

8. **Préliminaires.** — Le mot de *système* (employé seul) signifiera, dans ce qui suit, tout ensemble d'une ou de plusieurs équations, finies ou différentielles, entre les variables indépendantes  $t_1, \dots, t_p$  et les variables dépendantes  $x_1, \dots, x_n$ , précédemment introduites. On désignera par  $x^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}$  la dérivée de  $x_i$ , prise  $\alpha_h$  fois par rapport à  $t_h$  (pour  $h = 1, 2, \dots, p$ ).

Soit A un *système* quelconque, et  $m$  son *ordre* différentiel, qui pourra être nul. On aura à considérer :

1° au *point de vue fonctionnel*, ses *solutions*, c'est-à-dire les ensembles de fonctions  $x_i = f_i(t_1, \dots, t_p)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), qui satisfont identiquement à ses équations;

2° au *point de vue formel*, ses *éléments, ponctuels* si  $m = 0$ , de *contact* si  $m > 0$ , c'est-à-dire les systèmes de valeurs numériques

$$t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_n \quad \text{et} \quad x^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \alpha_1 + \dots + \alpha_p \leq m),$$

qui vérifient ses équations, lorsqu'on y considère les  $t_h$ , les  $x_i$  et les  $x^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}$  comme autant d'inconnues indépendantes.

On dira que deux systèmes, A et B, sont *équivalents*, sans qu'ils soient nécessairement du même ordre, s'ils ont les mêmes *solutions*.

C'est ainsi que tout système A est équivalent à son *prolongé*, d'un *rang*  $k$  quelconque, c'est-à-dire au système  $A_k$ , qu'on en déduit en adjoignant à ses équations celles qui en résultent par les dérivations totales par rapport aux diverses variables  $t_k$ , effectuées  $k$  fois de suite.

On dira, d'autre part, que deux systèmes, A et B, *de même ordre*, sont *formellement équivalents* s'ils définissent le même ensemble d'*éléments* de cet ordre.

On dira qu'un système B est une *conséquence* d'un système A si toute *solution* de A est une solution de B. Cela ne suppose rien de particulier sur les ordres de A et de B.

On dira, d'autre part, qu'un système B est une *conséquence formelle* d'un système A, si tout élément de A satisfait aux équations de B : ce qui suppose que l'ordre de B soit au plus égal à celui de A.

On dira encore que B est une *conséquence formelle indirecte* de A si B est une conséquence formelle d'un prolongé de A.

Revenant enfin au point de vue fonctionnel, nous dirons qu'un système B, qui n'est pas équivalent à un autre système A, est un *sous-système* <sup>(1)</sup> de A si toute *solution* de B est une solution de A : ce qui équivaut à dire que A est une conséquence de B, mais que B n'est pas une conséquence de A.

**9. Formes normales des sous-systèmes.** — Notre terminologie étant ainsi précisée, soit, comme au paragraphe I, S un système automorphe à groupe d'automorphie G simplement transitif, et soit  $\Sigma$  un de ses sous-systèmes. Nous prendrons S sous la forme résolue (43), c'est-à-dire

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt_h} = \lambda_{hx}(t_1, \dots, t_p) \zeta_{xi}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha, i=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, p),$$

et G sous une de ses formes normales (6), c'est-à-dire

$$(2) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

étant entendu que les transformations infinitésimales

$$(3) \quad Z_i f = \zeta_{iz}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_z} \quad (\alpha, i=1, 2, \dots, n)$$

définissent le réciproque H de G, et que les  $\varphi_i$  jouissent des propriétés caractéristiques indiquées au n° 2. Comme alors, on désignera

(1) Dans ma note des *Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris*, du 20 mars 1939 (t. 208, p. 875), j'ai employé, dans le même sens, le terme de *diviseur*, qui peut suggérer d'utiles analogies, mais qui pourrait prêter à confusion parce qu'il a, dans l'algèbre classique, un sens plus strict. Nous n'avons pas égard ici, en effet, à l'ordre de multiplicité éventuel des solutions.

par  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  le pôle du système normal de paramètres relatif aux équations (2) de G.

Quant à  $\Sigma$ , comme toutes ses solutions sont des solutions de S, *on ne l'altérera pas* (c'est-à-dire qu'on le remplacera par un système équivalent), en lui adjoignant toute équation de S qui n'y figurerait pas. On peut donc supposer que  $\Sigma$  se compose de S et de certaines autres équations; et l'on pourra, de plus, faire disparaître de celles-ci (sans altérer  $\Sigma$ ), les dérivées  $x_i^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}$  qui y figureraient, en les remplaçant par leurs expressions en  $t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_n$  fournies par les équations (1) de S et par celles qu'on en peut déduire par dérivations totales successives.

On aura ainsi ce que nous appellerons une *forme normale* du sous-système  $\Sigma$ , constituée par S [équations (1)] et par un *système complémentaire*  $\Omega$  d'ordre zéro; et nous la désignerons par la rotation (S,  $\Omega$ ).

Pour plus de netteté, nous supposerons que les équations (1) de S sont rationnelles par rapport à  $x_1, \dots, x_n$  (ce qui revient à supposer que les  $Z_i f$  le sont), et qu'il en est de même pour celles de  $\Sigma$ , telles qu'elles ont été données initialement. Alors  $\Omega$  sera aussi rationnel en  $x_1, \dots, x_n$ , et l'on pourra, en le remplaçant, le cas échéant, par un système équivalent, supposer qu'il se compose d'un nombre  $(\nu + 1)$  d'équations (indépendantes en  $x_1, \dots, x_n$ ), au plus égal à  $n$ .

D'une manière plus précise encore, on pourra (en effectuant, au besoin sur les  $x_i$  un changement de variables linéaire convenable), supposer que  $\Omega$  se compose de  $\nu$  équations de la forme résolue

$$(4) \quad x_i = R_i(x_{\nu+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p) \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

et d'une équation résolvante, contenant effectivement  $x_{\nu+1}$ ,

$$(5) \quad R(x_{\nu+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p) = 0;$$

ces équations étant toutes rationnelles en  $x_1, \dots, x_n$ , mais pouvant dépendre des  $t_h$  d'une manière quelconque.

Remarquons, pour la suite, que si l'on adjoint à un tel système  $\Omega$  une équation nouvelle quelconque, rationnelle aussi en  $x_1, \dots, x_n$ , qui n'en soit pas une conséquence, *ou bien* le système obtenu sera

résoluble par rapport à  $(\nu + 2)$  des  $x_i$ , ou bien il sera équivalent à un système de la même forme (4), (5), dans lequel les équations (4) seront les mêmes, tandis que l'équation résolvante (5) y sera d'un degré moindre par rapport à  $x_{\nu+1}$ , ou bien il sera impossible, en entendant par là qu'il entraînera soit une relation entre les  $t_h$ , soit une équation numérique contradictoire.

10. **Forme normale complète d'un sous-système.** — Soit  $(S, \Omega_0)$  un sous-système  $\Sigma$  de  $S$ , donné sous forme normale. Son *prolongé* sera, sous forme normale également,  $(S, \Omega_1)$ ,  $\Omega_1$  résultant de l'adjonction à  $\Omega_0$  des *dérivées réduites* de chacune de ses équations par rapport à chacun des  $t_h$ . Ce mot de *dérivée réduite* indique qu'en dérivant (totalemment) une équation, on remplace à mesure les  $\frac{dx_i}{dt_h}$  par leurs expressions tirées de  $S$ .

Si toutes les dérivées réduites des équations de  $\Omega_0$  sont des conséquences de  $\Omega_0$ , le système complémentaire  $\Omega_1$  sera identique à  $\Omega_0$ . Alors  $(S, \Omega_0)$  sera identique à son prolongé  $(S, \Omega_1)$ , et nous dirons qu'il est pour  $\Sigma$  une *forme normale complète*.

Dans le cas contraire, considérons les *prolongés successifs*  $(S, \Omega_1)$ ,  $(S, \Omega_2)$ , ... de  $(S, \Omega_0)$ , obtenus de proche en proche, comme il vient d'être expliqué. Dans la suite

$$(6) \quad \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots,$$

chaque terme se déduit du précédent par l'adjonction de nouvelles équations. Nous pouvons donc appliquer la remarque qui termine le numéro précédent, en observant qu'aucun des systèmes (6) n'est impossible, puisque tous les prolongés  $(S, \Omega_n)$  sont équivalents à  $(S, \Omega_0)$ , lequel a, par hypothèse, au moins une solution.

Soit  $(\nu_n + 1)$  le nombre d'équations de  $\Omega_n$ , en le supposant formé d'équations indépendantes en  $x_1, \dots, x_n$ , comme il est loisible de le faire. Les entiers  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$  ne décroissent jamais et ne dépassent pas  $(n - 1)$  : ils sont donc tous égaux à partir d'un certain rang  $r$ , et soit  $\nu = \nu_r = \nu_{r+1} = \dots$

Tous les termes de la suite

$$(7) \quad \Omega_r, \Omega_{r+1}, \dots$$

peuvent alors se ramener à la forme (4), (5), les équations (4) étant les mêmes pour tous; et deux termes consécutifs ne pourront différer que si le degré en  $x_{\nu+1}$  de l'équation résolvante (5) du second est inférieur à celui de l'équation résolvante du premier. Comme ce degré ne peut pas être inférieur à 1 [car, s'il était nul, le second des systèmes  $\Omega_h$  considérés serait résoluble par rapport à plus de  $(\nu+1)$  des  $x_i$ ], tous les termes de la suite (7) seront identiques à partir d'un certain rang.

Donc, dans la suite des systèmes, tous équivalents à  $\Sigma$ , formée de  $\Sigma$  (pris sous forme normale) et de ses prolongés successifs, à savoir

$$(8) \quad (S, \Omega_0), (S, \Omega_1), (S, \Omega_2), \dots,$$

il y en a un qui est identique à tous les suivants, et qui est, par suite, pour  $\Sigma$ , une forme normale complète.

Nous verrons, de plus, au numéro suivant, que si  $(S, \Omega)$  et  $(S, \Omega')$  sont deux formes normales complètes de  $\Sigma$ , les systèmes complémentaires (d'ordre zéro)  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont équivalents : ce qui revient à dire que ces deux formes normales complètes sont formellement équivalentes.

On peut donc énoncer que *tout sous-système  $\Sigma$  a une forme normale complète et une seule.*

**11. Intégration des sous-systèmes. — Unicité de leurs formes normales complètes. — Propriété caractéristique de celles-ci. —** Si l'on connaît une solution particulière quelconque  $(u_1, \dots, u_n)$ , du système  $S$ , on en peut déduire, non seulement son intégrale générale (nos 1, 4)

$$(9) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

mais aussi celle de l'un quelconque de ses sous-systèmes.

Soit, en effet,  $(S, \Omega)$  une forme normale complète de ce sous-système  $\Sigma$ . La transformation réductrice (n° 4)

$$(10) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

qui change  $S$  en  $\mathcal{S}$ , dont les équations sont

$$(11) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial t_h} = 0 \quad (h=1, 2, \dots, p; i=1, 2, \dots, n),$$

change  $\Sigma$  en un sous-système  $\bar{\Sigma}$  de  $\mathcal{S}$ , qui sera  $(\mathcal{S}, \bar{\Omega})$ ,  $\bar{\Omega}$  étant ce que devient  $\Omega$  par cette transformation. De plus, la définition des formes normales complètes étant manifestement invariante vis-à-vis de tout changement de variables qui laisse les  $t_h$  invariants,  $(\mathcal{S}, \bar{\Omega})$  sera une forme normale complète de  $\bar{\Sigma}$  <sup>(1)</sup>.

Or, les dérivées réduites (n° 10) sont ici les dérivées partielles ordinaires, c'est-à-dire prises par rapport aux  $t_h$  en considérant les  $x'_i$  comme des constantes. Dire que  $(\mathcal{S}, \bar{\Omega})$  est complète, c'est donc dire qu'on obtient des conséquences de  $\bar{\Omega}$  quand on applique à ses équations les transformations infinitésimales  $\frac{df}{dt_h}$  de l'espace  $(t_1, \dots, t_p; x'_1, \dots, x'_n)$ , et, par conséquent, que  $\bar{\Omega}$  admet ces transformations. Et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $\bar{\Omega}$  ne dépende pas effectivement des  $t_h$  : ce qui signifie que, ou bien les  $t_h$  ne figurent pas dans les équations de  $\bar{\Omega}$ , ou bien  $\bar{\Omega}$  est équivalent à un système

$$(12) \quad \Psi(x'_1, \dots, x'_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu + 1),$$

dans les équations duquel les  $t_h$  ne figurent pas, et pour lequel on pourra prendre, par exemple, le système obtenu en donnant aux  $t_h$ , dans  $\bar{\Omega}$ , des valeurs numériques arbitrairement choisies.

L'intégrale générale de  $\bar{\Sigma}$  sera donc  $x'_i = a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), les  $a_i$  étant des constantes assujetties à satisfaire aux équations de conditions connues

$$(13) \quad \Psi_j(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu + 1).$$

L'intégrale générale de  $\Sigma$  s'en déduira par les formules (10), au moyen desquelles on passe de  $\Sigma$ , (variables  $t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n$ ), à  $\bar{\Sigma}$ , (variables  $t_1, \dots, t_p; x'_1, \dots, x'_n$ ), et inversement. Elle sera donc donnée directement par les équations (9), sous le bénéfice des conditions (13), imposées aux constantes  $a_1, \dots, a_n$ .

**11 bis. Remarque I.** — Il résulte de ce qui précède que *l'ensemble*

---

<sup>(1)</sup>  $\bar{\Omega}$  sera rationnel par rapport aux  $x'_i$ , comme  $\Omega$  l'est, par hypothèse, par rapport aux  $x_i$ , si les équations (10) sont rationnelles par rapport aux  $x'_i$ , ce qui sera supposé au paragraphe III.

des solutions de  $\Sigma$  ne peut satisfaire à aucune équation d'ordre zéro qui ne soit une conséquence de  $\Omega$ , si  $(S, \Omega)$  est une forme normale complète de  $\Sigma$ . Car d'une telle équation résulterait, par la transformation réductrice (10), une équation

$$\Psi(x'_1, \dots, x'_n; t_1, \dots, t_p) = 0,$$

qui ne serait pas une conséquence de  $\bar{\Omega}$ , et à laquelle devrait satisfaire toute solution de  $\bar{\Sigma}$  : ce qui est contradictoire, puisque les solutions de  $\bar{\Sigma}$  sont les systèmes de valeurs constantes de  $x'_i$  satisfaisant à  $\bar{\Omega}$ .

On conclut de cette remarque, en particulier, que si  $(S, \Omega')$  était une autre forme normale complète de  $\Sigma$ , les systèmes complémentaires d'ordre zéro  $\Omega$  et  $\Omega'$  seraient formellement équivalents : ce que l'on peut énoncer en disant qu'un sous-système de  $S$  n'a qu'une seule forme normale complète.

**Remarque II.** — Pour que  $(\mathcal{S}, \bar{\Omega})$  soit la forme normale complète d'un sous-système de  $\mathcal{S}$ , il faut et il suffit, d'après ce qu'on a vu, que  $\bar{\Omega}$  admette les transformations infinitésimales  $\frac{df}{dt_h}$ , ( $h=1, 2, \dots, p$ ), de l'espace  $(t_1, \dots, t_p; x'_1, \dots, x'_n)$ . Les formes  $(S, \Omega)$  et  $(\mathcal{S}, \bar{\Omega})$  étant complètes en même temps, et se déduisant l'une de l'autre par la transformation (10), la condition pour que  $(S, \Omega)$  soit complète sera donc que  $\Omega$  admette les transformations infinitésimales  $T_n f$  de l'espace  $(t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n)$  qui proviennent des transformations infinitésimales  $\frac{df}{dt_h}$ , de l'espace  $(t_1, \dots, t_p; x'_1, \dots, x'_n)$ , par cette même transformation (10).

Or les équations  $\frac{df}{dt_h} = 0$ , ( $h=1, 2, \dots, p$ ) définissent les intégrales premières de  $\mathcal{S}$ , tandis que celles de  $S$  sont définies par les équations (38) du n° 6, à savoir

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial t_h} + \lambda_{h\alpha}(t_1, \dots, t_p) Z_\alpha f = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, p).$$

Ces deux systèmes se correspondent donc aussi par la transformation (10); et, comme celle-ci laisse les  $t_h$  invariants, on conclut que

les  $T_h f$  ne sont pas autre chose que les premiers membres (de même indice  $h$ ) des équations (14).

La condition pour que  $(S, \Omega)$  soit complet est donc que  $\Omega$  admette chacune des transformations

$$(15) \quad T_h f = \frac{\partial f}{\partial t_h} + \lambda_{h\alpha}(t_1, \dots, t_p) Z_\alpha f \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p).$$

**Remarque III.** — On a vu que si  $(S, \Omega)$  est la forme normale complète d'un sous-système de  $S$ ,  $\Omega$  se change, par toute transformation réductrice (10), en un système  $\bar{\Omega}$  indépendant des  $t_h$ , dont on obtient, par suite, une forme  $\bar{\Omega}_0$ , où les  $t_h$  ne figurent pas, en y remplaçant les  $t_h$  par des valeurs numériques arbitraires  $t_h^0$ .

Or si

$$F(t_1, \dots, t_p; x_1, \dots, x_n) = 0$$

est une équation de  $\Omega$ , elle devient dans  $\bar{\Omega}$  [par la transformation (10)],

$$F[t_1, \dots, t_p; \varphi_1(u, x'), \dots, \varphi_n(u, x')] = 0$$

et, dans  $\bar{\Omega}_0$ ,

$$F[t_1^0, \dots, t_p^0; \varphi_1(u^0, x'), \dots, \varphi_n(u^0, x')] = 0,$$

en désignant par  $u^0$  l'ensemble des valeurs

$$u_i^0 = u_i(t_1^0, \dots, t_p^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

que prennent les  $u_i$  pour les valeurs  $t_h^0$  des  $t_h$ .

Ce résultat sera particulièrement simple, si les  $u_i^0$  sont respectivement égales aux coordonnées  $\omega_i$  du pôle (n° 2) du système de paramètres normaux adopté pour  $G$ . Car on aura alors

$$\varphi_i(u^0, x') = x'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de sorte que, au changement près des lettres  $x_i$  en  $x'_i$ ,  $\bar{\Omega}_0$  sera identique au système  $\Omega_0$  obtenu en faisant, dans  $\Omega$ ,  $t_h = t_h^0$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ).

Si les  $u_i^0$  sont quelconques, on obtiendra  $\bar{\Omega}_0$  en effectuant dans  $\Omega_0$  la transformation

$$(16) \quad x_i = \varphi_i(u_1^0, \dots, u_n^0; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous nommerons *réduit* de  $\Omega$  tout système  $P$ , ne contenant pas les  $t_h$ ,



équivalent au système  $\bar{\Omega}$  qui résulte de  $\Omega$  par une transformation réductrice. Ce qui précède donne le moyen d'obtenir, *sans intégration*, une forme générale de ces réduits. Il suffira de laisser arbitraires les  $t_h^0$  et les  $u_i^0$ . Nous savons, en effet (n° 1), qu'il y a une solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de S, et une seule, satisfaisant à des conditions initiales, arbitrairement choisies, de la forme

$$u_i = u_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{pour} \quad t_h = t_h^0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

12. **Sous-systèmes adjoints à un sous-système.** — Soit, à nouveau,  $(S, \Omega)$  un sous-système  $\Sigma'$  de S, sous sa forme normale complète, et soit P l'un des réduits de  $\Omega$ . Cherchons les transformations réductrices qui changent  $\Omega$  en P.

Choisissons, à cet effet, une forme normale (2) de G : les transformations réductrices pourront s'écrire sous la forme correspondante (10), et il s'agira de trouver les solutions  $(u_1, \dots, u_n)$  de S, génératrices de celles de ces transformations qui changent  $\Omega$  en P. Elles seront les solutions d'un sous-système  $\sigma$  de S, que nous dirons *adjoint* à  $\Sigma$ , qui se composera de S (écrit avec les lettres  $u_i$  au lieu des lettres  $x_i$ ) et du système complémentaire d'ordre zéro obtenu en identifiant, par rapport aux  $x'_i$ , le système P (écrit avec les lettres  $x'_i$ ) avec le système  $\bar{\Omega}$  obtenu en effectuant dans  $\Omega$  la transformation (10), où les  $u_i$  seront laissés indéterminés.

Ce système adjoint  $\sigma$  aura, par hypothèse, au moins une solution  $(u_1, \dots, u_n)$ . Cherchons à quelle condition il en aura une autre,  $(u'_1, \dots, u'_n)$ . Comme ce devra être une solution de S, elle se déduira de la première par une transformation déterminée

$$(17) \quad x'_i = \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad t'_h = t_h \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

du groupe d'invariance K de S (n° 5), et sera, en conséquence,

$$(18) \quad u'_i = \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; u_1, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

De sorte que la transformation réductrice  $x = \varphi(u', x')$ , engendrée par elle, sera

$$(19) \quad x = \varphi[\varphi(\theta, u), x'].$$

Pour que celle-ci change  $\Omega$  en P, il sera nécessaire et suffisant que

son inverse

$$(20) \quad x' = \varphi[\varphi(\theta, u), x]$$

change P en  $\Omega$ . Or cette inverse apparaît, d'après la loi de structure du groupe auxiliaire  $\mathcal{H}$  [n° 4, équ. (22)] comme le produit de la transformation  $x' = \varphi(u, x)$ , qui, étant l'inverse de la transformation réductrice  $x = \varphi(u, x')$ , change, par hypothèse, P en  $\Omega$ , par la transformation (17).

La condition cherchée est donc que  $(u'_1, \dots, u'_n)$  étant donné par (18), la transformation correspondante (17) laisse  $\Omega$  invariant.

De là, la conclusion suivante :

*(S,  $\Omega$ ) étant la forme normale complète d'un sous-système  $\Sigma$  de S, et k étant le plus grand sous-groupe du groupe d'invariance K de S que  $\Omega$  admette, les diverses solutions d'un adjoint quelconque  $\sigma$  de  $\Sigma$  se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de k.*

Il résulte, de plus, de ce qui a été dit au n° 5 sur le groupe d'invariance K de S qu'il y a une transformation de k et une seule changeant une solution donnée de  $\sigma$  en une autre (donnée).

Par ailleurs, il résulte de la définition initiale des adjoints qu'il y en a un, et, d'après ce qui précède, un seul, ayant pour solution une solution particulière quelconque, donnée, de S.

*Les solutions de S se répartissent donc entre les divers adjoints  $\sigma$  de  $\Sigma$ ; et il résulte encore de ce qui précède que, dans leur ensemble, ces adjoints sont les mêmes, quelle que soit la forme normale de G employée pour les définir.* Car la définition de k est indépendante de tout mode particulier de représentation de G.

Remarquons encore que toute transformation de k, laissant S et  $\Omega$  invariants, laisse  $\Sigma$  invariant, et, par suite, change toute solution de  $\Sigma$  en une solution de  $\Sigma$ . Si donc une solution d'un adjoint  $\sigma$  de  $\Sigma$  appartient à  $\Sigma$ , il en est de même de toutes ses solutions.

On voit donc que *les solutions de  $\Sigma$  se répartissent entre certains de ses adjoints* (et ne sont solutions d'aucun autre); et que *l'ensemble de ces adjoints est le même, quelle que soit la forme normale de G introduite dans la définition des adjoints.*

12 bis. **Remarque I.** — Soit R une transformation réductrice, écrite

sous la forme (10) qui correspond à la forme normale (2) de G, de pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ; soit P le réduit de  $\Omega$  qui en résulte, et  $\sigma$  l'adjoint de  $\Sigma$  qui a pour solution  $(u_1, \dots, u_n)$ . Considérons la forme normale de G, fournie par un autre pôle  $(\omega'_1, \dots, \omega'_n)$  : on l'obtiendra en éliminant les  $a_i$  entre les équations (2) et les formules

$$(21) \quad a'_i = \varphi_i(\omega'_1, \dots, \omega'_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

qui définissent les nouveaux paramètres normaux (n° 2). La transformation R pourra donc encore s'obtenir en éliminant les  $a_i$  entre les équations

$$(22) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(u'_1, \dots, u'_n; a_1, \dots, a_n) \\ x'_i = \varphi_i(\omega'_1, \dots, \omega'_n; a_1, \dots, a_n) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$(u'_1, \dots, u'_n)$  étant une solution de S convenablement choisie. Pour qu'il y ait effectivement identité entre la transformation ainsi définie et la transformation (10), on devra avoir, quels que soient les  $a$ ,

$$\varphi(u', a) = \varphi[u, \varphi(\omega', a)],$$

c'est-à-dire

$$\varphi(u', a) = \varphi[\varphi(u, \omega'), a] :$$

ce qui équivaut à la condition

$$(23) \quad u'_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; \omega'_1, \dots, \omega'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Le nouvel adjoint  $\sigma'$  de  $\Sigma$  fourni par le réduit P au moyen de la nouvelle forme normale de G, [de pôle  $(\omega'_1, \dots, \omega'_n)$ ], aura donc pour solution la solution  $(u'_1, \dots, u'_n)$  de S ainsi définie : comme  $(\omega'_1, \dots, \omega'_n)$  est arbitraire, ce pourra être toute solution de S.

*On obtient donc les divers adjoints de  $(S, \Omega)$ , à partir d'un même réduit de  $\Omega$ , en utilisant les diverses formes normales de G.*

**Remarque II.** — *Si le groupe  $k$  se réduit à la seule transformation unité, chaque adjoint  $\sigma$  de  $\Sigma$  a une solution et une seule. Si l'on met cet adjoint sous sa forme normale complète  $(S, A)$ , cette solution unique s'obtiendra, d'après la théorie du n° 11, par la résolution du système complémentaire A. Car l'un quelconque  $\bar{A}$  de ses réduits aura, comme  $(S, \bar{A})$ , une solution et une seule; et il en sera de même, par conséquent, pour lui.*

Comme l'on peut, par ailleurs, d'après la remarque finale du n° 11 bis, et la définition des adjoints, former explicitement, à partir de  $(S, \Omega)$  (sans intégration) celui de ses adjoints dont une solution satisfait à des conditions initiales données, cette solution de  $S$  pourra ainsi se calculer : de sorte que  $S$  s'intègre explicitement, dans ce cas, par des éliminatoires et résolutions portant sur des équations finies.

**Remarque III.** — *Le groupe  $k$  peut se définir comme étant le plus grand sous-groupe du groupe d'invariance  $K$  de  $S$  qui laisse invariant le sous-système  $\Sigma$  de  $S$ .*

En effet, si une transformation de  $K$  laisse invariant  $\Sigma$ , dont la forme normale complète est  $(S, \Omega)$ , elle change toute équation de  $\Omega$  en une équation d'ordre zéro, qui est une conséquence de  $\Sigma$ , et qui, par suite, [Remarque I du n° 11 bis], est une conséquence formelle de  $\Omega$  : elle laisse donc  $\Omega$  invariant.

C. Q. F. D.

**Remarque IV.** — La transformation réductrice (10), qui change  $S$  en  $\mathfrak{S}$  et  $\Omega$  en l'un de ses réduits,  $P$ , change aussi  $K$  en  $\bar{H}$ , [n° 5]. Elle change donc  $k$  en un sous-groupe  $\bar{h}$  de  $\bar{H}$ , qui est le plus grand sous-groupe de  $\bar{H}$  laissant  $P$  invariant. Comme les  $t_h$  ne figurent pas dans  $P$ , on pourra en faire abstraction dans  $\bar{h}$  qui deviendra ainsi, dans l'espace  $(x'_1, \dots, x'_n)$ , le plus grand sous-groupe  $h$  de  $H$  qui laisse  $P$  invariant.

**13. Propriétés des sous-systèmes adjoints.** — 1° De la réciprocity de  $G$  et  $H$ , [n° 3], résulte immédiatement que les transformations de  $G$ , [ou, plus exactement, du groupe  $\bar{G}$  qu'on en déduit par l'adjonction des équations  $t'_h = t_h$ , ( $h = 1, 2, \dots, p$ )], [voir n° 6], laissent invariante toute transformation du groupe auxiliaire  $\mathfrak{H}$ , [voir n° 4], et, par conséquent, toute transformation de son sous-groupe  $k$ , (plus grand sous-groupe du groupe d'invariance  $K$  de  $S$  laissant invariant le sous-système  $\Sigma$  considéré).

On en conclut que toute transformation de  $G$ , effectuée sur les variables dépendantes, change tout adjoint  $\sigma$  de  $\Sigma$  en un adjoint  $\sigma'$  de  $\Sigma$ .

Soient, en effet,  $T$  la transformation considérée,  $(u_1, \dots, u_n)$  une

solution de  $\sigma$ , et  $(u'_1, \dots, u'_n)$  la solution de S qui en résulte par T. Les diverses solutions de  $\sigma$  se déduisant de  $(u_1, \dots, u_n)$  par les transformations de  $k$ , et celles-ci demeurant invariantes par T, les diverses solutions du transformé  $\tau$  de  $\sigma$  par T se déduiront aussi de  $(u'_1, \dots, u'_n)$  par les diverses transformations de  $k$ . Ce seront donc les solutions de l'adjoint  $\sigma'$  de  $\Sigma$  qui a  $(u'_1, \dots, u'_n)$  pour l'une de ses solutions; et le transformé  $\tau$  de  $\sigma$  par T se confondra donc avec cet adjoint.

C. Q. F. D.

2° Pour compléter ce résultat, employons une forme normale (2) de G, et soit  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  son pôle, [n° 2]. Soit alors

$$(T) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

la transformation T, on aura

$$(24) \quad u'_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Soient, d'autre part, (S,  $\Omega$ ) étant à nouveau la forme normale complète de  $\Sigma$ , P et P' les deux réduits de  $\Omega$  fournis par les deux transformations réductrices

$$(U) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et

$$(U') \quad x_i = \varphi_i(u'_1, \dots, u'_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

La seconde de ces transformations s'écrivant

$$x = \varphi[\varphi(u, c), x'] = \varphi[u, \varphi(c, x')],$$

on a, manifestement,

$$(25) \quad U' = UT_0,$$

$T_0$  étant la transformation de H (1)

$$(T_0) \quad x_i = \varphi_i(c_1, \dots, c_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

---

(1) On remarquera que cette formule symbolique donne une expression générale des transformations réductrices (au moyen de l'une quelconque d'entre elles), qui est indépendante du mode de représentation de G et H.

et nous savons que  $T$  et  $T_0$  résultent l'une de l'autre par l'inversion, de pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , associée à  $G$  et  $H$ , [n° 3 bis, Remarque I].

Puisque  $U$  change  $\Omega$  en  $P$  et que  $U'$  change  $\Omega$  en  $P'$ , on conclut de l'identité symbolique (25) que  $T_0$  change  $P$  en  $P'$ .

*Donc, si les adjoints  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $(S, \Omega)$  proviennent des réduits  $P$  et  $P'$  de  $\Omega$  par l'intermédiaire de la forme normale de  $G$  dont le pôle est  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $P$  est changé en  $P'$  par celles des transformations  $T_0$  de  $H$  qui résultent, par l'inversion, de pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , associée à  $G$  et  $H$ , des transformations  $T$  de  $G$  qui changent  $\sigma$  en  $\sigma'$ .*

On remarquera que les transformations  $T_0$  ainsi définies, changeant  $P$  en  $P'$  et appartenant à  $H$ , changent  $h$ , plus grand sous-groupe de  $H$  laissant  $P$  invariant, en  $h'$ , plus grand sous-groupe de  $H$  laissant  $P'$  invariant.

*Donc les divers sous-groupes  $h$  de  $H$ , constitués respectivement par toutes les transformations de  $H$  qui laissent invariants les divers réduits  $P$  de  $\Omega$  sont homologues dans  $H$ .*

3° Remarquons encore que *les transformations  $T$  de  $G$  qui changent  $\sigma$  en  $\sigma'$  sont toutes celles qui changent une solution de  $\sigma$ , arbitrairement choisie, en une solution, arbitrairement choisie, de  $\sigma'$ .*

Car chacune de ces transformations change  $\sigma$  en un autre adjoint de  $\Sigma$  (propriété 1° du présent numéro), et cet adjoint, ayant une solution commune avec  $\sigma'$ , se confond avec lui, puisque les diverses solutions de  $S$  se répartissent entre les adjoints de  $\Sigma$ , [n° 12].

4° Supposons maintenant, dans ce qui précède, que  $\sigma'$  soit identique à  $\sigma$ . On conclura d'abord, de la propriété 3°, que la transformation  $T$  de  $G$  qui change une solution de  $\sigma$  (arbitrairement choisie) en une autre solution (arbitrairement choisie) de  $\sigma$  laisse  $\sigma$  invariant. Il est manifeste que l'on obtient ainsi toutes les transformations de  $G$  que  $\sigma$  admet, et que ces transformations forment un sous-groupe  $g$  de  $G$ .

La propriété 2° montre que ce groupe  $g$  est semblable par toute inversion relative à  $G$  et  $H$ , au plus grand sous-groupe  $h$  de  $H$  laissant invariant le réduit  $P$  de  $\Omega$  qui servirait à définir l'adjoint  $\sigma$ , au moyen de la forme normale de  $G$  ayant même pôle que cette inversion.

On conclut donc que *tout adjoint  $\sigma$  d'un sous-système  $\Sigma$  de  $S$  est un système automorphe, et que son groupe d'automorphie est le sous-groupe*

$g$  de  $G$  dont la définition vient d'être donnée à partir de la forme normale complète  $(S, \Omega)$  de  $\Sigma$ .

Ajoutons que, puisque l'on passe de tout adjoint  $\sigma$  à tout autre  $\sigma'$ , par des transformations de  $G$ , les groupes d'automorphie des divers adjoints  $\sigma$  d'un même sous-système  $\Sigma'$  de  $S$  sont homologues dans  $G$ . Car toute transformation de  $G$  qui change  $\sigma$  en  $\sigma'$  change le groupe d'automorphie  $g$  de  $\sigma$  en le groupe d'automorphie  $g'$  de  $\sigma'$ , puisqu'elle n'opère que sur les variables dépendantes.

**14. Sous-systèmes principaux.** — L'automorphie des sous-systèmes adjoints peut se déduire du fait que les diverses solutions de tout adjoint  $\sigma$  d'un sous-système  $\Sigma$  de  $S$  se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations du plus grand sous-groupe  $k$  de  $K$ , (groupe d'invariance de  $S$ ), qui laisse  $\Sigma$  invariant. [voir n° 12 et n° 12 bis, Rem. III].

Nous avons vu, en effet, au n° 5, que l'on peut établir entre les transformations de  $K$  et de  $G$  une correspondance isomorphe telle que deux transformations homologues quelconques changent une solution déterminée de  $S$ ,  $(u_1, \dots, u_n)$ , (arbitrairement choisie), en une même autre solution de  $S$ . Si donc  $\sigma$  est l'adjoint de  $\Sigma$  qui a cette solution  $(u_1, \dots, u_n)$  pour solution, et si  $g$  est le sous-groupe de  $G$  homologue, dans cette isomorphie, au sous-groupe  $k$  de  $K$ , les diverses transformations de  $g$  changeront  $(u_1, \dots, u_n)$ , comme celles de  $k$ , en les diverses solutions de  $\sigma$ ; et,  $g$  étant un groupe, il en sera de même pour toute autre solution  $(u'_1, \dots, u'_n)$  de  $\sigma$ .

L'automorphie de  $\sigma$  est ainsi établie, avec une nouvelle définition du groupe d'automorphie  $g$ , qui met en évidence son isomorphisme avec  $k$ .

Considérons maintenant, inversement, un sous-système quelconque  $s$  de  $S$ , qui soit automorphe et ait pour groupe d'automorphie un sous-groupe  $g$  de  $G$  : c'est ce que nous appellerons un *sous-système principal* de  $S$ . Désignons par  $(u_1, \dots, u_n)$  une quelconque de ses solutions, et considérons à nouveau l'isomorphie entre  $G$  et  $K$  dans laquelle deux transformations homologues quelconques changent  $(u_1, \dots, u_n)$  en une même autre solution de  $S$ . Les transformations du sous-groupe  $k$  de  $K$  homologue de  $g$  dans cette automorphie changeront  $(u_1, \dots, u_n)$ ,

(comme les transformations homologues de  $g$ ), en les diverses autres solutions de  $s$ ; et,  $k$  étant un groupe, elles changeront toute autre solution  $(u'_1, \dots, u'_n)$  de  $s$  en ses diverses autres solutions.

*Tout sous-système principal  $s$  de  $S$  a donc, comme  $S$  lui-même, outre son groupe d'automorphie  $g$  (sous-groupe du groupe d'automorphie  $G$  de  $S$ ), un groupe d'invariance  $k$  (sous-groupe du groupe d'invariance  $K$  de  $S$ ), qui, comme son groupe d'automorphie  $g$ , change toute solution de  $s$ , par ses diverses transformations, en les diverses solutions de  $s$ .*

D'après ce qui précède, *tout adjoint  $\sigma$  d'un sous-système  $\Sigma$  de  $S$  est un sous-système principal de  $S$ .*

Mais, inversement, *tout sous-système principal  $s$  de  $S$  est l'un de ses propres adjoints*, vu que son groupe d'invariance  $k$ , contenant, pour tout choix de deux solutions de  $s$ , une transformation qui change la première de ces solutions en la seconde (condition qui définit une transformation de  $K$  et une seule), est le plus grand sous-groupe de  $K$  qui laisse  $s$  invariant.

*Il y a donc identité entre l'ensemble des adjoints de tous les sous-systèmes de  $S$  et l'ensemble des sous-systèmes principaux de  $S$ .*

Remarquons qu'il résulte de ce qui précède que *les adjoints d'un quelconque des sous-systèmes adjoints à un sous-système  $\Sigma$  de  $S$  se confondent avec ceux-ci.*

### III. — Sur la réductibilité des systèmes automorphes considérés.

#### Groupes spécifiques et groupes de rationalité. Exemple.

**15. Sur la notion de rationalité.** — Nous supposerons, dans ce qui suit, que l'on s'est donné un *domaine de rationalité*, de sorte que le mot *rationnel* sera, sauf avis contraire, relatif à ce domaine ( $\mathcal{R}$ ). Parmi ses *éléments de base* figureront toujours, par hypothèse, outre les entiers arithmétiques, positifs ou négatifs, les variables indépendantes  $t_1, \dots, t_p$ , les variables dépendantes  $x_1, \dots, x_n$ , et les dérivées  $x_i^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}$  des secondes par rapport aux premières, ainsi que les paramètres indéterminés et les constantes arbitraires qu'il y aura lieu d'introduire. A ces éléments de base obligatoires, qui sont ceux du *domaine de rationalité absolue* ( $\mathcal{R}_0$ ), pourront être adjoints, suivant



les cas, pour constituer la base de  $(\mathcal{R})$ , telles ou telles constantes numériques, et telles ou telles fonctions des variables  $t_1, \dots, t_p$ . Si  $F(t_1, \dots, t_p)$  est l'une de ces dernières, on devra adjoindre en même temps qu'elle :

a. Celles de ses dérivées partielles qui interviendront dans la question;

b. Les valeurs numériques qu'elle prend pour tout système de valeurs numériques des  $t_i$  appartenant à  $(\mathcal{R}_0)$ .

Nous dirons qu'un groupe simplement transitif  $G$  est rationnel, si ses équations finies

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sont, pour un choix convenable du système de paramètres  $c_i$  auquel elles se rapportent, rationnelles et *résolubles rationnellement* par rapport à ces paramètres. Cette double rationalité subsiste alors pour toute forme normale (n° 2)

$$(2) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

de  $G$  relative à un pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  rationnel (c'est-à-dire dont les coordonnées  $\omega_i$  sont rationnelles). Les formules

$$(3) \quad a_i = f_i(\omega_1, \dots, \omega_n; c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

du changement de paramètres conduisant à cette forme nouvelle sont, en effet, dans ce cas, rationnelles et résolubles rationnellement par rapport aux  $c_i$ .

Remarquons que si l'on supposait d'emblée que l'une des formes normales (2) de  $G$  fût rationnelle et résoluble rationnellement par rapport aux  $a_i$ , la rationalité du pôle  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  relatif à cette forme normale en résulterait. Car les  $\omega_i$ , en tant que paramètres de la transformation identique de  $G$ , pourraient se calculer au moyen des équations (résolubles rationnellement, par hypothèse)

$$(4) \quad x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; \omega_1, \dots, \omega_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où l'on aurait donné aux  $x_i$  des valeurs numériques rationnelles arbitraires.

De la rationalité des  $\omega_i$  résulte, par ailleurs, que les équations involutives

$$(5) \quad \omega_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donneront sous forme rationnelle, en fonction des  $a_i$ , les paramètres  $\bar{a}_i$  de la transformation de G

$$(6) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

inverse de la transformation générale (2).

Par suite, les équations finies du réciproque H de G, sous la forme (n° 3),

$$(7) \quad x'_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

auront toutes les propriétés de rationalité que nous venons de supposer ou de reconnaître à celles de G. De sorte que *le réciproque H de G est rationnel en même temps que G.*

Ceci acquis, on voit que si G est rationnel, les transformations infinitésimales de H,

$$(8) \quad Z_i f = \zeta_{i\alpha}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n)$$

pourront être supposées rationnelles; et, cela étant, la forme (n° 6),

$$(9) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t_h} = \lambda_{h\alpha}(t_1, \dots, t_p) \zeta_{\alpha i}(x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha, i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p)$$

d'un système automorphe S, ayant pour groupe d'automorphie le groupe rationnel G considéré, sera rationnelle quand les coefficients  $\lambda_h$  y seront rationnels. Auquel cas nous dirons que ce système S est rationnel.

La rationalité d'un des systèmes automorphes S considérés impliquera donc, *par convention*, la rationalité (telle qu'elle a été définie ci-dessus), de son groupe d'automorphie, et s'entendra de la rationalité de ses équations, supposées résolues par rapport aux dérivées  $\frac{\partial x_i}{\partial t_h}$ .

Au contraire, un sous-système  $\Sigma$  d'un système automorphe S rationnel sera (*a priori*) dit rationnel dès que l'une quelconque des formes dont il est susceptible se composera d'équations rationnelles.

Mais cela suffira pour qu'on puisse le ramener, par les méthodes des nos 9 et 10, à une forme normale complète  $(S, \Omega)$  dans laquelle le système complémentaire (d'ordre zéro)  $\Omega$  sera rationnel <sup>(1)</sup>. De sorte que *la rationalité d'un sous-système  $\Sigma$  d'un système automorphe  $S$  rationnel se traduit par le fait que, dans sa forme normale complète  $(S, \Omega)$ , le système complémentaire  $\Omega$  peut s'écrire sous forme rationnelle.*

#### 16. De la réductibilité des systèmes automorphes considérés.

**Remarque fondamentale.** — Conformément à la notion générale de la *réductibilité* que l'on doit à M. Drach, un des systèmes  $S$  considérés, supposé rationnel, sera dit *réductible* s'il est compatible avec au moins une équation rationnelle  $\mathcal{E}$ , qui n'en soit pas une conséquence : ce qui équivaut ici à dire qu'elle ne se réduira pas à une identité quand on en aura éliminé toutes les dérivées  $x_i^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$  au moyen des équations de  $S$  et, éventuellement, de celles qui en résultent par dérivations successives. On aura alors un sous-système  $\Sigma$  de  $S$ , qui sera rationnel, en adjoignant cette équation  $\mathcal{E}$  aux équations de  $S$ . On peut donc dire *qu'un système  $S$  rationnel est réductible si l'un au moins de ses sous-systèmes est rationnel.*

Soit donc  $\Sigma$  un sous-système rationnel d'un système automorphe  $S$  rationnel (de l'espèce considérée), supposé réductible; et soit  $(S, \Omega)$  la forme normale complète de  $\Sigma$ , dans laquelle  $\Omega$  est un système rationnel (en  $t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_n$ ) d'ordre zéro. D'après la remarque III du n° 11 bis, on peut former comme il suit l'adjoint  $\sigma$  de  $\Sigma$  admettant la solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $S$  qui satisfait à des conditions initiales, arbitrairement données,

$$(10) \quad x_i = u_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{pour} \quad t_a = t_h^0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Dans le système  $\Omega_0$ , obtenu en donnant aux  $t_h$ , dans  $\Omega$ , les valeurs  $t_h^0$ ,

---

(1) Les opérations que comportent ces méthodes consistent, en effet : 1° à dériver des équations rationnelles ce qui, d'après les hypothèses faites sur  $(\mathcal{R})$ , donne des équations rationnelles; 2° à remplacer certaines dérivées  $x_i^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ , dans des équations rationnelles, par des expressions rationnelles; 3° à remplacer des systèmes en  $x_1, \dots, x_n$ , rationnels *absolument* par rapport à ces variables, et dont les coefficients sont rationnels dans  $(\mathcal{R})$ , par des systèmes équivalents de la forme canonique (4), (5) du n° 9 : ce qui se fait sans sortir de  $(\mathcal{R})$ .

on fait la transformation

$$(11) \quad x_i = \varphi_i(u_1^0, \dots, u_n^0; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

On a ainsi un réduit  $\bar{\Omega}_0$  de  $\Omega$ , qu'il suffit d'identifier (en  $x'_1, \dots, x'_n$ ), avec le système  $\bar{\Omega}$  qui se déduit de  $\Omega$  par la transformation

$$(12) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

dans laquelle les  $u_i$  sont des indéterminées. En adjoignant, en effet, le système A, en  $u_1, \dots, u_n$ , qui résulte de cette identification, aux équations de S (écrites avec les lettres  $u_i$  au lieu des lettres  $x_i$ ), on obtient en (S, A), l'adjoint en question.

Or, si les  $t_h^0$  sont des constantes numériques rationnelles,  $\Omega_0$  sera rationnel [d'après les hypothèses faites sur  $(\mathcal{R})$ ]; et si les  $u_i^0$  sont aussi des constantes numériques rationnelles,  $\bar{\Omega}_0$  sera, également, rationnel. Comme, d'autre part,  $\bar{\Omega}$  est, comme  $\Omega$ , rationnel, puisque les  $u_i$  sont des éléments de  $(\mathcal{R})$ , en tant qu'indéterminées; et comme  $\bar{\Omega}$  et  $\bar{\Omega}_0$  sont rationnels en  $x'_1, \dots, x'_n$ , au sens *absolu* du mot, les conditions d'identification A seront elles-mêmes rationnelles : de sorte que l'adjoint (S, A) sera [sous l'hypothèse de la rationalité des constantes numériques  $t_h^0$  et  $u_i^0$ , ( $h=1, 2, \dots, p$ ), ( $i=1, 2, \dots, u$ )], un sous-système rationnel de S.

D'où le résultat, fondamental pour la suite :

REMARQUE FONDAMENTALE. — *Tout adjoint  $\sigma$  d'un sous-système  $\Sigma$  rationnel, dont une solution a un point rationnel, est rationnel.*

En disant, dans cet énoncé, qu'une solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de S a un point rationnel, nous entendons que la multiplicité de l'espace  $(t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_n)$

$$(13) \quad x_i = u_i(t_1, \dots, t_p) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

qui la représente, a un point à coordonnées rationnelles, c'est-à-dire que les équations (13) sont vérifiées par un système de valeurs numériques rationnelles des  $t_h$  et des  $x_i$ .

17. Des sous-systèmes rationnels qui ont une solution commune. —

Considérons l'ensemble (U) de tous les sous-systèmes U de S qui sont rationnels et admettent une même solution  $(u_1, \dots, u_n)$ . Je dis qu'il contient un système,  $U_0$ , qui est un sous-système de tous les autres.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et soit  $U_1$  un des éléments de (U). Comme ce n'est pas un sous-système de tous les autres, il y a au moins un autre élément  $U'_1$  de (U) dont il n'est pas un sous-système. Le système obtenu en réunissant les équations de  $U_1$  et  $U'_1$  est un système rationnel qui a pour solutions les solutions communes à  $U_1$  et  $U'_1$  : parmi elles figure  $(u_1, \dots, u_n)$ , et il y en a qui ne sont pas des solutions de  $U_1$ . Ce système est donc un des éléments de (U) et c'est un sous-système de  $U_1$ .

Sur cet élément  $U_2$  de (U), nous pourrions raisonner comme sur  $U_1$ , et ainsi de suite. Ce qui prouve l'existence d'une suite illimitée,  $U_1, U_2, \dots$  d'éléments de (U), dont chacun est un sous-système du précédent.

Soit  $(S, O_h)$  la forme normale complète de  $U_h$ , dans laquelle  $O_h$  est rationnel, d'ordre zéro, et appartient vis-à-vis de  $x_1, \dots, x_n$ , au domaine de rationalité absolu  $(\mathcal{R}_0)$ . La suite illimitée  $O_1, O_2, \dots$  est composée de systèmes dont chacun se déduit du précédent par l'adjonction d'équations nouvelles qui n'en sont pas des conséquences.

Or nous avons vu, au n° 10, dans le cas analogue de la suite  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  alors considérée, qu'une telle suite ne peut pas être illimitée. Nous arrivons donc à une contradiction, ce qui établit la proposition annoncée.

Ainsi, *parmi les sous-systèmes rationnels d'un système automorphe S (rationnel et réductible) qui ont en commun une solution de S quelconque, il y en a un qui est un sous-système de tous les autres.*

Nous l'appellerons le *sous-système fondamental* de S relatif à cette solution.

**18. Cas des solutions qui ont un point rationnel.** — Soit  $(\varphi)$  l'une des solutions de S qui ont un point rationnel, et  $V_0$  le sous-système fondamental de S relatif à cette solution. L'adjoint de  $V_0$  qui a  $(\varphi)$  pour l'une de ses solutions se confondra avec  $V_0$ . Car cet adjoint est rationnel (n° 16, Remarque fondamentale); de sorte que, si  $V_0$  ne se confondait pas avec lui,  $V_0$  serait, en tant que sous-système fondamental relatif

à  $(\nu)$ , un sous-système de cet adjoint :  $V_0$  serait donc un sous-système d'un de ses adjoints, ce qui est impossible <sup>(1)</sup>.

$V_0$  est donc identique à l'un de ses adjoints, et, par conséquent, est un sous-système principal (n° 14) de  $S$  : soit  $g_0$  son groupe d'invariance.

Soit, d'autre part,  $\Sigma$  un sous-système rationnel quelconque de  $S$ , et  $k$  le plus grand sous-groupe du groupe d'invariance  $K$  de  $S$  qui laisse invariant ce sous-système. Nous savons (n°s 12 à 14) que tout adjoint de  $\Sigma$  est un sous-système principal de  $S$ , ayant  $k$  pour groupe d'invariance. Soit  $\sigma$  celui de ces adjoints qui admet  $(\nu)$  pour l'une de ses solutions, et soit  $g$  son groupe d'automorphie. Comme  $\sigma$  est rationnel (n° 16, Remarque fondamentale), toutes les solutions de  $V_0$  sont des solutions de  $\sigma$ . Or on passe de  $(\nu)$  à chaque solution, soit de  $V_0$ , soit de  $\sigma$ , par une transformation de  $G$  et une seule, qui, pour  $V_0$ , appartient à  $g_0$ , et, pour  $\sigma$ , appartient à  $g$ . Donc, les solutions de  $V_0$  étant des solutions de  $\sigma$ ,  $g_0$  est contenu dans  $g$ .

De même, on passe de  $(\nu)$  à chaque solution de  $V_0$ , ou de  $\sigma$ , par une transformation de  $K$  et une seule, qui, pour  $V_0$ , appartient à  $k_0$ , et, pour  $\sigma$ , appartient à  $k$ . Donc les solutions de  $V_0$  étant des solutions de  $\sigma$ ,  $k_0$  est contenu dans  $k$ .

Remarquons encore que, puisqu'il y a un adjoint  $\sigma$  de  $\Sigma$  qui admet toutes les solutions de  $V_0$ ,  $\Sigma$  ne peut pas être un sous-système de  $V_0$ . Car, s'il en était un, il serait un sous-système de cet adjoint  $\sigma$  : de sorte que  $\Sigma$  serait un sous-système d'un de ses adjoints, ce qui est impossible [voir la note <sup>(1)</sup> ci-dessus]. On conclut de cette remarque que  $V_0$  est irréductible.

**EN RÉSUMÉ :** *Le sous-système fondamental  $V_0$  de  $S$  relatif à une solution  $(\nu)$  qui a un point rationnel est un sous-système principal. Il est irréductible. Tout sous-système rationnel  $\Sigma$  de  $S$  a un adjoint  $\sigma$  rationnel, qui admet toutes les solutions de  $V_0$ . Le groupe d'automorphie et le groupe d'invariance de cet adjoint contiennent, respectivement, le groupe d'automorphie et le groupe d'invariance de  $V_0$ . Cela revient à dire, en ce qui concerne les groupes d'invariance, que celui de  $V_0$  est contenu dans le*

---

<sup>(1)</sup> On a vu, en effet, au n° 12, que si un adjoint d'un sous-système  $\Sigma$  admet l'une des solutions de ce sous-système, toutes ses solutions sont des solutions de  $\Sigma$ .

*plus grand sous-groupe du groupe d'invariance K de S qui laisse  $\Sigma$  invariant.*

**19. Groupe spécifique et solutions conjuguées.** — Il résulte de ce qui précède que le mode de réductibilité de chaque système automorphe S particulier, dans chaque domaine de rationalité ( $\mathcal{R}$ ) donné, est caractérisé par le plus grand sous-groupe  $k_0$  de son groupe d'invariance K qui laisse invariants tous ses sous-systèmes rationnels : c'est ce que nous appellerons, pour cette raison, *le groupe spécifique* de S [dans le domaine ( $\mathcal{R}$ )].

On conclut immédiatement de cette définition, rapprochée des énoncés du numéro précédent, que *le groupe spécifique de S est le groupe d'invariance de tout sous-système fondamental de S relatif à une solution ayant un point rationnel*, sous-système fondamental qui est, comme on l'a vu, un sous-système principal de S irréductible.

Pour un sous-système fondamental quelconque de S, on peut seulement affirmer que le groupe spécifique est contenu dans le plus grand sous-groupe du groupe d'invariance K de S qui laisse ce sous-système invariant : ce qui n'est qu'une autre forme de la définition du groupe spécifique.

Pour énoncer, plus facilement, d'autres conséquences de cette définition, nous dirons que deux solutions de S sont *conjuguées* si elles dérivent l'une de l'autre par une transformation du groupe spécifique, et son inverse : ce qui entraîne qu'une solution quelconque est l'une de ses propres conjuguées. L'ensemble des solutions conjuguées d'une solution particulière quelconque sera dit une *famille de solutions conjuguées*. Les solutions qui le composent sont, en effet, deux à deux conjuguées, et se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations du groupe spécifique : en d'autres termes, ce sont les conjuguées de l'une quelconque d'entre elles.

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une solution quelconque de S, et cherchons à définir analytiquement ses conjuguées. D'après le n° 5, la transformation réductrice

$$(14) \quad x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ramène le groupe d'invariance K au groupe  $\bar{H}$ , qui résulte du réci-

proque H du groupe d'automorphie G par l'adjonction des équations  $t'_h = t_h$ , ( $h = 1, 2, \dots, n$ ). Si l'on fait abstraction de ces équations dans K, celui-ci est, en conséquence,

$$(15) \quad x'_i = \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les  $\theta_i$  étant définis par la formule (28) du n° 5, à savoir, sous forme plus explicite, par les équations

$$(16) \quad \varphi_i(\theta_1, \dots, \theta_n; u_1, \dots, u_n) = \varphi_i(u_1, \dots, u_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

et, sous le bénéfice de ces formules, les équations (15) se changent, par la transformation (14), en

$$(17) \quad x'_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

équations de H.

Le groupe spécifique  $k_0$  de S, sous-groupe de K, devient, en même temps, un sous-groupe  $h$  de H; et le système d'équations entre les paramètres  $a_i$  des équations (17),

$$(18) \quad A_j(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

qui définit ce sous-groupe  $h$  de H, définit aussi, pour les équations (15), (16), le groupe spécifique  $k_0$ , comme sous-groupe de K.

De plus, d'après la remarque finale du n° 5, la transformation générale (15), (16) de K change  $(u_1, \dots, u_n)$  en une solution de S qui est aussi donnée, pour les mêmes valeurs des paramètres  $a_i$ , par la transformation générale de G,

$$(19) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

appliquée également à  $(u_1, \dots, u_n)$ .

D'où il résulte que les équations (18) définissent encore, dans le groupe G, un sous-groupe  $g$  dont les transformations comme celles de  $k_0$ , changent  $(u_1, \dots, u_n)$  en ses diverses conguguées.

On conclut de là que toute famille de solutions conguguées de S est constituée par l'ensemble des solutions d'un sous-système principal de S ayant pour groupe d'invariance le groupe spécifique de S; et réciproquement.

## 20. Les sous-systèmes spécifiques et leurs groupes d'automorphie.



— Nous appellerons, pour abrégier, *sous-systèmes spécifiques* les sous-systèmes principaux de  $S$  qui viennent de s'introduire, c'est-à-dire ceux dont le groupe d'invariance est le groupe spécifique de  $S$ .

Nous avons vu comment le groupe d'automorphie  $g$  de l'un quelconque d'entre eux se déduit du groupe spécifique  $k_0$ , si l'on connaît l'une de ses solutions  $(u_1, \dots, u_n)$ .

Comparons les groupes d'automorphie,  $g$  et  $g'$ , de deux de ces systèmes,  $s$  et  $s'$ , ayant respectivement, pour l'une de leurs solutions,  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(u'_1, \dots, u'_n)$ ,

Nous remarquerons, à cet effet, que l'on passe de  $(u_1, \dots, u_n)$  à  $(u'_1, \dots, u'_n)$  par une certaine transformation (19) de  $G$  : soit  $T$  cette transformation. Toute transformation de  $G$  laisse invariante toute transformation (17) de  $H$ , et, par conséquent, toute transformation de la forme (15), quelles que soient les fonctions  $\theta_i$  des  $t_n$ ; elle laisse donc invariante toute transformation du groupe spécifique, et, par conséquent, change deux solutions de  $S$  conjuguées en deux solutions conjuguées. Donc  $T$ , changeant  $(u_1, \dots, u_n)$  en  $(u'_1, \dots, u'_n)$ , changera la famille des conjuguées de  $(u_1, \dots, u_n)$  (c'est-à-dire des solutions de  $s$ ) en celle des conjuguées de  $(u'_1, \dots, u'_n)$  (c'est-à-dire des solutions de  $s'$ ). Elle changera donc  $s$  en  $s'$  et  $g$  en  $g'$ .

On peut donc énoncer les conclusions suivantes :

*Les solutions de  $S$  se partagent en familles de solutions conjuguées; chacune de ces familles est formée par les solutions d'un sous-système spécifique de  $S$ , et réciproquement.*

*Si  $s$  et  $s'$  sont deux sous-systèmes spécifiques de  $S$ , toute transformation  $T$  du groupe d'automorphie  $G$  de  $S$  qui change une solution de  $s$  en une solution de  $s'$  change  $s$  en  $s'$  : de sorte que le groupe d'automorphie  $g'$  de  $s'$  est le transformé du groupe d'automorphie  $g$  de  $s$  par cette transformation  $T$ .*

On voit que les groupes d'automorphie  $g$  des divers sous-systèmes spécifiques constituent une famille de sous-groupes de  $G$ , homologues dans  $G$ ; et que, dans ce qui précède,  $g'$  ne se confond avec  $g$  que si  $T$  laisse  $g$  invariant.

## 24. Caractères fondamentaux de la réductibilité des systèmes

**considérés.** — L'introduction des notions précédentes (groupe spécifique, solutions conjuguées, sous-systèmes spécifiques) permet de caractériser, comme il suit, le mode de réductibilité des systèmes automorphes  $S$  considérés.

1° Tout sous-système rationnel  $\Sigma$  de  $S$  admet le sous-groupe spécifique  $k_0$  de  $S$ , d'après la définition même de ce sous-groupe. Il en résulte que les solutions de ce sous-système se répartissent en familles dans chacune desquelles les diverses solutions proviennent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations du groupe spécifique, c'est-à-dire en familles de solutions conjuguées.

Donc : *les solutions de tout sous-système rationnel de  $S$  se répartissent en familles de solutions conjuguées; chacune de ces familles est formée des solutions d'un sous-système spécifique de  $S$ , rationnel ou non.*

Il en résulte qu'une solution quelconque de  $S$  ne peut pas être solution d'un sous-système rationnel de  $S$  sans que ses conjuguées le soient. Elle est donc, au point de vue de sa détermination par des systèmes rationnels, *inséparable de ses conjuguées.*

2° On conclut de ce qui précède que *tout sous-système spécifique rationnel est irréductible.* Car s'il avait un sous-système rationnel, celui-ci serait un sous-système rationnel de  $S$  qui ne pourrait pas satisfaire à la propriété générale des sous-systèmes rationnels qui vient d'être énoncée. En effet, d'après cette propriété, un sous-système rationnel ne peut pas admettre une solution d'un sous-système spécifique sans les admettre toutes.

La présente propriété contient, en particulier, la suivante qui lui est même, au fond, équivalente :

*Tout sous-système spécifique rationnel est sous-système fondamental relativement à chacune de ses solutions.*

3° Le sous-système fondamental relatif à une solution arbitraire de  $S$  n'est pas, en général, un sous-système spécifique. C'est ce qui résultera d'un exemple, que nous traiterons plus loin. Mais il y a toujours des solutions pour lesquelles le sous-système fondamental correspondant est un sous-système spécifique de  $S$ .

C'est ce qui résulte de la proposition du n° 18, que l'on peut énoncer ainsi :

*Le sous-système fondamental relatif à l'une quelconque des solutions de S qui ont un point rationnel est un sous-système spécifique.*

En d'autres termes, toute famille de solutions conjuguées parmi lesquelles figure une solution ayant un point rationnel constitue l'ensemble des solutions d'un sous-système spécifique rationnel.

Il est naturel de penser qu'il y a aussi des familles de solutions conjuguées, ne contenant aucune solution ayant un point rationnel, qui sont données par des sous-systèmes spécifiques rationnels; mais il paraît difficile de les caractériser. Nous nous bornerons à constater leur existence sur l'exemple annoncé.

**22. Groupes de rationalité. Théorème de Galois.** — Nous appellerons, pour abrégé, *solutions primitives* de S celles qui satisfont à des sous-systèmes spécifiques rationnels et *groupe de rationalité* relatif à une solution primitive le groupe d'automorphie  $g$  du sous-système spécifique dont elle est une solution.

Cette dénomination de *groupe de rationalité* a son origine dans l'étude, conforme aux *idées de Galois*, des conditions dans lesquelles une fonction rationnelle [dans  $(\mathcal{R})$ ] des  $x_i$  et des  $t_h$  se réduit à une fonction rationnelle  $t_h$  lorsqu'on y remplace  $(x_1, \dots, x_n)$  par une solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de S.

Soit  $R(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p)$  la fonction rationnelle considérée, et posons

$$(20) \quad R(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_p) = \rho_0(t_1, \dots, t_p).$$

Si la fonction  $\rho_0$  est rationnelle, l'équation

$$(21) \quad R(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p) = \rho_0(t_1, \dots, t_p)$$

est une équation rationnelle qui admet la solution  $(u_1, \dots, u_n)$ ; elle admet donc toute conjuguée  $(u'_1, \dots, u'_n)$  de cette solution, et l'on a, par suite,

$$(22) \quad R(u'_1, \dots, u'_n; t_1, \dots, t_p) = \rho_0(t_1, \dots, t_p),$$

d'où l'identité en  $t_1, \dots, t_p$ ,

$$(23) \quad R(u'_1, \dots, u'_n; t_1, \dots, t_p) = R(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_p),$$

Or  $(u'_1, \dots, u'_n)$  se déduit de  $(u_1, \dots, u_n)$  par une certaine transformation T du groupe d'automorphie  $g$  du sous-système

spécifique de S dont les solutions sont  $(u_1, \dots, u_n)$  et ses conjuguées. Si donc cette transformation T est

$$(24) \quad x'_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on aura l'identité en  $t_1, \dots, t_p$

$$(25) \quad R[\psi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \psi_n(u_1, \dots, u_n); t_1, \dots, t_p] = R(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_p),$$

que l'on exprimera en disant que la fonction rationnelle  $R(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_p)$  de la solution  $(u_1, \dots, u_n)$  admet *numériquement* la transformation (24) : ce qui n'exige pas que la fonction rationnelle  $R(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p)$  des indéterminées  $x_i$  admette *formellement* cette transformation (quels que soient les valeurs des  $t_h$ ).

Si l'on convient d'appeler *valeur numérique* de l'expression  $R(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_p)$  la fonction  $\rho_0(t_1, \dots, t_p)$  à laquelle elle se réduit quand on y remplace les lettres  $u_i$  par les fonctions des  $t_h$  qu'elles représentent, on aura la proposition suivante :

THÉORÈME DE GALOIS (1<sup>re</sup> partie). — *Pour que la valeur numérique d'une fonction rationnelle d'une solution (u) de S soit rationnelle, il est nécessaire que cette valeur ne change pas quand on remplace (u), dans cette fonction rationnelle, par l'une quelconque des solutions qui lui sont conjuguées : ce qui équivaut à dire que cette fonction rationnelle de (u) admet, numériquement, toutes les transformations du groupe d'automorphie g du sous-système spécifique de S dont (u) est l'une des solutions.*

Rappelons, pour plus de clarté, que ce groupe g est formé des transformations du groupe d'automorphie G de S qui changent (u) en ses diverses conjuguées.

La réciproque est vraie, si (u) est une solution primitive de S. Soit, en effet, dans ce cas (S, A) la forme normale complète [n° 10] du sous-système spécifique dont (u) est une solution. L'équation (21) admettra, par hypothèse, la solution (u) et ses conjuguées, c'est-à-dire toutes les solutions de (S, A). Ce sera donc une conséquence de A [n° 11 bis]. Ce sera même la seule conséquence de A qui soit de la forme

$$(26) \quad R(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p) = \rho(t_1, \dots, t_p),$$

car toute conséquence de A admet sa solution (u), et, en écrivant qu'il en est ainsi de (26), on obtient  $\rho = \rho_0$ .

D'autre part ( $u$ ) étant primitive,  $A$  est rationnel. Si donc on exprime que (26) est une conséquence de  $A$ , le système, rationnel en  $\rho$ , que l'on obtiendra ainsi aura une solution unique; et comme ses coefficients appartiendront à  $(\mathcal{R})$ , puisque ceux des équations de  $A$ , et de (26) (en  $x_1, \dots, x_n$ ), appartiennent à  $(\mathcal{R})$ , il en sera de même de cette solution unique  $\rho = \rho_0(t_1, \dots, t_p)$ .

Nous pouvons donc compléter le théorème précédent par le suivant :

**THÉORÈME DE GALOIS (2<sup>e</sup> partie).** — *La condition nécessaire énoncée est suffisante si la solution ( $u$ ) considérée est une solution primitive.*

Le groupe d'automorphie  $g$  considéré est alors, par définition, le *groupe de rationalité* relatif à la solution ( $u$ ) considérée.

On remarquera que les deux énoncés restent vrais si l'on y remplace le groupe d'automorphie  $g$ , qui peut changer d'une solution à une autre, par le groupe spécifique  $k_0$ , qui est le même pour toutes. Car, par définition, on passe de toute solution à ses conjuguées par les diverses transformations de ce groupe spécifique.

**23. Groupes de Galois.** — Pour compléter ces généralités, nous observerons que si le domaine de rationalité  $(\mathcal{R})$  considéré contient toutes les constantes numériques (soit réelles, soit complexes, suivant que l'on se place au point de vue de l'analyse réelle ou de celle des fonctions de variables complexes), tous les points de toute solution  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $S$  sont des points rationnels, de sorte que toutes les solutions de  $S$  sont primitives.

La deuxième partie du théorème, auquel nous avons donné le nom de Galois, est alors débarrassée de toute restriction, et ce théorème est, dès lors, l'exacte généralisation de celui sur lequel Galois a fondé sa théorie des équations algébriques. Les groupes de rationalité sont, dans ce cas, tous les groupes homologues de l'un quelconque d'entre eux dans le groupe d'automorphie  $G$  de  $S$  (dont ils sont des sous-groupes), et l'on peut donner, à l'un quelconque de ces sous-groupes de  $G$ , dont la structure importera seule, le nom de *groupe de Galois* de  $S$ .

**24. Étude d'un exemple.** — L'exemple que je traiterai, comme je l'ai annoncé au n<sup>o</sup> 21, se rapporte à la théorie de *l'équation linéaire du*

second ordre

$$(26) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = 0.$$

Le système S automorphe auquel elle équivaut quand on prend pour inconnues un système fondamental d'intégrales  $(x_1, x_2)$ , est

$$(27) \quad \frac{dx_1}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_3}{dt} + px_3 + qx_1 = 0, \quad \frac{dx_4}{dt} + px_4 + qx_2 = 0.$$

Son groupe d'automorphie (simplement transitif) G est, sous forme normale [n° 2]

$$(28) \quad x'_1 = a_1 x_1 + a_3 x_2, \quad x'_2 = a_2 x_1 + a_4 x_2, \quad x'_3 = a_1 x_3 + a_3 x_4, \quad x'_4 = a_2 x_3 + a_4 x_4,$$

et son point origine est

$$(28 \text{ bis}) \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 1,$$

Il est isomorphe holoédriquement au groupe linéaire homogène général [cf. n° 7],  $\Gamma$ ,

$$(29) \quad x'_1 = a_1 x_1 + a_3 x_2, \quad x'_2 = a_2 x_1 + a_4 x_2.$$

Le groupe réciproque H est

$$(30) \quad x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_3, \quad x'_2 = a_1 x_2 + a_2 x_4, \quad x'_3 = a_3 x_1 + a_4 x_3, \quad x'_4 = a_3 x_2 + a_4 x_4$$

et la forme générale des transformations réductrices est, par suite,

$$(31) \quad x_1 = u_1 x'_1 + u_2 x'_3, \quad x_2 = u_1 x'_2 + u_2 x'_4, \quad x_3 = u_3 x'_1 + u_4 x'_3, \quad x_4 = u_3 x'_2 + u_4 x'_4$$

$(u_1, u_2, u_3, u_4)$  étant une solution quelconque de S.

On remarquera que les dernières formules ne sont autres que celles qu'introduit la méthode de la *variation des constantes*, appliquée simultanément à  $x_1$  et  $x_2$  : les constantes que l'on fait varier devenant les inconnues nouvelles  $(x'_1, x'_3)$  et  $(x'_2, x'_4)$ , respectivement.

La méthode du n° 5 donne, pour le groupe d'invariance K de S, les équations

$$(32) \quad x'_1 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_3, \quad x'_2 = \theta_1 x_2 + \theta_2 x_4, \quad x'_3 = \theta_3 x_1 + \theta_4 x_3, \quad x'_4 = \theta_3 x_2 + \theta_4 x_4,$$

avec

$$(32 \text{ bis}) \quad \begin{cases} D\theta_1 = u_1(a_1 u_4 - a_2 u_3) + u_2(a_3 u_4 - a_4 u_3), \\ D\theta_2 = -u_1(a_1 u_2 - a_2 u_1) - u_2(a_3 u_2 - a_4 u_1), \\ D\theta_3 = u_3(a_1 u_4 - a_2 u_3) + u_4(a_3 u_4 - a_4 u_3), \\ D\theta_4 = -u_3(a_1 u_2 - a_2 u_1) - u_4(a_3 u_2 - a_4 u_1), \\ D = u_1 u_4 - u_2 u_3. \end{cases}$$

1° Considérons, en nous plaçant dans le *domaine de rationalité absolue* [n° 15], celle des équations (26) qui admet les deux intégrales

$$(33) \quad x_1 = t \cos \alpha t, \quad x_2 = t \sin \alpha t,$$

$\alpha^2$  étant un entier positif, non carré parfait. C'est celle pour laquelle on a

$$(33 \text{ bis}) \quad p = -\frac{2}{t}, \quad q = \frac{\alpha^2 t^2 + 2}{t}$$

Elle est donc rationnelle, ainsi que le système correspondant S. Celui-ci admet la solution transcendante

$$(34) \quad x_1 = t \cos \alpha t, \quad x_2 = t \sin \alpha t, \quad x_3 = \cos \alpha t - \alpha t \sin \alpha t, \quad x_4 = \sin \alpha t + \alpha t \cos \alpha t.$$

Il est réductible, puisque cette solution satisfait à l'équation rationnelle

$$x_1^2 + x_2^2 = t^2.$$

Pour faire l'application de la théorie des *sous-systèmes adjoints* [n° 12], je choisirai, de préférence, la relation

$$(35) \quad x_2(x_1 x_4 - x_2 x_3) = t(x_1 - t x_3),$$

à laquelle elle satisfait aussi.

Soit donc  $\Sigma$  le sous-système rationnel que cette équation définit, conjointement avec S. La méthode du n° 9 en donne, sans peine, la *forme normale complète* (S,  $\Omega$ ) : on trouve, pour  $\Omega$ , le système

$$(36) \quad \frac{x_2^2 - t^2}{x_1^2} = \frac{x_2 x_4 - t}{x_1 x_3} = \frac{x_4^2 - \alpha^2 t^2 - 1}{x_3^2}.$$

Considérons le *réduit* de  $\Omega$ , soit  $\Omega_1$  [n° 11 bis, Rem. III],

$$(37) \quad \frac{x_2^2 - 1}{x_1^2} = \frac{x_2 x_4 - 1}{x_1 x_3} = \frac{x_4^2 - (\alpha^2 + 1)}{x_3^2},$$

qu'on obtient en y faisant  $t = 1$ ; et exprimons que la transformation réductrice (31) ramène  $\Omega$  à  $\Omega_1$ . Nous obtiendrons les équations de condition

$$(38) \quad \begin{cases} u_1^2 + 2u_1 u_2 + (\alpha^2 + 1)u_2^2 = t^2, \\ u_1 u_3 + (u_1 u_4 + u_2 u_3) + (\alpha^2 + 1)u_2 u_4 = t, \\ u_3^2 + 2u_3 u_4 + (\alpha^2 + 1)u_4^2 = \alpha^2 t^2 + 1. \end{cases}$$

L'adjoint (S,  $\mathcal{A}_1$ ) admettant la solution, soit  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , qui se

réduit aux valeurs (28 bis) pour  $t = 1$ , est donc défini par le système complémentaire  $\mathcal{A}_1$ , dont les équations sont :

$$(38 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + (\alpha^2 + 1)x_2^2 = t^2, \\ x_1x_3 + (x_1x_4 + x_2x_3) + (\alpha^2 + 1)x_2x_4 = t, \\ x_3^2 + 2x_3x_4 + (\alpha^2 + 1)x_4^2 = \alpha^2 t^2 + 1. \end{cases}$$

Conformément à la théorie générale [n° 16], il est rationnel, la solution  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  ayant le *point rationnel*  $t = 1, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ . On trouve, du reste, sans peine, que celle-ci est

$$(39) \quad \begin{cases} \nu_1 = t \cos \alpha(t-1) - \frac{t}{\alpha} \sin \alpha(t-1), \\ \nu_2 = \frac{t}{\alpha} \sin \alpha(t-1), \\ \nu_3 = (1-t) \cos \alpha(t-1) - \frac{\alpha^2 t + 1}{\alpha} \sin \alpha(t-1), \\ \nu_4 = t \cos \alpha(t-1) + \frac{1}{\alpha} \sin \alpha(t-1). \end{cases}$$

La forme des équations (38 bis) suggère le changement de variables (transformation de G),

$$(40) \quad x'_1 = x_1 + x_2, \quad x'_2 = \alpha x_2, \quad x'_3 = x_3 + x_4, \quad x'_4 = \alpha x_4,$$

qui les ramène au système

$$(41) \quad x_1^2 + x_2^2 = t^2, \quad x_1x_3 + x_2x_4 = t, \quad x_3^2 + x_4^2 = \alpha^2 t^2 + 1.$$

C'est le système complémentaire  $\mathcal{A}_0$  qui donne l'adjoint  $(S, \mathcal{A}_0)$  auquel satisfait la solution (34).

Pour l'adjoint général  $(S, \mathcal{A})$  de  $\Sigma$ , on aurait le système complémentaire  $\mathcal{A}$

$$(42) \quad \begin{cases} Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = t^2, \\ Ax_1x_3 + B(x_1x_4 + x_2x_3) + Cx_2x_4 = t, \\ Ax_3^2 + 2Bx_3x_4 + Cx_4^2 = \alpha^2 t^2 + 1, \end{cases}$$

où A, B, C sont arbitraires.

Ces adjoints sont rationnels quand A, B, C le sont.

Ceux des adjoints de  $\Sigma$  entre lesquels se partagent les solutions de  $\Sigma$  ont pour système complémentaire général

$$(43) \quad Ax_1^2 + x_2^2 = t^2, \quad Ax_1x_3 + x_2x_4 = t, \quad Ax_3^2 + x_4^2 = \alpha^2 t^2 + 1,$$

car l'élimination du paramètre A entre ces équations donne les équations (37).



2° Le groupe d'automorphie de  $(S, \mathcal{A}_0)$  est donné par les formules (28) pour

$$(44) \quad a_1 = \cos a, \quad a_2 = \varepsilon \sin a, \quad a_3 = -\sin a, \quad a_4 = \varepsilon \cos a \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$a$  étant un paramètre arbitraire. Il est composé de deux familles, dont l'une ( $\varepsilon = +1$ ) est un sous-groupe qui correspond, dans l'isomorphie (28) (29), au groupe des rotations du plan  $(x_1, x_2)$  autour de l'origine  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

D'une manière générale, cette isomorphie fait correspondre au groupe d'automorphie de  $(S, \mathcal{A})$  le groupe linéaire homogène qui laisse invariante la forme quadratique

$$(45) \quad Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2.$$

Le carré du déterminant  $(a_1 a_3 - a_2 a_4)$  est égal à 1, et les transformations du groupe d'automorphie se partagent en deux familles, caractérisées par la valeur, +1 ou -1, de ce déterminant. Celle pour laquelle cette valeur est +1 fournit le sous-groupe continu unique du groupe d'automorphie, caractérisé par l'invariant  $(x_1 x_4 - x_2 x_3)$ .

Les formules (39) donnent la relation rationnelle

$$(46) \quad v_1 v_4 - v_2 v_3 = t^2,$$

tandis que, pour la solution (34), on a

$$(47) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = \alpha t^2,$$

dont le second membre est irrationnel.

La solution  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  satisfait donc au sous-système rationnel  $(S, \mathcal{B}_1)$  de  $(S, \mathcal{A}_1)$  obtenu en adjoignant aux équations (38 bis) l'équation

$$(46 \text{ bis}) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = t^2,$$

sous-système automorphe dont le groupe  $g$  se déduirait, par la transformation inverse de la transformation (40), du groupe (isomorphe au groupe des rotations du plan autour de l'origine), dont les équations résultent des équations (28) par les formules

$$(48) \quad a_1 = \cos a, \quad a_2 = \sin a, \quad a_3 = -\sin a, \quad a_4 = \cos a.$$

Le groupe d'invariance  $k$  de ce sous-système  $(S, \mathcal{B}_1)$  est le même que celui du sous-système — non rationnel — qui s'obtient en adjoignant aux équations (41) l'équation (47). Ses équations seront donc

données par les équations (32) et (32 bis), sous le bénéfice des équations (48), la solution  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  étant la solution (34).

Ce groupe d'invariance  $k$  est le *groupe spécifique* de  $S$ ; parce que  $(S, \mathcal{B}_1)$  est le *sous-système fondamental* relatif à  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ . Car  $g$  n'admettant aucun sous-groupe continu, si  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , satisfaisait à une équation rationnelle qui ne fût pas une conséquence de  $(S, \mathcal{B}_1)$ , elle satisferait à un système, rationnel en  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , qui n'aurait qu'un nombre limité de solutions. Le système  $S$  aurait donc une solution algébrique, ce qui est impossible, sa solution (34) étant transcendante.

Le groupe d'automorphie  $g$  de  $(S, \mathcal{B}_1)$ , défini ci-dessus, est, pour la même raison, le *groupe de rationalité* de  $S$ , relatif à la solution  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  et à ses conjuguées.

3° Revenons à l'adjoint général  $(S, \mathcal{A})$  de  $\Sigma$ . Les équations (42) expriment que la transformation

$$(49) \quad x = x_1 x' + x_3 y', \quad y = x_2 x' + x_4 y'$$

change la forme quadratique  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  en

$$t^2 x'^2 + 2tx'y' + (\alpha^2 t^2 + 1)y'^2.$$

L'invariance du discriminant donne donc, comme conséquence du système (42), l'équation

$$(50) \quad \alpha^2 t^4 = (AC - B^2)(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2,$$

qui se décompose en deux,

$$(51) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = \pm \frac{\alpha t^2}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Le système  $(S, \mathcal{A})$  est ainsi décomposé en deux *sous-systèmes spécifiques*, qui ne seront rationnels que si  $\frac{\alpha}{\sqrt{AC - B^2}}$  est rationnel.

Le sous-système spécifique  $(S, \mathcal{B})$ , qui admet pour solution une solution  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  quelconque de  $S$  s'obtiendra en résolvant <sup>(1)</sup>

(1) Le déterminant de ce système est  $(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2$ .

en A, B, C les équations (42), et en choisissant dans (51) le signe qui rendra les deux membres égaux. Il suffit d'opérer sur les valeurs  $x_i^0$  prises par les  $x_i$  pour une valeur arbitraire  $t = t_0$ . Par quoi il est manifeste que ce sous-système spécifique sera rationnel, conformément à la théorie générale, si  $t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$  le sont.

Il est non moins manifeste que, A, B, C pouvant être quelconques dans (S,  $\mathcal{C}$ ), la rationalité du sous-système spécifique ainsi obtenu n'aura pas lieu en général. Ce qui justifie notre assertion du n° 21 (3°), suivant laquelle *le sous-système fondamental relatif à une solution quelconque de S n'est pas, en général, un sous-système spécifique.*

Nous allons vérifier aussi ce que nous avons dit au même endroit, *qu'il y a des sous-systèmes spécifiques rationnels dont aucune solution n'a de point rationnel.*

Nous prendrons, à cet effet,

$$(52) \quad \alpha = \sqrt{6}, \quad A = 2, \quad B = 0, \quad C = 3,$$

de sorte que le second membre de (51) sera  $\pm t^2$ ; et nous montrerons que la première des équations (42) n'est alors vérifiée par aucun système de valeurs rationnelles de  $x_1, x_2$  et  $t$ .

Changeant les notations, cela revient à prouver que l'équation indéterminée en  $x, y, z$

$$(53) \quad 2x^2 + 3y^2 = z^2$$

n'a pas de solution rationnelle. Il suffit évidemment de prouver qu'elle n'a pas de solution entière.

On remarquera que la valeur  $t = 0$  étant singulière pour l'équation (26) considérée, la valeur  $z = 0$  est exclue, de sorte que l'hypothèse  $x = y = 0$  est aussi exclue.

Si l'on suppose  $x = 0$ , l'équation sera

$$(54) \quad 3y^2 = z^2,$$

et l'on pourra exiger que  $y$  et  $z$  soient premiers entre eux. Alors  $z$  devra être divisible par 3, et  $z^2$  le sera par 9, ce qui est impossible puisque  $3y^2$  ne le sera pas.

L'hypothèse  $y = 0$  est à écarter pour une raison analogue.

Supposons donc que  $x, y, z$  sont des entiers non nuls; on pourra supposer qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, et, par suite, que  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux.

Cela posé, remarquons que si l'un des deux entiers  $x, z$  était divisible par 3, l'autre le serait, d'après l'équation; mais alors, d'après l'équation,  $3y^2$  serait divisible par 9; de sorte que  $y$  serait divisible par 3. Ce qui est impossible,  $x, y, z$  étant premiers entre eux.

On devrait donc avoir

$$x = (\text{mult. de } 3) \pm 1, \quad z = (\text{mult. de } 3) \pm 1$$

et, par suite,

$$x^2 = (\text{mult. de } 3) + 1, \quad z^2 = (\text{mult. de } 3) + 1;$$

d'où

$$z^2 - 2x^2 = (\text{mult. de } 3) - 1.$$

Or cela est impossible d'après l'équation.

4° Nous pouvons ajouter aux constatations précédentes qu'une solution de S, arbitrairement choisie, ne satisfera, en général, à aucun sous-système rationnel de S.

Nous savons, en effet [n° 21], que les solutions de tout sous-système rationnel de S se répartissent entre des sous-systèmes spécifiques. Si donc

$$(55) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = 0$$

est l'une des équations d'un sous-système rationnel, il existe des constantes A, B, C telles que cette équation (55) soit une conséquence des équations (42), précisées par l'une des équations (51); ce qui exigera que A, B, C satisfassent à au moins une relation rationnelle, puisque les solutions de S ne satisfont pas toutes à l'équation (55).

Or, si A, B, C sont pris arbitrairement, ils ne satisferont à aucune équation rationnelle; et, par conséquent, les solutions des deux sous-systèmes spécifiques qu'ils définissent ne satisferont à aucune équation rationnelle (55). C'est ce que nous voulions établir.

5° Remarquons enfin que les solutions conjuguées définies par le système obtenu en associant aux équations (42), pour des valeurs

arbitraires de A, B, C, l'équation

$$(56) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = \frac{\alpha t^2}{\sqrt{AC - B^2}},$$

écrite avec une détermination du radical arbitrairement choisie, ne donnent pas à  $(x_1 x_4 - x_2 x_3)$  une valeur rationnelle, bien que toutes lui donnent la même valeur. Cet exemple confirme ainsi que la seconde partie du théorème de Galois [n° 22] est, en général, en défaut pour des solutions non primitives.

