

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

**Sur la convergence des séries de polynômes de la forme $\sum a_n P_n(z)$
et sur certaines suites de polynômes**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 56 (1939), p. 173-275

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__173_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONVERGENCE
DES
SÉRIES DE POLYNOMES DE LA FORME $\Sigma a_n P_n(z)$
ET
SUR CERTAINES SUITES DE POLYNOMES

PAR M. HUBERT DELANGE,
Agrégré de l'Université,
Pensionnaire de la Fondation Thiers.

INTRODUCTION.

Dans l'étude de la représentation des fonctions d'une variable complexe par des séries de polynomes, on est amené à associer à un domaine donné, par différents procédés, des suites de polynomes $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ telles que toute fonction holomorphe dans le domaine considéré y soit représentable par une série de la forme $\Sigma a_n P_n(z)$. Le cas le plus simple est celui des séries de Taylor, où les polynomes de base sont : $1, z, z^2, \dots, z^n, \dots$

Ici nous considérons une suite de polynomes $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ donnée arbitrairement et nous nous proposons d'étudier la convergence des séries de la forme $\Sigma a_n P_n(z)$. Dans le cas général les résultats peuvent être compliqués. Le présent travail est justement consacré aux cas qui donnent lieu à des résultats simples.

Dans une première Partie nous supposons que les polynomes de base soient de degré égal à leur indice et aient tous leurs zéros à l'intérieur d'une courbe fermée C indépendante de cet indice. Si l'on

appelle A_n le coefficient de z^n dans $P_n(z)$, lorsque la plus grande limite de $\sqrt[n]{|a_n A_n|}$ est inférieure à l'inverse du diamètre d'un cercle contenant la courbe C , il existe une courbe continue fermée Γ à l'intérieur de laquelle la série proposée et les séries dérivées convergent uniformément, tandis qu'elles divergent à l'extérieur. Lorsque les coefficients a_n varient en restant assujettis à la limitation indiquée, on peut obtenir une grande variété de courbes de convergence. Pour que l'on ait seulement une famille de courbes représentable par une équation de la forme $F(x, y) = \text{const.}$, il faut et il suffit que la suite des polynômes de base, une fois le coefficient de z^n ramené à l'unité dans chaque polynôme, satisfasse à une condition de régularité semblable à celle qui intervient dans la théorie de l'interpolation : la racine $n^{\text{ième}}$ du module du $n^{\text{ième}}$ polynôme doit avoir une limite pour n infini, lorsque le point z est extérieur à la courbe C . D'ailleurs, si l'on prend la racine $n^{\text{ième}}$ du polynôme lui-même au lieu de celle de son module, et si l'on choisit convenablement la détermination de cette racine, on a encore une limite dans les mêmes conditions.

Dans le cas où tous les zéros des polynômes de base sont sur un segment de droite, la condition précédente est équivalente à une autre condition concernant la distribution des zéros, qui exprime une certaine régularité de cette distribution : si chaque zéro est supposé pourvu d'une masse $\frac{1}{n}$, la fonction de masse ainsi obtenue doit avoir une limite pour n infini. Cette condition remplie, les courbes de convergence sont des courbes équipotentiellles relatives à cette fonction de masse limite.

La seconde Partie a pour but de généraliser ce résultat. Nous laissons aux zéros des polynômes de la suite la liberté d'être répartis dans tout le plan et nous assujettissons seulement le degré de $P_n(z)$ à ne pas croître plus rapidement que n . Nous disons que la distribution des zéros des polynômes de la suite est *régulière* si la fonction de masse définie plus haut a une limite pour n infini, et nous faisons une étude précise du comportement de $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$, ou de $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$, dans le cas où cette condition est satisfaite. Le résultat fondamental est le suivant :

Si les zéros des polynômes $P_n(z)$ ont une distribution régulière, on

peut trouver une suite de nombres α_n , et une fonction réelle $\Phi(z)$, telles que, pour toute suite partielle $P_{n_k}(z)$, on ait

$$\overline{\lim}_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{\alpha_{n_k}} \right| = \Phi(z),$$

sauf au plus sur un ensemble qui peut, quels que soient les nombres positifs α et ε , être recouvert par des cercles pour lesquels la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

La fonction $\Phi(z)$, déterminée à une constante près, peut être définie par une intégrale de Stieltjes formée à l'aide de la fonction limite des fonctions de masse déjà considérées, et à laquelle on peut donner des formes variables suivant les cas particuliers.

En dehors de l'ensemble dérivé de l'ensemble des zéros des polynomes $P_n(z)$, il y a convergence de $\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{\alpha_n} \right|$ vers $\Phi(z)$.

On déduit de là que les domaines de convergence des séries de la forme $\sum a_n P_n(z)$ dépendent encore d'un seul paramètre, à moins que l'on ne se trouve dans certains cas exceptionnels. Ils sont définis par une inégalité portant sur la fonction $\Phi(z)$.

Le théorème précédent admet une réciproque : si l'on peut trouver une suite de nombres α_n et une fonction réelle $\Phi(z)$ telles que, pour toute suite partielle $P_{n_k}(z)$, on ait presque partout

$$\overline{\lim}_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{\alpha_{n_k}} \right| = \Phi(z),$$

la distribution des zéros des polynomes de la suite $P_n(z)$ est régulière. La connaissance de $\Phi(z)$ permet de préciser cette distribution.

Ceci permet d'étudier la distribution des zéros de certaines suites de polynomes, par exemple les polynomes-sections d'une série de Taylor, les polynomes définis par une relation de récurrence de Poincaré, certains polynomes définis à l'aide d'une fonction génératrice, etc.

Enfin, si l'ensemble dérivé de l'ensemble des zéros des polynomes $P_n(z)$ est de mesure nulle, la régularité de la distribution de ces zéros entraîne la même régularité pour les zéros de la suite dérivée, pourvu qu'il n'existe dans le plan aucun domaine où la fonction $\Phi(z)$ soit constante.

Je tiens à remercier ici M. P. Montel pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me donner pendant la préparation de ce travail. J'adresse aussi mes remerciements à M. G. Valiron, qui m'a fourni quelques renseignements précieux, et à M. G. Bouligand qui a bien voulu se joindre à MM. Montel et Valiron pour constituer le Jury. Mais je dois exprimer tout spécialement ma reconnaissance à M. Émile Picard qui a bien voulu faire insérer mon Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Domaine de convergence de certaines catégories de séries de polynomes.

Soit $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ une suite donnée de polynomes en z , dans laquelle chaque polynome est de degré égal à son indice. Nous supposons que l'ensemble \mathcal{E} des zéros de ces polynomes est borné et nous appelons C une courbe fermée contenant \mathcal{E} à son intérieur. Nous appellerons d'autre part A_n le coefficient de z^n dans $P_n(z)$, et $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ les zéros de $P_n(z)$, et nous poserons

$$\Pi_n(z) = [z - \alpha_1^{(n)}][z - \alpha_2^{(n)}] \dots [z - \alpha_n^{(n)}],$$

de sorte que

$$P_n(z) = A_n \Pi_n(z).$$

Nous nous proposons d'étudier les domaines de convergence des séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z).$$

Nous allons montrer que, si $\limsup \sqrt[n]{|a_n A_n|}$ est inférieur à une borne qui ne dépend que du contour C , la série proposée et les séries dérivées convergent à l'intérieur d'une courbe continue fermée Γ entourant C et divergent à l'extérieur, sans que l'on puisse rien dire de la convergence sur la courbe elle-même. La convergence est uniforme dans toute région ⁽¹⁾ entièrement intérieure à Γ .

(1) On appellera région l'ensemble formé par la réunion d'un « domaine » et de sa frontière.

D'après la règle de Cauchy la série converge si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} < 1$ et diverge si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} > 1$. Il revient au même de dire qu'il y a convergence si $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| < 0$ et qu'il y a divergence si $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| > 0$. Posons

$$u_n(z) = \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)|,$$

$$U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|,$$

de sorte que

$$u_n(z) = U_n(z) + \frac{1}{n} \log |a_n \Lambda_n|.$$

Soit C' une courbe fermée, entourant C de sorte que la distance de C' à C soit δ positif. Dans ces conditions, si z et z' sont tous les deux extérieurs à C' , on aura

$$(1) \quad |U_n(z') - U_n(z)| < \frac{|z' - z|}{\delta}.$$

On a en effet en général, par le théorème des accroissements finis.

$$\log x' - \log x = \frac{x' - x}{\xi},$$

ξ étant compris entre x et x' . Ici, comme $|z - \alpha_k^{(n)}| > \delta$ et $|z' - \alpha_k^{(n)}| > \delta$, on en déduit

$$\left| \frac{1}{n} \log |z' - \alpha_k^{(n)}| - \frac{1}{n} \log |z - \alpha_k^{(n)}| \right| < \frac{1}{n} \frac{||z' - \alpha_k^{(n)}| - |z - \alpha_k^{(n)}||}{\delta} < \frac{1}{n} \frac{|z' - z|}{\delta},$$

d'où par addition, en faisant successivement $k = 1, 2, \dots, n$, l'inégalité indiquée.

Supposons d'autre part que C soit intérieure à un cercle γ_0 de centre z_0 et de rayon r_0 . Si $r' > r > r_0$ on a

$$(2) \quad U_n(z_0 + r' e^{i\theta}) - U_n(z_0 + r e^{i\theta}) > \frac{r' - r}{r' + r_0}.$$

Cette dernière inégalité s'obtient aisément en appliquant le théorème des accroissements finis aux fonctions $\frac{1}{n} \log |z_0 + r e^{i\theta} - \alpha_k^{(n)}|$ et additionnant.

Enfin en posant $|z - z_0| = r$ on a, pour $r > r_0$,

$$\frac{1}{n} \log(r - r_0) < \frac{1}{n} \log |z - \alpha_k^{(n)}| < \frac{1}{n} \log(r + r_0),$$

d'où par addition

$$(3) \quad \log(r - r_0) < U_n(z) < \log(r + r_0).$$

Il est clair que les fonctions $u_n(z)$ satisfont aussi aux inégalités (1) et (2) : la première montre que la fonction $u(z) = \overline{\lim} u_n(z)$ est continue à l'extérieur de C (1), la seconde que, pour θ constant et $r > r_0$, $u(z_0 + re^{i\theta})$ est une fonction *croissante* de r ; plus précisément on peut affirmer que, pour $r' > r > r_0$,

$$(2') \quad u(z_0 + r'e^{i\theta}) - u(z_0 + re^{i\theta}) \geq \frac{r' - r}{r' + r_0}.$$

Quant aux inégalités (3), elles donnent

$$(4) \quad \log(r - r_0) + \overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n A_n| \leq u(z) \leq \log(r + r_0) + \overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n A_n|.$$

Posons alors $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} = \lambda$ et supposons $\lambda < \frac{1}{2r_0}$, de sorte que $\frac{1}{\lambda} - r_0 > r_0$. Les inégalités (4) montrent que l'on a

$$u(z) \leq 0 \quad \text{pour } r = \frac{1}{\lambda} - r_0$$

et

$$u(z) \geq 0 \quad \text{pour } r = \frac{1}{\lambda} + r_0.$$

Il résulte de là que, pour chaque valeur de θ , il existe une valeur de r et une seule supérieure à r_0 pour laquelle $u(z_0 + re^{i\theta}) = 0$. Soit $f(\theta)$ cette valeur; on a

$$\frac{1}{\lambda} - r_0 \leq f(\theta) \leq \frac{1}{\lambda} + r_0,$$

et de plus, $u(z_0 + re^{i\theta})$ étant une fonction *continue* de r et θ croissante par rapport à r , $f(\theta)$ est une fonction continue de θ .

(1) On peut même remarquer que $u(z)$ est sous-harmonique.

Quand θ varie, le point $z_0 + f(\theta)e^{i\theta}$ décrit une courbe continue fermée Γ entourant γ_0 et comprise entre les cercles de centre z_0 et de rayons respectifs $\frac{1}{\lambda} - r_0$ et $\frac{1}{\lambda} + r_0$. A l'extérieur de Γ on a $u(z) > 0$, et entre Γ et γ_0 on a $u(z) < 0$. Par suite, la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est *divergente à l'extérieur de Γ et convergente entre Γ et γ_0* . Notre raisonnement n'indique rien sur la convergence dans γ_0 , mais nous allons montrer qu'il y a convergence uniforme dans toute région (D) intérieure à la courbe Γ .

Soit en effet Γ_1 la courbe définie comme lieu du point

$$z_0 + [f(\theta) - \varepsilon] e^{i\theta}, \quad \text{où } 0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda} - 2r_0.$$

Γ_1 est entièrement extérieure à γ_0 et, si ε est assez petit, elle contiendra à son intérieur la région D donnée. En faisant $r' = f(\theta)$, $r = f(\theta) - \varepsilon$, l'inégalité (2') donne

$$u(z_0 + r e^{i\theta}) \leq - \frac{\varepsilon}{r_0 + f(\theta)}.$$

Par suite, la fonction $u(z)$ a sur Γ_1 un maximum négatif $-\eta$. De plus il résulte de l'égalité de continuité des fonctions $u_n(z)$ sur Γ_1 que l'on peut trouver un entier N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne pour tout point z de Γ_1 ,

$$u_n(z) \leq u(z) + \frac{\eta}{2} \leq - \frac{\eta}{2},$$

c'est-à-dire

$$|a_n P_n(z)| \leq e^{-n \frac{\eta}{2}}.$$

La série $\Sigma a_n P_n(z)$ est donc uniformément convergente sur Γ_1 et par suite à son intérieur, et en particulier dans D.

Il en résulte d'ailleurs que la série dérivée $\Sigma a_n P'_n(z)$ converge aussi à l'intérieur de Γ . Mais cette série est du même type que la série $\Sigma a_n P_n(z)$, car tous les zéros de $P'_n(z)$ sont intérieurs au plus petit domaine convexe entourant le contour C; domaine lui aussi évidemment intérieur au cercle γ_0 . Si l'on voulait refaire sur la nouvelle série la même théorie que sur la précédente, l'expression $a_n A_n$ devrait être remplacée par $(n+1)a_{n+1} A_{n+1}$. Mais

$$\lim \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1} A_{n+1}|} = \lim \sqrt[n]{|a_n A_n|} = \lambda;$$

λ étant supposé inférieur à $\frac{1}{2r_0}$, on peut affirmer l'existence d'une courbe continue fermée Γ' entourant γ_0 , rencontrée en un seul point par toute demi-droite issue du point z_0 , et telle que la série converge uniformément dans tout domaine entièrement intérieur à Γ' et diverge à l'extérieur de Γ' .

Puisque la série $\Sigma a_n P'_n(z)$ converge à l'intérieur de Γ , aucun point intérieur à Γ ne peut être extérieur à Γ' . De même aucun point intérieur à Γ' ne peut être extérieur à Γ . En effet, si z est intérieur à Γ' , la série $\Sigma a_n P'_n(z)$ est uniformément convergente sur le segment $z_0 z$ entièrement intérieur à Γ' et, par intégration, on en déduit la convergence de $\Sigma a_n [P_n(z) - P_n(z_0)]$ et par suite de $\Sigma a_n P_n(z)$.

Si donc une demi-droite issue de z_0 coupe les courbes Γ et Γ' respectivement aux points z_1 et z_2 , ces points sont nécessairement confondus; sinon, le milieu du segment $z_1 z_2$, par exemple, serait intérieur à une des courbes et extérieur à l'autre. *Les courbes Γ et Γ' sont donc confondues.*

Un autre raisonnement que l'on aurait pu faire est le suivant : on a

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \alpha_k^{(n)}}.$$

Les points $\alpha_k^{(n)}$ étant tous intérieurs au cercle γ_0 de centre z_0 et de rayon r_0 , les points $\alpha_k^{(n)} - z$ sont intérieurs au cercle γ_1 déduit de celui-ci par la translation $-z$. Si z est supposé extérieur à γ_0 , l'origine est extérieure à γ_1 et les points $\frac{1}{\alpha_k^{(n)} - z}$ sont intérieurs au cercle transformé de γ_1 par la transformation $Z = \frac{1}{z}$. Ce dernier cercle est un cercle de centre z'_0 et de rayon r'_0 tels que $r'_0 < |z'_0|$. On a donc

$$\left| \frac{1}{\alpha_k^{(n)} - z} - z'_0 \right| < r'_0,$$

d'où, par addition,

$$\left| -\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} - n z'_0 \right| < n r'_0,$$

d'où

$$n[|z'_0| - r'_0] < \left| \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} \right| < n[|z'_0| + r'_0].$$

Il en résulte immédiatement qu'à l'extérieur de γ_0 on a

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n P'_n(z)|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} = u(z).$$

Par suite, la série $\Sigma a_n P'_n(z)$ diverge à l'extérieur de Γ et converge entre Γ et γ_0 . Le premier point nous suffit d'ailleurs puisque l'on savait déjà qu'il y a convergence dans Γ .

Remarquons d'autre part qu'en répétant l'un des deux raisonnements qui précèdent, on verrait que toutes les séries dérivées de $\Sigma a_n P_n(z)$ convergent uniformément à l'intérieur de Γ et divergent à l'extérieur.

II. — Condition de réduction pour la famille des courbes Γ .

A chaque série $\Sigma a_n P_n(z)$ pour laquelle on a l'inégalité

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < \frac{1}{2r_0}$$

correspond une courbe Γ à l'intérieur de laquelle elle est convergente tandis qu'elle diverge à l'extérieur. *A priori*, rien n'indique que, lorsque les coefficients a_n varient en restant assujettis à la condition précédente, la famille des courbes Γ obtenues doive être simple.

A titre d'exemple considérons la suite de polynômes $P_n(z)$ définie de la façon suivante : p étant la racine carrée à une unité près par défaut de n , et q étant le reste, prenons

$$P_n(z) = \left[z - \frac{2(q-p)-1}{2p+1} \right]^n = (z - \zeta_n)^n.$$

On voit immédiatement que l'ensemble \mathcal{E} est situé sur le segment $(-1, +1)$. La série $\Sigma a_n P_n(z)$ admet donc une courbe de convergence pourvu que $\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2}$, car on peut prendre pour γ_0 le cercle $|z| = 1 + \alpha$, α étant positif mais aussi petit que l'on veut.

Cela étant, soit $f(x)$ une fonction positive définie sur un ensemble A situé sur le segment $(-1, +1)$. Prenons $a_n = 0$ si aucun point de A ne satisfait à $\zeta_n \leq x \leq \zeta_n + \frac{2}{2p+1}$, et $a_n = \frac{f(x)}{m^n}$, m étant le minimum

de $f(x)$ pour les points de A satisfaisant à ces inégalités, dans le cas contraire. Pour assurer la condition $\lambda < \frac{1}{2}$ il suffit d'ailleurs de prendre $f(x) > 2$. Mais, que l'on ait ou non $f(x) > 2$, la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est convergente à l'intérieur du domaine Ω formé des points communs à tous les cercles $|z - x| \leq f(x)$ et divergente à l'extérieur.

En effet, si z est *intérieure* à ce domaine, et si α est un nombre positif assez petit, le cercle de centre z et de rayon α est entièrement constitué de points intérieurs; autrement dit on a

$$f(x) \geq |z - x| + \alpha.$$

Le minimum de $|z - x|$ dans l'intervalle $(\zeta_n, \zeta_n + \frac{2}{2p+1})$ est supérieur à $|z - \zeta_n| - \frac{2}{2p+1}$, et par suite à $|z - \zeta_n| - \frac{\alpha}{2}$ dès que n dépasse une certaine valeur. On en déduit que a_n ou bien est nul, ou bien est réel positif et plus petit que $\frac{1}{\left[|z - \zeta_n| + \frac{\alpha}{2}\right]^n}$, auquel cas

$$\sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} < \frac{|z - \zeta_n|}{|z - \zeta_n| + \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{d}{d + \frac{\alpha}{2}},$$

d étant le plus grand des nombres $|z - 1|$ et $|z + 1|$. La série $\Sigma a_n P_n(z)$ est donc convergente.

Si au contraire z est extérieure au domaine Ω considéré, c'est qu'il existe sur le segment $(-1, +1)$ un point x_0 tel que $f(x_0) < |z - x_0|$. Or il existe une suite indéfinie de valeurs de n pour lesquelles x_0 est compris dans l'intervalle fermé $(\zeta_n, \zeta_n + \frac{2}{2p+1})$. Pour ces valeurs $m \leq f(x_0) < |z - x_0|$ et $|z - \zeta_n|$ tend vers $|z - x_0|$, de sorte qu'à partir d'un certain moment $\sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} = \frac{|z - \zeta_n|}{m}$ est supérieur à 1; par suite la série $\Sigma a_n P_n(z)$ diverge.

Si l'on prend pour A les points -1 et $+1$ avec $f(-1) = a$ et $f(+1) = b$, Ω se composera de la partie commune aux deux cercles

$|z + 1| \leq a$, $|z - 1| \leq b$. On peut aussi prendre d'autres centres sur le segment $(-1, +1)$, ou bien prendre plus de deux cercles.

Si l'on prend $f(x) = \sqrt{hx^2 + k}$, avec $h > 1$ et $0 < k \leq h(h-1)$, sur tout le segment $(-1, +1)$, on obtient l'intérieur de l'ellipse

$$hx^2 + (h-1)y^2 - k(h-1) = 0.$$

Si, avec la même formule, on a $k > h(h-1)$, Ω sera limité par une courbe formée de deux arcs de l'ellipse donnée par l'équation précédente se raccordant avec deux arcs de cercle de centres -1 et $+1$.

En prenant $f(x) = \sqrt{hx^2 + k} + l$ on aurait des domaines limités par des courbes parallèles aux précédentes.

Dans chaque cas on pourra choisir les paramètres de façon que $f(x) > 2$.

On pourrait multiplier les exemples en prenant des fonctions plus compliquées. On aperçoit donc sur cette suite particulière de polynômes toute la variété que peuvent présenter les courbes Γ lorsque les coefficients a_n varient en restant assujettis à la condition

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < \frac{1}{2r_0}.$$

Nous allons montrer que, pour que l'ensemble de toutes ces courbes se réduise à une seule famille d'équation $F(x, y) = \text{const.}$, il faut et il suffit que la suite des fonctions $U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$, ou, ce qui revient au même, celle des fonctions $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$, soit convergente à l'extérieur de C .

D'abord la condition est suffisante car, si $U_n(z)$ converge vers $U(z)$, on a évidemment

$$u(z) = U(z) + \log \lambda,$$

de sorte que Γ a pour équation

$$U(z) = -\log \lambda.$$

Les inégalités (3) entraînent

$$\log(r - r_0) \leq U(z) \leq \log(r + r_0).$$

Il en résulte que, lorsque λ varie de $\frac{1}{2r_0}$ à 0, il se trouve une courbe Γ passant par chaque point extérieur au cercle de centre z_0 et de rayon $3r_0$, car si $r > 3r_0$ on a

$$U(z) > \log 2r_0.$$

Nous allons montrer que non seulement la condition indiquée est nécessaire, mais même une condition plus précise : la fonction $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$ admet n déterminations uniformes à l'extérieur de C ; l'une d'elles est équivalente à z au voisinage de l'infini; nous conviendrons que c'est celle-là que représente le symbole $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$. *Il faut que cette détermination soit convergente à l'extérieur de C .*

Soit en effet z_1 un point intérieur au contour C et posons

$$|z - z_1| = \rho \quad (1).$$

Considérons la fonction $V_n(z)$ définie à l'extérieur de C par

$$V_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left[1 - \frac{\alpha_k^{(n)} - z_1}{z - z_1} \right],$$

où chaque logarithme est pris avec la détermination nulle à l'infini. On voit que

$$\sqrt[n]{\Pi_n(z)} = (z - z_1) e^{V_n(z)}$$

et

$$U_n(z) = \log \rho + \mathcal{R}[V_n(z)],$$

la notation $\mathcal{R} [\]$ désignant la partie réelle de la quantité entre crochets.

Les fonctions $V_n(z)$ sont régulières à l'extérieur de C , point à l'infini compris, et nulles à l'infini. De plus leur ensemble forme une famille normale à l'extérieur de C , car elles sont bornées à l'extérieur de toute courbe C' entourant C sans la toucher. Posons en effet

$$z = z_1 + \frac{1}{z'}$$

(1) Nous avons introduit un nouveau point z_1 , parce que z_0 n'est pas nécessairement intérieur à C .

de sorte que

$$V_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log[1 - (\alpha_k^{(n)} - z_1) z'].$$

Quand z décrit l'extérieur de C' , z' décrit l'intérieur de la transformée de C' , c'est-à-dire d'une courbe C'' intérieure à la transformée de C . La fonction des deux variables α et z' :

$$\log[1 - (\alpha - z_1) z'] \quad (\text{nulle pour } z' = 0)$$

est régulière quand α est intérieur à C ou sur C et z' intérieur à C'' ou sur C'' . Elle est donc bornée en module dans ce domaine par un nombre positif M . On en déduit immédiatement que pour z extérieur à C' on a

$$|V_n(z)| < M.$$

Supposons donc que la suite $V_n(z)$ ne soit pas convergente. On pourrait alors en extraire deux suites partielles $V_{n_k}(z)$ et $V_{n'_k}(z)$ convergeant respectivement vers deux fonctions différentes $V^{(1)}(z)$ et $V^{(2)}(z)$. La différence $V^{(1)}(z) - V^{(2)}(z)$ ne serait d'ailleurs pas constante puisqu'elle est nulle à l'infini. Nous pourrions alors définir deux séries $\Sigma a_n P_n(z)$ de la façon suivante : pour la première

$$a_n = 0 \quad \text{pour } n \neq n_k \quad \text{et} \quad |a_{n_k}| = \frac{\lambda_{n_k}}{|A_{n_k}|} \quad \left(\text{avec } \lambda < \frac{1}{2r_0}\right);$$

pour la seconde

$$a_n = 0 \quad \text{pour } n \neq n'_k \quad \text{et} \quad |a_{n'_k}| = \frac{\lambda'_{n'_k}}{|A_{n'_k}|} \quad \left(\text{avec } \lambda' < \frac{1}{2r_0}\right).$$

Il est clair que les fonctions $u(z)$ relatives à ces deux séries seraient respectivement

$$\log \rho + \mathcal{R}[V^{(1)}(z)] + \log \lambda$$

et

$$\log \rho + \mathcal{R}[V^{(2)}(z)] + \log \lambda',$$

ce qui donnerait deux familles de courbes Γ :

$$\log \rho + \mathcal{R}[V^{(1)}(z)] = -\log \lambda,$$

$$\log \rho + \mathcal{R}[V^{(2)}(z)] = -\log \lambda'.$$

Par tout point extérieur au cercle de centre z_0 et de rayon $3r_0$ il

passerait une courbe de chaque famille. Mais il est impossible qu'une courbe de la première famille coïncide avec une courbe de la deuxième. En effet dans ce cas la fonction $\mathcal{R}[V^{(1)}(z) - V^{(2)}(z)]$ harmonique et régulière à l'extérieur de C , point à l'infini compris, devrait être constante sur la courbe commune et par suite partout, ce qui devrait entraîner la constance de $V^{(1)}(z) - V^{(2)}(z)$.

Les courbes Γ relatives à toutes les séries $\Sigma a_n P_n(z)$ assujetties à la condition $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < \frac{1}{2r_0}$ ne peuvent donc se réduire à une famille unique d'équation $F(x, y) = \text{const.}$ sans que la suite $V_n(z)$ soit convergente, et par suite aussi la suite $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$.

Remarques. — 1. La condition précédente étant supposée satisfaite, la fonction $V(z)$ limite de $V_n(z)$ est régulière à l'extérieur de C , point à l'infini compris, et il en est de même de $e^{V(z)}$; la limite de $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$, qui vaut évidemment $\varphi(z) = (z - z_1)e^{V(z)}$, est donc holomorphe à l'extérieur de C mais admet comme pôle le point à l'infini, au voisinage duquel elle a un développement de la forme

$$\varphi(z) = z + p_0 + \frac{p_1}{z} + \dots + \frac{p_k}{z^k} + \dots$$

La fonction $U_n(z)$ est, elle, convergente à l'extérieur de C vers

$$\begin{aligned} U(z) &= \log \rho + \mathcal{R}[V(z)] \\ &= \log \rho + \text{fonction harmonique régulière à l'extérieur de } C, \\ &\quad \text{point à l'infini compris, et nulle à l'infini.} \end{aligned}$$

Si les zéros des polynômes $P_n(z)$ sont non seulement intérieurs à la courbe fermée C mais intérieurs chacun à l'une au moins des courbes fermées C_1, C_2, \dots, C_p , elles-mêmes intérieures à C , le prolongement à l'intérieur de C de la détermination que nous avons choisie pour $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$ n'est plus uniforme à l'extérieur de C_1, C_2, \dots, C_p ; mais, si l'on entoure chaque courbe C_k d'une courbe C'_k qui ne la touche pas, les fonctions harmoniques $U_n(z)$ sont également continues à l'extérieur des courbes C'_1, C'_2, \dots, C'_p (on le voit exactement comme on l'a vu pour une courbe C' entourant C). Elles forment donc une famille normale dans tout domaine borné extérieur à ces courbes

et par suite elles convergent encore dans la région comprise entre C et C_1, C_2, \dots, C_p vers une fonction qui est le prolongement de $U(z)$ dans cette région. Le logarithme des différentes déterminations de $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$ ayant pour partie réelle $U_n(z)$, le prolongement par un chemin déterminé de la détermination que nous avons choisie à l'extérieur de C est encore convergent dans la même région vers le prolongement de $\varphi(z)$. Mais cette fonction n'est pas uniforme.

Prenons par exemple

$$P_n(z) = [(z-1)^p - r_1^p \cos^p p\theta][(z+1)^p - r_2^p \sin^p p\theta] \quad \text{pour } n = 2p,$$

et

$$P_n(z) = [(z-1)^{p+1} - r_1^{p+1} \cos^{p+1}(p+1)\theta][(z+1)^p - r_2^p \sin^p p\theta] \quad \text{pour } n = 2p+1,$$

θ étant un arc incommensurable avec π , et $r_1 + r_2$ étant inférieur à 2. L'ensemble \mathcal{E} est alors contenu dans les cercles $|z-1| \leq r_1$ et $|z+1| \leq r_2$, que nous appellerons C_1 et C_2 . On voit immédiatement qu'à l'extérieur de C_1 et C_2 la fonction $U_n(z)$ tend vers

$$U(z) = \frac{1}{2} \log |z^2 - 1|.$$

A l'extérieur d'une courbe fermée C entourant C_1 et C_2 on peut choisir la détermination de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ équivalente à z pour z infini : elle converge vers la détermination de $\sqrt{z^2 - 1}$ équivalente à z pour z infini. Si l'on prolonge la détermination choisie à travers C, le prolongement a une limite qui est le prolongement de la détermination de $\sqrt{z^2 - 1}$ que l'on vient de définir.

2. Les fonctions $U_n(z)$ formant une famille normale dans tout domaine borné *extérieur* à C ou aux courbes C_1, C_2, \dots, C_p qui contiennent tous les zéros des $P_n(z)$, leur convergence vers $U(z)$ y est uniforme. D'ailleurs la convergence dans une aire, si petite soit-elle, extérieure à C entraîne la convergence partout à l'extérieur de C.

Pour la même raison la convergence de $V_n(z)$ est uniforme dans tout domaine borné entièrement extérieur à C et l'on en déduit qu'il en est de même de la convergence de $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$ vers $\varphi(z)$. On a en effet

$$\sqrt[n]{\Pi_n(z)} - \varphi(z) = (z - z_1) [e^{V_n(z)} - e^{V(z)}] = (z - z_1) e^{V(z)} [e^{V_n(z) - V(z)} - 1].$$

Si R et A désignent les maxima respectifs de $|z - z_1|$ et $\mathcal{R}[V(z)]$ dans le domaine considéré, dès que n est assez grand pour que l'inégalité $|V_n(z) - V(z)| < \varepsilon$ y soit satisfaite, on a dans ce domaine

$$|\sqrt[n]{\Pi_n(z)} - \varphi(z)| < R e^\lambda (e^\varepsilon - 1),$$

et le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant ε assez petit.

3. Même si l'on n'a pas $\lambda < \frac{1}{2r_0}$, comme nous le supposons précédemment, la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est convergente à l'intérieur de la courbe Γ_λ d'équation

$$U(z) = -\log \lambda \quad \text{ou} \quad |\varphi(z)| = \frac{1}{\lambda}$$

et divergente à l'extérieur pourvu seulement que cette courbe soit extérieure à C , ou aux courbes C_1, C_2, \dots, C_p qui contiennent tous les zéros de $P_n(z)$, s'il en existe, auquel cas elle peut se composer de plusieurs arcs fermés.

En effet $U(z)$ tend vers $+\infty$ à l'infini et admet par suite dans le domaine extérieur à Γ_λ un minimum qui ne peut être atteint que sur cette courbe. On a donc à l'extérieur de Γ_λ

$$U(z) > -\log \lambda \quad \text{ou} \quad u(z) = U(z) + \log \lambda > 0.$$

D'autre part à l'intérieur de Γ_λ chaque fonction $U_n(z)$ est inférieure à son maximum sur Γ_λ . Comme sur Γ_λ $U_n(z)$ converge uniformément vers $-\log \lambda$, on a à la limite en tout point intérieur à Γ_λ et où $U_n(z)$ tend vers $U(z)$

$$U(z) \leq -\log \lambda.$$

Donc, dans le domaine compris entre Γ_λ et une courbe C' intérieure à celle-ci mais entourant C , ou des courbes C'_1, C'_2, \dots, C'_p entourant C_1, C_2, \dots, C_p , la fonction harmonique $U(z)$ a pour maximum $-\log \lambda$, maximum qu'elle ne peut atteindre que sur Γ_λ puisqu'elle n'est pas constante. Par suite sur toute courbe intérieure à Γ_λ , mais aussi voisine d'elle que l'on voudra, $u(z) = U(z) + \log \lambda$ aura un maximum négatif $-\eta$, et l'on démontrera comme au Chapitre I que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est *uniformément convergente* à son intérieur.

Si l'on reprend l'exemple donné plus haut à propos de la Remarque 1, on voit que r_0 doit être au moins égal à $1 + \frac{r_1 + r_2}{2}$. Mais en fait, si l'on suppose $r_1 > r_2$ par exemple, il suffit que l'on ait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda < \frac{1}{\sqrt{2r_1 + r_1^2}}$$

pour que la courbe Γ_λ soit extérieure aux cercles C_1 et C_2 et par suite pour que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ soit uniformément convergente à l'intérieur de cette courbe et divergente à l'extérieur. Or $\frac{1}{\sqrt{2r_1 + r_1^2}}$ est supérieur à $\frac{1}{2r_0} = \frac{1}{2 + r_1 + r_2}$.

La courbe Γ_λ se composera d'un seul arc fermé si $\lambda < 1$ et de deux arcs entourant chacun un des cercles C_1 et C_2 si $\lambda > 1$, ce qui sera possible si $r_1 < \sqrt{2} - 1$.

Si l'on n'a pas $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2r_1 + r_1^2}}$ la courbe Γ_λ d'équation $\sqrt{|z^2 - 1|} = \frac{1}{\lambda}$ rencontrera au moins le cercle C_1 . On aura bien

$$u(z) = \frac{1}{2} \log |z^2 - 1| + \log \lambda < 0$$

dans le domaine intérieur à Γ_λ et extérieur aux cercles C_1 et C_2 , mais $u(z)$ pourra prendre des valeurs variées à l'intérieur de ces cercles, de sorte que l'on ne pourra pas déduire le domaine de convergence de la série $\Sigma a_n P_n(z)$ de la seule connaissance de λ . Par exemple, si l'on a $a_n = \lambda^n$ pour une suite de valeurs de n telles que $p\theta = 2k\pi + \theta_0 + \varepsilon_n$, avec k entier et ε_n infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, et $a_n = 0$ pour les autres valeurs de n , on voit aisément que l'on aura

$$u(z) = \frac{1}{2} \log |z^2 - 1| + \log \lambda \quad \text{pour } r_1 \cos \theta_0 < |z - 1| \leq r_1,$$

$$\text{et pour } r_2 \sin \theta_0 < |z + 1| \leq r_2,$$

$$u(z) = \frac{1}{2} \log |z + 1| + \log \lambda \quad \text{pour } |z - 1| < r_1 \cos \theta_0,$$

et

$$u(z) = \frac{1}{2} \log |z - 1| + \log \lambda \quad \text{pour } |z + 1| < r_2 \sin \theta_0.$$

Ici $u(z)$ dépend d'un seul paramètre θ_0 autre que λ ; mais c'est un exemple particulièrement simple.

4. $U(z)$ est à une constante près la fonction de Green du point à l'infini pour la courbe Γ_λ , et, lorsque Γ_λ se compose d'un seul arc de courbe fermé, la transformation $t = \varphi(z)$ donne la représentation conforme de l'extérieur de Γ_λ sur l'extérieur du cercle $|t| = \frac{1}{\lambda}$, les points à l'infini se correspondant.

Ceci a lieu en particulier, en vertu du Chapitre I, lorsque $\lambda < \frac{1}{2r_0}$, et l'on en déduit que, si la fonction inverse de $t = \varphi(z)$ est

$$z = t + H\left(\frac{1}{t}\right),$$

le rayon d'holomorphie de la fonction $H(x)$ est au moins égal à $\frac{1}{2r_0}$.

5. Comme les zéros des polynômes dérivés $P'_n(z)$ sont tous intérieurs au plus petit domaine convexe contenant C à son intérieur et comme, si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < \frac{1}{2r_0}$, la série dérivée $\Sigma a_n P'_n(z)$ admet toujours la même courbe de convergence que $\Sigma a_n P_n(z)$, on voit que si $\sqrt[n]{\overline{\Pi}_n(z)}$ converge à l'extérieur de C il en est de même de $\sqrt[n-1]{\frac{P'_n(z)}{n A_n}}$ à l'extérieur du domaine convexe considéré. La limite est d'ailleurs égale à $\varphi(z)$ car il existe une seule fonction admettant au voisinage de l'infini un développement de la forme

$$f(z) = z + p_0 + \frac{p_1}{z} + \dots + \frac{p_k}{z^k} + \dots$$

et telle que la famille des courbes $|f(z)| = \text{const.}$ soit une famille donnée.

Avec l'exemple qui nous a servi jusqu'ici, on a

$$P'_n(z) = p[2z(z^2 - 1)^{p-1} - r_1^n (z + 1)^{p-1} \cos^p p\theta - r_2^n (z - 1)^{p-1} \sin^p p\theta]$$

pour

$$n = 2p,$$

et

$$P'_n(z) = [(2p + 1)z^2 - 2pz - 1][z^2 - 1]^{p-1} - pr_1^{p+1} (z + 1)^{p-1} \cos^{p+1} (p + 1)\theta - (p + 1)r_2^p (z - 1)^p \sin^p p\theta$$

pour

$$n = 2p + 1.$$

On peut affirmer que $P'_n(z)$ a tous ses zéros dans le plus grand domaine limité par les circonférences $|z - 1| = r_1$, $|z + 1| = r_2$ et leurs tangentes communes, et que, à l'extérieur de ce domaine, la détermination de $\sqrt[n-1]{\frac{P'_n(z)}{n}}$ équivalente à z pour z infini converge vers la détermination de $\sqrt{z^2 - 1}$ réelle et positive pour z réel plus grand que 1. Ceci se vérifierait aisément sur les formules ci-dessus.

6. La condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ converge à l'extérieur de C est qu'il en soit ainsi de $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ et que $\sqrt[n]{|A_n|}$ ait une limite.

Il est évident que la condition est suffisante. Elle est aussi nécessaire, car si $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ converge vers $\Phi(z)$ il est clair que les courbes Γ ont pour équation $\Phi(z) = \text{const.}$ et par suite il faut que $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ converge; alors la suite $\sqrt[n]{|A_n|} = \frac{\sqrt[n]{|P_n(z)|}}{\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}}$ est aussi convergente.

Si k est le logarithme de la limite de $\sqrt[n]{|A_n|}$, on a

$$\log \Phi(z) = U(z) + k$$

et, comme à l'infini $U(z) - \log |z| = 0$, on voit que k est la valeur que prend la fonction $\log \Phi(z) - \log |z|$ à l'infini.

Par suite les limites de $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ et $\sqrt[n]{|A_n|}$ sont entièrement déterminées par la connaissance de la limite de $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$. De plus on voit immédiatement qu'à deux limites de $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ différant par un facteur constant correspond la même limite pour $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$.

7. Si, $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ convergeant à l'extérieur de C , on suppose non seulement que $\sqrt[n]{|A_n|}$ ait une limite mais que $A_n = (A + \varepsilon_n)^n$, ε_n étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, alors la détermination de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ qui est équivalente à $(A + \varepsilon_n)z$ pour z infini converge évidemment vers $A\varphi(z)$, car elle vaut $(A + \varepsilon_n)\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$.

Réciproquement, si l'une des déterminations de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ est convergente à l'extérieur de C , $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ est convergente et, d'après la remarque précédente, $\sqrt[n]{|A_n|}$ a une limite et $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ est convergente.

Alors $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$ converge vers $\varphi(z)$. Mais chaque détermination de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ est de la forme

$$\sqrt[n]{A_n} \sqrt[n]{\Pi_n(z)},$$

le premier facteur étant l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de A_n . Le second facteur ayant pour limite $\varphi(z)$, à la détermination de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ qui a une limite correspond une racine $n^{\text{ième}}$ de A_n qui a une limite A . On a donc $A_n = (A + \varepsilon_n)^n$.

Au voisinage de l'infini la limite $\varphi_1(z)$ de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ a pour développement

$$\varphi_1(z) = \Lambda \varphi(z) = \Lambda z + \Lambda p_0 + \frac{\Lambda p_1}{z} + \dots$$

Si donc on connaît $\varphi_1(z)$ on en déduit immédiatement A et $\varphi(z)$. Car, si au voisinage de l'infini

$$\varphi_1(z) = qz + q_0 + \frac{q_1}{z} + \dots,$$

on a

$$\Lambda = q \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\Lambda} = \frac{\varphi_1(z)}{q}.$$

Les polynômes de Faber, les polynômes de Tchebytscheff, les polynômes orthogonaux de Szegö ou de Carleman fournissent des exemples de suites telles que celles que nous venons d'envisager.

8. Il est évident que tout ce qui précède s'applique aussi bien à des suites de polynômes $P_n(z)$ où il n'y aurait pas de polynômes de tous les degrés mais où n prendrait seulement une certaine série de valeurs entières.

De même dans toute la suite de ce travail tous les théorèmes concernant des suites de polynômes $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ s'appliqueront aussi bien si l'indice n ne prend pas toutes les valeurs entières.

III. — Tous les zéros des polynômes $P_n(z)$ sont sur un même segment de droite.

Un cas particulièrement simple est celui où tous les zéros des polynômes $P_n(z)$ sont sur un segment de droite. On peut toujours être

ramené, par un changement de variable linéaire, au cas où ce segment est sur l'axe réel. Nous supposons donc que tous les zéros de $P_n(z)$ sont réels et satisfont aux inégalités

$$a \leq \alpha_k^{(n)} \leq b \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

On pourra prendre pour C par exemple une ellipse de foyers a et b aussi aplatie que l'on voudra. Elle pourra être intérieure au cercle de centre $z_0 = \frac{a+b}{2}$ et de rayon r_0 pourvu que $r_0 > \frac{b-a}{2}$. Par conséquent à chaque série $\sum a_n P_n(z)$ assujettie à la condition

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < \frac{1}{b-a}$$

correspond une courbe continue fermée Γ entourant le segment (a, b) et telle que la série converge à l'intérieur et diverge à l'extérieur de Γ , ainsi que la série dérivée. Pour que l'ensemble des courbes Γ forme une famille d'équation $F(x, y) = \text{const.}$, il faut et il suffit que les fonctions $U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ convergent à l'extérieur du segment (a, b) .

Nous allons montrer maintenant que cette condition est équivalente à une autre condition concernant la distribution des zéros des polynômes $P_n(z)$ sur le segment (a, b) .

Soit $\psi_n(e)$ la fonction d'ensemble ⁽¹⁾ définie sur l'axe réel comme le quotient par n du nombre de zéros de $P_n(z)$ appartenant à l'ensemble e , chacun de ces zéros étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Nous allons établir le théorème suivant :

Pour que la suite des fonctions $U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ converge à l'extérieur du segment (a, b) , il faut et il suffit que la suite des fonctions $\psi_n(e)$ soit convergente. $\psi(e)$ étant la limite de $\psi_n(e)$, la limite de $U_n(z)$ est

$$U(z) = \int_{(a,b)} \log r \, d\psi(e),$$

⁽¹⁾ Pour les fonctions d'ensemble voir De la Vallée Poussin : *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, et *Annales, I. II. P.*, vol. 2, 1932, Note 1, p. 213.

où (a, b) désigne le segment fermé (a, b) et r la distance du point z à un point variable sur ce segment.

Il est clair que la fonction $\psi(e)$ est non négative, nulle pour tout ensemble de l'axe réel sans point commun avec le segment (a, b) , et qu'elle prend la valeur 1 pour l'ensemble formé par tous les points de ce segment.

1. *La condition est suffisante.* — Supposons-la satisfaite. Partageons l'intervalle (a, b) en p intervalles partiels par des points de subdivision que nous aurons soin de choisir en dehors des points de discontinuité de $\psi(e)$. Désignons par e_i l'ensemble formé par les points intérieurs au $i^{\text{ème}}$ intervalle à partir de la gauche et son extrémité gauche, pour $i = 1, 2, \dots, p-1$, et par e_p l'ensemble des points du $p^{\text{ème}}$ intervalle et de ses deux extrémités, de sorte que e_1, e_2, \dots, e_p sont sans points communs et que leur somme est le segment fermé (a, b) . Soient M_i et m_i le maximum et le minimum de $\log |z - x|$ quand x décrit e_i . On a

$$\sum m_i \psi(e_i) \leq \int_{(a,b)} \log r d\psi(e) \leq \sum M_i \psi(e_i).$$

Quel que soit le nombre positif ε donné à l'avance, si l'on prend les e_i assez petits pour que $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$, on a

$$\sum M_i \psi(e_i) - \sum m_i \psi(e_i) = \sum (M_i - m_i) \psi(e_i) < \frac{\varepsilon}{2} \sum \psi(e_i) = \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où il résulte

$$\int_{(a,b)} \log r d\psi(e) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum m_i \psi(e_i) \leq \sum M_i \psi(e_i) < \int_{(a,b)} \log r d\psi(e) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les e_i étant fixés on peut trouver un entier N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne

$$|\sum m_i \psi_n(e_i) - \sum m_i \psi(e_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|\sum M_i \psi_n(e_i) - \sum M_i \psi(e_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

puisque la fonction $\psi_n(e)$ a pour limite $\psi(e)$. Alors, pour $n \geq N$, on a

$$\int_{(a,b)} \log r d\psi(e) - \varepsilon < \sum m_i \psi_n(e_i) \leq \sum M_i \psi_n(e_i) < \int_{(a,b)} \log r d\psi(e) + \varepsilon.$$

Mais pour chaque zéro $\alpha_k^{(n)}$ de $P_n(z)$ appartenant à e_i on a

$$\frac{1}{n} m_i \leq \frac{1}{n} \log |z - \alpha_k^{(n)}| \leq \frac{1}{n} M_i,$$

d'où par addition, en désignant par $\sum_{e_i} \log |z - \alpha_k^{(n)}|$ la somme $\sum \log |z - \alpha_k^{(n)}|$ étendue à tous les zéros appartenant à e_i ,

$$m_i \psi_n(e_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{e_i} \log |z - \alpha_k^{(n)}| \leq M_i \psi_n(e_i).$$

En faisant successivement $i = 1, 2, \dots, p$ et additionnant on a

$$\sum m_i \psi_n(e_i) \leq U(z) \leq \sum M_i \psi_n(e_i).$$

Par conséquent l'inégalité $n \geq N$ entraîne

$$\int_{(a,b)} \log r d\psi(e) - \varepsilon < U(z) < \int_{(a,b)} \log r d\psi(e) + \varepsilon.$$

2. *La condition est nécessaire.* — Remarquons d'abord que la famille des fonctions $\psi_n(e)$ est normale, puisque ces fonctions sont bornées dans leur ensemble. Si donc la suite $\psi_n(e)$ n'était pas convergente, on pourrait en extraire deux suites partielles $\psi_{n_k}(e)$ et $\psi_{n'_k}(e)$ convergeant vers deux fonctions différentes $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$. Les suites $U_{n_k}(z)$ et $U_{n'_k}(z)$ convergeraient respectivement en dehors du segment (a, b) , d'après ce qui précède, vers

$$U'(z) = \int_{(a,b)} \log r d\psi'(e)$$

et

$$U''(z) = \int_{(a,b)} \log r d\psi''(e).$$

Le fait que $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ seraient deux fonctions différentes entraînerait que $U'(z)$ et $U''(z)$ seraient aussi deux fonctions différentes, résultat incompatible avec la convergence de la suite $U_n(z)$. En effet

nous allons montrer que l'égalité

$$U(z) = \int_{(a,b)} \log r \, d\psi(e),$$

où $\psi(e)$ est une fonction nulle sur tout ensemble sans point commun avec le segment fermé (a, b) , mais non nécessairement supposée non négative, ne peut être satisfaite que pour une seule fonction $\psi(e)$ bien déterminée.

Soit a' un nombre réel inférieur à a et b' un nombre réel supérieur à b . Soit $\psi(x)$ la fonction à variation bornée définie sur le segment (a', b') comme égale à la valeur de $\psi(e)$ pour le segment fermé (a', x) . On sait que la connaissance de $\psi(x)$ est équivalente à celle de $\psi(e)$. De plus, la fonction $\psi(x)$ étant continue à droite, il suffit de connaître une fonction dont on soit assuré qu'elle lui est égale presque partout pour la connaître partout.

Or posons $z = \xi + i\eta$ et supposons $\eta > 0$. Nous allons montrer que pour toute valeur x_0 de x comprise entre a' et b' et où $\psi(x)$ est continue, donc partout dans l'intervalle (a', b') sauf au plus sur un ensemble dénombrable, on a

$$\psi(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta=0} \int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi.$$

On a d'abord

$$U(z) = \int_{a'}^{b'} \log |z - x| d\psi(x),$$

puis, par dérivation sous le signe \int ,

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \int_{a'}^{b'} \frac{\eta}{\eta^2 + (\xi - x)^2} d\psi(x).$$

En intégrant ensuite sous le signe \int on a

$$\int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = \int_{a'}^{b'} d\psi(x) \int_{a'}^{x_0} \frac{\eta d\xi}{\eta^2 + (\xi - x)^2}.$$

En appelant α un nombre réel supérieur à a' , mais inférieur à a et à x_0 , et en remarquant que $\psi(x)$ est constamment nulle entre a' et α , on peut aussi écrire

$$\int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = \int_{\alpha}^{b'} d\psi(x) \int_{a'}^{x_0} \frac{\eta d\xi}{\eta^2 + (\xi - x)^2}.$$

On a ensuite

$$\pi \psi(x_0) - \int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = \int_{\alpha}^{x_0} A(x) d\psi(x) + \int_{x_0}^b B(x) d\psi(x),$$

avec

$$A(x) = \pi - \int_{a'}^{x_0} \frac{\eta d\xi}{\eta^2 + (\xi - x)^2} = \text{Arctg} \frac{\eta}{x - a'} + \text{Arctg} \frac{\eta}{x_0 - x}$$

et

$$B(x) = - \int_{a'}^{x_0} \frac{\eta d\xi}{\eta^2 + (\xi - x)^2} = \text{Arctg} \frac{\eta}{x - a'} - \text{Arctg} \frac{\eta}{x - x_0}.$$

En appelant δ un nombre positif inférieur à $b' - x_0$ et à $x_0 - \alpha$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \pi \psi(x) - \int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = & \int_{\alpha}^{x_0 - \delta} A(x) d\psi(x) + \int_{x_0 - \delta}^{x_0} A(x) d\psi(x) \\ & + \int_{x_0}^{x_0 + \delta} B(x) d\psi(x) + \int_{x_0 + \delta}^{b'} B(x) d\psi(x). \end{aligned}$$

Si l'on appelle $\Psi(x)$ la variation totale de $\psi(x)$ entre a' et x , comme l'on a partout

$$0 < A(x) < \pi \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < B(x) < 0,$$

on voit que la deuxième et la troisième intégrale sont inférieures en module respectivement à

$$\pi[\Psi(x_0) - \Psi(x_0 - \delta)] \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}[\Psi(x_0 + \delta) - \Psi(x_0)].$$

$\Psi(x)$ étant continue pour $x = x_0$, quel que soit le nombre positif ε , on peut choisir δ assez petit pour que la somme des deux expressions précédentes ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{2}$. δ étant fixé, $A(x)$ tend uniformément vers zéro avec η dans l'intervalle $(\alpha, x_0 - \delta)$, et il en est de même de $B(x)$ dans l'intervalle $(x_0 + \delta, b')$; on peut donc déterminer un nombre positif ω tel que l'inégalité $\eta \leq \omega$ entraîne

$$\left| \int_{\alpha}^{x_0 - \delta} A(x) d\psi(x) + \int_{x_0 + \delta}^{b'} B(x) d\psi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour $\eta \leq \omega$ on aura

$$\left| \pi \psi(x_0) - \int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi \right| < \varepsilon.$$

Remarques. — 1. La démonstration précédente prouve non seulement qu'il faut que la suite $\psi_n(e)$ soit convergente pour que la suite $U_n(z)$ le soit, mais que, si pour deux suites de polynômes ayant leurs zéros sur le même segment (a, b) les fonctions $U_n(z)$ convergent vers la même fonction $U(z)$, pour ces deux suites les fonctions $\psi_n(e)$ ont aussi la même limite $\psi(e)$.

Il en sera ainsi en particulier, d'après la Remarque 6 du chapitre précédent, si, pour les deux suites de polynômes considérées, l'expression $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ a, à l'extérieur du segment (a, b) , deux limites qui diffèrent par un facteur constant.

2. Si à l'extérieur du segment (a, b) les fonctions $U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ ont une limite $U(z)$, la détermination de $\sqrt[n]{|\Pi_n(z)|}$ équivalente à z pour z infini, c'est-à-dire celle qui est réelle et positive pour z réel plus grand que b , a aussi une limite $\varphi(z)$ qui est une fonction uniforme dans le plan coupé suivant le segment (a, b) . Il est clair que $\varphi(z)$ est réelle et positive pour z réel plus grand que b , réelle négative pour z réel plus petit que a , et a son point représentatif dans le demi-plan supérieur quand z est dans le demi-plan supérieur.

Supposons z dans ce demi-plan et appelons $\Theta(z)$ l'argument de $\varphi(z)$ compris entre zéro et π . L'une des déterminations de $\log \varphi(z)$ est

$$\log \varphi(z) = U(z) + i\Theta(z).$$

Et l'on a par suite en reprenant les notations de plus haut

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = - \frac{\partial \Theta}{\partial \xi},$$

d'où

$$\int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = \Theta(a' + i\eta) - \Theta(x_0 + i\eta),$$

$$\lim_{\eta=0} \int_{a'}^{x_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi = \pi - \lim_{\eta=0} \Theta(x_0 + i\eta).$$

En tout point x_0 où $\psi(x)$ est continue, c'est-à-dire sur tout le segment (a', b') sauf au plus sur un ensemble dénombrable, les deux limites existeront et l'on aura

$$\pi \psi(x_0) = \pi - \lim_{\eta=0} \Theta(x_0 + i\eta)$$

ou

$$\psi(x_0) = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \lim_{\gamma=0} \Theta(x_0 + i\gamma) \right].$$

Cette équation détermine la fonction de point associée à $\psi(e)$ lorsque l'on connaît la limite $\varphi(z)$ de $\sqrt[n]{\Pi_n(z)}$.

Si $\varphi(z)$ est continue sur les bords de la coupure faite dans le plan suivant le segment (a, b) , pour x compris entre a et b et tel que $\varphi(x) \neq 0$ on aura

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} [\pi - \Theta(x)],$$

$\Theta(x)$ désignant l'argument compris entre zéro et π de la valeur prise par $\varphi(z)$ pour $z = x$ sur le bord supérieur de la coupure.

Application aux polynomes orthogonaux. — Un cas particulier intéressant est celui des suites de polynomes orthogonaux sur le segment (a, b) :

$p(x)$ étant une fonction non négative de x dans l'intervalle (a, b) , on définit la suite de polynomes $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$, dont chacun est de degré égal à son indice, par les conditions

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x) p(x) dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n,$$

$$\int_a^b P_m^2(x) p(x) dx = 1.$$

On sait que $P_n(z)$ a tous ses zéros réels, distincts et compris entre a et b .

Nous supposons pour simplifier que $a = -1$, et $b = +1$, cas où l'on peut toujours se ramener par un changement de variable linéaire.

Si $p(x)$ satisfait à des conditions de caractère très général, le rapport $\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}$ a pour limite, à l'extérieur du segment $(-1, +1)$, la racine de plus grand module de l'équation

$$X^2 - 2zX + 1 = 0,$$

de sorte que $\frac{|P_{n+1}(z)|}{|P_n(z)|}$, et par suite $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$, tendent vers le module

de cette racine, fonction de z qui ne dépend pas de $p(x)$. Il suffit par exemple que l'on ait presque partout $p(x) > 0$ et que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log p(x) dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

prise au sens de Lebesgue, existe (1).

Dans ces conditions la suite des fonctions $\psi_n(e)$ relatives aux polynômes $P_n(z)$ converge vers une fonction $\psi(e)$ indépendante de $p(x)$. Pour déterminer cette fonction $\psi(e)$ il suffit de considérer la suite des polynômes trigonométriques

$$P_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n[\arccos z].$$

On voit immédiatement que la fonction de point associée à $\psi(e)$ est

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} [\pi - \text{Arc cos } x] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arc sin } x.$$

Cela résulterait aussi, en vertu de la Remarque 2 précédente, de ce que

$$\varphi(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2},$$

le radical ayant la détermination qui est réelle et positive pour z réel supérieur à 1.

La convergence de $\psi_n(e)$ vers $\psi(e)$ s'exprime par le fait que le nombre des zéros de $P_n(z)$ au plus égaux à x (avec $-1 < x < +1$) est égal à

$$\frac{n}{\pi} [\pi - \text{Arc cos } x] [1 + \varepsilon_n(x)].$$

On peut dire aussi que le nombre de zéros de $P_n(z)$ compris entre α et β ($-1 \leq \alpha < \beta \leq +1$) est égal à

$$\frac{n}{\pi} [\text{Arc sin } \beta - \text{Arc sin } \alpha] [1 + \varepsilon'_n(\alpha, \beta)].$$

$\varepsilon_n(x)$ et $\varepsilon'_n(\alpha, \beta)$ sont des quantités infiniment petites avec $\frac{1}{n}$.

(1) G. SZEGÖ, Ueber die Entwicklungen einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems (Math. Annalen, Bd. 82, 1921, p. 188-212).

On peut dire encore que le nombre de zéros de $P_n(z)$ situés sur un segment de l'axe réel, lui-même intérieur au segment $(-1, +1)$, est asymptotiquement proportionnel à l'arc du demi-cercle $|z|=1$ du demi-plan supérieur qui se projette orthogonalement sur ce segment.

On peut déduire de là une expression approchée du $p^{\text{ième}}$ zéro de $P_n(z)$. Soit en effet $x_n(t)$ la fonction non décroissante définie dans l'intervalle $(0, 1)$ de la façon suivante : pour $t=0$, $x_n(t) = -1$, pour $0 < t \leq 1$, $x_n(t)$ est égal au zéro de $P_n(z)$ dont le rang est égal à la partie entière de nt lorsqu'on range ces zéros par ordre de grandeur croissante. On voit que pour n infini $x_n(t)$ tend vers $-\cos \pi t$. Pour $t=0$ il y a constamment égalité; pour $0 < t < 1$, si ε est assez petit pour que $t - \varepsilon > 0$ et $t + \varepsilon < 1$, on voit que le nombre de zéros de $P_n(z)$ au plus égaux à $-\cos \pi(t - \varepsilon)$ est asymptotiquement égal à $n(t - \varepsilon)$ tandis que le nombre des zéros au plus égaux à $-\cos \pi(t + \varepsilon)$ est asymptotiquement égal à $n(t + \varepsilon)$, de sorte que pour n assez grand $x_n(t)$ est compris entre $-\cos \pi(t - \varepsilon)$ et $-\cos \pi(t + \varepsilon)$; enfin le nombre de zéros de $P_n(z)$ au plus égaux à $-\cos \pi(1 - \varepsilon) = \cos \pi \varepsilon$ est asymptotiquement égal à $n(1 - \varepsilon)$, de sorte que pour n assez grand on a $\cos \pi \varepsilon < x_n(1) \leq 1$.

Mais si une suite de fonctions non décroissantes dans un intervalle converge dans cet intervalle vers une fonction continue, la convergence y est uniforme. Donc $x_n(t)$ converge *uniformément* vers $-\cos \pi t$.

Le $p^{\text{ième}}$ zéro de $P_n(z)$ est égal à $x_n\left(\frac{p}{n}\right)$. Par suite le $p^{\text{ième}}$ zéro de $P_n(z)$ est égal à

$$-\cos p \frac{\pi}{n} + \varepsilon_{n,p},$$

$\varepsilon_{n,p}$ tendant *uniformément* vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Suites de polynomes liés par une relation de récurrence de Poincaré.

1. Une suite orthogonale est un cas particulier de suite de polynomes liés par une relation de récurrence de la forme

$$P_{n+2}(x) + (a_n x + b_n) P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) = 0,$$

à coefficients réels et où c_n est positif, a_n a un signe constant, et a_n , b_n , c_n ont des limites a , b , c pour n infini.

Étant donnée une relation de récurrence de cette forme, où l'on suppose d'abord seulement que c_n est positif et a_n a un signe constant, si l'on prend

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \alpha x + \beta,$$

avec α et β réels et $\alpha a_n < 0$, un raisonnement classique montre que les polynomes $P_n(x)$ ont tous leurs zéros réels et que les zéros de deux polynomes consécutifs sont entrelacés.

Si l'on suppose établi que $P_{n+1}(x)$ a tous ses zéros réels, soient x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , et entrelacés avec ceux de $P_n(x)$, on voit que les signes de $P_{n+2}(x)$ pour les valeurs

$$-\infty, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, +\infty$$

sont alternés, de sorte que $P_{n+2}(x)$ a tous ses zéros réels et entrelacés avec x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . Or, $P_2(x)$ est positif pour $\pm\infty$ et négatif pour le zéro $-\frac{\beta}{\alpha}$ de $P_1(x)$; il a donc un zéro réel plus petit et un plus grand que $-\frac{\beta}{\alpha}$.

En raison de cette disposition relative des zéros des polynomes de la suite, lorsque l'on passe de $P_n(x)$ à $P_{n+1}(x)$ le nombre de zéros inférieurs à un nombre donné x_0 et le nombre de zéros supérieurs à x_0 ne peuvent l'un et l'autre que ne pas changer ou augmenter d'une unité. On voit aisément que toutes les fois que le rapport $\frac{P_{n+1}(x_0)}{P_n(x_0)}$ sera du signe de a_n le nombre de zéros supérieurs à x_0 augmentera d'une unité, le nombre de zéros inférieurs restant inchangé, et toutes les fois que $\frac{P_{n+1}(x_0)}{P_n(x_0)}$ sera du signe contraire de a_n , ce sera l'inverse.

Supposons maintenant que a_n, b_n, c_n aient des limites a, b, c , avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Alors, d'après un théorème de Poincaré sur les relations de récurrence ⁽¹⁾, lorsque l'équation en X

$$(1) \quad X^2 + (ax + b)X + c = 0$$

a ses racines de module différent, le rapport $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ tend, pour n infini, vers l'une d'elles, en général la plus grande en module.

⁽¹⁾ *American Journal of Mathematics*, Vol. VII, 1884, p. 201.

Le produit des racines de l'équation (1) étant égal à c , qui est réel et positif, elles ne peuvent avoir même module que si elles sont imaginaires conjuguées, ce qui a lieu si x est réel et compris entre les racines x' et x'' de

$$(ax + b)^2 - 4c.$$

Si x est réel et extérieur à l'intervalle (x', x'') les racines de l'équation (1) sont réelles, du signe de a si $x < x'$ et du signe contraire si $x > x''$.

Soient alors ξ' et ξ'' deux nombres réels, le premier inférieur à x' mais aussi voisin que l'on voudra de x' , le second supérieur à x'' et aussi voisin de x'' que l'on voudra. Il résulte de ce qui précède qu'à partir d'une certaine valeur n_0 de n le rapport $\frac{P_{n+1}(\xi')}{P_n(\xi')}$ sera du signe de a et le rapport $\frac{P_{n+1}(\xi'')}{P_n(\xi'')}$ du signe contraire; de sorte que le nombre de zéros de $P_n(x)$ supérieurs à ξ'' et le nombre de zéros inférieurs à ξ' resteront constants pour $n \geq n_0$ (les valeurs constantes pouvant être nulles). On peut ranger les zéros extérieurs à l'intervalle (ξ', ξ'') par ordre de grandeur croissante par exemple, et considérer chacun comme fonction de n ; d'après ce que l'on sait sur la disposition relative des zéros de deux polynômes consécutifs de la suite, les zéros inférieurs à ξ' iront en décroissant, et les zéros supérieurs à ξ'' en croissant. Les uns et les autres auront des limites pour n infini, car nous allons montrer que tous les zéros de $P_n(x)$ restent compris dans un intervalle fixe (X', X'') .

Posons en effet

$$\rho_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}.$$

On a

$$\rho_{n+1} = -a_n x - b_n - \frac{c_n}{\rho_n}.$$

Si l'on appelle A le minimum de $|a_n|$, B le maximum de $|b_n|$, C le maximum de $|c_n|$, cette égalité montre que, si $|x| \geq \frac{B + 2\sqrt{C}}{A}$, l'inégalité $|\rho_n| \geq \sqrt{C}$ entraîne que ρ_{n+1} est du signe de $-ax$ et $|\rho_{n+1}| \geq \sqrt{C}$.

Or on a

$$\rho_0(x) = \alpha x + \beta.$$

On peut donc choisir deux nombres réels X' et X'' , le premier inférieur à $-\frac{B+2\sqrt{C}}{A}$, le second supérieur à $+\frac{B+2\sqrt{C}}{A}$, de façon que l'on ait

$$a\rho_0(X') > 0, \quad |\rho_0(X')| \geq \sqrt{C};$$

et

$$a\rho_0(X'') < 0, \quad |\rho_0(X'')| \geq \sqrt{C}.$$

Par récurrence on voit que l'on aura, quel que soit n positif ou nul,

$$a\rho_n(X') > 0, \quad |\rho_n(X')| \geq \sqrt{C},$$

$$a\rho_n(X'') < 0, \quad |\rho_n(X'')| \geq \sqrt{C}.$$

Les signes de $\rho_n(X')$ et $\rho_n(X'')$ prouvent que le nombre de zéros extérieurs à l'intervalle (X', X'') reste le même pour $P_n(x)$ que pour $P_0(x)$, c'est-à-dire zéro.

La suite des polynômes $P_n(x)$ est donc une suite de polynômes dont tous les zéros sont sur un segment de droite. On a vu plus haut que le rapport $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ a une limite lorsque x n'est pas sur le segment (x', x'') .

Il en est donc de même de $\frac{|P_{n+1}(x)|}{|P_n(x)|}$ et par suite de $\sqrt[n]{|P_n(x)|}$, puis $\sqrt[n]{|\Pi_n(x)|}$ et $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(x)|$. La suite des fonctions $\psi_n(e)$ est donc convergente.

De ce que le rapport $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ tend vers une des racines de l'équation (1), il résulte que l'une des déterminations de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ converge vers cette racine. Or les racines de l'équation (1) donnent deux fonctions analytiques et uniformes à l'extérieur du segment (x', x'') :

$$\frac{-(ax+b) - \sqrt{(ax+b)^2 - 4c}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(ax+b) + \sqrt{(ax+b)^2 - 4c}}{2},$$

où le radical sera pris par exemple avec la détermination qui est réelle et du signe de a pour x réel supérieur à x'' .

La limite de $\sqrt[n]{P_n(z)}$ devant être analytique et uniforme à l'extérieur du segment (X', X'') , qui contient (x', x'') à son intérieur, elle devra être égale constamment à l'une ou l'autre de ces deux fonctions.

Comme elle est infinie pour z infini, c'est

$$\frac{-(ax+b) - \sqrt{(ax+b)^2 - 4c}}{2}.$$

D'après la Remarque 7 du chapitre précédent, on en déduit

$$\varphi(z) = \frac{az+b + \sqrt{(az+b)^2 - 4c}}{2a}.$$

Cette fonction étant continue sur les deux bords du segment (X', X'') , la fonction de point $\psi(x)$ associée à $\psi(e)$ est égale à $\frac{1}{\pi}[\pi - \Theta(x)]$, $\Theta(x)$ étant l'argument compris entre zéro et π de la valeur prise par $\varphi(z)$ pour $z = x$ sur le bord supérieur. En posant

$$x = -\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a^2}} \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi),$$

on trouve

$$\Theta(x) = \varphi, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = \frac{1}{\pi}[\pi - \varphi].$$

La fonction $\psi(x)$ non décroissante et comprise entre zéro et 1 est nécessairement égale à zéro pour $x < x'$ et à 1 pour $x > x''$ puisque

$$\psi(x') = 0, \quad \psi(x'') = 1.$$

Au total on voit que pour n infini la proportion de zéros de $P_n(x)$ compris entre deux nombres x_1 et x_2 a pour limite $\frac{\omega}{\pi}$, ω étant la mesure de l'arc du demi-cercle de diamètre (x', x'') compris entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$.

2. Considérons encore une relation de récurrence de la forme

$$P_{n+2} + (a_n x + b_n) P_{n+1} + (c_n x + d_n) P_n = 0,$$

et prenons toujours

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \alpha x + \beta.$$

Nous allons montrer d'abord que, moyennant certaines restrictions imposées à a_n, b_n, c_n, d_n , on peut encore choisir α et β de manière que $P_n(x)$ ait tous ses zéros réels.

Le raisonnement employé pour la première relation de récurrence étudiée était basé sur le fait que le coefficient de P_n était positif. Ici ce coefficient dépend de x ; lorsque x est réel, il est réel, mais il n'est positif que sur une demi-droite. Nous allons faire des hypothèses telles que l'on puisse reproduire le raisonnement en question en y remplaçant simplement l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ par un intervalle dont l'une des extrémités sera finie et sur lequel on aura toujours $c_n x + d_n > 0$.

Supposons donc que c_n ait un signe constant et que les intervalles définis par $c_n x + d_n > 0$ aient une partie commune.

Si l'on pose

$$c_n = \varepsilon c'_n \quad \text{avec } c'_n > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1,$$

les nombres $-\frac{\varepsilon d_n}{c_n}$ auront une borne supérieure finie $\varepsilon \gamma$ et la partie commune aux intervalles $c_n x + d_n > 0$ sera l'intervalle d'extrémités γ et $\varepsilon \infty$.

Supposons encore que a_n ait un signe constant, ce qui se traduira par

$$a_n = \varepsilon' a'_n, \quad \text{avec } a'_n > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon' = \pm 1,$$

que l'on ait

$$\varepsilon \varepsilon' (a_n \gamma + b_n) < 0,$$

et que, si l'on appelle $2A$ la borne inférieure de $|a_n \gamma + b_n|$ et B la borne supérieure de $|c_n \gamma + d_n|$, l'on ait

$$A^2 - B > 0.$$

Si l'on pose comme plus haut

$$\rho_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

on voit que l'inégalité

$$\varepsilon \varepsilon' \rho_n(\gamma) \geq A - \sqrt{A^2 - B}$$

entraîne

$$\varepsilon \varepsilon' \rho_{n+1}(\gamma) \geq A - \sqrt{A^2 - B}.$$

Si donc on prend α et β de façon que

$$\varepsilon \varepsilon' (\alpha \gamma + \beta) = \varepsilon \varepsilon' \rho_0(\gamma) \geq A - \sqrt{A^2 - B},$$

on aura, quel que soit n ,

$$\varepsilon \varepsilon' \rho_n(\gamma) \geq A - \sqrt{A^2 - B} \quad \text{et a fortiori} \quad \varepsilon \varepsilon' \rho_n(\gamma) > 0.$$

Le signe de $P_n(\gamma)$ sera donc celui de $(\varepsilon \varepsilon')^n$.

Si l'on s'astreint de plus à la condition $\varepsilon' \alpha < 0$, le signe de $P_n(x)$ pour $\varepsilon. \infty$ sera celui de $(-\varepsilon \varepsilon')^n$, car le coefficient de x^n est $\alpha. (-a)^{n-1}$. D'autre part le zéro $-\frac{\beta}{\alpha}$ de $P_1(x)$ sera compris entre γ et $\varepsilon. \infty$.

$P_2(x)$ est alors positif pour $\varepsilon. \infty$ et γ , et négatif pour $-\frac{\beta}{\alpha}$, de sorte qu'il a un zéro compris entre γ et $-\frac{\beta}{\alpha}$, et un compris entre $-\frac{\beta}{\alpha}$ et $\varepsilon. \infty$. Ensuite, en supposant établi que $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$ ont leurs zéros réels, compris entre γ et $\varepsilon. \infty$, et entrelacés, on voit que la succession des signes pris par $P_{n+2}(x)$ pour γ , $\varepsilon. \infty$ et les zéros de $P_{n+1}(x)$, ces valeurs étant rangées par ordre de grandeur, est alternée; d'où il résulte que $P_{n+2}(x)$ a ses zéros réels compris entre γ et $\varepsilon. \infty$ et entrelacés avec ceux de $P_{n+1}(x)$.

En définitive on a ainsi démontré que, si l'on prend

$$\varepsilon' \alpha < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \varepsilon' (\alpha \gamma + \beta) \geq A - \sqrt{A^2 - B},$$

tous les polynomes $P_n(x)$ ont leurs zéros réels et compris entre γ et $\varepsilon. \infty$, deux polynomes consécutifs ayant leurs zéros entrelacés.

On voit aisément que, x_0 étant un nombre réel fixé entre γ et $\varepsilon. \infty$, lorsque l'on passe de $P_n(x)$ à $P_{n+1}(x)$, si $\rho_n(x_0)$ est du signe de $\varepsilon. \varepsilon'$ le nombre de zéros compris entre x_0 et γ ne change pas, tandis que le nombre de zéros compris entre x_0 et $\varepsilon. \infty$ augmente d'une unité, et si $\rho_n(x_0)$ est du signe de $-\varepsilon. \varepsilon'$ c'est l'inverse qui a lieu.

Supposons maintenant que, pour n infini, a_n, b_n, c_n, d_n aient des limites a, b, c, d , avec $a \neq 0$. Alors pour toute valeur de x qui donne à l'équation

$$(2) \quad X^2 + (ax + b)X + (cx + d) = 0$$

deux racines de module différent, le rapport $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \rho_n(x)$ a pour limite une des racines de cette équation, en général la plus grande en module.

Pour x réel les coefficients de l'équation sont réels; les racines ne

peuvent donc avoir même module que si elles sont opposées, confondues ou imaginaires conjuguées. Le premier cas a lieu pour $x = -\frac{b}{a}$, le troisième ou le second pour

$$(ax + b)^2 - 4(cx + d) \leq 0.$$

Le premier membre est un trinôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif, et il a des racines réelles x' et x'' car pour $x = -\frac{b}{a}$ il prend la valeur $4\frac{bc - ad}{a}$. En effet, l'hypothèse

$$\varepsilon \varepsilon' (a_n \gamma + b_n) < 0,$$

que nous avons faite plus haut, entraîne d'abord

$$\varepsilon \varepsilon' \left(\frac{-a_n d_n}{c_n} + b_n \right) < 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{b_n c_n - a_n d_n}{a_n} < 0,$$

puis à la limite

$$\frac{bc - ad}{a} < 0.$$

Si ξ' est inférieur à x' , mais aussi voisin de lui que l'on veut, et ξ'' inférieur à x'' , mais aussi voisin de lui que l'on veut, les racines de l'équation (2) sont du signe de $-\varepsilon'$ pour $x = \xi'$ et du signe de ε' pour $x = \xi''$. Par suite il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\rho_n(\xi')$ est du signe de $-\varepsilon'$ et $\rho_n(\xi'')$ du signe de ε' . On en déduit que le nombre de zéros de $P_n(x)$ inférieurs à ξ' et le nombre de zéros supérieurs à ξ'' sont constants à partir de $n = n_0$. Si l'on numérote ces zéros extérieurs à l'intervalle (ξ', ξ'') par ordre de grandeur, chacun peut être considéré comme fonction de n . Les uns décroissent, les autres croissent; tous ont des limites pour n infini car ils sont compris dans un intervalle fixe. En effet on connaît déjà la borne γ et nous allons montrer l'existence d'une autre borne en sens inverse.

Soient A' le minimum de a' ; B' , C' , D' les maxima de $|b|$, c' , $|d|$.
Posons

$$M(\delta) = A'\delta - B, \quad N(\delta) = C'\delta + D,$$

et supposons δ positif assez grand pour que

$$M^2 - 4N > 0.$$

Alors l'égalité

$$\rho_{n+1}(\varepsilon \delta) = -a_n \varepsilon \delta + b_n - \frac{c_n \varepsilon \delta + d_n}{\rho_n(\varepsilon \delta)}$$

montre que l'inégalité

$$-\varepsilon \varepsilon' \rho_n(\varepsilon \delta) \geq M - \sqrt{M^2 - 4N}$$

entraîne

$$-\varepsilon \varepsilon' \rho_{n+1}(\varepsilon \delta) \geq M - \sqrt{M^2 - 4N},$$

de sorte qu'il suffit que

$$-\varepsilon \varepsilon' \rho_0(\varepsilon \delta) \geq M - \sqrt{M^2 - 4N}$$

pour que l'on ait, quel que soit n ,

$$-\varepsilon \varepsilon' \rho_n(\varepsilon \delta) \geq M - \sqrt{M^2 - 4N}, \quad \text{donc } \varepsilon \varepsilon' \rho_n(\varepsilon \delta) < 0.$$

Or $-\varepsilon \varepsilon' \rho_0(\varepsilon \delta)$ est égal à $-\varepsilon' \alpha \delta - \varepsilon \varepsilon' \beta$ et tend vers $+\infty$ quand δ tend vers $+\infty$, tandis que $M - \sqrt{M^2 - 4N}$ tend vers $\frac{2C'}{\Lambda}$. Il est donc facile de choisir δ assez grand pour que

$$-\varepsilon \varepsilon' \rho_0(\varepsilon \delta) \geq M - \sqrt{M^2 - 4N}.$$

δ étant ainsi choisi le nombre des zéros compris entre $\varepsilon \delta$ et $\varepsilon \infty$ est le même pour $P_n(x)$ que pour $P_0(x)$, c'est-à-dire zéro. Tous les zéros de $P_n(x)$ sont donc compris entre γ et $\varepsilon \delta$.

La fonction $\sqrt[n]{|P_n(x)|}$ étant convergente à l'extérieur de l'axe réel, la suite des fonctions $\psi_n(e)$ est convergente. De plus, de ce que le rapport $\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ a pour limite une des racines de l'équation (2) on conclut que l'une des déterminations de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ a la même limite. Cette limite étant une fonction analytique uniforme à l'extérieur du segment $(\gamma, \varepsilon \delta)$, elle doit y être constamment égale soit à

$$\frac{-(ax + b) - \sqrt{(ax + b)^2 - 4(cx + d)}}{2},$$

soit à

$$\frac{-(ax + b) + \sqrt{(ax + b)^2 - 4(cx + d)}}{2},$$

le radical étant pris par exemple avec la détermination qui est réelle

et du signe de a pour x réel plus grand que x'' . Comme elle devient infinie pour x infini, c'est la première valeur qui convient. On en déduit que

$$\varphi(z) = \frac{az + b + \sqrt{(az + b)^2 - 4(cz + d)}}{2a};$$

pour $x < x'$, on trouve

$$\Theta(x) = \pi, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = 0;$$

pour $x > x''$, on trouve

$$\Theta(x) = 0, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = 1;$$

enfin si x est compris entre x' et x'' , en posant

$$x = -\frac{a}{b} + \frac{2c}{a^2} + \frac{2\sqrt{c^2 + a(ad - bc)}}{a^2} \cos \varphi = -\frac{b}{a} + \frac{2c}{a^2} + 2k \cos \varphi$$

(avec $0 \leq \varphi \leq \pi$),

on trouve que la valeur prise par $\varphi(z)$ pour $z = x$ sur le bord supérieur du segment (x', x'') est

$$\frac{c}{a^2} + k e^{i\varphi}.$$

$\pi - \Theta(x)$ est l'angle sous lequel on voit du point $x = -\frac{b}{a}$ la portion du demi-cercle de diamètre (x', x'') d'abscisse inférieure à x .

En définitive on voit que la *proportion de zéros de $P_n(x)$ compris entre deux nombres x_1 et x_2 tend, pour n infini, vers $\frac{\omega}{\pi}$, ω désignant l'angle sous lequel on voit du point $x = -\frac{b}{a}$ l'arc du demi-cercle de diamètre (x', x'') compris entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$.*

A titre d'exemple prenons la relation de récurrence

$$4(n+2)P_{n+2} + 2[2n+3 - 4(n+1)x]P_{n+1} + (n+1)(5-4x)P_n = 0,$$

qui se ramène à la forme voulue en la divisant par $4(n+2)$. On a

$$\varepsilon = \varepsilon' = -1, \quad \gamma = \frac{5}{4}, \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Par conséquent, si l'on prend

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \alpha x + \beta, \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad \text{et} \quad 5\alpha + 4\beta > 2,$$

$P_n(x)$ aura tous ses zéros réels et inférieurs à $\frac{5}{4}$ et deux polynomes consécutifs auront leurs zéros entrelacés.

D'autre part a_n tend vers $a = -2$, b_n vers $b = 1$, c_n vers $c = -1$ et d_n vers $d = \frac{5}{4}$. On a donc

$$(ax + b)^2 - 4(cx + d) = (2x - 1)^2 + 4x - 5 = 4x^2 - 4,$$

dont les racines sont $+1$ et -1 .

Par suite, si η est un nombre positif arbitrairement petit, le nombre de zéros de $P_n(x)$ inférieurs à $-1 - \eta$ et le nombre de zéros supérieurs à $1 + \eta$ restent bornés pour n infini. Les premiers, s'il y en a, décroissent chacun vers une limite finie; les seconds, s'il y en a, croissent chacun vers une limite inférieure à $\frac{5}{4}$. De plus, si x_1 et x_2 sont deux nombres réels quelconques, pour n infini, la proportion de zéros de $P_n(x)$ compris entre x_1 et x_2 a pour limite $\frac{\omega}{\pi}$, ω étant l'angle sous lequel on voit du point $\frac{1}{2}$ la portion du demi-cercle $|z| = 1$ du demi-plan supérieur comprise entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$.

DEUXIÈME PARTIE.

SUITES DE POLYNOMES DONT LES ZÉROS ONT UNE DISTRIBUTION RÉGULIÈRE.

Nous avons vu au chapitre précédent que, lorsque tous les zéros des polynomes $P_n(z)$ sont sur un même segment de droite, la condition trouvée antérieurement pour que l'ensemble des courbes Γ se réduise à une famille d'équation $F(x, y) = \text{const.}$ entraîne une certaine régularité dans la distribution de ces zéros. Cela tient à l'unicité d'une distribution de masses sur le segment donnant à l'extérieur un potentiel donné. Aussi ne peut-on espérer obtenir un résultat semblable dans le cas général où l'on suppose simplement les zéros intérieurs à une courbe fermée C et il suffit que $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ converge à l'extérieur de C . Mais, si l'on suppose les zéros des polynomes de la suite $P_n(z)$

distribués régulièrement, on peut obtenir des résultats plus complets sur la convergence des séries $\sum a_n P_n(z)$, en ce sens que l'on peut étudier le cas général où la suite des coefficients a_n n'est plus assujettie à aucune condition. On peut même ne plus supposer $P_n(z)$ de degré n et les zéros intérieurs à une courbe C : on peut assujettir seulement le degré p_n de $P_n(z)$ à la condition que le rapport $\frac{p_n}{n}$ reste borné et laisser les zéros se répartir dans tout le plan.

Nous allons faire dans ce but une étude précise du comportement de l'expression $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$ pour une telle suite à zéros distribués régulièrement.

Indépendamment du souci de l'application aux séries, nous montrons que ce comportement est caractéristique de la régularité de distribution des zéros pour toute suite de polynômes dans laquelle le rapport $\frac{p_n}{n}$ est borné. Nous étudierons aussi les zéros des polynômes dérivés.

Nous appellerons comme précédemment \mathcal{E} l'ensemble des zéros des polynômes $P_n(z)$ et E son dérivé; tout point de \mathcal{E} où sont confondus une infinité de zéros sera considéré comme appartenant à E . Nous désignerons par A_n le coefficient de z^{p_n} dans $P_n(z)$ et par $\Pi_n(z)$ le quotient $\frac{P_n(z)}{A_n}$. Nous définirons la fonction d'ensemble $\psi_n(e)$ comme égale au quotient par n du nombre de zéros de $P_n(z)$ appartenant à l'ensemble e , chacun étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. *Nous dirons que la distribution des zéros des polynômes de la suite $P_n(z)$ est régulière si la suite des fonctions $\psi_n(e)$ converge vers une fonction $\psi(e)$.* $\psi(e)$ est évidemment non négative. De plus remarquons qu'elle est nécessairement nulle sur tout ensemble sans point commun avec E : un tel ensemble peut être recouvert par une suite dénombrable de carrés dont chacun est, ainsi que son contour, sans point commun avec E ; or un tel carré ne contient plus, à partir d'une certaine valeur de n , aucun zéro de $P_n(z)$.

Si l'on considère $P_n(z)$ comme un polynôme de degré p'_n ayant $p'_n - p_n$ zéros infinis, on pourra choisir p'_n supérieur à p_n de manière que le rapport $\frac{p'_n}{n}$ ait une limite pour n infini, limite qui sera d'ailleurs

évidemment arbitraire. On pourra définir la fonction $\psi_n(e)$ pour des ensembles e pouvant contenir le point à l'infini, et elle sera convergente dans le plan muni de son point à l'infini. Mais la valeur de la fonction limite pour le point à l'infini dépendra de la limite choisie arbitrairement pour $\frac{p'_n}{n}$. Mais ceci n'a pas d'importance, car nous ne ferons intervenir cette définition étendue des fonctions $\psi_n(e)$ et $\psi(e)$ que dans certaines démonstrations où nous aboutirons à des intégrales de la forme

$$\int_{\Lambda} f(z) d\psi(e),$$

Λ étant un ensemble contenant le point à l'infini et $f(z)$ une fonction nulle à l'infini. La valeur arbitraire de $\psi(e)$ pour le point à l'infini disparaîtra donc du résultat. Partout ailleurs nous considérerons les fonctions $\psi_n(e)$ et $\psi(e)$ comme définies seulement pour les ensembles ordinaires formés de points à distance finie.

Pour ne pas surcharger les démonstrations nous commencerons par exposer quelques notions préliminaires utiles pour la suite de nos raisonnements.

1. — Notions préliminaires.

1. **Lemme sur les intégrales de Stieltjes.** — Démontrons d'abord le lemme suivant.

Si la suite des fonctions d'ensembles non négatives $\psi_n(e)$ définies dans un domaine Δ converge dans ce domaine vers une fonction $\psi(e)$ bornée et nulle sur la frontière d'un domaine D contenu dans Δ , et si $f(Q)$ est une fonction de point continue dans D et sur sa frontière, l'intégrale $\int_D f(Q) d\psi_n(e)$ tend vers

$$\int_D f(Q) d\psi(e).$$

Partageons D en ensembles partiels e_i en coupant par des parallèles aux axes de coordonnées, en ayant soin de ne pas prendre des droites

telles que $\psi(e)$ ait une valeur non nulle sur leur intersection avec D , droites qui forment au plus un ensemble dénombrable. Soient m_i et M_i les bornes inférieure et supérieure de $f(Q)$ sur e_i . On a

$$\sum m_i \psi(e_i) \leq \int_D f(Q) d\psi(e) \leq \sum M_i \psi(e_i).$$

Si l'on prend les e_i assez petits pour que

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2\psi(D)},$$

il en résultera

$$\sum M_i \psi(e_i) - \sum m_i \psi(e_i) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$\int_D f(Q) d\psi(e) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum m_i \psi(e_i) \leq \sum M_i \psi(e_i) < \int_D f(Q) d\psi(e) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les e_i étant fixés, il résulte de la convergence de $\psi_n(e)$ vers $\psi(e)$ que l'on peut déterminer un entier N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne

$$|\sum m_i \psi_n(e_i) - \sum m_i \psi(e_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|\sum M_i \psi_n(e_i) - \sum M_i \psi(e_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de sorte que

$$\int_D f(Q) d\psi(e) - \varepsilon < \sum m_i \psi_n(e_i) \leq \int_D f(Q) d\psi_n(e) \leq \sum M_i \psi_n(e_i) < \int_D f(Q) d\psi(e) + \varepsilon.$$

Remarquons que si l'on suppose que $f(Q)$ dépend d'un certain nombre de paramètres variables dans un certain champ Ω et est *uniformément* continue par rapport à Q et bornée quand les paramètres décrivent ce champ, l'intégrale $\int_D f(Q) d\psi_n(e)$ converge *uniformément* vers

$$\int_D f(Q) d\psi(e).$$

En effet, le choix des e_i de façon que $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$ peut être fait indépendamment des valeurs des paramètres dans Ω , et il en est de même

ensuite de la détermination de l'entier N , car

$$|\sum m_i \psi_n(e_i) - \sum m_i \psi(e_i)| \leq \sum |m_i| |\psi_n(e_i) - \psi(e_i)|$$

et

$$|\sum M_i \psi_n(e_i) - \sum M_i \psi(e_i)| \leq \sum |M_i| |\psi_n(e_i) - \psi(e_i)|,$$

et m_i et M_i sont bornés.

Remarquons encore que l'on peut étendre ce résultat au cas où D n'est pas nécessairement borné mais est un ensemble quelconque du plan complet ⁽¹⁾ à condition que, la fonction $f(Q)$ étant toujours bornée comme plus haut, on soit assuré de pouvoir, quel que soit le nombre positif η , partager D en un nombre fini d'ensembles partiels e_i tels que l'on ait $M_i - m_i < \eta$ pour toutes les valeurs des paramètres dans le champ Ω , le choix de ces e_i pouvant être fait de telle façon que $\psi(e)$ prenne la valeur zéro sur leurs frontières.

Enfin, on peut étendre au cas d'une fonction $f(Q)$ complexe en séparant la partie réelle et la partie imaginaire. On voit de suite qu'il suffit que $f(Q)$ soit encore bornée et que l'on puisse faire le partage en un nombre fini d'ensembles partiels e_i , assujettis toujours à la même condition, de façon que

$$|f(Q') - f(Q)| < \eta$$

pour tout couple de points Q et Q' pris dans e_i et tout système de valeurs des paramètres pris dans le champ Ω .

2. Un théorème sur les ensembles. — Un autre résultat que nous aurons à utiliser est le suivant :

Soit α un nombre positif quelconque et soit une suite d'ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ tous intérieurs à un même domaine borné. Si E_n peut être recouvert par une suite de cercles, finie ou non, et pouvant dépendre de n , mais telle que la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas un nombre δ indépendant de n , l'ensemble $\lim E_n$ peut être recouvert, quel que soit ε positif, par une suite de cercles telle que la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\delta + \varepsilon$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Nous appellerons plan complet le plan muni de son point à l'infini.

⁽²⁾ Nous disons que l'ensemble E est recouvert par une suite de cercles si tout point de E est à l'intérieur ou sur la circonférence de l'un au moins de ces cercles.

Il suffit d'établir ce résultat en supposant que chaque ensemble E_n contient le précédent. En effet l'ensemble $\lim E_n$ est la limite de la suite des ensembles $\mathcal{E}_n = E_n E_{n+1} E_{n+2} \dots$ dont chacun contient le précédent; et toute suite de cercles qui recouvre E_n recouvre aussi \mathcal{E}_n .

Nous appellerons $M(E)$ la borne inférieure des sommes des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons des suites de cercles recouvrant l'ensemble E et nous montrerons que, si les ensembles E_n sont intérieurs à un même domaine borné et si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, on a

$$\lim M(E_n) = M(\lim E_n).$$

Si E_n peut être recouvert par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas δ , on aura

$$M(E_n) \leq \delta;$$

de sorte que

$$\lim M(E_n) = M(\lim E_n) \leq \delta.$$

d'où le résultat que nous avons en vue.

a. Il nous sera commode d'introduire une mesure particulière des ensembles en utilisant la théorie abstraite donnée par M. Carathéodory dans son mémoire sur la mesure linéaire ⁽¹⁾.

M. Carathéodory suppose que l'on sache attribuer à tout ensemble E une mesure extérieure $\mu^* E$ qui jouisse des propriétés suivantes :

I. $\mu^* E \geq 0$;

II. Si $A \supset B$, $\mu^* A \geq \mu^* B$;

III. Si $A = A_1 + A_2 + \dots$, la suite A_1, A_2, \dots étant finie ou non, on a

$$\mu^* A \leq \mu^* A_1 + \mu^* A_2 + \dots;$$

IV. Si $A = A_1 + A_2$ et si la distance de A_1 à A_2 est positive, on a

$$\mu^* A = \mu^* A_1 + \mu^* A_2;$$

V. Un ensemble E étant dit mesurable si l'on a, quel que soit W ,

$$\mu^* W = \mu^* EW + \mu^*(W - EW),$$

⁽¹⁾ Über das lineare Mass von Punktmengen. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1914, p. 404-426.

pour un ensemble quelconque A , μ^*A est la borne inférieure des mesures extérieures des *ensembles mesurables* contenant A .

Pour les ensembles mesurables, on prend comme mesure $\mu A = \mu^*A$.

En utilisant seulement les conditions I, II, III, M. Carathéodory démontre que toutes les sommes ou produits d'ensembles mesurables en nombre fini ou en infinité dénombrable, et par suite les \lim et $\overline{\lim}$ de suites d'ensembles mesurables sont mesurables. Si A_1, A_2, \dots sont mesurables et sans points communs on a

$$\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu A_1 + \mu A_2 + \dots$$

Si A_n tend vers A , μA_n tend vers μA .

En s'appuyant sur IV, il démontre ensuite que les ensembles ouverts et les ensembles fermés sont mesurables, de sorte qu'il en est ainsi des ensembles mesurables B.

Enfin il complète la théorie à l'aide de V en établissant des propriétés des ensembles quelconques non nécessairement mesurables. Nous n'aurons pas à utiliser ces propriétés.

Conservant la même théorie abstraite, au lieu de la mesure linéaire de Carathéodory nous définirons une mesure particulière de la façon suivante :

Nous appellerons $M_\rho(E)$ la borne inférieure des sommes des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons des suites de cercles de rayon au plus égal à ρ par lesquelles on peut recouvrir l'ensemble E . Si ρ décroît, $M_\rho(E)$ ne peut que croître, et par suite pour $\rho = 0$ $M_\rho(E)$ a nécessairement une limite, finie ou infinie. Nous poserons

$$\mu^*E = \lim_{\rho=0} M_\rho(E).$$

La condition I est évidemment satisfaite. De même II, car si $A \supset B$ toute suite de cercles recouvrant A recouvre aussi B , de sorte que $M_\rho(A) \geq M_\rho(B)$ et à la limite $\mu^*A \geq \mu^*B$.

Soit maintenant la suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, en nombre fini ou non. Supposons que chacun de ces ensembles soit de mesure extérieure bornée et, si la suite est infinie, supposons la somme

$$\mu^*A_1 + \mu^*A_2 + \dots + \mu^*A_n + \dots$$

convergente, sinon l'inégalité III n'aurait pas besoin d'être démontrée.

Remarquons que, comme $\mu^* A_n \geq M_\rho(A_n)$, la somme

$$M_\rho(A_1) + M_\rho(A_2) + \dots + M_\rho(A_n) + \dots$$

est aussi convergente.

On peut recouvrir A_n par une suite de cercles de rayons au plus égaux à ρ et dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ ne dépasse pas

$$M_\rho(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'ensemble $A = A_1 + A_2 + \dots$ est entièrement recouvert par la réunion de tous les cercles ainsi obtenus, dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons, chacun au plus égal à ρ , ne dépasse pas

$$[M_\rho(A_1) + M_\rho(A_2) + \dots] + \varepsilon,$$

expression qui, elle-même, ne dépasse pas

$$[\mu^* A_1 + \mu^* A_2 + \dots] + \varepsilon.$$

On a donc

$$M_\rho(A) \leq [\mu^* A_1 + \mu^* A_2 + \dots] + \varepsilon,$$

d'où à la limite, pour $\rho = 0$,

$$\mu^* A \leq [\mu^* A_1 + \mu^* A_2 + \dots] + \varepsilon.$$

Et, comme ceci est vrai quel que soit ε , on a l'inégalité III.

Si la distance des deux ensembles A_1 et A_2 est positive et égale à d et si l'on recouvre l'ensemble $A = A_1 + A_2$ par des cercles de rayon au plus égal à ρ , on voit que, dès que $\rho < \frac{\delta}{2}$, aucun cercle recouvrant des points de A_1 ne peut recouvrir aussi des points de A_2 , et inversement. On peut donc partager les cercles considérés en deux groupes : ceux qui recouvrent A_1 et ceux qui recouvrent A_2 ; et l'on en déduit que

$$M_\rho(A) \geq M_\rho(A_1) + M_\rho(A_2),$$

d'où à la limite

$$\mu^* A \geq \mu^* A_1 + \mu^* A_2,$$

et en tenant compte de l'inégalité III on a

$$\mu^* A = \mu^* A_1 + \mu^* A_2.$$

On pourrait montrer aussi que la condition V est également satisfaite, mais nous ne le ferons pas car nous n'avons pas à l'utiliser.

b. Revenons donc à notre suite d'ensembles E_1, E_2, \dots dont chacun contient le précédent et qui sont tous intérieurs à un même domaine borné. Soit E l'ensemble limite de E_n .

D'abord il est clair que

$$M(E_n) \leq M(E_{n+1}) \leq M(E)$$

de sorte que, pour n infini, $M(E_n)$ a une limite λ , et que

$$\lambda \leq M(E).$$

Nous allons montrer maintenant que $M(E) \leq \lambda$ en prouvant que, quel que soit ε positif, E peut être recouvert par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\lambda + \varepsilon$.

Soit $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_p^{(n)}, \dots$ une suite de cercles recouvrant E_n et dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $M(E_n) + \frac{1}{n}$. Nous pouvons toujours supposer cette suite infinie en ajoutant au besoin des cercles de rayon nul choisis arbitrairement dans le domaine borné qui contient les E_n . Supposons les cercles $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots$ rangés par ordre de rayons décroissants, avec un procédé de classement quelconque à égalité de rayons.

Soient $r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \dots, r_p^{(n)}, \dots$ leurs rayons. On a

$$p[r_p^{(n)}]^\alpha \leq \sum_{i=1}^{+\infty} [r_i^{(n)}]^\alpha \leq M(E_n) + \frac{1}{n} \leq \lambda + 1,$$

d'où

$$r_p^{(n)} \leq \left[\frac{\lambda + 1}{p} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Tous les rayons sont donc bornés par $(\lambda + 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ et par suite tous les centres sont intérieurs à un même domaine borné. Il en résulte que de toute suite croissante de nombres entiers on peut extraire une suite partielle $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ telle que les cercles $C_p^{(n_1)}, C_p^{(n_2)}, \dots, C_p^{(n_k)}, \dots$ aient un cercle limite C_p de rayon r_p . On voit par le procédé diagonal

qu'il existe une suite $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ telle qu'il en soit ainsi quel que soit p . On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_n^\alpha = \sigma \leq \lambda.$$

En effet

$$\sum_{p=1}^q r_p^\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^q [r_p^{(n_k)}]^\alpha \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{+\infty} [r_p^{(n_k)}]^\alpha = \lambda.$$

Soit la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p, \dots$ telle que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + \dots = \frac{\varepsilon}{2}$, et faisons correspondre à chaque cercle C_p le cercle C'_p concentrique à celui-ci et de rayon r'_p défini par

$$r'_p{}^\alpha = r_p^\alpha + \varepsilon_p,$$

de sorte que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} r'_p{}^\alpha = \sigma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A tout entier p on peut faire correspondre l'entier $K(p)$ tel que pour $k \geq K(p)$ les cercles $C_1^{(n_k)}, C_2^{(n_k)}, \dots, C_p^{(n_k)}$ soient tous intérieurs respectivement à C'_1, C'_2, \dots, C'_p .

Cela étant, en désignant par $C_p^{(n)}$ ou C'_p l'ensemble des points appartenant au cercle correspondant ou à sa circonférence, posons

$$\begin{aligned} \Sigma &= C'_1 + C'_2 + \dots + C'_p + \dots; \\ \mathcal{E}_k &= [C_1^{(n_k)} + C_2^{(n_k)} + \dots + C_p^{(n_k)} + \dots] - \Sigma; \\ \mathcal{E}'_k &= \mathcal{E}_k \mathcal{E}_{k+1} \mathcal{E}_{k+2} \dots; \\ \mathcal{E} &= \lim \mathcal{E}'_k = \underline{\lim} \mathcal{E}_k. \end{aligned}$$

Il est clair que les ensembles $\Sigma, \mathcal{E}_k, \mathcal{E}'_k, \mathcal{E}$ sont mesurables avec la notion de mesure définie plus haut. D'autre part

$$E_{n_k} - \Sigma \subset \mathcal{E}_k$$

et, quel que soit q ,

$$E_{n_k} - \Sigma \subset E_{n_{k+q}} - \Sigma \subset \mathcal{E}_{k+q}.$$

de sorte que

$$E_{n_k} - \Sigma \subset \mathcal{E}'_k \quad \text{et} \quad E - \Sigma = \lim (E_{n_k} - \Sigma) \subset \mathcal{E}.$$

De plus, quel que soit p , dès que $k \geq K(p)$ l'ensemble \mathcal{E}_k est contenu

dans

$$\Sigma_{p,k} = C_{p+1}^{(nk)} + C_{p+2}^{(nk)} + \dots$$

de sorte que, pourvu que $k' \geq k$ et $k' \geq K(p)$, on a

$$\mathcal{E}'_k \subset \mathcal{E}'_{k'} \subset \Sigma_{p,k'}.$$

Mais si l'on a pris $p \geq \frac{\lambda+1}{\rho^2}$ tous les rayons des cercles dont la réunion forme $\Sigma_{p,k'}$ sont inférieurs au nombre positif ρ donné à l'avance et l'on en déduit que

$$M_\rho(\mathcal{E}'_k) \leq [r_{p+1}^{(nk)}]^\alpha + [r_{p+2}^{(nk)}]^\alpha + \dots = \sum_{i=1}^{+\infty} [r_i^{(nk')}]^\alpha - \sum_{i=1}^p [r_i^{(nk')}]^\alpha.$$

En faisant tendre k' vers $+\infty$, on a à la limite

$$M_\rho(\mathcal{E}'_k) \leq \lambda - \sum_{i=1}^p r_i^\alpha.$$

En faisant ensuite tendre ρ vers zéro, ce qui impose que p tende vers $+\infty$, on a à la limite

$$\mu^* \mathcal{E}'_k = \mu \mathcal{E}'_k \leq \lambda - \sigma.$$

On a enfin

$$M(\mathcal{E}) \leq \mu^* \mathcal{E} = \mu \mathcal{E} = \lim_{k=\infty} \mu \mathcal{E}'_k \leq \lambda - \sigma.$$

\mathcal{E} , et par suite aussi $E - \Sigma$, peut donc être recouvert par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\lambda - \sigma + \frac{\varepsilon}{2}$.

Si l'on y ajoute les cercles composant Σ , on a une famille de cercles recouvrant E et dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas

$$\left(\lambda - \sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \lambda + \varepsilon.$$

3. Remarques sur un théorème de M. H. Cartan. — Dans sa thèse, M. H. Cartan démontre le résultat suivant ⁽¹⁾ : *α étant un nombre positif quelconque et Q_1, Q_2, \dots, Q_n , n points quelconques du plan,*

(1) Voir p. 25.

l'ensemble des points P où l'on a

$$\frac{1}{n} \sum_i \log \frac{1}{PQ_i} \geq \frac{1}{\alpha} - \log k$$

peut être recouvert par des cercles, en nombres p au plus égal à n, dont les rayons $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ satisfont à l'égalité

$$\sum \rho_j^\alpha = (\alpha k)^\alpha.$$

Nous aurons à utiliser ce résultat, les points Q_1, Q_2, \dots, Q_n étant les zéros d'un polynôme.

Ce résultat est un cas particulier du théorème suivant :

Si $f(r)$ est une fonction décroissante de r continue pour r positif et tendant vers $+\infty$ pour $r=0$, et $\varphi(r)$ une fonction positive de r continue pour r positif et telle que l'intégrale $\int_0^r f(t) \varphi(t) dt$ ait un sens, et si l'on pose

$$\Phi(r) = \int_0^r \varphi(t) dt,$$

Q_1, Q_2, \dots, Q_n étant des points quelconques du plan, l'ensemble des points P où l'on a

$$\frac{1}{n} \sum_i f(PQ_i) \geq \frac{\int_0^k f(t) \varphi(t) dt}{\Phi(k)}$$

peut être recouvert par des cercles, en nombre p au plus égal à n, dont les rayons satisfont à

$$\sum_j \Phi\left(\frac{\rho_j}{\alpha}\right) = \Phi(k).$$

M. H. Cartan généralise ce théorème en y remplaçant la somme $\frac{1}{n} \sum f(PQ_i)$ par l'intégrale $\int f(r) \mu(Q) d\sigma$ étendue à tout le plan, r désignant la distance du point P au point variable Q et $\mu(Q)$ une densité non négative, continue, et telle que cette intégrale ait un sens et que l'intégrale $\int \mu(Q) d\sigma$ étendue à tout le plan soit égale à $+1$.

Les points où l'inégalité correspondant à la précédente est satisfaite sont alors recouverts par une suite de cercles, finie ou non, telle que

$$\sum_j \Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right) \leq \Phi(k).$$

Le principe de la démonstration consiste à définir une suite de cercles satisfaisant à cette condition et telle que, si P est extérieur à tous les cercles de cette suite, l'intégrale $\int \mu(Q) d\sigma$ étendue au cercle de centre P et de rayon u soit inférieure, pour $u \leq k$, à $\frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$.

On peut généraliser le raisonnement en montrant que, si $\mu(e)$ est une fonction d'ensemble non négative dont la valeur pour tout le plan est égale à 1, et si l'on désigne par $\mu(P, u)$ la valeur de $\mu(e)$ pour l'ensemble formé par l'intérieur du cercle de centre P et de rayon u et sa circonférence, on peut trouver une suite de cercles, finie ou non, dont les rayons ρ_1, ρ_2, \dots satisfont à

$$\sum \Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right) \leq \Phi(k),$$

et telle que, si P est extérieur à tous les cercles de cette suite, on a pour $u \leq k$

$$\mu(P, u) < \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}.$$

Si l'on suppose de plus que l'intégrale $\int f(PQ) d\mu(e)$ étendue à tout le plan a un sens, cette inégalité entraînera

$$\int f(PQ) d\mu(e) < \frac{\int_0^k f(t) \varphi(t) dt}{\Phi(k)}.$$

En premier lieu, u étant fixé, $\mu(P, u)$ est une fonction non négative du point P *semi-continue supérieurement*. En effet, si, P étant fixé, u' tend vers u en décroissant, le cercle *fermé* de centre P et de rayon u' a pour limite le cercle *fermé* de centre P et de rayon u , de sorte que $\mu(P, u')$ tend vers $\mu(P, u)$; par suite, étant donné un nombre positif ε arbitraire, on peut trouver η positif tel que

$$\mu(P, u + \eta) < \mu(P, u) + \varepsilon.$$

Il suffit que $PP' < \eta$ pour que le cercle de centre P' et de rayon u soit *intérieur* au cercle de centre P et de rayon $u + \eta$, de sorte que

$$\mu(P', u) \leq \mu(P, u + \eta) < \mu(P, u) + \varepsilon.$$

D'autre part, u étant toujours fixé, quel que soit le nombre positif ε , on peut trouver un cercle tel que, si P lui est extérieur, l'on a

$$\mu(P, u) < \varepsilon.$$

Soit en effet P_0 un point fixe du plan, et η un nombre positif quelconque. Si $P_0P > u + \eta$ le cercle fermé de centre P et de rayon u est contenu dans l'ensemble des points M satisfaisant à

$$P_0P - u - \eta < P_0M \leq P_0P + u,$$

de sorte que

$$\mu(P, u) \leq \mu(P_0, P_0P + u) - \mu(P_0, P_0P - u - \eta).$$

Mais, comme pour r infini $\mu(P_0, r)$ a une limite, d'ailleurs égale à 1, on peut trouver un nombre R tel que l'inégalité $r \geq R$ entraîne

$$\mu(P_0, r + u) - \mu(P_0, r - u - \eta) < \varepsilon.$$

Alors pour $P_0P > R$ on a

$$\mu(P, u) < \varepsilon.$$

Enfin on sait que $\mu(P, u)$ est toujours inférieure ou égale à 1, mais elle ne peut être toujours nulle car cela entraînerait que la fonction $\mu(e)$ soit nulle pour tout carré de côté inférieur à $u\sqrt{2}$ et par suite pour le plan tout entier,

Il résulte de tout cela que, pour chaque valeur de u , la fonction $\mu(P, u)$ a un maximum positif $G(u)$, au plus égal à 1, qui est atteint au moins en un point; l'ensemble des points où il est atteint est nécessairement fermé et borné.

Il est clair que $G(u)$ est une fonction non décroissante de u , et par suite semi-continue supérieurement à gauche et inférieurement à droite. La fonction

$$G(u) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$$

est donc aussi semi-continue supérieurement à gauche et inférieure-

ment à droite. Il en résulte que, s'il existe des valeurs de u positives et au plus égales à k pour lesquelles

$$G(u) - \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)} \geq 0 \quad \text{ou} \quad G(u) \geq \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}, \quad (1)$$

l'une d'entre elles est plus grande que toutes les autres et satisfait à

$$G(u) - \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)} = 0 \quad \text{ou} \quad G(u) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}.$$

En effet si u_1 est la borne supérieure des valeurs de u au plus égales à k telles que

$$G(u) - \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)} \geq 0,$$

il résulte de la semi-continuité supérieure à gauche que

$$G(u_1) - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} \geq 0,$$

de sorte que u_1 est la plus grande valeur de u , au plus égale à k , qui satisfasse à cette inégalité. Mais de plus, si $u_1 < k$, il résulte de la semi-continuité inférieure à droite que

$$G(u_1) - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} \leq 0,$$

et si $u_1 = k$ on a encore la même inégalité car

$$G(k) \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\Phi(k)}{\Phi(k)} = 1.$$

On a donc nécessairement

$$G(u_1) - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} = 0.$$

Soit alors C_1 le cercle de rayon u_1 ayant son centre en l'un des points P où $\mu(P, u_1) = G(u_1)$ choisi suivant une loi quelconque (on pourra prendre par exemple le plus à gauche parmi ceux dont l'ordonnée est la plus petite). En désignant par $\overline{C_1}$ l'ensemble des points situés à

(1) S'il n'en existe pas, on a toujours $\mu(P, u) < \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$ pour $u \leq k$.

l'intérieur du cercle $\overline{C_1}$ ou sur sa frontière, posons

$$\mu_1(e) = \mu(e - \overline{C_1}),$$

de sorte que $\mu_1(e)$ est une fonction non négative qui satisfait à

$$\mu_1(e) \leq \mu(e)$$

et qui prend pour le plan tout entier la valeur

$$1 - \mu(\overline{C_1}) = 1 - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)}.$$

Appelons $(\mu_1 P, u)$ la valeur de $\mu_1(e)$ pour l'ensemble formé des points intérieurs au cercle de centre P et de rayon u et des points de sa circonférence. Il est clair que l'on a

$$\mu_1(P, u) \leq \mu(P, u).$$

En raisonnant sur $\mu_1(P, u)$ comme on l'a fait sur $\mu(P, u)$, on voit qu'elle admet pour chaque valeur de u un maximum $G_1(u)$, d'ailleurs évidemment au plus égal à $G(u)$, qui est atteint au moins en un point; s'il est positif, l'ensemble des points où il est atteint est fermé et borné. S'il existe des valeurs de u positives et au plus égales à k pour lesquelles $G_1(u) \geq \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$, l'une d'entre elles est plus grande que toutes les autres et satisfait à $G_1(u) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$. Soit u_2 cette valeur. On a nécessairement $u_2 \leq u_1$, car

$$G_1(u_2) \leq G(u_2) \quad \text{et par suite} \quad G(u_2) \geq \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(k)}.$$

Soit C_2 le cercle de rayon u_2 ayant pour centre l'un des points où $\mu_1(P, u) = G_1(u)$, choisi avec la même loi que plus haut. Alors, en désignant par $\overline{C_2}$ l'ensemble des points intérieurs à C_2 et des points de sa circonférence, on posera

$$\mu_2(e) = \mu_1(e - \overline{C_2}),$$

de sorte que l'on aura

$$0 \leq \mu_2(e) \leq \mu_1(e)$$

et que $\mu_2(e)$ prendra pour le plan tout entier la valeur

$$1 - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} - \mu_1(\overline{C_2}) = 1 - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} - \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(k)}.$$

On définira ensuite $\mu_2(P, u)$, $G_2(u)$, puis, s'il y a lieu, u_3 , le cercle C'_3 , et une nouvelle fonction $\mu_3(e)$. Et ainsi de suite. L'on ne peut être arrêté que si l'on rencontre une fonction $\mu_q(e)$ telle que la fonction $G_q(u)$ correspondante soit inférieure à $\frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$ pour toutes les valeurs de u inférieures ou égales à k . On aura alors défini q cercles C'_1, C'_2, \dots, C'_q de rayons u_1, u_2, \dots, u_q et, comme la fonction d'ensemble *non négative* $\mu_q(e)$ prendra pour le plan tout entier la valeur

$$1 - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} - \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(k)} - \dots - \frac{\Phi(u_q)}{\Phi(k)},$$

on aura

$$\sum_{i=1}^q \frac{\Phi(u_i)}{\Phi(k)} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^q \Phi(u_i) \leq \Phi(k).$$

Si cette circonstance ne se présente pas, on aura une suite infinie de cercles $C'_1, C'_2, \dots, C'_p, \dots$ de rayons $u_1, u_2, \dots, u_p, \dots$ et, comme pour chaque valeur de p la fonction *non négative* $\mu_p(e)$ prendra pour le plan tout entier la valeur

$$1 - \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)} - \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(k)} - \dots - \frac{\Phi(u_p)}{\Phi(k)},$$

on aura, quel que soit p ,

$$\sum_{i=1}^p \Phi(u_i) \leq \Phi(k).$$

La série $\Sigma \Phi(u_j)$ sera donc convergente, ce qui entraîne que $\Phi(u_p)$, et par suite u_p , tendent vers zéro pour p infini, et l'on aura

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \Phi(u_j) \leq \Phi(k).$$

Étant donnée une valeur positive u_0 de u au plus égale à k , il n'y aura qu'un nombre fini de nombres u_j au moins égaux à u_0 , puisque la suite des u_j est finie ou tend vers zéro. Supposons qu'il y en ait p : ou bien il n'existe pas de cercle C'_{p+1} , auquel cas on a

$$G_p(u) < \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$$

à la seule condition que

$$0 < u \leq k;$$

ou bien il existe un cercle C'_{p+1} de rayon u_{p+1} inférieure à u_0 et l'on a

$$G_p(u) < \frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$$

pourvu que

$$u_{p+1} < u \leq k.$$

Dans les deux cas l'on a

$$G_p(u_0) < \frac{\Phi(u_0)}{\Phi(k)},$$

de sorte que, quel que soit le point P,

$$\mu_p(P, u_0) < \frac{\Phi(u_0)}{\Phi(k)}.$$

Si le cercle de centre P et de rayon u_0 est *extérieur* à tous les cercles C'_1, C'_2, \dots, C'_p , on a

$$\mu_p(P, u_0) = \mu(P, u_0),$$

et par suite

$$\mu(P, u_0) < \frac{\Phi(u_0)}{\Phi(k)}.$$

Si l'on appelle d_j la distance de P au centre du cercle C'_j , le cercle de centre P et de rayon u_0 est *extérieur* à C'_j à condition que

$$d_j > u_0 + u_j \quad \text{ou} \quad d_j - u_j > u_0.$$

Associons alors à chaque cercle C'_j le cercle concentrique C_j de rayon $\rho_j = 2u_j$. Si P est *extérieur* à tous les cercles C_j , on a pour toutes les valeurs de j

$$d_j > 2u_j \quad \text{d'où} \quad d_j - u_j > u_j,$$

et par suite, quel que soit u_0 , la condition $d_j - u_j > u_0$ est satisfaite pour tous les cercles C'_j de rayon u_j au moins égal à u_0 , de sorte que l'on a, quel que soit u_0 au plus égal à k ,

$$\mu(P, u_0) < \frac{\Phi(u_0)}{\Phi(k)}.$$

Et les rayons des cercles C_j satisfont bien à

$$\sum \Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right) \leq \Phi(k), \quad \text{puisque} \quad \frac{\rho_j}{2} = u_j.$$

En particulier, si l'on prend $\varphi(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ (avec $\alpha > 0$), de sorte que $\Phi(r) = r^\alpha$, on voit que, si $\mu(e)$ est une fonction d'ensemble non négative qui prend la valeur 1 pour le plan entier, il existe une suite de cercles C_1, C_2, \dots pour laquelle la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $(2k)^\alpha$, et telle que, si P est extérieur à tous ces cercles, la valeur $\mu(P, u)$ de la fonction $\mu(e)$ pour le cercle fermé de centre P et de rayon u satisfasse pour toute valeur de u au plus égale à k à l'inégalité

$$\mu(P, u) < \left(\frac{u}{k}\right)^\alpha.$$

II. — Cas où l'ensemble \mathcal{E} est borné.

Nous allons établir le théorème suivant :

$P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ étant une suite de polynomes à zéros distribués régulièrement, et pour laquelle l'ensemble \mathcal{E} est borné : 1° quelle que soit la suite partielle $P_{n_1}(z), P_{n_2}(z), \dots, P_{n_k}(z), \dots$, on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| = \int_{\mathcal{E}} \log r d\psi(e),$$

où r désigne la distance du point z à un point variable de E, sauf peut-être sur un ensemble contenu dans E et qui peut être recouvert, quels que soient les nombres positifs α et ε , par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε . Sur cet ensemble on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| < \int_{\mathcal{E}} \log r d\psi(e);$$

2° si z est extérieur à E, l'expression $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ converge vers

$$\int_{\mathcal{E}} \log r d\psi(e).$$

La convergence est uniforme dans tout domaine borné disjoint de E.

Remarquons d'abord que, si D est un domaine contenant à son intérieur les zéros $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}$ de $P_n(z)$, l'expression

$$U_n(z) = \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$$

est égale à

$$\int_D \log r d\psi_n(e),$$

r désignant la distance du point z à un point Q variable dans D . Pour le voir il suffit de décomposer D en ensembles partiels en prenant des ensembles constitués chacun par un zéro de $P_n(z)$ puis l'ensemble des points restants de D . L'intégrale sur ce dernier ensemble est évidemment nulle, tandis qu'il est clair que l'intégrale sur un zéro $\alpha_i^{(n)}$ d'ordre q est égale à

$$\frac{q}{n} \log |z - \alpha_i^{(n)}|.$$

1. Cela étant, supposons d'abord que le point z soit extérieur à E . Soit le domaine fermé D constitué par la couronne limitée par deux cercles ayant pour centre le point z , l'un assez grand pour contenir tout E à son intérieur, l'autre assez petit pour être entièrement extérieur à E . A partir d'une certaine valeur de n tous les zéros de $P_n(z)$ sont intérieurs à D et l'on a

$$U_n(z) = \int_D \log r d\psi_n(e).$$

La fonction $\log r$ étant une fonction continue de Q dans le domaine D , pour n infini $U_n(z)$ tend vers

$$U(z) = \int_D \log r d\psi(e) = \int_E \log r d\psi(e).$$

Si l'on suppose z variable dans un domaine borné Δ disjoint de E , on peut déterminer un domaine fermé D contenant E à son intérieur, mais borné et disjoint de Δ . Dès que tous les zéros de $P_n(z)$ sont intérieurs à D , on a

$$U_n(z) = \int_D \log r d\psi_n(e).$$

Mais, si δ est la distance de D à Δ et si r' et r'' sont les valeurs de r pour deux points Q' et Q'' de D , on a, quel que soit z dans Δ ,

$$|\log r' - \log r''| < \frac{Q'Q''}{\delta},$$

de sorte que $\log r$ est une fonction de Q uniformément continue par rapport à Q et bornée sur le domaine D lorsque z décrit le domaine Δ . Par suite, pour n infini, $U_n(z)$ converge *uniformément* dans Δ vers

$$\int_D \log r d\psi(e) = \int_E \log r d\psi(e).$$

D'ailleurs l'uniformité de la convergence de $U_n(z)$ vers sa limite dans Δ résulte aussi de l'égalité de continuité des fonctions $U_n(z)$: z et z' étant deux points de Δ on a, dès que tous les zéros de $P_n(z)$ sont intérieurs à D ,

$$\left| \frac{1}{n} \log |z' - \alpha_i^{(n)}| - \frac{1}{n} \log |z - \alpha_i^{(n)}| \right| < \frac{1}{n} \frac{|z' - z|}{\delta},$$

d'où par addition

$$|U_n(z') - U_n(z)| < \frac{|z' - z|}{\delta}.$$

2. Supposons maintenant que le point z appartienne à E . Soit $f_p(x)$ la fonction continue de x égale à $\log x$ pour $x \geq e^{-p}$ et à $-p$ pour $0 \leq x < e^{-p}$. Si D est un cercle ayant pour centre le point z et contenant tout E à son intérieur, dès que tous les zéros de $P_n(z)$ sont intérieurs à D , on a

$$U_n(z) = \int_D \log r d\psi_n(e) \leq \int_D f_p(r) d\psi_n(e).$$

La fonction $f_p(r)$ étant une fonction continue de Q dans le cercle fermé D , l'intégrale $\int_D f_p(r) d\psi_n(e)$ tend, pour n infini, vers

$$\int_D f_p(r) d\psi(e) = \int_E f_p(r) d\psi(e),$$

et l'on a par suite

$$\overline{\lim} U_n(z) \leq \int_E f_p(r) d\psi(e).$$

Par définition de l'intégrale $\int_E \log r d\psi(e)$ le second membre de cette

inégalité tend vers cette intégrale quand p tend $+\infty$. On a donc

$$\overline{\lim} U_n(z) \leq \int_K \log r d\psi(e).$$

3. Soit maintenant $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ une suite quelconque d'entiers croissants, α un nombre positif quelconque, et ε un nombre positif inférieur à $4 \times 2^\alpha$. Déterminons le nombre k par l'égalité

$$(2k)^\alpha = \frac{\varepsilon}{4} \quad (1).$$

Puis soit C un carré contenant E à son intérieur et choisi de telle manière que $\psi(e)$ prenne la valeur zéro pour l'ensemble des points de toute parallèle à l'un de ses côtés qui le partage en deux morceaux commensurables. Soit a le côté de ce carré. Soit m un entier que nous nous réservons de faire varier par la suite, mais que nous supposons en tous cas assez grand pour que l'on ait

$$\frac{2a\sqrt{2}}{m+1} \leq k.$$

Partageons C en $(m+1)^2$ carrés égaux par des parallèles à ses côtés. A chacun des m^2 points de rencontre de ces parallèles faisons correspondre le carré ayant son centre en ce point et ses côtés parallèles à ceux de C et de longueur $\frac{2a}{m+1}$. On a ainsi m^2 carrés C_1, C_2, \dots, C_{m^2} tels que tout point intérieur à C est intérieur à l'un au moins d'entre eux, et que la fonction $\psi(e)$ prend la valeur zéro pour le périmètre de chacun d'eux. Nous désignerons par C_i soit le carré C_i lui-même, soit l'ensemble des points intérieurs à ce carré; et par \bar{C} l'ensemble des points intérieurs au carré C et des points de son périmètre. Quel que soit i compris entre 1 et m^2 , lorsque n tend vers l'infini $\psi_n(C_i)$ tend vers $\psi(C_i)$.

Soit $Q_{i,n}(z)$ le produit $\prod [z - \alpha_j^{(n)}]$ étendu à tous les zéros de $P_n(z)$ intérieurs au carré C_i , et $R_{i,n}(z)$ le même produit étendu à tous les

(1) De sorte que $k < 1$.

zéros restants ⁽¹⁾, de sorte que

$$\Pi_n(z) = Q_{i,n}(z) R_{i,n}(z),$$

et

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Pi_n(z)|} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|Q_{i,n}(z)|} + \frac{1}{n} \log \frac{1}{|R_{i,n}(z)|}.$$

On voit de suite que, dès que n est assez grand pour que tous les zéros de $P_n(z)$ soient intérieurs à C , l'on a

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{|R_{i,n}(z)|} = \int_{\bar{C}-C_i} \log \frac{1}{r} d\psi_n(e),$$

r désignant la distance du point z à un point Q variable. Si z est extérieur à C ou intérieur au carré C_i la fonction $\log \frac{1}{r}$ est une fonction de Q continue sur le domaine fermé $\bar{C} - C_i$ et, comme $\psi(e)$ est nulle pour la frontière de ce domaine, l'intégrale $\int_{\bar{C}-C_i} \log \frac{1}{r} d\psi_n(e)$ tend, pour n infini, vers

$$\int_{\bar{C}-C_i} \log \frac{1}{r} d\psi(e) = \int_{E-C_i} \log \frac{1}{r} d\psi(e).$$

Il résulte de là que, z étant quelconque à l'intérieur de C , si l'on appelle C_j un carré C_i qui contienne z à son intérieur, l'on a

$$\lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} = \int_{E-C_j} \log \frac{1}{r} d\psi(e) + \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|Q_{j,n_k}(z)|},$$

et comme $\log \frac{1}{r}$ est positif en tous les points de C_j

$$(1) \quad \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} \leq \int_E \log \frac{1}{r} d\psi(e) + \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|Q_{j,n_k}(z)|}.$$

D'autre part, si $\psi_n(C_i) \neq 0$, l'inégalité

$$(2) \quad \frac{1}{n} \log \frac{1}{|Q_{i,n}(z)|} > \psi_n(C_i) \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right]$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{n \psi_n(C_i)} \log \frac{1}{|Q_{i,n}(z)|} > \frac{1}{\alpha} - \log \frac{k}{m^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

(1) Chacun de ces produits étant pris égal à 1 s'il ne contient aucun facteur.

Et, comme par ailleurs $Q_{i,n}(z)$ est de degré $n\psi_n(C_i)$, il résulte du premier théorème de M. H. Cartan cité plus haut que l'ensemble $E_{i,n}$ des points du plan où l'on a l'inégalité (2) peut être recouvert par des cercles, d'ailleurs en nombre au plus égal à $n\psi_n(C_i)$, dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas

$$\left(\frac{2k}{m^\alpha}\right)^\alpha = \frac{(2k)^\alpha}{m^2} = \frac{\varepsilon}{4m^2}.$$

Si $\psi_n(C_i) = 0$, on a $Q_{i,n}(z) = 1$ et l'ensemble $E_{i,n}$ est vide. L'ensemble E_n formé par la réunion des $E_{i,n}$, où i vaut successivement $1, 2, \dots, m^2$ peut donc être recouvert par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{4}$, et l'ensemble $\varinjlim E_{n_k}$ pourra, lui, être recouvert par une suite S de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépassera pas $\frac{\varepsilon}{2}$.

Si z n'appartient pas à E_n , on a, quel que soit i compris entre 1 et m_2 ,

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{|Q_{i,n}(z)|} \leq \psi_n(C_i) \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right].$$

Si z est *extérieur* à tous les cercles de la suite S , il n'appartient pas à l'ensemble $\varinjlim E_{n_k}$ et par suite il existe une infinité de valeurs de k pour lesquelles il n'appartient pas à E_{n_k} de sorte que l'on a, *quel que soit* i ,

$$\varinjlim \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|Q_{i,n_k}(z)|} \leq \psi(C_i) \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right].$$

En particulier, si z est intérieur à C et extérieur à tous les cercles de la suite S , ceci est vrai pour la valeur j de i considérée plus haut et l'on a, à cause de l'inégalité (1),

$$\varinjlim \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} \leq \int_E \log \frac{1}{r} d\psi(e) + \psi(C_j) \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right],$$

et, comme le carré C_j est intérieur au cercle ayant pour centre le point z et pour rayon $\frac{2a\sqrt{2}}{m+1}$,

$$\varinjlim \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} \leq \int_E \log \frac{1}{r} d\psi(e) + \psi\left(z, \frac{2a\sqrt{2}}{m+1}\right) \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right],$$

$\psi(z, u)$ désignant la valeur de $\psi(e)$ pour le cercle fermé de centre z et de rayon u .

Mais la fonction $\frac{\psi(e)}{\psi(E)}$ prend la valeur 1 pour le plan tout entier et, d'après le résultat énoncé à la fin du chapitre précédent, il existe une suite de cercles S' dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse par $(2k)^\alpha = \frac{\varepsilon}{4}$ et telle que, si z est extérieur à tous les cercles de cette suite, on ait pour $u \leq k$

$$\frac{\psi(z, u)}{\psi(E)} < \left(\frac{u}{k}\right)^\alpha \quad \text{ou} \quad \psi(z, u) < \psi(E) \left(\frac{u}{k}\right)^\alpha.$$

Comme nous avons supposé $\frac{2a\sqrt{2}}{m+1} \leq k$, nous aurons, si z est extérieur à tous les cercles de la suite S' ,

$$\psi\left(z, \frac{2a\sqrt{2}}{m+1}\right) < \psi(E) \left(\frac{2a\sqrt{2}}{k}\right)^\alpha \frac{1}{(m+1)^\alpha}.$$

Par suite, si z est intérieur à C mais extérieur à tous les cercles des suites S et S' , on aura

$$\begin{aligned} \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} &< \int_E \log \frac{1}{r} d\psi(e) \\ &+ \psi(E) \cdot \left(\frac{2a\sqrt{2}}{k}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{(m+1)^\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right]. \end{aligned}$$

Autrement dit l'ensemble des points de E où l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} &\geq \int_E \log \frac{1}{r} d\psi(e) \\ &+ \psi(E) \cdot \left(\frac{2a\sqrt{2}}{k}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{(m+1)^\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right] \end{aligned}$$

est recouvert par les cercles des suites S et S' , c'est-à-dire par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\frac{3\varepsilon}{4}$.

Mais, si l'on fait tendre m vers $+\infty$, le produit

$$\frac{1}{(m+1)^\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \log k + \frac{2}{\alpha} \log m \right]$$

tend vers zéro par valeurs positives, de sorte que l'ensemble considéré a pour limite l'ensemble des points de E où l'on a

$$\liminf \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{|\Pi_{n_k}(z)|} > \int_E \log r \, d\psi(e)$$

ou

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| < \int_E \log r \, d\psi(e).$$

Ce dernier ensemble peut donc être recouvert par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

En tous les autres points de E on a nécessairement

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| = \int_E \log r \, d\psi(e).$$

Prenons par exemple

$$P_n(z) = \prod_{p^2+q^2 < \frac{n}{\pi}} \left[z - (p+qi) \sqrt{\frac{\pi}{n}} \right] \quad (p \text{ et } q \text{ entiers}).$$

L'ensemble \mathcal{E} est contenu dans le cercle $|z| \leq 1$ et E se compose évidemment de ce cercle. D'autre part, si l'on appelle $\mu_n(e)$ la fonction d'ensemble égale à $\frac{1}{n}$ pour l'ensemble composé d'un point d'affixe de la forme $(p+qi) \sqrt{\frac{\pi}{n}}$, on a ici

$$\psi_n(e) = \mu_n(eE).$$

Or on voit immédiatement que la suite des fonctions $\mu_n(e)$ est convergente vers $\frac{1}{\pi} m(e)$, $m(e)$ désignant la mesure de l'ensemble e , car la valeur de $\mu_n(e)$ pour un rectangle fermé de côtés parallèles aux axes et de longueurs respectives a et b a pour limite $\frac{ab}{\pi}$. La distribution des zéros des polynomes $P_n(z)$ est donc régulière, et l'on a

$$\psi(e) = \frac{1}{\pi} m(eE).$$

On a

$$\int_E \log r \, d\varphi(e) = \begin{cases} \log |z| & \text{si } |z| \geq 1 \\ \frac{|z|^2 - 1}{2} & \text{si } |z| < 1. \end{cases}$$

On a d'autre part $A_n = 1$ et par suite $\Pi_n(z) = P_n(z)$.

Il résulte donc de notre théorème que :

1° Pour $|z| > 1$ l'expression $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$ tend vers $\log |z|$, la convergence étant uniforme dans tout domaine borné où le minimum de $|z|$ est plus grand que 1.

2° Pour $|z| \leq 1$, si $P_{n_1}(z), P_{n_2}(z), \dots, P_{n_k}(z), \dots$ est une suite partielle quelconque, on a *en général*

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |P_{n_k}(z)| = \frac{|z|^2 - 1}{2}.$$

Il peut y avoir des points où l'on ait

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |P_{n_k}(z)| < \frac{|z|^2 - 1}{2},$$

mais, quels que soient les nombres positifs α et ε , on peut les recouvrir par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

On aboutirait aux mêmes résultats en prenant

$$P_n(z) = \left[z^{q_n} - \left(\frac{1}{q_n} \right)^{\frac{q_n}{2}} \right] \left[z^{q_n} - \left(\frac{2}{q_n} \right)^{\frac{q_n}{2}} \right] \left[z^{q_n} - \left(\frac{3}{q_n} \right)^{\frac{q_n}{2}} \right] \dots \left[z^{q_n} - \left(\frac{q_n}{q_n} \right)^{\frac{q_n}{2}} \right]$$

ou

$$P_n(z) = z \left[z^3 - \frac{1}{q_n^3} \right] \left[z^3 - \frac{2^3}{q_n^3} \right] \dots \left[z^{2q_n-1} - \frac{(q_n-1)^{2q_n-1}}{q_n^{2q_n-1}} \right],$$

où q_n désigne la racine carrée de n à une unité près par défaut.

Dans l'un et l'autre cas l'ensemble E se compose du cercle $|z| \leq 1$ et l'on voit que la valeur de $\psi_n(e)$ pour l'intérieur du quadrilatère curviligne défini par

$$\theta_1 < \arg z < \theta_2, \quad \rho_1 < |z| < \rho_2.$$

avec

$$0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq 1,$$

a pour limite $\frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)(\rho_2^2 - \rho_1^2)$, de sorte que la suite $\psi_n(e)$ converge vers

$$\psi(e) = \frac{1}{\pi} m(eE).$$

Remarque. — On peut se demander si l'on n'a pas compliqué inutilement l'énoncé en introduisant la limite supérieure de $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ pour une suite partielle quelconque et si l'on ne pourrait pas trouver un énoncé analogue faisant intervenir simplement une limite unique de $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$, ou bien si l'on ne pourrait pas réduire davantage l'ensemble exceptionnel en montrant par exemple qu'il est dénombrable. Nous allons prouver que ces deux améliorations de l'énoncé sont impossibles.

a. Montrons sur un premier exemple qu'il peut se faire que la suite $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ ne soit convergente vers $\int_E \log r d\psi(e)$ en aucun point d'un carré, de sorte que *presque partout sur ce carré* elle n'aura pas de limite unique.

Désignons par $E [\]$ la partie entière de la quantité réelle entre crochets. Soient alors

$$p_n = E \left[\frac{\log(3n+1)}{2 \log 2} \right] \quad \text{et} \quad r_n = n - \frac{2^{2p_n} - 1}{3},$$

de sorte que, lorsque n croît de $\frac{2^{2p} - 1}{3}$ à $\frac{2^{2p+2} - 1}{3} - 1$, p_n reste égal à p et r_n croît de 0 à $2^{2p} - 1$. Soient a_n et b_n le quotient et le reste de la division de r_n par 2^{p_n} , et soient

$$q_n = E \left[\sqrt{n \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)} \right] \quad \text{et} \quad \theta_n = n - q_n^2.$$

Notons que, pour n infini, p_n tend vers l'infini, de sorte que $\sqrt{n \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)}$ et par suite q_n tendent vers l'infini et sont équivalents

à \sqrt{n} . D'autre part on a

$$q_n^2 \leq n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = n - \frac{n}{p_n},$$

de sorte que

$$\theta_n = n - q_n^2 \geq \frac{n}{p_n}.$$

Définissons alors les zéros de $P_n(z)$ de la façon suivante : θ_n d'entre eux seront égaux à $\frac{a_n + ib_n}{q_n}$, les autres auront pour valeurs tous les nombres de la forme $\frac{s + it}{q_n}$, s et t étant deux entiers pouvant varier de 0 à $q_n - 1$. Il est clair que l'ensemble E se compose du carré

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

De plus la distribution des zéros des polynomes $P_n(z)$ est régulière et la fonction $\psi(e)$ est égale à la mesure de l'ensemble eE . En effet pour $0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$ le nombre de zéros dont la partie réelle ne dépasse pas x et la partie imaginaire ne dépasse pas y est égal soit à

$$\{E[q_n x] + 1\} \times \{E[q_n y] + 1\},$$

soit à

$$\{E[q_n x] + 1\} \times \{E[q_n y] + 1\} + \theta_n.$$

Si $x = 1$ ou si $y = 1$, il faut remplacer $E[q_n x] + 1$ par $E[q_n x]$, ou $E[q_n y] + 1$ par $E[q_n y]$. Le quotient par n tend toujours vers xy , car $\frac{E[q_n x]}{\sqrt{n}}$ tend toujours vers x et $\frac{E[q_n y]}{\sqrt{n}}$ tend toujours vers y tandis que $\frac{\theta_n}{n}$ tend vers 0 puisque $\frac{\theta_n}{n} = 1 - \left(\frac{q_n}{\sqrt{n}}\right)^2$.

Nous allons montrer qu'à tout point $z = x + iy$ intérieur au carré on peut faire correspondre une suite n_k telle que

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| \leq \int_E \log r \, d\varphi(e) - \log 2.$$

Il suffit en effet de prendre

$$n_k = \frac{2^{2k} - 1}{3} + 2^k E[2^k x] + E[2^k y],$$

ce qui donne

$$p_{n_k} = k, \quad r_{n_k} = 2^k \mathbf{E}[2^k x] + \mathbf{E}[2^k y],$$

d'où

$$a_{n_k} = \mathbf{E}[2^k x], \quad b_{n_k} = \mathbf{E}[2^k y], \quad \left| z - \frac{a_{n_k} + ib_{n_k}}{2^{p_{n_k}}} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2^k},$$

et

$$g_{n_k} \geq \frac{n_k}{k}.$$

Dans l'expression

$$\frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| = \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{1}{n_k} \log |z - z_{\mu}^{(n_k)}|,$$

où $z_1^{(n_k)}, \dots, z_{n_k}^{(n_k)}$ sont les zéros de $P_{n_k}(z)$, on peut séparer les zéros intérieurs au cercle ω de centre z et de rayon η et les zéros extérieurs à ce cercle ou situés sur sa circonférence, η étant assez petit pour que ω tout entier soit intérieur à E . La seconde somme est égale à $\int_{E-\omega} \log r d\psi_{n_k}(e)$ et tend pour k infini vers $\int_{E-\omega} \log r d\psi(e)$. Dès que k

est assez grand pour que $\frac{\sqrt{2}}{2^k} < \eta$, la première contient au moins $\frac{n_k}{k}$ termes inférieurs à

$$\frac{1}{n_k} \left(\frac{1}{2} - k \right) \log 2,$$

(au moins ceux relatifs aux zéros égaux à $\frac{a_{n_k} + ib_{n_k}}{2^{p_{n_k}}}$), les autres étant négatifs. Elle est donc inférieure à

$$\frac{1}{2^k} \log 2 - \log 2,$$

qui, pour k infini, tend vers $-\log 2$.

On a donc

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\Pi_{n_k}(z)| \leq \int_{E-\omega} \log r d\psi(e) - \log 2$$

et en faisant tendre η vers 0 on obtient l'inégalité annoncée.

Il est à remarquer que ceci ne contredit pas notre théorème car la suite $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ considérée ici, au lieu d'être fixée une fois pour toutes, dépend du point z .

b. Montrons sur un deuxième exemple que l'on peut avoir l'inégalité

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)| < \int_E \log r d\psi(e)$$

sur un ensemble ayant la puissance du continu.

Posons

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 2^2, \quad \varphi(3) = 2^{2^2}, \quad \dots, \quad \varphi(k) = 2^{\varphi(k-1)}, \dots,$$

de sorte qu'il est évident que $\varphi(k)$ croît indéfiniment ainsi que $\frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)}$. A chaque entier n faisons correspondre l'entier k défini par $\varphi(k) \leq n < \varphi(k+1)$, entier qui croît indéfiniment avec n . Puis prenons

$$P_n(z) = \left\{ \left[z - \frac{1}{\varphi(k-1)} \right] \left[z - \frac{2}{\varphi(k-1)} \right] \dots \left[z - \frac{\varphi(k-1)-1}{\varphi(k-1)} \right] [z-1] \right\}^s$$

avec

$$s = E \left[\frac{n}{\varphi(k-1)} \right] \quad \left(\text{de sorte que } s \geq \frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)} \right).$$

Tous les zéros de $P_n(z)$ sont réels et compris entre 0 et 1 et il est clair que l'ensemble E se compose du segment (0, 1). De plus la distribution des zéros est régulière et $\psi(e)$ est égale à la mesure linéaire de l'ensemble eE . En effet le nombre des zéros de $P_n(z)$ satisfaisant à $0 \leq z \leq x$ (pour $0 \leq x \leq 1$) est égal à

$$s \times E[x \varphi(k-1)]$$

et son quotient par n tend vers x , car s est équivalent à $\frac{n}{\varphi(k-1)}$.

On a donc

$$\int_E \log r d\psi(e) = \int_0^1 \log |z-x| dx.$$

A tout nombre réel θ compris entre 0 et 1 nous ferons correspondre un point $z(\theta)$ tel que

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)| \leq \int_0^1 \log |z-x| dx - \log 2.$$

A chaque valeur de l'entier k faisons correspondre les segments S_k

de l'axe réel ayant comme longueur commune $\frac{4}{\varphi(k+2)}$ et comme centres les points $\frac{m}{\varphi(k+1)}$, où m prendra les valeurs 1, 2, ..., $\varphi(k+1) - 1$. Quel que soit $k > 0$, les segments S_k n'empiètent pas les uns sur les autres car la distance de deux centres consécutifs est $\frac{1}{\varphi(k+1)}$ et on a $\frac{\varphi(k+2)}{\varphi(k+1)} \geq 4$. De plus il est clair que chaque segment S_k contient à son intérieur exactement 3 segments S_{k+1} .

Soit alors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ la suite des chiffres qui composent le nombre θ écrit dans le système à base 3. Prenons le $\alpha_1 + 1$ ième à partir de la gauche des segments S_1 , puis le $\alpha_2 + 2$ ième à partir de la gauche des segments S_2 intérieurs au précédent, puis le $\alpha_3 + 1$ ième à partir de la gauche des segments S_3 intérieurs au précédent, etc. Nous avons ainsi une suite d'intervalles emboîtés qui tendent vers un point $z(\theta)$, et il est clair qu'à deux θ différents correspondent deux points différents.

Quel que soit θ , $P_n(z)$ a toujours s zéros, d'ailleurs confondus, dont la distance à $z(\theta)$ ne dépasse pas $\frac{2}{\varphi(k)} = 2^{1-\varphi(k-1)}$. Si dans l'expression de $\frac{1}{n} \log |\Pi_n(z)|$ on sépare comme plus haut les termes correspondant aux zéros dont la distance à $z(\theta)$ dépasse η et les autres, la première somme tend, pour n infini, vers

$$\int_0^{z(\theta)-\eta} \log |z(\theta) - x| dx + \int_{z(\theta)+\eta}^1 \log |z(\theta) - x| dx,$$

tandis que la seconde est inférieure, dès que n est assez grand pour que $\frac{2}{\varphi(k)} < \eta$, à

$$\frac{1}{n} \times s \times [1 - \varphi(k-1)] \log 2,$$

expression qui tend vers $-\log 2$. On a donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \frac{1}{n} \log |\Pi_n[z(\theta)]| \leq & \int_0^{z(\theta)-\eta} \log |z(\theta) - x| dx \\ & + \int_{z(\theta)+\eta}^1 \log |z(\theta) - x| dx - \log 2, \end{aligned}$$

et en faisant tendre η vers zéro on obtient l'inégalité annoncée.

III. — Cas général:

N'assujettissons plus maintenant l'ensemble \mathcal{E} à aucune condition, et, pour simplifier le langage, convenons de dire que deux suites de polynomes $P_n(z)$ et $\mathcal{P}_n(z)$ sont équivalentes si le rapport $\frac{P_n(z)}{\mathcal{P}_n(z)}$ est une constante. Nous allons établir le théorème suivant :

Étant donnée une suite de polynomes $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ dont les zéros ont une distribution régulière, le rapport $\frac{P_n}{n}$ restant borné, il existe une suite équivalente $\mathcal{P}_n(z)$ et une fonction réelle $\Phi(z)$ telles que l'on ait les propriétés suivantes :

1° *Quel que soit le domaine borné D, la différence*

$$\Phi(z) - \int_D \log r d\psi(e),$$

où r désigne la distance du point z à un point variable, est une fonction harmonique dans D.

2° *Pour toute suite partielle $\mathcal{P}_{n_1}(z), \mathcal{P}_{n_2}(z), \dots, \mathcal{P}_{n_k}(z), \dots$ on a*

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{P}_{n_k}(z)| = \Phi(z),$$

sauf peut-être sur un ensemble contenu dans E et qui peut, quels que soient les nombres positifs α et ε , être recouvert par une suite de cercles pour laquelle la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε . Sur cet ensemble, s'il existe, on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{P}_{n_k}(z)| < \Phi(z).$$

3° *S'il existe dans le plan des points qui n'appartiennent pas à E, en ces points l'expression $\frac{1}{n} \log |\mathcal{P}_n(z)|$ converge vers $\Phi(z)$. La convergence est uniforme dans tout domaine borné disjoint de E.*

On reconnaît immédiatement que le théorème du chapitre précédent

est l'expression de celui-ci dans le cas où \mathcal{E} est borné : on voit que dans ce cas on peut prendre

$$\Phi(z) = \int_E \log r d\psi(e) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{A_n} = \Pi_n(z).$$

Dans le cas général nous prendrons un point quelconque z_0 du plan et un cercle ouvert ω de centre z_0 et telle que la fonction $\psi(e)$ prenne la valeur zéro pour sa circonférence; nous appellerons $R_n(z)$ le polynôme égal au produit $\Pi[z - \alpha_i^{(n)}]$ étendu à tous les zéros de $P_n(z)$ appartenant à ω , ou à 1 s'il n'existe pas de tels zéros, et $Q_n(z)$ le polynôme $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$. Nous verrons que l'on peut prendre

$$\mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z_0)} \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e),$$

r désignant la distance du point z à un point Q variable de E , et r_0 la distance du même point Q au point z_0 .

S'il existe des points du plan qui n'appartiennent pas à E , on pourra prendre pour z_0 l'un d'eux et choisir ω assez petit pour être entièrement extérieur à E . On aura ainsi

$$\Phi(z) = \int_E \log \frac{r}{r_0} d\psi(e),$$

et

$$\mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}$$

dès que $P_n(z)$ n'aura plus de zéros dans ω ; mais, comme on peut toujours modifier un nombre fini de $\mathfrak{R}_n(z)$, on pourra prendre toujours

$$\mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}.$$

1. Plaçons-nous d'abord dans le cas où E ne contient pas le point z_0 et montrons que dans tout domaine borné Δ disjoint de E l'expression $\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right|$ converge uniformément vers $\int_E \log \frac{r}{r_0} d\psi(e)$.

C étant un cercle de centre z_0 assez grand pour contenir Δ entièrement à son intérieur, soit D un domaine contenant l'extérieur

de C , y compris le point à l'infini, contenant entièrement E à son intérieur, disjoint de Δ , et laissant le point z_0 à son extérieur. A partir d'une certaine valeur de n tous les zéros de $P_n(z)$ seront intérieurs à D et l'on aura

$$\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right| = \sum_1^{p_n} \frac{1}{n} \log \frac{|z - \alpha_i^{(n)}|}{|z_0 - \alpha_i^{(n)}|} = \int_D \log \frac{r}{r_0} d\psi_n(e).$$

Quel que soit η positif, on peut partager D en *un nombre fini* d'ensembles partiels e_i tels que le minimum m_i et le maximum M_i de $\log \frac{r}{r_0}$ sur e_i satisfassent pour tous les points z de Δ à $M_i - m_i < \eta$.

Soit en effet R le rayon du cercle C , et soit R' un nombre supérieur à R . Si $r_0 > R'$ on a

$$r_0 - R < r < r_0 + R$$

et

$$1 - \frac{R}{R'} < \frac{r}{r_0} < 1 + \frac{R}{R'},$$

d'où

$$\left| \log \frac{r}{r_0} \right| < -\log \left(1 - \frac{R}{R'} \right).$$

On peut toujours choisir R' assez grand pour que le second membre soit inférieur à $\frac{\eta}{2}$. Alors, si l'on prend pour l'un des e_i l'ensemble des points de D tels que $r_0 > R'$, l'oscillation de la fonction $\log \frac{r}{r_0}$ sur cet ensemble est inférieure à η . La partie restante de D est un domaine *borné* D' disjoint de Δ et la fonction $\log \frac{r}{r_0}$ est continue par rapport au point Q et à z lorsque Q décrit ce domaine et que z décrit Δ ; elle est par suite *uniformément* continue par rapport à Q sur ce domaine quand z décrit Δ .

Ce raisonnement prouve en même temps que la fonction $\log \frac{r}{r_0}$ est bornée sur D par un nombre indépendant du point z de Δ . Elle est en effet bornée sur $D - D'$ par $\frac{\eta}{2}$ et elle est encore bornée sur D' à cause de la continuité.

Il résulte de là que l'intégrale $\int_D \log \frac{r}{r_0} d\psi_n(e)$ converge uniformé-

ment sur Δ vers

$$\int_{\mathbf{D}} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) = \int_{\mathbf{E}} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e).$$

2. Revenant au cas général, remarquons que les suites $Q_n(z)$ et $R_n(z)$ sont des suites de polynômes dont les zéros sont distribués régulièrement. Les fonctions $\psi'_n(e)$ et $\psi''_n(e)$ correspondantes sont en effet égales respectivement à $\psi_n(e - \omega)$ et $\psi_n(e\omega)$. Si e_0 est un ensemble quelconque, la frontière de $e_0 - \omega$ se compose des points de la frontière de e_0 extérieurs à ω et peut-être de points pris sur la circonférence de ω , de sorte que, si la fonction $\psi(e - \omega)$ est nulle pour la frontière de e_0 , il en est de même de $\psi(e)$ pour la frontière de $e_0 - \omega$. De même si $\psi(e\omega)$ est nulle pour la frontière de e_0 , $\psi(e)$ est nulle pour la frontière de $e_0\omega$. Les suites $\psi'_n(e)$ et $\psi''_n(e)$ sont donc convergentes respectivement vers

$$\psi'(e) = \psi(e - \omega) \quad \text{et} \quad \psi''(e) = \psi(e\omega).$$

L'ensemble dérivé E' de l'ensemble de tous les zéros des polynômes $Q_n(z)$ se compose de tous les points de E extérieurs à ω et peut-être de points de E situés sur la frontière de ω . Le dérivé E'' de l'ensemble de tous les zéros des polynômes $R_n(z)$ se compose de l'ensemble $E\omega$ et peut-être de points de E situés sur la circonférence de ω .

Soit alors Δ un domaine borné quelconque disjoint de E , et par suite de E' et E'' . D'après ce que l'on vient de démontrer au paragraphe précédent, l'expression

$$\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right|$$

converge uniformément dans Δ vers

$$\int_{E'} \log \frac{r}{r_0} d\psi'(e) = \int_{E - \omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e).$$

D'après le théorème du chapitre II, l'expression

$$\frac{1}{n} \log |R_n(z)|$$

converge uniformément dans Δ vers

$$\int_{E''} \log r d\psi''(e) = \int_{E\omega} \log r d\psi(e).$$

Au total l'expression

$$\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z_0)} \right| = \frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right| + \frac{1}{n} \log |R_n(z)|$$

converge uniformément dans Δ vers

$$\int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e).$$

3. L'expression $\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right|$ converge encore vers $\int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e)$ en tout point extérieur à E' et en particulier partout sur ω .

Soit d'autre part $P_{n_1}(z), P_{n_2}(z), \dots, P_{n_k}(z), \dots$ une suite partielle quelconque extraite de la suite $P_n(z)$. Alors, en vertu du théorème du chapitre II, on a sur ω

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |R_{n_k}(z)| = \int_{E\omega} \log r d\psi(e),$$

sauf peut-être sur un ensemble \mathcal{A} contenu dans E'' , donc dans $E\omega$, et pouvant être recouvert, quels que soient les nombres positifs α et ε , par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε . Sur \mathcal{A} on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |R_{n_k}(z)| < \int_{E\omega} \log r d\psi(e).$$

Au total on voit que l'on a sur ω

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z_0)} \right| = \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e),$$

sauf sur l'ensemble \mathcal{A} , où l'on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z_0)} \right| < \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e).$$

4. Conservant toujours la même suite $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ considérons un autre cercle ouvert ω' de centre z_0 , et plus grand que ω , et

définissons les polynomes $q_n(z)$ à partir de ω' exactement comme nous avons défini $Q_n(z)$ à partir de ω .

Exactement de la même manière que pour ω nous verrons que l'on a dans ω'

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{q_{n_k}(z_0)} \right| = \int_{E-\omega'} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega'} \log r d\psi(e),$$

sauf peut-être sur un ensemble contenu dans $E\omega'$ et qui peut être recouvert, quels que soient α et ε , par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε . Sur cet ensemble on aura

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{q_{n_k}(z_0)} \right| < \int_{E-\omega'} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega'} \log r d\psi(e).$$

Mais la suite des polynomes $\frac{Q_n(z)}{q_n(z)}$ a ses zéros distribués régulièrement : la fonction $\psi_n''(e)$ correspondante est égale à $\psi_n[e(\omega' - \omega)]$ et l'on voit qu'elle a pour limite $\psi[e(\omega' - \omega)]$. Le dérivé E'' de l'ensemble de tous les zéros de ces polynomes se compose des points de E intérieurs à la couronne comprise entre les circonférences de ω et ω' et peut-être de points de E situés sur ces circonférences. D'après le théorème du chapitre II, en dehors de E'' l'expression $\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{q_n(z)} \right|$ converge vers

$$\int_{E''} \log r d\psi[e(\omega' - \omega)] = \int_{E(\omega' - \omega)} \log r d\psi(e).$$

En particulier $\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z_0)}{q_n(z_0)} \right|$ tend vers $\int_{E(\omega' - \omega)} \log r_0 d\psi(e)$ et par suite

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z_0)} \right| = \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{q_{n_k}(z)}{P_{n_k}(z_0)} \right| - \int_{E(\omega' - \omega)} \log r_0 d\psi(e).$$

En définitive on voit que sur ω' on a

$$(1) \quad \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z_0)} \right| \leq \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e),$$

l'ensemble des points où l'on a effectivement l'inégalité pouvant être

recouvert, quels que soient α et ε , par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

5. Le cercle ω' pouvant être pris aussi grand que l'on veut, on voit d'abord que l'on a la relation (1) *en tous les points du plan*.

Soit ensuite $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_i, \dots$ une suite de cercles ouverts tels que ω' et dont les rayons croissent indéfiniment; et fixons les nombres α et ε . L'ensemble des points de ω'_1 où l'on a

$$(2) \quad \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log \left| \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z_0)} \right| < \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e)$$

peut être recouvert par des cercles pour lesquels la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite pour chaque entier i l'ensemble des points de $\omega'_i - \omega'_{i-1}$ où l'on a l'inégalité (2), évidemment contenu dans l'ensemble des points de ω'_i où l'on a la même inégalité, peut être recouvert par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ième}}$ des rayons ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{2^i}$. On aura ainsi recouvert *tous les points du plan* où l'on a l'inégalité (2) par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

6. Quel que soit le domaine borné D, on a

$$\begin{aligned} & \left[\int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e) \right] - \int_D \log r d\psi(e) \\ &= \int_{(E-\omega)-D} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega-D} \log r d\psi(e) - \int_{(E-\omega)D} \log r_0 d\psi(e). \end{aligned}$$

C'est une fonction harmonique à l'intérieur de D.

A titre d'exemple prenons

$$P_n(z) = z^{q_n} \left[z^{q_n} - \left(\frac{1}{q_n-1} \right)^{q_n} \right] \left[z^{q_n} - \left(\frac{2}{q_n-2} \right)^{q_n} \right] \dots \left[z^{q_n} - \left(\frac{q_n-1}{1} \right)^{q_n} \right],$$

avec $q_n = E[\sqrt{n}]$.

Le degré de $P_n(z)$ est $p_n = q_n^2$, de sorte que le rapport $\frac{P_n}{n}$ reste au

plus égal à 1. L'ensemble E se compose du plan tout entier car on voit aisément que tout quadrilatère curviligne défini par les inégalités

$$\theta_1 < \arg z < \theta_2, \quad \rho_1 < |z| < \rho_2,$$

avec

$$0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2,$$

contient des points de \mathcal{E} . D'ailleurs la valeur de la fonction $\psi_n(e)$ pour ce quadrilatère a pour limite

$$\frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \left[\frac{1}{1 + \rho_1} - \frac{1}{1 + \rho_2} \right],$$

de sorte que les zéros des polynomes $P_n(z)$ ont une distribution régulière et que

$$\psi(e) = \int_e \frac{d\sigma}{2\pi |z| |1 + |z||^2},$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire.

On peut prendre pour ω par exemple le cercle $|z| < 1$. Alors $Q_n(0)$ est égal à

$$\left[\frac{(2p)!}{2(p!)^2} \right]^{2p} \quad \text{si } 4p^2 \leq n < (2p+1)^2,$$

et à

$$(-1)^p \left[\frac{(2p)!}{(p!)^2} \right]^{2p+1} \quad \text{si } (2p+1)^2 \leq n < (2p+2)^2.$$

D'autre part

$$\Phi(z) = \int_{E-\omega} \log r \, d\psi(e) + \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} \, d\psi(e) = \log[1 + |z|] - \log 2.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{P}_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(0)},$$

on a pour toute suite partielle $\mathcal{P}_{n_1}(z), \mathcal{P}_{n_2}(z), \dots, \mathcal{P}_{n_k}(z), \dots$

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{P}_{n_k}(z)| = \log[1 + |z|] - \log 2$$

dans tout le plan sauf au plus sur un ensemble susceptible, quels que soient α et ε positifs, d'être recouvert par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

D'ailleurs comme $\frac{1}{n} \log |Q_n(o)|$ a pour limite $\log 2$, de sorte que

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{X}_{n_k}(z)| = \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |P_{n_k}(z)| - \log 2,$$

cette égalité peut s'écrire

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |P_{n_k}(z)| = \log[1 + |z|].$$

Remarque. — La suite $\mathcal{X}_n(z)$ et la fonction $\Phi(z)$ dont notre énoncé affirme l'existence ne sont pas bien déterminées puisque nous avons donné une solution qui dépend d'un cercle arbitraire ω ; dans l'exemple qui précède nous avons obtenu une solution supplémentaire qui consistait à prendre tout simplement $\mathcal{X}_n(z) = P_n(z)$.

Si l'on a les propriétés de l'énoncé avec une suite $\mathcal{X}_n(z)$ et une fonction $\Phi(z)$ données, toutes les solutions s'obtiennent en multipliant $\mathcal{X}_n(z)$ par une constante μ_n telle que $\sqrt[n]{|\mu_n|}$ ait une limite μ , et augmentant $\Phi(z)$ de $\log \mu$.

Il est évident que le procédé indiqué fournit bien une solution. Inversement nous allons montrer que, si une fonction $\Phi_1(z)$ et une suite $\mathcal{X}_n^{(1)}(z) = \mu_n \mathcal{X}_n(z)$ sont telles que, pour toute suite partielle $\mathcal{X}_{n_1}^{(1)}(z), \mathcal{X}_{n_2}^{(1)}(z), \dots, \mathcal{X}_{n_k}^{(1)}(z), \dots$, l'on ait *presque partout* sur un domaine D

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{X}_{n_k}^{(1)}(z)| = \Phi_1(z),$$

on peut affirmer que $\sqrt[n]{|\mu_n|}$ a une limite μ et que l'on a *presque partout* sur D

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \log \mu.$$

En effet, si la suite partielle $\sqrt[n_k]{|\mu_{n_k}|}$ a une limite μ' , on a *presque partout*

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathcal{X}_{n_k}^{(1)}(z)| = \Phi(z) + \log \mu'.$$

On doit donc avoir *presque partout* sur D

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \log \mu'.$$

Ceci exclut la possibilité d'existence de deux limites différentes μ' et μ'' pour deux suites partielles $\sqrt[nk]{|\mu_{nk}|}$ et $\sqrt[nk]{|\mu'_{nk}|}$, et l'on a bien le résultat annoncé.

Si l'on suppose de plus que $\Phi_1(z)$ satisfait à la condition 1° de l'énoncé pour les domaines bornés contenus dans D , l'égalité

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \log \mu$$

a lieu *partout* à l'intérieur de D ; car la fonction $\Phi_1(z) - \Phi(z)$ est harmonique à l'intérieur de D .

Si D se compose de tout le plan, on a partout

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \log \mu.$$

IV. — Application aux séries $\Sigma a_n P_n(z)$.

Les résultats qui précèdent permettent de faire l'étude de la convergence des séries $\Sigma a_n P_n(z)$, où $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sont des coefficients variables, lorsque $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ est une suite donnée de polynomes dont le degré p_n varie avec n de façon que le rapport $\frac{p_n}{n}$ reste borné et dont les zéros ont une distribution régulière.

Soit en effet $\mathcal{P}_n(z) = \frac{P_n(z)}{\alpha_n}$ une des suites dont le théorème du chapitre précédent établit l'existence, et $\Phi(z)$ la fonction réelle qui lui est associée. La série $\Sigma a_n P_n(z)$ peut s'écrire $\Sigma a'_n \mathcal{P}_n(z)$, avec $a'_n = a_n \alpha_n$, et, si l'on pose $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a'_n|} = \lambda$, on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| = \Phi(z) + \log \lambda,$$

sauf peut-être aux points d'un ensemble contenu dans E et susceptible, quels que soient les nombres positifs α et ε , d'être recouvert par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε , ensemble sur lequel on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| < \Phi(z) + \log \lambda.$$

λ étant fixé, cet ensemble dépendra de la suite a_n .

La remarque de la fin du chapitre précédent permet de vérifier immédiatement que l'expression $\Phi(z) + \log \lambda$ est indépendante du choix particulier de $\mathfrak{R}_n(z)$ et $\Phi(z)$.

L'égalité

$$\frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| = \frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z)| + \log \sqrt[n]{|a'_n|}$$

montre d'abord que l'on a partout

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| \leq \overline{\lim} \frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z)| + \log \lambda \leq \Phi(z) + \log \lambda.$$

Ensuite, si l'on considère une suite partielle a'_{n_k} telle que $\sqrt[n_k]{|a'_{n_k}|}$ tende effectivement vers λ , la même égalité montre que l'on a

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |a_{n_k} P_{n_k}(z)| = \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathfrak{R}_{n_k}(z)| + \log \lambda,$$

et par conséquent

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| \geq \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathfrak{R}_{n_k}(z)| + \log \lambda,$$

d'où le résultat annoncé.

Il résulte de là que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est certainement convergente sur l'ensemble des points où

$$\Phi(z) + \log \lambda < 0,$$

et qu'elle est certainement divergente sur l'ensemble des points où

$$\Phi(z) + \log \lambda > 0,$$

à l'exception peut-être de points de E pouvant, quels que soient les nombres positifs α et ε , être recouverts par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

On ne peut rien conclure pour les points où

$$\Phi(z) + \log \lambda = 0.$$

A titre d'exemple prenons pour $P_n(z)$ les polynômes considérés au chapitre précédent. On peut prendre $\mathfrak{R}_n(z) = P_n(z)$, de sorte que $a'_n = a_n$, avec $\Phi(z) = \log[1 + |z|]$.

Le minimum de $\Phi(z)$ étant 0, la série $\Sigma a_n P_n(z)$ ne pourra être convergente sur un ensemble de mesure non nulle que si $\log \lambda < 0$, c'est-à-dire $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Cette condition étant supposée remplie, il y aura convergence à l'intérieur du cercle

$$\log[1 + |z|] + \log \lambda < 0 \quad \text{ou} \quad |z| < \frac{1}{\lambda} - 1,$$

et divergence à l'extérieur, sauf peut-être sur un ensemble jouissant de la propriété indiquée plus haut. On ne sait pas ce qui a lieu sur la circonférence.

Nous allons maintenant apporter plus de précision à ces résultats en établissant les théorèmes suivants :

I. *Quels que soient les nombres positifs α et ε , on peut déterminer un ensemble σ indépendant de la suite des coefficients a_n , et qui, s'il n'est pas vide, peut être recouvert par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε , de façon que, si l'on a sur un ensemble borné \mathcal{A}*

$$\Phi(z) + \log \lambda < \eta \quad (\text{avec } \eta > 0),$$

la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est uniformément convergente sur $\mathcal{A} - \sigma$.

II. *Si l'on a sur un ensemble borné \mathcal{A}*

$$\Phi(z) + \log \lambda < -\eta \quad (\text{avec } \eta > 0),$$

et si $\Phi(z)$ est continue sur \mathcal{A} et sa frontière, la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est uniformément continue sur \mathcal{A} .

1. Désignons par $\psi(z, u)$ comme au chapitre II, la valeur que prend la fonction $\psi(e)$ pour le cercle fermé de centre z et de rayon u . Appelons Ψ la valeur de la fonction $\psi(e)$ pour le plan tout entier, de sorte que la fonction $\frac{\psi(e)}{\Psi}$ prendra, elle, la valeur 1 pour le plan tout entier. Déterminons le nombre k par l'égalité $(2k)^\alpha = \varepsilon$.

D'après ce qui a été démontré au chapitre I, l'ensemble des points z

du plan où l'on n'a pas pour toutes les valeurs de u au plus égales à k

$$\frac{\psi(z, u)}{\Psi} < \left(\frac{u}{k}\right)^\alpha \quad \text{ou} \quad \psi(z, u) < \Psi \left(\frac{u}{k}\right)^\alpha$$

peut être recouvert par une suite de cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε . Nous allons montrer que l'on peut prendre pour σ cet ensemble.

Supposons donc que, pour une des séries $\Sigma a_n P_n(z)$ que l'on peut former avec la suite $P_n(z)$, l'on ait

$$\Phi(z) + \log \lambda < -\eta \quad (\eta > 0)$$

sur un ensemble borné \mathfrak{A} .

Le choix de la fonction $\Phi(z)$ et de la suite $\mathfrak{R}_n(z)$ n'ayant pas d'importance, supposons que l'on ait pris avec les notations du chapitre précédent

$$\mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z_0)} \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e),$$

et que ω ait été choisi de manière à contenir entièrement \mathfrak{A} à son intérieur.

En premier lieu sur \mathfrak{A} l'expression $\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right|$ converge *uniformément* vers $\int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e)$. Donc, si n est assez grand, on a, quel que soit z sur \mathfrak{A} ,

$$\frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right| < \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \frac{\eta}{5}.$$

Ensuite si $f_p(x)$ est la fonction, déjà considérée, qui vaut $\log x$ pour $x \geq e^{-p}$ et $-p$ pour $0 \leq x < e^{-p}$, l'intégrale $\int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e)$ tend en décroissant vers $\int_{E\omega} \log r d\psi(e)$ lorsque p croît vers $+\infty$; et, si e^{-p} est inférieur à la distance de \mathfrak{A} à la circonférence de ω , on a sur \mathfrak{A}

$$\int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e) - \int_{E\omega} \log r d\psi(e) = \int_p^{+\infty} \psi(z, e^{-t}) dt.$$

Si l'on suppose de plus que z n'appartient pas à σ et que $e^{-p} \leq k$, on a

pour $t \geq p$

$$\psi(z, e^{-t}) < \frac{\Psi}{k^z} e^{-zt},$$

et par suite

$$\int_p^{+\infty} \psi(z, e^{-t}) dt < \int_p^{+\infty} \frac{\Psi}{k^z} e^{-zt} dt = \frac{\Psi}{zk^z} e^{-zp}.$$

Au total on voit que, si p est assez grand, on a, quel que soit z sur $\mathcal{A} - \sigma$,

$$\int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e) < \int_{E\omega} \log r d\psi(e) + \frac{\eta}{5}.$$

p étant fixé $f_p(r)$ est *uniformément* continue par rapport au point Q variable sur ω et bornée sur ω quand z décrit l'ensemble \mathcal{A} , et par suite l'intégrale

$$\int_{\omega} f_p(r) d\psi_n(e),$$

qui est supérieure ou égale à $\frac{1}{n} \log |R_n(z)|$, converge *uniformément* sur \mathcal{A} vers

$$\int_{\omega} f_p(r) d\psi(e) = \int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e).$$

Donc, si n est assez grand, on a, quel que soit z sur $\mathcal{A} - \sigma$,

$$\frac{1}{n} \log |R_n(z)| < \int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e) + \frac{\eta}{5} < \int_{E\omega} \log r d\psi(e) + \frac{2\eta}{5}.$$

Si de plus n est encore assez grand pour que

$$\frac{1}{n} \log |a_n Q_n(z_0)| < \log \lambda + \frac{\eta}{5},$$

on aura partout sur $\mathcal{A} - \sigma$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |a_n P_n(z)| &= \frac{1}{n} \log |a_n Q_n(z_0)| + \frac{1}{n} \log \left| \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} \right| + \frac{1}{n} \log |R_n(z)| \\ &< \log \lambda + \int_{E-\omega} \log \frac{r}{r_0} d\psi(e) + \int_{E\omega} \log r d\psi(e) + \frac{4\eta}{5} \\ &= \Phi(z) + \log \lambda + \frac{4\eta}{5} < -\frac{\eta}{5}, \end{aligned}$$

d'où

$$|a_n P_n(z)| < e^{-n \frac{\eta}{5}},$$

d'où résulte la convergence uniforme.

2. Si $\Phi(z)$ est continue sur \mathcal{A} et sa frontière, il en est de même de $\int_{E\omega} \log r d\psi(e)$. Or l'intégrale

$$\int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e)$$

est une fonction continue du point z car, si r' et r'' désignent les distances de deux points z' et z'' au point variable Q , on a, quel que soit ce point,

$$|f_p(r') - f_p(r'')| < e^p |z' - z''|,$$

et par suite

$$\left| \int_{E\omega} f_p(r') d\psi(e) - \int_{E\omega} f_p(r'') d\psi(e) \right| < e^p \psi(E\omega) |z' - z''|.$$

Cette fonction continue tendant *en décroissant* vers la fonction $\int_{E\omega} \log r d\psi(e)$, continue également sur \mathcal{A} et sa frontière, lorsque p tend vers $+\infty$, la convergence est uniforme sur \mathcal{A} et sa frontière. On peut donc trouver p assez grand pour que l'on ait

$$\int_{E\omega} f_p(r) d\psi(e) - \int_{E\omega} \log r d\psi(e) < \frac{\eta}{5}$$

partout sur \mathcal{A} et non plus seulement sur $\mathcal{A} - \sigma$.

En reprenant alors le même raisonnement que ci-dessus, avec cette seule modification, on voit que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est uniformément convergente sur \mathcal{A} .

En particulier si $\Phi(z)$ est continue dans tout le plan la série $\Sigma a_n P_n(z)$ converge uniformément sur tout ensemble borné où $\Phi(z) + \log \lambda$ a un maximum négatif. C'est le cas par exemple pour la suite de polynomes que nous avons considérée au chapitre précédent et au début de celui-ci : il y a convergence uniforme de la série $\Sigma a_n P_n(z)$

dans le cercle $|z| \leq \rho$ si

$$\rho < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} - 1.$$

Dans le cas particulier où l'ensemble \mathcal{E} est borné, si l'on a $\psi(\mathcal{E}) \neq 0$, il n'est pas nécessaire de préciser dans nos énoncés que l'ensemble \mathcal{A} doit être borné mais on peut considérer simplement l'ensemble des points où

$$\Phi(z) + \log \lambda < -\tau.$$

Cet ensemble est en effet automatiquement borné puisque $\Phi(z)$ tend vers $+\infty$ quand z s'éloigne à l'infini.

Remarque. — S'il existe une région du plan où $\Phi(z)$ a une valeur constante Φ_0 , nos conclusions ne suffisent pas pour étudier la convergence de la série dans cette région dans le cas où l'on a

$$\log \lambda = -\Phi_0.$$

En effet on y a alors

$$\Phi(z) + \log \lambda = 0.$$

Prenons par exemple

$$P_n(z) = z^n - z^{\varphi(n)},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction positive de n telle que $\frac{\varphi(n)}{n}$ tende vers 0 pour n infini.

L'ensemble E se compose de la circonférence $\gamma: |z| = 1$ et de l'origine; la distribution des zéros est régulière et l'on a

$$\psi(e) = \frac{\alpha}{2\pi},$$

α désignant la mesure linéaire de l'ensemble $e\gamma$. On peut prendre

$$\mathcal{A}_n(z) = P_n(z) \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \int_E \log r \, d\psi(e) = \int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| \, d\theta,$$

ce qui donne

$$\Phi(z) = 0 \quad \text{pour} \quad |z| \leq 1 \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \log |z| \quad \text{pour} \quad |z| > 1.$$

Si

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est convergente à l'intérieur du cercle

$$\log |z| + \log \lambda \leq 0 \quad \text{ou} \quad |z| \leq \frac{1}{\lambda},$$

et divergente à l'extérieur. La convergence est uniforme à l'intérieur de tout cercle $|z| \leq \rho$ avec $\rho < \frac{1}{\lambda}$.

Si $\lambda > 1$, on a partout $\Phi(z) + \log \lambda > 0$, et par suite la série est convergente au plus en des points de E dont l'ensemble peut être recouvert, quels que soient les nombres positifs α et ε , par des cercles dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons ne dépasse pas ε .

Mais si $\lambda = 1$ on peut affirmer seulement que la série diverge à l'extérieur de γ , et l'on ne peut rien dire sur sa convergence à l'intérieur de ce cercle.

En fait, si l'on avait pris par exemple $\varphi(n) = 1$, la série est convergente pour $z = 0$ et de même nature que la série Σa_n en tous les autres points intérieurs à γ . Mais si par exemple $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, et $\varphi(n) = E[\log n]$ pour $n > 2$, on aura des résultats plus variés : si l'on prend le cas particulièrement simple où $a_n = n^\alpha$, avec $\alpha > 0$, on aura pour $n > 2$

$$n^{\alpha + \log |z|} < |a_n z^{\varphi(n)}| < \frac{1}{|z|} n^{\alpha + \log |z|};$$

la série sera donc certainement convergente pour $|z| < e^{-(\alpha+1)}$ et divergente pour $|z| > e^{-\alpha}$.

Toutes les fois que l'on aura $\psi(e) = 0$, c'est-à-dire que le quotient par n du nombre de zéros de $P_n(z)$ contenus dans un domaine borné quelconque tend vers 0, $\Phi(z)$ est constante sur tout le plan et par conséquent nos résultats permettent seulement de conclure que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est convergente partout, ou divergente presque partout, suivant que $\Phi(z) + \log \lambda$ est négatif ou positif, mais rien lorsque l'on a

$$\Phi(z) + \log \lambda = 0$$

dans tout le plan. En fait, il peut se présenter des circonstances variées.

A titre d'exemple prenons

$$P_n(z) = [z + e^{ni\theta} \sqrt{n}]^n,$$

θ étant incommensurable avec π .

On a bien $\psi(e) = 0$ et l'on peut prendre

$$\alpha_n(z) = \frac{P_n(z)}{P_n(0)} = \frac{P_n(z)}{e^{n^2\theta} n^{\frac{n}{2}}} \quad \text{avec } \Phi(z) = 0,$$

de sorte que le cas douteux est celui où

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n e^{n^2\theta} n^{\frac{n}{2}}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Nous allons montrer que, si l'on se donne arbitrairement un domaine convexe D , borné ou non, on peut déterminer a_n , satisfaisant naturellement à cette condition, de manière que la série $\sum a_n P_n(z)$ soit convergente à l'intérieur de ce domaine et divergente à l'extérieur.

Si l'on appelle $f(\varphi)$ la borne supérieure, finie ou non, des valeurs de h pour lesquelles la droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h = 0$$

rencontre D , il suffit de prendre

$$a_n = n^{-\frac{n}{2}} e^{-\sqrt{n} f(n\theta)}.$$

En effet avec cette valeur de a_n on a constamment, si l'on pose $z = x + iy$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \log |a_n P_n(z)| < x \cos n\theta + y \sin n\theta + \frac{|z|^2}{2\sqrt{n}} - f(n\theta);$$

si z est intérieur au domaine D , on en conclut, en appelant δ la distance de z à la frontière de D , que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \log |a_n P_n(z)| < -\delta + \frac{|z|^2}{2\sqrt{n}}$$

ou

$$|a_n P_n(z)| < e^{\frac{|z|^2}{2}} e^{-\sqrt{n}\delta},$$

d'où il suit que la série $\sum a_n P_n(z)$ est convergente.

Si au contraire le point $z = x + iy$ est *extérieur* à D , il existe une valeur φ_0 de φ telle que

$$x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - f(\varphi_0) > 0.$$

Soit k la valeur positive du premier membre. Si l'on choisit la suite n_k

de manière que $e^{n_k i \theta}$ tende vers $e^{i z_0}$, l'expression $\frac{1}{\sqrt{n_k}} \log |a_{n_k} P_{n_k}(z)|$ tend vers k . Par suite la série $\Sigma a_n P_n(z)$ est divergente.

V. — Étude des polynomes dérivés.

Soit $P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ une suite de polynomes dont les zéros sont distribués régulièrement, et dans laquelle E ne recouvre pas tout le plan.

Soit z_0 un point qui n'appartient pas à E et γ un cercle de centre z_0 et de rayon ρ assez petit pour être entièrement extérieur à E; soit ensuite γ' un autre cercle concentrique à γ , de rayon plus grand, et encore tout entier extérieur à E. Appelons D le domaine formé par l'extérieur de γ' , y compris le point à l'infini. Il est clair qu'à partir d'une certaine valeur de n tous les zéros de $P_n(z)$ sont intérieurs au domaine D, et si l'on pose

$$f(Q) = \frac{1}{z - u},$$

u désignant l'affixe du point Q variable, on a

$$\frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \int_D f(Q) d\psi_n(e).$$

Si Q et Q' sont tous deux extérieurs à un cercle de centre z_0 et de rayon R supérieur à ρ , on a, quel que soit z dans γ ,

$$|f(Q)| < \frac{1}{R - \rho}, \quad |f(Q')| < \frac{1}{R - \rho},$$

d'où

$$|f(Q') - f(Q)| < \frac{2}{R - \rho}.$$

Quel que soit le nombre positif η , on peut déterminer R assez grand pour que

$$\frac{2}{R - \rho} < \eta.$$

Alors, quels que soient les points Q et Q' pris sur l'extérieur du

cercle $|z - z_0| = R$, on aura

$$|f(Q') - f(Q)| < \eta.$$

Ensuite $f(Q)$ sera *uniformément* continue par rapport à Q dans la couronne comprise entre le cercle γ' et le cercle $|z - z_0| = R$, et sur sa frontière, quand z décrira l'intérieur de γ ; de sorte que l'on pourra décomposer ce domaine en un nombre fini d'ensembles partiels e_i tels que l'on ait pour tout couple de points Q et Q' de e_i et pour tout point z intérieur à γ

$$|f(Q') - f(Q)| < \eta.$$

Enfin, si ρ' est le rayon de γ' , on a, quel que soit Q dans D et quel que soit z dans γ ,

$$|f(Q)| < \frac{1}{\rho' - \rho}.$$

Il résulte de là que, pour n infini, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{D}} f(Q) d\psi_n(e) = \frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$$

converge *uniformément* dans γ vers

$$\int_{\mathfrak{D}} f(Q) d\psi(e) = \int_{\mathfrak{E}} f(Q) d\psi(e).$$

Le même raisonnement pouvant être fait au voisinage de tout point z_0 extérieur à E , l'expression $\frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$ converge uniformément dans tout domaine borné disjoint de E vers l'intégrale que l'on vient d'écrire. Cette expression étant holomorphe dans un tel domaine à partir d'une certaine valeur de n , la fonction limite $h(z)$ est holomorphe à l'extérieur de E .

Il résulte de là que *toute région extérieure à E ne contenant aucun zéro de $h(z)$ ne contiendra, à partir d'une certaine valeur de n , aucun zéro de $P'_n(z)$. Au contraire, dans une région où $h(z)$ ne sera pas identiquement nulle, tout cercle ayant son centre en un zéro d'ordre p de $h(z)$ et assez petit pour ne pas en contenir d'autres contiendra, à partir d'une certaine valeur de n , exactement p zéros de $P'_n(z)$.*

Par suite le dérivé E' de l'ensemble des zéros des polynomes $P'_n(z)$

ne contient, en dehors de E et des régions où $h(z)$ serait identiquement nulle, que les zéros de $h(z)$. Ces derniers sont d'ailleurs au plus en ensemble dénombrable puisque tout domaine borné disjoint de E n'en contient qu'un nombre fini.

D'autre part si $\mathfrak{R}_n(z) = \frac{P_n(z)}{\alpha_n}$ est une des suites équivalentes à $P_n(z)$ dont le théorème du Chapitre III affirme l'existence, et $\Phi(z)$ la fonction réelle correspondante, en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}'_n(z)| = \frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z)| + \frac{1}{n} \log \left| \frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} \right| + \frac{1}{n} \log n,$$

on voit qu'en tout point extérieur à E et où $h(z) \neq 0$ l'expression

$$\frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}'_n(z)| = \frac{1}{n} \log \left| \frac{P'_n(z)}{\alpha_n} \right|$$

converge vers $\Phi(z)$ comme $\frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z)|$.

Remarquons enfin que, si dans une région du plan extérieure à E $h(z)$ est identiquement nulle, $\Phi(z)$ y est constante. En effet, si z' et z'' sont deux points de cette région, on peut les réunir par un chemin entièrement intérieur à cette région et qui par suite ne rencontrera, pour n assez grand, aucun zéro de $P_n(z)$, et l'on a

$$\frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z'')| - \frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z')| = \mathcal{R} \left[\int_{z'}^{z''} \frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz \right];$$

par suite de la convergence uniforme de $\frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$ vers 0 sur le chemin d'intégration on a à la limite

$$\Phi(z'') - \Phi(z') = 0.$$

Si donc il n'existe dans le plan aucune région où $\Phi(z)$ soit constante, $\frac{1}{n} \log \left| \frac{P'_n(z)}{\alpha_n} \right|$ converge vers $\Phi(z)$ partout à l'extérieur de E, sauf peut-

Dans le cas où E est borné et l'extérieur de E d'un seul tenant, ce être sur un ensemble dénombrable (formé des zéros de $h(z)$).

Le résultat est une conséquence de la remarque (5) du Chapitre II de la première partie.

Il est essentiel de supposer qu'il n'existe aucune région où

$\Phi(z) = \text{const.}$ En effet si l'on prend par exemple $P_n(z) = z^n - 1$ on peut prendre

$$\mathfrak{R}_n(z) = P_n(z) \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |z| \leq 1 \\ \log |z| & \text{pour } |z| > 1 \end{cases}.$$

Mais $P'_n(z) = nz^{n-1}$ et $\frac{1}{n} \log |P'_n(z)|$ tend, quel que soit z , vers $\log |z|$ qui n'est égal à $\Phi(z)$ que pour $|z| \geq 1$.

Dans le cas particulier où E est borné et son complémentaire d'un seul tenant il ne peut exister aucune région où $\Phi(z) = \text{const.}$, du moins si $\psi(E) \neq 0$; sinon $\Phi(z)$ qui est harmonique en dehors de E devrait être constante partout en dehors de E ; or elle tend vers l'infini comme $\psi(E) \log |z|$ lorsque z tend vers l'infini.

VI. — Réciproque du théorème du Chapitre III.

Le théorème du Chapitre III admet la réciproque suivante :

$P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots$ étant une suite de polynômes dans laquelle le rapport du degré de chaque polynôme à son indice reste borné, s'il existe une suite équivalente $\mathfrak{R}_1(z), \mathfrak{R}_2(z), \dots, \mathfrak{R}_n(z), \dots$ et une fonction réelle $\Phi(z)$ telles que, pour toute suite partielle

$$\mathfrak{R}_{n_1}(z), \mathfrak{R}_{n_2}(z), \dots, \mathfrak{R}_{n_k}(z), \dots,$$

l'on ait presque partout

$$\overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathfrak{R}_{n_k}(z)| = \Phi(z),$$

la distribution des zéros des polynômes de la suite est régulière. La fonction $\psi(e)$ est entièrement déterminée par la connaissance de $\Phi(z)$.

A. Notre démonstration reposera sur le théorème suivant de la théorie du potentiel :

Si deux fonctions potentielles $U_1(P)$ et $U_2(P)$ satisfont presque partout sur un ensemble ouvert O à l'égalité : $U_1(P) - U_2(P) = H(P)$, $H(P)$ étant une fonction harmonique sur O , les fonctions de masses sont égales sur tout ensemble contenu dans O .

1. Soit Γ une courbe de Jordan et $G(P)$ la fonction de Green du point à l'infini pour cette courbe. Soit C_λ la courbe d'équation $G(P) = \lambda$ (avec $\lambda > 0$) et désignons par \bar{C}_λ l'ensemble fermé formé par l'intérieur et le périmètre de C_λ , et par \underline{C}_λ l'ensemble ouvert formé par l'intérieur de C_λ .

Soit d'autre par $\psi(e)$ une fonction d'ensemble non négative et nulle sur tout ensemble sans point commun avec un certain domaine borné D ; et soit

$$U(P) = \int_{\mathfrak{D}} \log PQ \, d\psi(e) \quad (Q \text{ étant un point variable dans } D).$$

Alors l'intégrale

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} U(P) \frac{\partial G}{\partial n} \, ds,$$

où la dérivée $\frac{\partial G}{\partial n}$ est prise suivant la normale extérieure à C_λ , est une fonction convexe de λ et ses dérivées à gauche et à droite sont égales respectivement à

$$\psi(\underline{C}_\lambda) \quad \text{et} \quad \psi(\bar{C}_\lambda).$$

Posons en effet, $f_p(x)$ étant la fonction déjà considérée plus haut,

$$U_p(P) = \int_{\mathfrak{D}} f_p(PQ) \, d\psi(e)$$

et

$$u_p(\lambda, Q) = \int_{C_\lambda} f_p(PQ) \frac{\partial G}{\partial n} \, ds,$$

de sorte que, lorsque p tendra vers $+\infty$, $U_p(P)$ tendra en décroissant vers $U(P)$ et $u_p(\lambda, Q)$ tendra en décroissant vers

$$u(\lambda, Q) = \int_{C_\lambda} \log PQ \frac{\partial G}{\partial n} \, ds,$$

qui vaut $2\pi\lambda$ si Q est à l'intérieur de C_λ ou sur C_λ et $2\pi G(Q)$ si Q est à l'extérieur de C_λ .

$U_p(P)$ est une fonction continue de P , car si $PP' < \delta$ on a, quel que soit Q ,

$$|f_p(P'Q) - f_p(PQ)| < \delta e^p,$$

et par suite

$$|U_p(P') - U_p(P)| < \psi(D) \delta e^p.$$

De même $u_p(\lambda, Q)$ est une fonction continue de Q .

Partageons alors D en un nombre fini d'ensembles partiels e_i de diamètre inférieur à δ , et soient m_i et M_i le minimum et le maximum de $f_p(PQ)$ quand P reste fixe et Q décrit e_i . On a

$$\sum m_i \psi(e_i) \leq U_p(P) \leq \sum M_i \psi(e_i)$$

et

$$M_i - m_i < \delta e^p \quad \text{d'où} \quad \sum M_i \psi(e_i) - \sum m_i \psi(e_i) < \psi(D) \delta e^p.$$

Par suite, Q_i étant un point choisi dans e_i suivant une loi quelconque, on a

$$\left| U_p(P) - \sum_i f_p(PQ_i) \psi(e_i) \right| < \psi(D) \delta e^p,$$

d'où l'on déduit par intégration

$$\left| \int_{C_\lambda} U_p(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds - \sum_i u_p(\lambda, Q_i) \psi(e_i) \right| < \psi(D) \delta e^p \int_{C_\lambda} \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

Si l'on fait tendre δ vers 0, on obtient à la limite

$$\left| \int_{C_\lambda} U_p(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_b u_p(\lambda, Q) d\psi(e) \right| \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{C_\lambda} U_p(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_b u_p(\lambda, Q) d\psi(e).$$

Si ensuite on fait croître p vers $+\infty$ on a à limite

$$2\pi I(\lambda) = \int_b u(\lambda, Q) d\psi(e)$$

ou

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_b u(\lambda, Q) d\psi(e).$$

On en déduit, en tenant compte de la valeur de $u(\lambda, Q)$, que si $\lambda' > \lambda$

$$\psi(\overline{C_{\lambda'}}) (\lambda' - \lambda) \leq I(\lambda') - I(\lambda) \leq \psi(\underline{C_{\lambda'}}) (\lambda' - \lambda)$$

ou

$$\psi(\overline{C_{\lambda}}) \leq \frac{I(\lambda') - I(\lambda)}{\lambda' - \lambda} \leq \psi(\underline{C_{\lambda}}),$$

d'où résulte immédiatement le résultat annoncé.

2. Si $\psi(e)$ n'est plus supposée non négative, elle est la différence de deux fonctions non négatives $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ et $I(\lambda)$ est la différence des deux fonctions de λ définies de la même façon à partir de $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$. Par conséquent $I(\lambda)$ admet encore une dérivée à gauche et une dérivée à droite qui sont égales respectivement à

$$\psi(\underline{C_{\lambda}}) \quad \text{et} \quad \psi(\overline{C_{\lambda}}).$$

Si d'autre part $H(P)$ est une fonction harmonique dans la courbe C_{λ_0} , l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_{\lambda}} H(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

est constante pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$, et par suite dans cet intervalle la fonction

$$J(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{\lambda}} [U(P) + H(P)] \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

admet encore pour dérivées à gauche et à droite

$$\psi(\underline{C_{\lambda}}) \quad \text{et} \quad \psi(\overline{C_{\lambda}}).$$

3. Cela étant, soient $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ deux fonctions d'ensemble, la première nulle pour tout ensemble sans point commun avec un domaine borné D' , la seconde nulle pour tout ensemble sans point commun avec un domaine borné D'' ; soient

$$U_1(P) = \int_{D'} \log PQ d\psi'(e)$$

et

$$U_2(P) = \int_{D''} \log PQ d\psi''(e);$$

soit O un domaine ouvert quelconque; et supposons que l'on soit assuré qu'il existe une fonction $H(P)$ harmonique sur O et telle que

l'on ait au moins *presque partout* sur O

$$U_1(P) - U_2(P) = H(P) \quad \text{ou} \quad U_1(P) = U_2(P) + H(P).$$

Prenons alors pour la courbe Γ considérée plus haut un rectangle de côtés parallèles aux axes de coordonnées Ox et Oy et *entièrement intérieure* à O . Il existe une valeur positive λ_0 telle que C_{λ_0} soit encore *entièrement intérieure* à O . Pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$ les intégrales

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} U_1(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad \text{et} \quad J_2(\lambda) = \int_{C_\lambda} [U_2(P) + H(P)] \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

sont certainement égales, sauf peut-être pour les valeurs de λ telles que l'ensemble des points de C_λ où

$$U_1(P) \neq U_2(P) + H(P)$$

soit de mesure linéaire non nulle. Mais ces valeurs de λ forment au plus un ensemble de mesure nulle et l'on a *presque partout* dans l'intervalle considéré

$$I_1(\lambda) = J_2(\lambda);$$

par suite de la continuité de $I_1(\lambda)$ et $J_2(\lambda)$ cette égalité a lieu partout dans l'intervalle et l'on en déduit

$$\psi'(\underline{C}_\lambda) = \psi''(\underline{C}_\lambda) \quad \text{et} \quad \psi'(\overline{C}_\lambda) = \psi''(\overline{C}_\lambda).$$

A la limite, pour $\lambda = 0$, on voit que $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ prennent la même valeur pour le rectangle fermé Γ .

Étant égales pour tout rectangle fermé *intérieure* à O , ces deux fonctions sont égales pour tout ensemble contenu dans O .

B. Ceci étant, considérons une suite de polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$, ... pour laquelle le rapport $\frac{P_n}{n}$ du degré à l'indice reste borné et supposons qu'il existe une suite équivalente $\mathfrak{P}_1(z)$, $\mathfrak{P}_2(z)$, ..., $\mathfrak{P}_n(z)$, ... et une fonction réelle $\Phi(z)$ telles que, pour toute suite partielle $\mathfrak{P}_{n_1}(z)$, $\mathfrak{P}_{n_2}(z)$, ..., $\mathfrak{P}_{n_k}(z)$, ..., l'on ait *presque partout*

$$(1) \quad \overline{\lim} \frac{1}{n_k} \log |\mathfrak{P}_{n_k}(z)| = \Phi(z).$$

Les fonctions $\psi_n(e)$ sont bornées dans leur ensemble comme $\frac{P_n}{n}$ et forment par suite une famille normale. Soit $\psi_{n_k}(e)$ une suite partielle convergente vers une fonction $\psi(e)$. Le théorème du Chapitre III s'applique à la suite des polynomes $P_{n_k}(z)$: soit $\mathcal{P}_{n_1}^{(1)}(z), \mathcal{P}_{n_2}^{(1)}(z), \dots, \mathcal{P}_{n_k}^{(1)}(z), \dots$ l'une des suites équivalentes dont ce théorème affirme l'existence et $\Phi_1(z)$ la fonction réelle associée. Si l'on pose

$$\mathcal{P}_{n_k}^{(1)}(z) = \frac{\mathcal{P}_{n_k}(z)}{\mu_{n_k}},$$

il résulte de la remarque de la fin du Chapitre III que la suite $\sqrt[n_k]{|\mu_{n_k}|}$ a une limite μ et que l'on a *presque partout*

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \log \mu.$$

Mais, si D est un domaine borné quelconque, la fonction

$$\Phi_1(z) - \int_D \log r d\psi(e) = \Phi_1(z) - \int_D \log r d\psi(eD)$$

est harmonique à l'intérieur de D; de sorte que l'on a *presque partout* à l'intérieur de D

$$\int_D \log r d\psi(eD) = \Phi(z) + H_1(z),$$

$H_1(z)$ étant une fonction harmonique à l'intérieur de D.

La condition que ceci ait lieu pour tout domaine borné détermine complètement la fonction $\psi(e)$. En effet, si deux fonctions $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ satisfont à cette condition sur un même domaine borné ouvert D, on a *presque partout* sur D

$$\int_D \log r d\psi'(eD) - \int_D \log r d\psi''(eD) = H(z),$$

$H(z)$ étant une fonction harmonique sur D, et par suite les fonctions $\psi'(eD)$ et $\psi''(eD)$, donc aussi $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$, sont égales pour tout ensemble contenu dans D. Si ceci a lieu pour tout domaine borné ouvert les fonctions $\psi'(e)$ et $\psi''(e)$ sont égales pour tout ensemble.

Il résulte de là d'une part que la suite des fonctions $\psi_n(e)$ est convergente, d'autre part que la fonction $\psi(e)$ est déterminée par la connaissance de $\Phi(z)$.

Remarques. — 1° Si l'on peut trouver une fonction $\psi'(e)$ nulle sur tout ensemble sans point commun avec un ensemble borné E et telle que l'on ait presque partout

$$\int_E \log r d\psi'(e) = \Phi(z) + \text{const.},$$

cette fonction satisfait à la condition qui détermine $\psi(e)$ et par suite on aura

$$\psi(e) = \psi'(e).$$

Ceci aura lieu en particulier toutes les fois que \mathcal{E} sera borné.

De même, si l'on peut trouver $\psi'(e)$ nulle sur tout ensemble sans point commun avec un ensemble E ne couvrant pas tout le plan et telle que, r et r_0 désignant les distances d'un point variable au point z et à un point z_0 extérieur à E , l'on ait presque partout

$$\int_E \log \frac{r}{r_0} d\psi'(e) = \Phi(z) + \text{const.},$$

on aura

$$\psi(e) = \psi'(e).$$

Ceci aura lieu en particulier si \mathcal{E} n'est pas dense sur tout le plan.

2° Lorsque \mathcal{E} est borné il résulte de la remarque de la fin du Chapitre III que, si l'on pose $\mathfrak{R}_n(z) = \mu_n \Pi_n(z)$ de sorte que μ_n est le coefficient de z^n dans $\mathfrak{R}_n(z)$, $\sqrt[n]{|\mu_n|}$ a une limite μ pour n infini et l'on a presque partout

$$\Phi(z) = \int_E \log r d\psi(e) + \log \mu = \int \log r d\psi(e) + \log \mu,$$

l'intégrale étant étendue à tout le plan. Cette condition détermine $\psi(e)$ et μ lorsque l'on connaît $\Phi(z)$.

3° Δ étant un domaine borné quelconque disjoint de E , l'expression $\frac{1}{n} \log |\mathfrak{R}_n(z)|$ converge uniformément dans Δ vers la fonction

harmonique qui y est égale presque partout à $\Phi(z)$. En effet si $\mathfrak{F}_n^{(1)}(z)$ est une des suites dont le théorème du Chapitre III affirme l'existence et $\Phi_1(z)$ la fonction réelle associée, on sait que $\frac{1}{n} \log |\mathfrak{F}_n^{(1)}(z)|$ converge uniformément dans Δ vers $\Phi_1(z)$ qui y est harmonique; mais, si l'on pose $\mathfrak{X}_n(z) = \mu_n \mathfrak{F}_n^{(1)}(z)$, d'après la remarque déjà citée, $\sqrt[n]{|\mu_n|}$ a une limite μ et l'on a *presque partout*

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \log \mu.$$

4° Si E est borné et si l'on connaît a priori E , supposé de mesure nulle, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$$

ait une limite à l'extérieur de E est que $\sqrt[n]{|A_n|}$ ait une limite λ et que la distribution des zéros des polynomes de la suite soit régulière. λ et $\psi(e)$ sont entièrement déterminés par la valeur de la fonction limite de

$$\frac{1}{n} \log |P_n(z)|.$$

Cette proposition contient comme cas particulier le théorème du Chapitre III de la première partie.

De même si l'on connaît a priori E , de mesure nulle mais non nécessairement borné, et si l'on est assuré que le rapport $\frac{P_n}{n}$ reste borné, la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right|$ — où z_0 est un point quelconque extérieur à E — converge à l'extérieur de E est que la distribution des zéros des polynomes de la suite soit régulière. La fonction $\psi(e)$ est bien déterminée par la connaissance de la fonction limite de $\frac{1}{n} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right|$.

Applications. — Les résultats qui précèdent permettent de déduire l'étude de la distribution des zéros d'une suite de polynomes de celle des limites de $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$, ou $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$.

Un premier exemple est fourni par les suites de polynomes que

nous avons étudiées à la fin du Chapitre III de la première Partie. Nous allons en donner quelques autres.

1. On a vu au Chapitre précédent que, si une suite de polynomes a ses zéros distribués régulièrement et s'il n'existe aucune région où l'on ait $\Phi(z) = \text{const.}$, l'expression

$$\frac{1}{n} \log |Q'_n(z)| = \frac{1}{n} \log \left| \frac{P'_n(z)}{\alpha_n} \right|$$

converge à l'extérieur de E vers $\Phi(z)$, sauf peut-être sur un ensemble dénombrable. Il résulte de là que, *si de plus E est de mesure nulle, la suite des polynomes dérivés $P'_n(z)$ a aussi ses zéros distribués régulièrement et la fonction $\psi(e)$ correspondante est la même que pour $P_n(z)$.*

2. Comme autre exemple retrouvons le théorème de Carlson sur les zéros des polynomes sections d'une série de Taylor (1).

Soit la série $1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$, de rayon de convergence 1. Posons

$$P_n(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

On sait que, si la suite n_k est telle que l'on puisse lui associer la suite n'_k satisfaisant à

$$n'_k \leq n_k, \quad \lim \frac{n'_k}{n_k} = 1, \quad \lim \sqrt[n'_k]{|a_{n'_k}|} = 1,$$

l'expression $\frac{1}{n_k} \log |P_{n_k}(z)|$ converge vers 0 pour $|z| \leq 1$ et vers $\log |z|$ pour $|z| > 1$, sauf peut-être sur un ensemble de capacité nulle donc de mesure nulle.

On déduit de là que les zéros des polynomes $P_{n_k}(z)$ ont une distribution régulière. On voit que $\psi(e)$ est égale à $\frac{\alpha}{2\pi}$, α désignant la mesure linéaire de l'ensemble des points de e appartenant au cercle $\gamma(|z| = 1)$; car si l'on prend $\psi'(e) = \frac{\alpha}{2\pi}$ on a

$$\int_{\gamma} \log r d\psi'(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq 1 \\ \log |z| & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

(1) C. R. Ac. Sc., t. 178, 1924, p. 1677-1680.

3. Considérons encore les polynomes définis par la relation

$$\frac{1}{1+t^2-tz\sqrt{1+t^2}} = 1 + P_1(z)t + \dots + P_n(z)t^n + \dots$$

On voit immédiatement par la méthode de Darboux ⁽¹⁾ que, si z est extérieur à la lemniscate $|z^2 - 1| = 1$, $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ tend vers $\sqrt{|z^2 - 1|}$ et par suite $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$ tend vers $\frac{1}{2} \log |z^2 - 1|$, et, si z est intérieur à cette lemniscate, $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ tend vers 1 et $\frac{1}{n} \log |P_n(z)|$ tend vers 0.

Il en résulte que la distribution des zéros des polynomes de la suite est régulière. La fonction $\Phi(z)$ étant harmonique quand z n'est pas sur la lemniscate $|z^2 - 1| = 1$, la fonction $\psi(e)$ est nulle pour tout ensemble sans point commun avec cette lemniscate. Sur la lemniscate sa valeur correspond à une distribution de masses donnant un potentiel nul à l'intérieur. Si l'on veut, le résultat se traduit de la façon suivante :

Si z_1 et z_2 sont deux points de la courbe pris sur une même boucle. lorsque n tend vers l'infini, la proportion de zéros de $P_n(z)$ compris entre les normales en z_1 et z_2 et deux arcs parallèles à la courbe et tracés de part et d'autre a pour limite $\frac{\alpha}{2\pi}$, α désignant l'angle des bissectrices intérieures des rayons vecteurs issus des points -1 et $+1$ en z_1 et z_2 . La proportion de zéros contenus dans un domaine disjoint de la courbe $|z^2 - 1| = 1$ tend vers 0.

D'ailleurs l'application de la méthode de Darboux montre que l'argument de $P_n(z)$ ne change pas, dès que n est assez grand, si z décrit une courbe intérieure à la lemniscate, et augmente de $2n\pi$ s'il décrit une courbe entourant celle-ci; de sorte que tous les zéros de $P_n(z)$ s'accablent au voisinage de cette lemniscate.

D'une façon générale, si une suite de polynomes est définie par une fonction génératrice $G(z, t)$ qui a des points singuliers indépendants de z et d'autres qui dépendent de z , l'expression $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ aura une limite constante dans la région où le module des points singuliers

(1) Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres (*Journal de Liouville*, 3^e série, t. 4, 1878, p. 5-56 et 377-416.)

dépendant de z est supérieur au plus petit module des autres, et une limite fonction harmonique de z dans chaque région où l'un des points singuliers dépendant de z sera le point singulier de plus petit module. La distribution des zéros sera donc régulière et il y aura accumulation de zéros au voisinage des courbes sur lesquelles deux points singuliers auront même module.

4. Considérons enfin des polynômes liés par une relation de récurrence de Poincaré

$$Q_k P_{n+k}(z) + Q_{k-1} P_{n+k-1}(z) + \dots + Q_1 P_{n+1}(z) + Q_0 P_n(z) = 0,$$

où Q_i est un polynôme en z de degré $k-i$ dont les coefficients dépendent de n , les rapports $\frac{Q_0}{Q_k}, \frac{Q_1}{Q_k}, \dots, \frac{Q_{k-1}}{Q_k}$ ayant des limites A_0, A_1, \dots, A_{k-1} , qui sont naturellement aussi des polynômes en z .

Si pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, $P_i(z)$ est de degré i au plus, $P_n(z)$ est de degré n au plus. De plus on sait qu'en tout point où l'équation

$$X^k + A_{k+1} X^{k-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0$$

a toutes ses racines simples et de module différent, et par suite *presque partout*, le rapport $\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}$ tend vers une des racines de cette équation, *en général* la plus grande en module. Le rapport $\frac{|P_{n+1}(z)|}{|P_n(z)|}$ et par suite l'expression $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ tendent donc vers le module de cette racine.

L'expression $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ étant convergente presque partout, la distribution des zéros des polynômes $P_n(z)$ est régulière.

Remarque. — Nous avons déjà observé que nos théorèmes s'appliquent aussi bien si l'indice n ne prend pas toutes les valeurs entières. Cela revient à dire que l'on peut prendre pour valeurs de l'entier n une fonction quelconque croissante du rang k de chaque polynôme dans la suite. On pourrait aussi remplacer partout l'indice n par une fonction quelconque $\nu(k)$ croissant indéfiniment avec k et non nécessairement égale à un nombre entier. On définirait la fonction $\psi_k(\varepsilon)$ comme égale au quotient par $\nu(k)$ du nombre de zéros de

chaque polynome appartenant à l'ensemble e ; on supposerait que le rapport du degré à $\nu(k)$ reste borné; et l'on dirait que la distribution des zéros est régulière lorsque la suite $\psi_k(e)$ est convergente.

Toute suite ayant ses zéros distribués régulièrement avec une fonction $\nu(k)$ donnée jouit de la même propriété avec toute fonction $\nu'(k)$ telle que $\frac{\nu'(k)}{\nu(k)}$ ait une limite finie et non nulle.

On se rend compte aisément que les théorèmes des Chapitres II, III, V, VI restent vrais quelle que soit la fonction $\nu(k)$.

Les résultats concernant les séries $\Sigma a_n P_n(z)$ sont conservés pourvu que $q < 1$ entraîne la convergence de $\sum_k q^{\nu(k)}$.

Nous n'avons pas adopté dans notre exposé ce point de vue général parce que dans toutes les applications ν était égal au rang du polynome dans la suite donnée ou dans une autre d'où celle-ci était extraite.

