

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MILTON PEPPER

**Une application de la géométrie des nombres à une
généralisation d'une fraction continue**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 56 (1939), p. 1-70

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

UNE APPLICATION
DE LA
GÉOMÉTRIE DES NOMBRES
A UNE GÉNÉRALISATION D'UNE FRACTION CONTINUE

PAR M. PAUL MILTON PEPPER.

PRÉFACE.

Dans *Geometrie der Zahlen* (p. 147 et suiv.), Minkowski a fait l'étude de couples de formes linéaires à coefficients tous réels,

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

en se servant des parallélogrammes, $|\xi| \leq \rho$, $|\eta| \leq \sigma$, qui ont sur chaque côté un point du réseau, outre ceux qui peuvent être aux sommets, et seulement l'origine dans l'intérieur. Il a trouvé un ensemble ordonné, ou chaîne, de matrices $\dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots$, qui sont toutes à déterminant 1. Les coordonnées de deux points du réseau pris sur un des parallélogrammes se trouvent dans les colonnes d'une matrice correspondante. Lorsque $\eta = 0$ peut être remplie par des entiers x, y dont l'un au moins n'est pas égal à zéro, cette chaîne possède un premier terme, et lorsque $\xi = 0$ peut être remplie par des entiers x, y dont l'un au moins n'est pas égal à zéro, la chaîne possède un dernier

terme. Si l'on pose $P_{k-1}^{-1} P_k = T_k$, T_k se trouve sous la forme $\begin{vmatrix} 0 & -e^{(k)} \\ e^{(k)} & g^{(k)} \end{vmatrix}$, où $e^{(k)} = \pm 1$ et où $g^{(k)}$ est un entier positif. La substitution P_{k-1} trans forme ξ et η en

$$\Xi = \lambda^{(k-1)} X + e^{(k-1)} \lambda^{(k)} Y \quad \text{et} \quad H = -e^{(k-1)} \mu_{k-2} X + \mu_{k-1} Y,$$

où

$$\lambda^{(k-1)} > \lambda^{(k)} \geq 0, \quad \mu_{k-1} \geq \mu_{k-2} \geq 0, \quad e^{(k-1)} = \pm 1.$$

L'expression

$$\frac{1}{g^{(k)} + \frac{1}{g^{(k+1)} + \frac{1}{g^{(k+2)} + \dots}}}$$

se révèle comme le développement ordinaire de $\frac{\lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}}$ en fraction continue, et cette fraction continue se termine ou ne se termine pas selon que $\frac{\lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}}$ est rationnel ou irrationnel.

Lorsque $\xi = x - \theta y$, $\eta = y$, où θ est une valeur réelle telle que $0 < \theta - g < \frac{1}{2}$, g étant le plus grand entier contenu dans θ , on a

$$P_0 = \begin{vmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & g \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, l'expression

$$\theta = g + \frac{1}{g^{(1)} + \frac{1}{g^{(2)} + \dots}}$$

est le développement ordinaire de θ en fraction continue, et, de plus,

$$P_k = \begin{vmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(k-1)} & P_{12}^{(k-1)} \\ P_{21}^{(k-1)} & P_{22}^{(k-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -(-1)^k \\ (-1)^k & g^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que $\frac{P_{12}^{(k)}}{P_{22}^{(k)}}$ est la $k^{\text{ième}}$ réduite du développement ordinaire de θ en fraction continue. Lorsque $\theta - g > \frac{1}{2}$, seule la première de ces réduites ne se trouve pas parmi les fractions $\frac{P_{12}^{(k)}}{P_{22}^{(k)}}$ ($k = 1, 2, \dots$).

En tout cas (que l'on ait ou non $\alpha = 1$, $\beta = -\theta$), lorsque $\frac{\beta}{\alpha}$ est

irrationnel $|\alpha p_{12}^{(k)} + \beta p_{22}^{(k)}| > |\alpha p_{12}^{(k+1)} + \beta p_{22}^{(k+1)}|$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha p_{12}^{(k)} + \beta p_{22}^{(k)}| = 0$.

En même temps, les nombres $|p_{12}^{(k)}|$ et $|p_{22}^{(k)}|$ sont des entiers premiers entre eux, qui deviennent infinis avec k . Les quotients

$$\frac{-p_{12}^{(k)}}{p_{22}^{(k)}} \quad (k = 0, 1, \dots, \infty),$$

sont des fractions rationnelles réduites aux plus simples expressions, et elles tendent vers la limite $\frac{\beta}{\alpha}$. Lorsque $\frac{\beta}{\alpha}$ est rationnel $\alpha p_{12}^{(k)} + \beta p_{22}^{(k)}$ s'annule à un certain indice \bar{k} , puisque la fraction continue y prend fin.

Pareillement, en prolongeant la chaîne dans la direction opposée, c'est-à-dire, lorsque $-k$ augmente, $|\gamma p_{11}^{(k)} + \delta p_{21}^{(k)}|$ décroît d'une manière monotone vers zéro et il existe un indice k' pour lequel

$$|\gamma p_{11}^{(k')} + \delta p_{21}^{(k')}| = 0,$$

dans le cas et seulement dans le cas où $\frac{\gamma}{\delta}$ est rationnel.

Nous considérons ici le cas analogue où

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, & \eta &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ \zeta &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3, \end{aligned}$$

les valeurs α_{ij} étant des constantes telles qu'aucune des équations $\xi = 0$, $\eta = 0$, et $\zeta = 0$ ne soit remplie par des entiers x_1, x_2, x_3 , qui ne soient pas tous nuls. Les domaines qui correspondent aux parallélogrammes, sont dans ce cas des parallélépipèdes.

Nous nous proposons deux problèmes :

1. De découvrir un procédé pour obtenir tous les parallélépipèdes $|\xi| \leq \rho$, $|\eta| \leq \sigma$, $|\zeta| \leq \tau$ tels qu'il y ait sur chaque face un point du réseau autre que ceux qui pourraient être sur les arêtes, et que l'origine soit le seul point du réseau dans l'intérieur. (C'est-à-dire de déterminer la chaîne des matrices de troisième ordre).

2. (a). De déterminer des suites de points du réseau pour lesquels l'une des formes linéaires tend vers zéro.

(b). De déterminer des suites de points du réseau pour lesquels deux des formes linéaires tendent simultanément vers zéro.

Minkowski (*Annales de l'École Normale Supérieure*, Sér., 3, XIII,

p. 41-60) a énoncé sans preuve les résultats pour le problème 1. Nous résolvons ce problème dans les sections I, II et III de cette thèse.

Dans la section IV nous résolvons les deux parties du problème 2, et nous exposons un deuxième algorithme qui facilite la construction des suites de points du réseau qui remplissent les conditions de la partie (b).

SECTION I.

INTRODUCTION.

Hermite (1) a donné une preuve élégante d'un théorème de Tchebychef. Nous nous proposons de généraliser ce théorème en employant les méthodes qui ont leurs origines dans la *Geometrie der Zahlen* de Minkowski. Cet ouvrage remarquable a été dédié à Hermite, parce que l'inspiration en a été tirée de l'étude précitée, entre autres recherches du renommé mathématicien français. Le professeur Hilbert dans un éloge commémoratif de Minkowski (2) rappelle les mots de Hermite à l'égard des ouvrages de Minkowski, « Ch. Hermite damals der Senior der französischen Mathematiker, hatte von Anbeginn die zahlentheoretischen Arbeiten Minkowskis mit höchstem Interesse und lebhaftester Freude verfolgt. Es ist rührend, wie rückhaltlos er die Vorzüge der Minkowskischen Methode gegenüber seinen eignen Entwicklungen anerkennt, als Minkowski ihm die eben besprochenen Resultate mitteilt. *Au premier coup d'œil j'ai reconnu*, so schreibt Ch. Hermite in einem der an Minkowski gerichteten Briefe, *que vous avez été bien au delà de mes recherches en nous ouvrant dans le domaine arithmétique des voies toutes nouvelles*. Und in einem zwei Jahre späteren Briefe vom November 1892 heisst es : *Je me sens rempli d'étonnement et de plaisir devant vos principes et vos résultats, ils m'ouvrent comme un monde arithmétique entièrement nouveau, où les questions fondamentales de notre science sont traitées avec un éclatant succès auquel tous les géomètres rendront hommage. Vous voulez bien, Monsieur, et je vous en suis sincèrement reconnaissant, rapporter à mes anciennes recherches le*

(1) CH. HERMITE, *Œuvres*, III, p. 513.

(2) H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen*, I, p. XIV.

point de départ de vos beaux travaux, mais vous les avez tant dépassées qu'elles ne gardent plus d'autre mérite que d'avoir ouvert la voie dans laquelle vous êtes entré ». Hermite était bien trop modeste au sujet de ses ouvrages.

Minkowski a énoncé sans preuve, le théorème suivant (1) :

Lorsque $\{a, g, l\}$ est un parallélépipède extrême (2) pour ξ, η, ζ , on a toujours

$$(1) \quad agl < \Delta;$$

$\{a, g, l\}$ contient exactement un point du réseau sur chaque face et ces points du réseau ont des coordonnées égales et de signes contraires pour les faces opposées.

On peut alors, et cela d'une seule manière, trouver trois points du réseau

$$r, s, t; \quad r', s', t'; \quad r'', s'', t'',$$

sur trois faces non opposées

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon a, & \eta &= \varepsilon' g, & \zeta &= \varepsilon'' l, \\ \varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' &= +1 \end{aligned}$$

tels que

et tels que, lorsque le système $\varepsilon\xi, \varepsilon'\eta, \varepsilon''\zeta$ est transformé par l'effet de

$$P = \begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \Phi = \begin{vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{vmatrix},$$

les grandeurs $a, b, c, f, g, h, j, k, l$ étant toutes positives, les signes soient représentés par un des six systèmes suivants :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
+++	+--	+--	++-	+ - +	+ - -
-+-	+++	-+-	-++	+++	-+-
--+	--+	+++	+ - +	-++	--+

Le déterminant de P sera, dans les cas I à V, égal à 1 et dans la cas VI

(1) *Ibidem*, p. 281-282, *Zur Theorie der Kettenbrüche*. Publié la première fois dans *Ann. de l'Éc. Normale*, Sér. 3, XIII, 1896, p. 41 et suiv.

(2) Voir ci-après, Définition 3, *parallélépipède extrême*, ou *äusserstes Parallelepipedum*.

égal à zéro, et l'on aura

$$(2) \quad a > b, \quad a > c, \quad g > h, \quad g > f, \quad l > j, \quad l > k;$$

et de plus, dans les cas indiqués ci-dessous par leurs numéros d'ordre, on aura les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ b + c > a & h + f > g & j + k > l \\ f > h \text{ ou } j > k & k > j \text{ ou } b > c & c > b \text{ ou } h > f \\ \text{IV.} & & \text{V.} \\ b > c \text{ ou } h > f \text{ ou } j > k & & c > b \text{ ou } f > h \text{ ou } k > j \\ & \text{VI.} & \\ & b + c = a, \quad a + f = g, \quad j + k = l. & \end{array}$$

Nous démontrerons ce théorème en employant des idées géométriques, dont Minkowski a fait ailleurs des applications diverses (¹). Nous construirons une démonstration complète des algorithmes énoncés par Minkowski dans l'Ouvrage mentionné ci-dessus. Nous corrigerons le dernier algorithme. En outre, nous énoncerons et démontrerons quelques autres théorèmes qui nous donneront un aperçu plus clair du problème.

Considérons d'abord quelques idées et définitions nécessaires. On

(¹) Marie Zeisel a démontré ce théorème et deux parties du premier algorithme. Il a énoncé le troisième algorithme sous la forme correcte et il a illustré par un exemple la circonstance où l'algorithme de Minkowski est en défaut (*Kaiserliche Akademie der Wissenschaften*, Wien; *Sitzungsberichte*, 126, 1927, *Zur Minkowski'schen Parallelepipedaapproximation*).

En nous servant de résultats de Minkowski concernant les octaèdres du réseau, nous abrègerons une partie de la preuve de M. Zeisel; de plus, nous exposerons une démonstration complète des trois algorithmes.

Toutes les démonstrations qui se trouvent dans ce papier avaient été développées par moi et présentées au séminaire du professeur H. Hancock à l'Université de Cincinnati avant que j'aie découvert l'existence du travail de M. Zeisel. Il est tout naturel que certaines parties de mes recherches ressemblent aux parties correspondantes du papier mentionné ci-dessus, mais autant que possible, j'ai appliqué la théorie plus générale qui était développée par Minkowski. Je cite ses démonstrations de la théorie dans cette première section quand j'introduis les idées et définitions nécessaires ici.

Après avoir prouvé le théorème énoncé plus haut et après avoir démontré les algorithmes divers, je me propose de coordonner la matière à l'aide de quelques théorèmes nouveaux.

emploie un système de coordonnées cartésiennes dans un espace à trois dimensions, les coordonnées étant désignées par x_1, x_2, x_3 .

Définition 1. — *Un réseau* est la totalité des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.

Définition 2. — *Un point du réseau* est, alors, un point quelconque du réseau.

Définition 3. — Si ξ, η, ζ sont trois formes linéaires et homogènes à trois variables x_1, x_2, x_3 à coefficients tous réels et à déterminant $\Delta \neq 0$, $|\xi| \leq \rho$, $|\eta| \leq \sigma$, $|\zeta| \leq \tau$, où ρ, σ, τ sont trois constantes positives quelconques, sera un parallélépipède dont le centre de symétrie est à l'origine et les faces parallèles par couples aux plans $\xi = 0$, $\eta = 0$, et $\zeta = 0$. On désigne *un tel parallélépipède* par $\{\rho, \sigma, \tau\}$, et l'on nomme les quantités ρ, σ, τ les *paramètres* du parallélépipède.

Définition 4. — De plus, si $\{\rho, \sigma, \tau\}$ n'admet aucun point du réseau outre l'origine dans son *intérieur*, on le dira *libre*.

Définition 5. — Le parallélépipède $\{\rho, \sigma, \tau\}$ sera *extrême* s'il est libre et si, en même temps, il contient sur chacune des faces au moins un point du réseau outre ceux qui peuvent être situés sur les arêtes. L'existence d'au moins un parallélépipède extrême sera vérifiée dans la Section II. Un parallélépipède extrême est, alors, tel que l'on ne peut augmenter aucun des paramètres sans introduire dans l'intérieur du parallélépipède des points du réseau.

Définition 6. — *On baisse les ξ -faces* en diminuant ρ et l'on *élève les ξ -faces* en augmentant ρ . On construit de pareilles définitions pour les actions *de baisser* et *d'élever les η - et les ζ -faces*.

Dorénavant ξ, η , et ζ seront des formes linéaires et indépendantes telles qu'aucune des équations $\xi = 0$, $\eta = 0$, ou $\zeta = 0$ ne soit remplie par un point du réseau autre que l'origine. On peut supposer, sans restriction essentielle, que $\Delta > 0$. A cause de ces restrictions, il y a au plus un point du réseau dans chaque plan de la forme $\xi = \text{const.}$,

$\eta = \text{const.}$, ou $\zeta = \text{const.}$ Aussi, il n'y a que six points du réseau sur la surface de chaque parallélépipède extrême, un seul point du réseau sur chaque face.

Définition 7. — Si $\{\rho, \sigma, \tau\}$ est un parallélépipède extrême quelconque pour ξ, η , et ζ , les points du réseau sur les η - et les ζ -faces se trouveront dans des plans individuels de la forme $\xi = \text{const.}$, aucun de ces plans n'étant $\xi = 0$. On baisse les ξ -faces jusqu'à ce qu'elles touchent un premier couple de points du réseau sur les η - ou les ζ -faces. Si ces points du réseau se trouvent sur les η -faces, on pourra maintenant élever les η -faces, le parallélépipède restant libre. D'autre part, si ces points du réseau sont situés sur les ζ -faces, on pourra élever à la place les ζ -faces. On élève les faces qu'il est possible d'élever jusqu'à ce que le parallélépipède devienne extrême. On nomme le nouveau parallélépipède extrême ainsi déterminé *le ξ -voisin de $\{\rho, \sigma, \tau\}$* .

On construit de pareilles définitions pour *les η - et les ζ -voisins de $\{\rho, \sigma, \tau\}$* . On voit que les restrictions faites sur ξ, η , et ζ , exigent l'existence d'une infinité de parallélépipèdes extrêmes, pourvu qu'il en existe un seul. Car chacun, sans exception, possède trois voisins; la suite de ξ -voisins successifs qui est obtenue quand on prend pour point de départ un parallélépipède extrême quelconque, se révèle comme une suite dans laquelle tous les éléments diffèrent l'un de l'autre, parce que le premier paramètre de chaque terme est moindre que celui du terme qui le précède. La totalité des parallélépipèdes extrêmes pour ξ, η , et ζ est dite *la chaîne des parallélépipèdes extrêmes pour ξ, η , et ζ* .

Définition 8. — Un octaèdre, symétrique autour de l'origine et ayant chaque sommet en un point du réseau, se nomme *un octaèdre du réseau* pourvu qu'il n'admette, sauf l'origine et les sommets, aucun point du réseau ni sur la surface ni dans l'intérieur (¹).

Si dans un octaèdre du réseau on choisit trois sommets p_1, p_2, p_3 ,

(¹) H. MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen*, p. 97. On considère seulement les octaèdres dont toutes les faces sont des triangles.

dont il n'y en ait pas deux qui se trouvent symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, le déterminant des coordonnées de ces sommets sera égal à ± 1 ou ± 2 . S'il est égal à ± 2 , chaque point de la forme

$$p = \left(\gamma_1 + \frac{\delta}{2}\right) p_1 + \left(\gamma_2 + \frac{\delta}{2}\right) p_2 + \left(\gamma_3 + \frac{\delta}{2}\right) p_3 \quad (\gamma_i, \delta, \text{ nombres entiers}),$$

se révélera un point du réseau (1).

Définition 9. — Si $f(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction qui remplit les conditions suivantes :

- (1) $f(x_1, x_2, x_3) > 0 \quad [(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)],$
- (2) $f(tx_1, tx_2, tx_3) = tf(x_1, x_2, x_3) \quad (t \geq 0),$
- (3) $f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \leq f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3),$
- (4) $f(-x_1, -x_2, -x_3) = f(x_1, x_2, x_3),$

$f(x_1, x_2, x_3) \leq 1$ définira un corps convexe R ayant un centre de symétrie à l'origine.

Cette fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ est dite *une fonction de distance généralisée*. Minkowski a démontré l'existence d'une telle fonction pour chaque corps convexe symétrique autour de l'origine (2).

Si un octaèdre du réseau a tous ses sommets sur la surface de R et si trois de ces sommets non coplanaires avec l'origine, sont désignés par

$$A_1 : (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad A_2 : (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \quad A_3 : (a_{31}, a_{32}, a_{33}),$$

la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + a_{31} X_3 \\ x_2 &= a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + a_{32} X_3 \\ x_3 &= a_{13} X_1 + a_{23} X_2 + a_{33} X_3 \end{aligned} \quad (\text{dét. } |a_{ij}| = \pm 1 \text{ ou } \pm 2),$$

transformera $f(x_1, x_2, x_3)$ en $F(X_1, X_2, X_3)$ qui satisfait aux conditions (1) à (4).

Minkowski a démontré les résultats suivants (3) :

(1) *Ibidem*, p. 100.

(2) *Geometrie der Zahlen*, p. 36. La symétrie autour de l'origine, n'était pas supposée dans la théorie générale; par conséquent, la condition (4) ne s'y trouve pas.

(3) *Diophantische Approximationen*, p. 102-103, et *Gesammelte Abhandlungen*, II, p. 13.

1° Si le déterminant $|a_{ij}| = \pm 1$, une condition nécessaire et suffisante, pour que R ne contienne dans son intérieur aucun point du réseau (x_1, x_2, x_3) outre l'origine, sera que l'inégalité

$$F(X_1, X_2, X_3) \geq 1$$

soit remplie par chacun des vingt-deux systèmes suivants pour (x_1, x_2, x_3)

$$(0, 1, \pm 1), \quad (1, 0, \pm 1), \quad (1, \pm 1, 0), \quad (1, \pm 1, \pm 1), \\ (1, \pm 1, \pm 2), \quad (1, \pm 2, \pm 1), \quad (2, \pm 1, \pm 1),$$

où tous les systèmes possibles de signes doivent être considérés.

2° Si le déterminant $|a_{ij}| = \pm 2$, une condition nécessaire et suffisante, pour que R ne contienne dans son intérieur aucun point du réseau autre que l'origine, sera que l'inégalité

$$F(X_1, X_2, X_3) \geq 1,$$

soit remplie par chacun des quatre systèmes suivants pour (X_1, X_2, X_3)

$$\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right).$$

SECTION II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES PARALLÉLÉPIPÈDES EXTRÊMES.

Le théorème de Minkowski (Section I), à cause de sa complexité, sera divisé en plusieurs théorèmes. A moins que l'on n'indique le contraire, dans tout ce qui suit, ξ, η, ζ satisferont aux restrictions énoncées dans la dernière partie de la définition 6.

THÉORÈME 2. I. — *Dans un parallélépipède libre pour ξ, η , et ζ , l'inégalité $\rho\sigma\tau < \Delta$ est toujours remplie (1).*

(1) Pour démontrer ce théorème, Minkowski a cité un autre de ses théorèmes qu'il avait énoncé la première fois dans une lettre à Hermite (H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 266 et suiv.). Plus tard ce théorème était publié dans *Geometrie der Zahlen*, p. 102-206.

Le parallélépipède $|\xi| \leq \rho, |\eta| \leq \sigma, |\zeta| \leq \tau$ se révèle comme un corps convexe dont le centre de symétrie est à l'origine. Le volume d'un tel parallélépipède est donné par $V = \frac{2^3 \rho \sigma \tau}{\Delta}$ (1). Si l'on suppose que $\rho \sigma \tau > \Delta$, l'inégalité $V > 2^3$ sera remplie et, en vertu d'un théorème concernant les corps convexes (2), le parallélépipède devra contenir dans l'intérieur au moins deux points du réseau outre l'origine. Mais ceci n'existe pas pour un parallélépipède libre, et l'on a, par suite, $\rho \sigma \tau \leq \Delta$. Si l'on suppose que $\rho \sigma \tau = \Delta$, l'on aura $V = 2^3$ et si le parallélépipède n'a pas de points du réseau outre l'origine dans son intérieur, la surface du parallélépipède contiendra au moins quatorze points du réseau (3). Si l'on distribue ces quatorze points du réseau sur les six faces du parallélépipède, au moins une face devra contenir au moins deux points du réseau. Mais ceci contredit l'hypothèse que les plans $\xi = 0, \eta = 0$, et $\zeta = 0$ ne contiennent pas de points du réseau outre l'origine (4). Par conséquent, le théorème est démontré.

L'existence d'un parallélépipède extrême peut être établie par ce théorème. Soit $\{\rho_0, \sigma_0, \tau_0\}$ un parallélépipède quelconque, pour ξ, η , et ζ , $\{\theta \rho_0, \theta \sigma_0, \theta \tau_0\}$, où $0 < \theta < 1$, sera un parallélépipède homothétique de $\{\rho_0, \sigma_0, \tau_0\}$ par rapport à l'origine. Si l'on fait décroître θ vers 0 le volume et les trois hauteurs du parallélépipède tendent vers 0.

Quand θ sera égal à une grandeur θ_0 assez petite, le parallélépipède se trouvera entièrement dans l'intérieur du cube ayant le centre à l'origine et les arêtes de longueur 2 parallèles aux trois axes. Le parallélépipède $\{\theta_0 \rho_0, \theta_0 \sigma_0, \theta_0 \tau_0\}$ sera alors libre, puisqu'il ne pourra contenir dans son intérieur aucun point du réseau outre l'origine. On fixe les deux derniers paramètres et l'on augmente d'une manière continue le premier paramètre de $\{\rho, \theta_0 \sigma_0, \theta_0 \tau_0\}$ de $\rho = \theta_0 \rho_0$ jusqu'à ce que le parallélépipède contienne pour la première fois sur les ξ -faces des points du réseau qui ne se trouvent ni sur les η - ni sur les ζ -faces; le parallélépipède reste libre. Soit ρ_1 la valeur correspondante de ρ .

(1) H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, p. 68.

(2) *Ibidem*, p. 76.

(3) *Ibidem*, p. 85.

(4) Voir Théorème 2.2, ci-après.

Une telle valeur ρ_1 existe, car l'accroissement du premier paramètre jusqu'à la valeur $\rho = \frac{\Delta}{\theta_0^2 \sigma_0 \tau_0}$ assure que le parallélépipède ne sera plus libre. Il en résulte que $\rho_1 < \frac{\Delta}{\theta_0^2 \sigma_0 \tau_0}$. L'on augmente le deuxième paramètre de $\{\rho_1, \sigma, \theta_0 \tau_0\}$ d'une manière continue de $\sigma = \theta_0 \sigma_0$ jusqu'à ce que les η -faces contiennent pour la première fois des points du réseau qui ne se trouvent ni sur les ξ -faces ni sur les ζ -faces, le parallélépipède restant libre. Soit σ_1 la valeur correspondante du deuxième paramètre σ . On a $\sigma_1 < \frac{\Delta}{\theta_0 \rho_1 \tau_0}$. Enfin, l'on augmente le troisième paramètre de $\{\rho_1, \sigma_1, \tau\}$ d'une manière continue de $\tau = \theta_0 \tau_0$ jusqu'à ce que les ζ -faces contiennent pour la première fois des points du réseau qui ne se trouvent ni sur les ξ -faces ni sur les η -faces, le parallélépipède restant libre. Soit τ_1 la valeur nouvelle du troisième paramètre τ . Alors $\tau_1 < \frac{\Delta}{\rho_1 \sigma_1}$, et le parallélépipède $\{\rho_1, \sigma_1, \tau_1\}$ est extrême aussi bien que libre.

On voit tout d'abord la manière dont on peut appliquer le théorème 2. 1 pour démontrer l'existence des trois voisins d'un parallélépipède extrême quelconque. Ce théorème assure que les paramètres ne deviennent pas infinis. Toutefois, les trois voisins n'existent pas toujours, lorsque l'une des équations $\xi = 0$, $\eta = 0$, ou $\zeta = 0$ est remplie par des points du réseau autres que l'origine; car dans ce cas il peut être nécessaire que l'on diminue l'un des paramètres jusqu'à zéro avant qu'un autre puisse être augmenté; par conséquent, quand on diminuera ce paramètre, tout le domaine sera situé dans un plan et n'aura pas d'intérieur; les deux autres paramètres pourront être augmentés alors jusqu'à l'infini. Le domaine qui remplace le voisin n'est plus un parallélépipède, mais un plan entier.

THÉORÈME 2. 2. — *Le parallélépipède $\{a, g, l\}$ contient outre l'origine exactement six points du réseau, un sur chaque face, et ces points du réseau ont des coordonnées égales et de signes contraires pour les faces opposées.*

Parce que ξ , η et ζ sont des formes linéaires et homogènes, elles prennent les mêmes valeurs absolues pour un point p ayant pour coordonnées (p_1, p_2, p_3) , que pour le point $-p$ ayant les coordonnées

$(-p_1, -p_2, -p_3)$. Par conséquent, $-p$ est sur la surface de $\{a, g, l\}$, si $-p$ y est.

Il y a six faces du parallélépipède et chaque face peut contenir au plus un point du réseau; car si l'on suppose que p et q soient deux points du réseau sur une seule et même face, l'une des équations $\xi = 0, \eta = 0$ ou $\zeta = 0$ sera remplie par le point $p - q$ ayant les coordonnées $(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$; mais ceci est contraire à l'hypothèse que l'origine sera le seul point du réseau sur un quelconque des trois plans $\xi = 0, \eta = 0$ et $\zeta = 0$.

De la définition d'un parallélépipède extrême il résulte que chaque face doit contenir au moins un point du réseau qui ne se trouve pas sur une autre face. Il en résulte que chaque face contient exactement un point du réseau, et ce point du réseau ne se trouve pas, alors, sur une arête. Toute la surface contient, alors, ni plus ni moins que six points du réseau.

THÉORÈME 2.3. — *Sur la surface de $\{a, g, l\}$ on peut, et cela d'une seule manière, trouver trois points du réseau $p_1 : (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)})$, $p_2 : (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)})$ et $p_3 : (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_3^{(3)})$ sur trois faces respectives et non opposées $\xi = e_1 a, \eta = e_2 g$ et $\zeta = e_3 l$ (1), tels que $e_1 e_2 e_3 = +1$ et que, lorsque la matrice des coefficients des formes linéaires $e_1 \xi, e_2 \eta, e_3 \zeta$ est transformée par l'effet de*

$$P = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & p_1^{(3)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & p_2^{(3)} \\ p_3^{(1)} & p_3^{(2)} & p_3^{(3)} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \Phi = \begin{vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{vmatrix},$$

les grandeurs a, b, c, f, g, h, j, k et l étant toutes positives, la matrice Φ ait un des six systèmes de signes qui suivent :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
+++	+- -	+ - -	++ -	+ - +	+ - -
- + -	+++	- + -	- + +	+ + -	- + -
- - +	- - +	+++	+ - +	- + +	- - +

et, de plus, $a > b, a > c; g > f, g > h; l > j, l > k$.

Pour prouver ce théorème on fait usage de plusieurs lemmes.

(1) Les nombres e_1, e_2, e_3 sont égaux à ± 1 , parce que les trois plans, dont il s'agit sont ceux qui contiennent des faces de $\{a, g, l\}$.

LEMME 2. 1. — *L'un au plus des six points du réseau situés sur la surface d'un parallélépipède extrême pour ξ , η et ζ , peut se trouver dans un quelconque des huit octants qui sont déterminés par les plans $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$.*

On suppose que deux de ces six points, c'est-à-dire \mathbf{r} et \mathbf{s} , soient dans un seul et même octant. On désigne les valeurs de ξ , η , ζ pour \mathbf{r} et \mathbf{s} par $\xi(\mathbf{r})$, $\xi(\mathbf{s})$, $\eta(\mathbf{r})$, $\eta(\mathbf{s})$, $\zeta(\mathbf{r})$, $\zeta(\mathbf{s})$. Alors

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}) &= e_1 x_1, & \eta(\mathbf{r}) &= e_2 \lambda_1, & \zeta(\mathbf{r}) &= e_3 \mu_1, \\ \xi(\mathbf{s}) &= e_1 x_2, & \eta(\mathbf{s}) &= e_2 \lambda_2, & \zeta(\mathbf{s}) &= e_3 \mu_2, \end{aligned}$$

où $e_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, 3$) et

$$0 < x_i \leq a, \quad 0 < \lambda_i \leq g, \quad 0 < \mu_i \leq l \quad (i = 1, 2).$$

De la loi distributive, il suivrait que

$$\xi(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = e_1(x_1 - x_2), \quad \eta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = e_2(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \zeta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = e_3(\mu_1 - \mu_2).$$

D'après le théorème 2. 2 les points \mathbf{r} et \mathbf{s} ne se trouveraient pas dans un seul et même plan de la forme $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ ou $\zeta = \text{const.}$ Il en résulterait que

$$0 < |\xi(\mathbf{r} - \mathbf{s})| < a, \quad 0 < |\eta(\mathbf{r} - \mathbf{s})| < g, \quad 0 < |\zeta(\mathbf{r} - \mathbf{s})| < l.$$

(Parce que \mathbf{r} et \mathbf{s} ne coïncidaient pas, il est clair que $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ ne serait pas l'origine). Un point du réseau $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ autre que l'origine se trouverait, alors dans le parallélépipède extrême, mais ceci contredit la définition d'un tel parallélépipède. Par conséquent, la supposition que deux points puissent être situés dans un seul et même octant, ne se soutient pas et le lemme se trouve vérifié.

LEMME 2. 2. — *Si $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, -\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, -\mathbf{r}_3$ sont les six points du réseau situés sur la surface du parallélépipède extrême $\{a, g, l\}$, on pourra, et cela d'une seule manière, en choisir trois $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ et \mathbf{q}_3 tels que \mathbf{q}_1 soit dans le plan $\xi = a$, \mathbf{q}_2 dans le plan $\eta = g$ et \mathbf{q}_3 dans le plan $\zeta = l$. Dans la matrice*

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi(\mathbf{q}_1) & \xi(\mathbf{q}_2) & \xi(\mathbf{q}_3) \\ \eta(\mathbf{q}_1) & \eta(\mathbf{q}_2) & \eta(\mathbf{q}_3) \\ \zeta(\mathbf{q}_1) & \zeta(\mathbf{q}_2) & \zeta(\mathbf{q}_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} a &= |\xi(\mathbf{q}_1)|, & b &= |\xi(\mathbf{q}_2)|, & c &= |\xi(\mathbf{q}_3)|, \\ f &= |\eta(\mathbf{q}_1)|, & g &= |\eta(\mathbf{q}_2)|, & h &= |\eta(\mathbf{q}_3)|, \\ j &= |\zeta(\mathbf{q}_1)|, & k &= |\zeta(\mathbf{q}_2)|, & l &= |\zeta(\mathbf{q}_3)|, \end{aligned}$$

le système de signes doit être un des vingt-quatre suivants :

1.	2.	3.	4.	5.	6.
+++	++-	+ - +	+ - -	+ - -	+ - -
++-	+++	++-	++-	+++	++-
+ - +	+ - +	+++	+++	+ - +	+ - +
7.	8.	9.	10.	11.	12.
+++	++-	+ - +	+ - +	+ - +	+ - -
++-	+++	+++	++-	+++	+++
- + +	- + +	- + +	- + +	- - +	- - +
13.	14.	15.	16.	17.	18.
+++	++-	+++	+++	+ - +	+ - -
- + -	- + -	- + +	- + -	- + +	- + -
- + +	- + +	- - +	- - +	- - +	- - +
19.	20.	21.	22.	23.	24.
++-	++-	+++	++-	+ - +	+ - -
- + +	- + -	- + +	- + +	- + +	- + -
+++	+++	+ - +	+ - +	+++	+++

De plus, $a > b$, $a > c$; $g > f$, $g > h$; $l > j$, $l > k$.

La vérité de la première partie du lemme 2.2 suit du théorème 2.2; la vérité de la deuxième partie suit du lemme 2.1, et les inégalités à la fin du lemme résultent de la définition d'un parallélépipède extrême et des restrictions imposées sur ξ , η et ζ .

On peut séparer les vingt-quatre systèmes de signes en six classes comme il suit :

On choisit les nombres e_1, e_2 et e_3 égaux à $+1$ ou -1 indépendants l'un de l'autre; alors $e_1 \xi(e_1 \mathbf{q}_1) = \xi(\mathbf{q}_1)$, $e_2 \eta(e_2 \mathbf{q}_2) = \eta(\mathbf{q}_2)$ et $e_3 \zeta(e_3 \mathbf{q}_3) = \zeta(\mathbf{q}_3)$. Soient $\mathbf{p}_1 = e_1 \mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2 = e_2 \mathbf{q}_2$ et $\mathbf{p}_3 = e_3 \mathbf{q}_3$. La matrice

$$\Phi = \begin{vmatrix} e_1 \xi(\mathbf{p}_1) & e_1 \xi(\mathbf{p}_2) & e_1 \xi(\mathbf{p}_3) \\ e_2 \eta(\mathbf{p}_1) & e_2 \eta(\mathbf{p}_2) & e_2 \eta(\mathbf{p}_3) \\ e_3 \zeta(\mathbf{p}_1) & e_3 \zeta(\mathbf{p}_2) & e_3 \zeta(\mathbf{p}_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 e_1 \xi(\mathbf{q}_1) & e_1 e_2 \xi(\mathbf{q}_2) & e_1 e_3 \xi(\mathbf{q}_3) \\ e_2 e_1 \eta(\mathbf{q}_1) & e_2 e_2 \eta(\mathbf{q}_2) & e_2 e_3 \eta(\mathbf{q}_3) \\ e_3 e_1 \zeta(\mathbf{q}_1) & e_3 e_2 \zeta(\mathbf{q}_2) & e_3 e_3 \zeta(\mathbf{q}_3) \end{vmatrix}$$

ne diffère de la matrice Ψ que par le signe attaché à chaque élément.

LEMME 2.3. — Pour chacun des vingt-quatre systèmes de signes dans Ψ , des nombres e_1 , e_2 et e_3 peuvent être choisis, et cela d'une seule manière, tels que $e_1 e_2 e_3 = +1$ et tels que le système de signes dans Φ se trouve parmi les six suivants :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
+++	+---	+---	++-	+--+	+---
-+-	+++	-+-	-++	++-	-+-
--+	--+	+++	+--+	-++	--+

Six systèmes parmi les vingt-quatre coïncident avec les systèmes I à VI. Un examen bref révèle les valeurs de e_1 , e_2 et e_3 , que l'on prend pour les dix-huit autres cas. Le Tableau suivant donne dans chaque cas ceux des nombres e_i qui doivent être négatifs et indique le système correspondant de signes dans Φ :

1. e_2, e_3 , VI	7. e_2, e_3 , III	13. e_1, e_2 , IV	19. e_1, e_2 , I
2. e_1, e_3 , III	8. e_1, e_3 , VI	14. e_1, e_3 , II	20. e_2, e_3 , V
3. e_1, e_2 , II	9. e_1, e_3 , I	15. e_1, e_3 , V	21. e_2, e_3 , II
4. e_1, e_3 , IV	10. aucun, V	16. aucun, I	22. aucun, IV
5. e_1, e_2 , V	11. e_2, e_3 , IV	17. e_1, e_2 , III	23. e_1, e_2 , VI
6. e_2, e_3 , I	12. aucun, II	18. aucun, VI,	24. aucun, III

Les six systèmes de signes I à VI seront dits les *systèmes canoniques de signes*.

Sans égard des connexions avec ce problème-ci, on regarde le changement d'une matrice de cette manière comme une opération sur la matrice. On voit tout d'abord que si l'on opère sur Φ par la même substitution (c'est-à-dire les mêmes trois nombres e_i) qui a transformé Ψ en Φ , Φ se changera de nouveau en Ψ .

En général, si une deuxième substitution e'_i suit une première substitution e_i où les nombres e_i ne sont pas tous égaux respectivement aux nombres e'_i , tout l'effet est celui d'une seule substitution e''_i dans laquelle $e''_i = e_i e'_i$ ($i = 1, 2, 3$). Il est clair, alors, que chaque substitution e_i sauf celles qui se trouvent dans le Tableau ci-dessus transforme Ψ en une matrice qui n'a aucun des six systèmes canoniques de signes, mais qui a un système pris parmi les dix-huit autres. Par exemple, la substitution $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$ transforme le système 1 en le système 23.

Il est digne d'attention que le lemme pourrait tout aussi bien être énoncé : *il y a une seule manière de choisir des nombres e_1, e_2 et e_3 de façon que $e_1 e_2 e_3 = -1$ et tels que le système de signes dans Φ soit un des six systèmes canoniques.* Ceci est évident, puisque l'on peut changer à la fois les signes de tous les nombres e_i sans affecter la matrice Φ .

On peut ranger les parallélépipèdes extrêmes par classes selon le système canonique de signes qui se trouve dans Φ , c'est-à-dire selon six types de distribution des points du réseau sur la surface du parallélépipède.

Le théorème 2.3 se trouve vérifié dans les résultats des deux lemmes 2.2 et 2.3, car aussitôt que les points \mathfrak{q}_i et les nombres e sont déterminés, les \mathfrak{p}_i sont aussi fixés.

THÉORÈME 2.4. — *Selon que le système canonique de signes dans Φ est le système I, II, ... ou VI, la matrice Φ remplit les conditions ci-dessous désignées par le même chiffre I, II, ... ou VI.*

I. $b + c > a$ $f > h$ ou $j > k$	II. $f + h > g$ $k > j$ ou $b > c$	III. $j + k > l$ $c > b$ ou $h > f$
IV. $b > c$ ou $h > f$ ou $j > k$		V. $c > b$ ou $f > h$ ou $k > j$
VI. $b + c = a, f + h = g, j + k = l$		

parmi les deux ou trois conditions qui sont séparées par le mot « ou » une au moins a lieu chaque fois.

Les démonstrations pour les cas divers suivent par ordre :

I. On a les égalités

$$\begin{aligned} e_1 \xi(\mathfrak{p}_1) &= a, & e_1 \xi(\mathfrak{p}_2) &= b, & e_1 \xi(\mathfrak{p}_3) &= c, \\ e_2 \eta(\mathfrak{p}_1) &= -f, & e_2 \eta(\mathfrak{p}_2) &= g, & e_2 \eta(\mathfrak{p}_3) &= -h, \\ e_3 \zeta(\mathfrak{p}_1) &= -j, & e_3 \zeta(\mathfrak{p}_2) &= -k, & e_3 \zeta(\mathfrak{p}_3) &= l. \end{aligned}$$

Les valeurs de ξ, η et ζ pour le point du réseau $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$ sont

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{p}) &= \xi(\mathfrak{p}_2) + \xi(\mathfrak{p}_3) = e_1(b + c), \\ \eta(\mathfrak{p}) &= \eta(\mathfrak{p}_2) + \eta(\mathfrak{p}_3) = e_2(g - h), \\ \zeta(\mathfrak{p}) &= \zeta(\mathfrak{p}_2) + \zeta(\mathfrak{p}_3) = e_3(-k + l). \end{aligned}$$

Il est clair que le point \mathfrak{p} n'est pas l'origine puisque $|\xi(\mathfrak{p})|$ n'est pas égal à zéro. Alors ce point ne peut pas être dans l'intérieur du parallélépipède extrême. Par suite, puisque les valeurs absolues de η et ζ sont moindres que g et l , respectivement, il faut que $|\xi(\mathfrak{p})| \geq a$, c'est-à-dire, $b + c \geq a$. Si l'on suppose que $b + c = a$, $\xi(\mathfrak{p}) = e_1 a$; mais ceci est la valeur de $\xi(\mathfrak{p}_1)$. Il n'y a qu'un point du réseau dans le plan $\xi = e_1 a$, par conséquent, on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Cela demande que

$$\eta(\mathfrak{p}) = \eta(\mathfrak{p}_1) = -e_2 f,$$

tandis que l'on a vu que $\eta(\mathfrak{p}) = e_2(g - h)$; par suite, on aurait

$$g - h = -f.$$

Mais ceci est impossible puisque l'on a $g > h$, $f > 0$ en vertu du théorème 2.3. Il en résulte que $b + c > a$.

Les valeurs de ξ , η et ζ pour le point du réseau

$$\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$$

sont

$$\xi(\mathfrak{p}) = -\xi(\mathfrak{p}_1) + \xi(\mathfrak{p}_2) + \xi(\mathfrak{p}_3) = e_1(-a + b + c),$$

$$\eta(\mathfrak{p}) = -\eta(\mathfrak{p}_1) + \eta(\mathfrak{p}_2) + \eta(\mathfrak{p}_3) = e_2(-f + g - h),$$

$$\zeta(\mathfrak{p}) = -\zeta(\mathfrak{p}_1) + \zeta(\mathfrak{p}_2) + \zeta(\mathfrak{p}_3) = e_3(-j - k + l).$$

Puisque $a > b$, $a > c$ et $b + c > a$, il en résulte que $a > b + c - a > 0$, c'est-à-dire $a > |\xi(\mathfrak{p})| > 0$. Alors \mathfrak{p} ne coïncide pas avec l'origine et, par conséquent, \mathfrak{p} n'est pas situé dans l'intérieur du parallélépipède. Du fait que $g > h$ et $l > k$, il résulte que $f + g - h > 0$ et $j - k + l > 0$; puis l'on doit avoir ou $f + g - h \geq g$ ou $j - k + l \geq l$ pour assurer que le point \mathfrak{p} ne soit pas situé dans l'intérieur du parallélépipède. Par conséquent, l'une au moins des inégalités $f \geq h$ et $j \geq k$ doit être remplie. On n'a ni $f = h$, ni $j = k$, car si l'on suppose que $f = h$, alors, puisqu'il n'y a pas deux points du réseau dans un seul et même plan de la forme $\eta = \text{const.}$, il en résulte que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_3$. Mais ceci est contraire au fait que les points \mathfrak{p}_1 , \mathfrak{p}_2 et \mathfrak{p}_3 sont tous différents entre eux. On trouve une pareille contradiction si l'on suppose que $j = k$. La nécessité des conditions, quand le système canonique de signes dans Φ est I, se trouve vérifiée.

II. Soit α_{ij} la valeur du terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la

matrice des coefficients des formes linéaires ξ , η et ζ . On pose

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha_{22}x'_1 + \alpha_{23}x'_2 + \alpha_{21}x'_3, & \eta' &= \alpha_{32}x'_1 + \alpha_{33}x'_2 + \alpha_{31}x'_3, \\ \zeta' &= \alpha_{12}x'_1 + \alpha_{13}x'_2 + \alpha_{11}x'_3;\end{aligned}$$

ceci a l'effet de donner des noms nouveaux aux ξ , η et ζ et les trois axes, comme il suit : $\xi' = \eta$, $\eta' = \zeta$, $\zeta' = \xi$; $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$ et $x'_3 = x_1$. Le déterminant de la matrice des coefficients de ξ' , η' et ζ' a la même valeur que celui de ξ , η et ζ .

Le parallélépipède extrême $\{a, g, l\}$ correspondant à ξ , η et ζ coïncide avec le parallélépipède extrême $\{g, l, a\}'$, correspondant à ξ' , η' et ζ' . On peut appliquer alors les théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 d'une telle manière que l'on trouvera des matrices P' et Φ' des mêmes natures respectivement que P et Φ . Puisque le système canonique de signes dans Φ est II, celui dans Φ' est I. Les conditions $b' + c' > a'$, $f' > h'$ ou $j' > k'$ que satisfait Φ' , se transforment au moyen des relations entre ξ , η , ζ et ξ' , η' , ζ' en $f + h > g$; $k > j$ ou $b > c$ pour Φ .

III. Si le système canonique de signes dans Φ est III on pose $\xi' = \zeta$, $\eta' = \xi$, $\zeta' = \eta$; $x'_1 = x_3$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_2$. De même façon que dans II, il s'ensuit que $j + k > l$; $c > b$ ou $h > f$.

IV. On a les égalités

$$\begin{aligned}e_1 \xi(p_1) &= a, & e_1 \xi(p_2) &= b, & e_1 \xi(p_3) &= -c, \\ e_2 \eta(p_1) &= -f, & e_2 \eta(p_2) &= g, & e_2 \eta(p_3) &= h, \\ e_3 \zeta(p_1) &= j, & e_3 \zeta(p_2) &= -k, & e_3 \zeta(p_3) &= l.\end{aligned}$$

Les valeurs de ξ , η et ζ pour le point du réseau $p = p_1 + p_2 + p_3$ sont

$$\begin{aligned}\xi(p) &= \xi(p_1) + \xi(p_2) + \xi(p_3) = e_1(a + b - c), \\ \eta(p) &= \eta(p_1) + \eta(p_2) + \eta(p_3) = e_2(-f + g + h), \\ \zeta(p) &= \zeta(p_1) + \zeta(p_2) + \zeta(p_3) = e_3(j - k + l).\end{aligned}$$

Ce point p n'est pas l'origine parce que la condition $a > c$ demande que $|\xi(p)| = a + b - c > 0$. Les trois sommes algébriques entre parenthèses à droite dans les expressions ci-dessus sont positives. Pour assurer que le point p ne soit pas situé dans l'intérieur du parallélépipède, l'une au moins des trois inégalités suivantes doit être remplie

$$a + b - c \geq a \quad \text{ou} \quad -f + g + h \geq g \quad \text{ou} \quad j - k + l \geq l.$$

Aucune des égalités ne peut avoir lieu, parce que la supposition qu'elle puisse avoir lieu implique une contradiction pareille à celle des cas précédents. Par conséquent, on a $b > c$ ou $h > f$ ou $j > k$.

V. On pose $\xi' = \xi$, $\eta' = \zeta$, $\zeta' = \eta$, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_3$, $x'_3 = x_2$. La matrice Φ' a le système canonique de signes IV. Les conditions $b' > c'$ ou $h' > f'$ ou $j' > k'$ que satisfait Φ' se transforment en $c > b$ ou $k > j$ ou $f > h$ pour Φ .

VI. On a les égalités

$$\begin{aligned} e_1 \xi(p_1) &= a, & e_1 \xi(p_2) &= -b, & e_1 \xi(p_3) &= -c, \\ e_2 \eta(p_1) &= -f, & e_2 \eta(p_2) &= g, & e_2 \eta(p_3) &= -h, \\ e_3 \zeta(p_1) &= -j, & e_3 \zeta(p_2) &= -k, & e_3 \zeta(p_3) &= l. \end{aligned}$$

Les valeurs de ξ , η et ζ pour le point du réseau $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$ sont

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{p}) &= \xi(p_1) + \xi(p_2) + \xi(p_3) = -e_1(-a + b + c), \\ \eta(\mathfrak{p}) &= \eta(p_1) + \eta(p_2) + \eta(p_3) = -e_2(f - g + h), \\ \zeta(\mathfrak{p}) &= \zeta(p_1) + \zeta(p_2) + \zeta(p_3) = -e_3(j + k - l). \end{aligned}$$

Puisque $a > b > 0$, $a > c > 0$; $g > f > 0$, $g > h > 0$, $l > j > 0$ et $l > k > 0$, il en résulte que $|\xi(\mathfrak{p})| < a$, $|\eta(\mathfrak{p})| < g$, $|\zeta(\mathfrak{p})| < l$. Ceci demande que le point \mathfrak{p} soit dans l'intérieur du parallélépipède et, par conséquent, le point \mathfrak{p} est l'origine. Il en résulte que

$$\xi(\mathfrak{p}) = \eta(\mathfrak{p}) = \zeta(\mathfrak{p}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$b + c = a, \quad f + h = g \quad \text{et} \quad j + k = l.$$

Une matrice quelconque Φ sera dite *canonique*, si son système de signes est canonique et si, en même temps, ses éléments remplissent les conditions $a > b$, $a > c$, $g > f$, $g > h$, $l > j$, $l > k$ aussi bien que les conditions qui, d'après le théorème 2.4, correspondent à ce système canonique de signes. Une matrice canonique sera dite *canonique du type I, II, ... ou VI*, selon que le système canonique de signes dans Φ est I, II, ... ou VI.

THÉORÈME 2.5. — Si Φ est canonique d'un des types I à V, le déterminant de P sera égal à $+1$; si elle est canonique du type VI, le déterminant de P se révélera égal à zéro.

On désigne le déterminant de Φ par $|\Phi|$ et celui de P par D . De la

définition de Φ il résulte que $\Delta D = |\Phi|$. Puisque tous les éléments de P sont des nombres entiers ou zéro, le déterminant D doit être un nombre entier ou zéro.

On démontre d'abord que $D = 0$ quand Φ est une matrice canonique du type VI. On a alors

$$|\Phi| = \Delta D = \begin{vmatrix} a & -b & -c \\ -f & g & -h \\ -j & -k & l \end{vmatrix},$$

où $b + c = a$, $f + h = g$, $j + k = l$. Donc $|\Phi| = 0$ et, puisque $\Delta > 0$, D doit être égal à zéro.

On démontre dans ce qui suit que $D = 1$ quand Φ est une matrice canonique du type I, II, ..., ou V.

LEMME 2.4. — Si Φ est canonique du type I, II, ..., ou V, on aura $4 \geq D \geq 1$.

Comme la preuve du lemme est à peu près la même pour les cinq types, on ne donnera les détails que pour le type I. On y a

$$|\Phi| = \Delta D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -f & g & -h \\ -j & -k & l \end{vmatrix} = agl - ahk + fbl + fck + jbh + jgc,$$

où

$$\begin{aligned} a > b > 0, & \quad a > c > 0, & \quad g > f > 0, \\ g > h > 0, & \quad l > j > 0, & \quad l > k > 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} agl > ahk > 0, & \quad agl > fbl > 0, & \quad agl > fck > 0, \\ agl > jbh > 0, & \quad agl > jgc > 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent, $5agl > |\Phi| > 0$. En vertu du théorème 2.1 et de la définition d'un parallélépipède extrême on obtient $agl < \Delta$; et par conséquent, $5 > D > 0$. Mais D est un nombre entier, et l'on a, par suite $4 \geq D \geq 1$. Le lemme est donc prouvé.

Pour prouver que $D \neq 2, 3$ ou 4 , on fait usage des théorèmes que l'on a déjà énoncés concernant les octaèdres du réseau (*cf.* Définition 8, section I). L'octaèdre, qui a ses sommets aux points $p_1, p_2, p_3, -p_1, -p_2, -p_3$, est symétrique par rapport à l'origine, et tous ses sommets sont des points du réseau. Parce que tout l'octaèdre sauf les sommets se trouve dans l'intérieur du parallélépipède extrême $\{a, g, l\}$,

cet octaèdre se révèle un octaèdre du réseau. On voit tout d'abord que $D = 1$ ou 2 . Si $D = 2$, tous les points de la forme

$$p = \left(\gamma_1 + \frac{\delta}{2}\right) p_1 + \left(\gamma_2 + \frac{\delta}{2}\right) p_2 + \left(\gamma_3 + \frac{\delta}{2}\right) p_3 \quad (\gamma_i, \delta \text{ entiers})$$

seront des points du réseau. Mais ceci n'a pas lieu comme on verra en vertu de ce qui suit. Quand Φ est canonique du type I, on considère le point pour lequel on a $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \gamma_3 = -1, \delta = 1$, c'est-à-dire le point

$$p = \frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{2} p_3.$$

Alors

$$|\xi(p)| = \frac{1}{2} |a - b - c| < a,$$

$$|\eta(p)| = \frac{1}{2} |-f - g + h| < g,$$

$$|\zeta(p)| = \frac{1}{2} |-j + k - l| < l.$$

Il en résulte que p est dans l'intérieur du parallélépipède. Puisque $D \neq 0$, il s'ensuit que p n'est pas l'origine. Par conséquent, le point p n'est pas un point du réseau. Alors $D = 1$.

Quand Φ est canonique du type II, le même raisonnement montre que le point, pour lequel on a $\gamma_2 = 0, \gamma_1 = \gamma_3 = -1, \delta = 1$, n'est pas un point du réseau; par conséquent, on a une seconde fois $D = 1$. De même pour le type III le point, pour lequel on a $\gamma_3 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = -1, \delta = 1$, n'est pas un point du réseau. Alors, on a encore $D = 1$.

Quand Φ est canonique du type IV ou V, le point, pour lequel on a $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \delta = 1$, n'est pas un point du réseau. Par conséquent, on a encore une fois $D = 1$. Ainsi le théorème est prouvé.

THÉORÈME 2.6. — *Si l'on peut trouver trois points du réseau p_1, p_2, p_3 et trois nombres $e_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, 3$) à produit $e_1 e_2 e_3 = 1$, tels que la matrice P des coordonnées des points p_1, p_2, p_3 ait le déterminant $+1$, et tels que P transforme la matrice des trois formes $e_1 \xi, e_2 \eta, e_3 \zeta$ en une matrice Φ canonique du type I, II, ..., ou VI, la matrice P sera une des matrices qui, d'après le théorème 2.3, correspondent aux parallélépipèdes extrêmes pour ξ, η et ζ .*

On peut regarder la matrice P comme une transformation qui introduit un système nouveau de coordonnées (X_1, X_2, X_3) où

$$X_i = p_i^{(1)}x_1 + p_i^{(2)}x_2 + p_i^{(3)}x_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Puisque le déterminant de P est 1, les coefficients $q_i^{(j)}$ dans la transformation P^{-1} sont entiers et l'on a

$$x_i = q_i^{(1)}X_1 + q_i^{(2)}X_2 + q_i^{(3)}X_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

On voit tout d'abord que tous les points qui sont points du réseau dans le système (X_1, X_2, X_3) se révèlent aussi comme des points du réseau dans le système (x_1, x_2, x_3) et réciproquement. Les trois points $p_1, p_2,$ et p_3 ont les coordonnées respectives $(1, 0, 0), (0, 1, 0),$ et $(0, 0, 1)$ dans le système (X_1, X_2, X_3) . Il est évident que l'octaèdre dont $p_1, p_2, p_3, -p_1, -p_2, -p_3$ sont les six sommets est un octaèdre du réseau dans le système (X_1, X_2, X_3) . Du fait que le réseau est transformé en lui-même par P (ou P^{-1}), cet octaèdre est en même temps un octaèdre du réseau dans le système (x_1, x_2, x_3) .

On considère le parallélépipède $\{a, g, l\}$ où a, g et l sont les éléments de la diagonale principale de la matrice Φ . Puisque Φ est une matrice canonique, on a, d'après la définition, $a > b, a > c, g > f, g > h, l > j, l > k$. Il en résulte que les points p_1, p_2 et p_3 ne sont pas seulement dans les plans qui contiennent les faces de $\{a, g, l\}$ mais en réalité sur ces faces elles-mêmes. Ce parallélépipède est un corps convexe symétrique par rapport à l'origine. La fonction de distance généralisée qui correspond à ce parallélépipède est

$$f(x_1, x_2, x_3) = \max\left(\left|\frac{\xi}{a}\right|, \left|\frac{\eta}{g}\right|, \left|\frac{\zeta}{l}\right|\right).$$

En employant P , comme il est indiqué par la Définition 9, on obtient

$$F(X_1, X_2, X_3) = \max\left(\left|\frac{\Xi}{a}\right|, \left|\frac{H}{g}\right|, \left|\frac{Z}{l}\right|\right),$$

où Ξ, H et Z sont les formes respectives en lesquelles $e_1\xi, e_2\eta, e_3\zeta$ sont transformées par P . Par suite, les coefficients de Ξ sont les éléments de la première ligne horizontale de la matrice Φ , ceux de H sont les éléments de la deuxième ligne, et ceux de Z sont les éléments de la troisième ligne.

En tenant compte des conditions du théorème 2.4, on voit que la fonction $F(X_1, X_2, X_3)$ remplit l'inégalité $F(X_1, X_2, X_3) > 1$ pour chacun des points dont on a fait une liste dans le premier résultat qui suit la Définition 9; par conséquent, le parallélépipède $\{a, g, l\}$ est libre. Ce parallélépipède remplit la définition d'un parallélépipède extrême pour ξ, η et ζ , et le théorème se trouve donc vérifié.

SECTION III.

DÉMONSTRATION DE L'ALGORITHME DE MINKOWSKI.

On se propose maintenant de démontrer les algorithmes dont on a besoin pour déterminer tous les parallélépipèdes que comprend la chaîne appartenant à ξ, η, ζ .

THÉORÈME 3.1. — *Si l'on prend pour point de départ un parallélépipède extrême pour ξ, η, ζ , la formation successive de tous les voisins fournit alors la totalité des parallélépipèdes extrêmes qui existent pour ξ, η, ζ .*

Ce théorème-ci a été démontré par Minkowski ⁽¹⁾. On voit tout d'abord, en vertu de ce théorème, que l'on peut passer d'un parallélépipède extrême quelconque $\{a_0, g_0, l_0\}$ à un autre $\{a, g, l\}$ quelconque choisi d'avance, en prenant une succession finie de voisins.

THÉORÈME 3.2. — *Quand on donne des noms nouveaux, convenablement choisis, aux axes et aux formes linéaires ⁽²⁾ comme l'on indique dans le Tableau ci-dessous, le ξ - , η - ou ζ -voisin, dont il s'agit, deviendra le ξ' -voisin, et la matrice Φ' sera toujours une matrice canonique du type I, . . . , ou VI dans laquelle l'inégalité $b' > c'$ est remplie*

⁽¹⁾ H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen*, I, p. 283, « Zur Theorie der Kettenbrüche ».

⁽²⁾ Ceci est semblable à ce que l'on a fait en démontrant les cas II, III et V du théorème 2.4.

Condition.	Substitution.	Le type de Φ' se trouve sous le chiffre correspondant à Φ .					
		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
ξ -voisin, $c > b$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi', \quad \eta = \zeta', \quad \zeta = \eta' \\ x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_3, \quad x_3 = x'_2 \end{array} \right\}$	I	III	II	V	IV	VI
η -voisin, $f > h$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \eta', \quad \eta = \xi', \quad \zeta = \zeta' \\ x_1 = x'_2, \quad x_2 = x'_1, \quad x_3 = x'_3 \end{array} \right\}$	II	I	III	V	IV	VI
η -voisin, $h > f$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \zeta', \quad \eta = \xi', \quad \zeta = \eta' \\ x_1 = x'_3, \quad x_2 = x'_1, \quad x_3 = x'_2 \end{array} \right\}$	III	I	II	IV	V	VI
ζ -voisin, $j > k$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \eta', \quad \eta = \zeta', \quad \zeta = \xi' \\ x_1 = x'_2, \quad x_2 = x'_3, \quad x_3 = x'_1 \end{array} \right\}$	II	III	I	IV	V	VI
ζ -voisin, $k > j$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \zeta', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \xi' \\ x_1 = x'_3, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_1 \end{array} \right\}$	III	II	I	V	IV	VI

Dans la chaîne des extrêmes pour ξ , η et ζ , on appelle extrêmes de *première espèce* les parallélépipèdes pour lesquels la matrice P possède un déterminant $D = 1$. On nomme ceux pour lesquels $D = 0$ les extrêmes de *deuxième espèce*.

THÉORÈME 3.3. — *Les voisins d'un $\{a, g, l\}$ de deuxième espèce sont toujours tous les trois de première espèce.*

On fait la substitution indiquée dans le Tableau pour faire $b' > c'$ et pour que le voisin dont il s'agit devienne le ξ' -voisin. Alors, puisque Φ est du type VI, Φ' l'est aussi. En vertu des théorèmes 2.3 et 2.4 on a

$$a' > b', \quad a' > c', \quad g' > f', \quad g' > h', \quad l' > j', \quad l' > k';$$

$$b' + c' = a', \quad f' + h' = g', \quad j' + k' = l'.$$

Si p'_1, p'_2, p'_3 sont les trois points du réseau dont les coordonnées figurent dans P' , rangés par ordre des colonnes de P' dans laquelle leurs coordonnées se trouvent, le ξ' -voisin aura sur sa surface les quatre points du réseau $p'_2, p'_3, -p'_2, -p'_3$, et, en outre, deux autres points du réseau que l'on désignera par \bar{p}'_2 et $-\bar{p}'_2$ [l'indice 2 s'y trouve parce que les coordonnées de \bar{p}'_2 sont situées dans la deuxième colonne de la matrice \bar{P}' ⁽³⁾]. Puisque l'on a $b' > c'$, les coordonnées

(1) La matrice \bar{P}' est la matrice des points du réseau situés sur la surface du voisin, les coordonnées étant relatives aux nouveaux axes; $\bar{\Phi}'$ est la matrice canonique correspondant au voisin par rapport à ces mêmes axes et aux formes ξ', η', ζ' .

de p'_2 ou $-p'_2$ se trouveront dans la première colonne de la matrice \bar{P}' , et celle de p'_3 ou $-p'_3$ dans la troisième colonne.

Si l'on suppose que le voisin soit de deuxième espèce, la matrice Φ' correspondant à ce voisin devient

$$\bar{\Phi}' = \left\| \begin{array}{ccc} b' & -\bar{b}' & -c' \\ -g' & \bar{g}' & -h' \\ -k' & -\bar{k}' & l' \end{array} \right\|, \quad \text{où } \begin{array}{l} b' = \bar{b}' + c', \\ \bar{g}' = g' + h', \\ l' = k' + \bar{k}'. \end{array}$$

On a vu que $l' = k' + j'$, par suite $\bar{k}' = j'$. Puisqu'il n'y a qu'un des deux points du réseau p'_1 ou $-p'_1$ pour lequel $\zeta = j'$, il en résulte que $\bar{p}'_2 = \pm p'_1$; par conséquent on a $a' = \bar{b}' = b' - c'$, mais ceci est impossible parce que $b' > c' > 0$ et $a' > b'$. Le théorème se trouve ainsi vérifié.

Pour obtenir le ξ -voisin quand on a $b > c$, on baisse les ξ -faces jusqu'aux points du réseau sur les γ_1 -faces (pour ces points on a $\xi = \pm b$) et l'on élève ensuite les γ_1 -faces jusqu'au premier couple de points du réseau qui ne se trouvent ni dans les ξ -faces ni dans les ζ -faces; le premier paramètre est diminué, le deuxième est augmenté et le troisième n'est pas changé. Pour le ξ -voisin $\{a_1, g_1, l_1\}$ de $\{a, g, l\}$ on a alors $a_1 = b < a$, $g_1 > g$, et $l_1 = l$. Puisqu'il y a au plus un point du réseau dans chaque plan de la forme $\xi = \text{const.}$, $\gamma_1 = \text{const.}$, il en résulte que deux points du réseau dont les coordonnées se trouvent dans \bar{P} sont $\bar{p}_1 = d_1 p_2$, $\bar{p}_3 = d_3 p_3$, où $d_1 = \pm 1$, $d_3 = \pm 1$.

Si $\{a, g, l\}$ est de première espèce, P sera une matrice à déterminant 1 dont les éléments seront des nombres entiers. Alors l'inverse P^{-1} , de la substitution dont P est la matrice, existe; tous ses éléments sont des entiers; et le déterminant de P^{-1} est 1. On pose $T \equiv P^{-1} \bar{P}$. Étant le produit de deux matrices dont les éléments sont des entiers, T est elle-même une telle matrice. Si l'on désigne par $q_i^{(j)}$ le cofacteur⁽¹⁾ de $p_i^{(j)}$ dans P , on a

$$\|q_i^{(j)}\| \|\bar{p}_i^{(j)}\| = \|t_i^{(j)}\|.$$

Des relations

$$\bar{p}_i^{(1)} = d_1 p_i^{(2)}, \quad \bar{p}_i^{(3)} = d_3 p_i^{(3)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(1) On appelle ainsi le coefficient d'un terme dans le développement du déterminant d'une matrice.

il suit que

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \sum_{k=1}^3 q_k^{(1)} \bar{p}_k^{(2)} & 0 \\ d_1 & \sum_{k=1}^3 q_k^{(2)} \bar{p}_k^{(2)} & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^3 q_k^{(3)} \bar{p}_k^{(2)} & d_3 \end{vmatrix}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^3 q_k^{(1)} \bar{p}_k^{(2)} = -d_1 d_3 = \pm 1 \quad \text{ou } 0$$

selon que le voisin $\{a_1, g_1, l_1\}$ est de première ou de deuxième espèce.

On pose

$$\sum_{k=1}^3 q_k^{(1)} \bar{p}_k^{(2)} = x d_2, \quad \sum_{k=1}^3 q_k^{(2)} \bar{p}_k^{(2)} = m d_2, \quad \sum_{k=1}^3 q_k^{(3)} \bar{p}_k^{(2)} = n d_2,$$

où $d_2 = -d_1 d_3$ et où $x = 1$ ou $x = 0$ selon que $\{a_1, g_1, l_1\}$ est de première ou deuxième espèce. Il en résulte que

$$\bar{P} = PT = \begin{vmatrix} d_1 p_1^{(2)} & d_2 (x p_1^{(1)} + m p_1^{(2)} + n p_1^{(3)}) & d_3 p_1^{(3)} \\ d_1 p_2^{(2)} & d_2 (x p_2^{(1)} + m p_2^{(2)} + n p_2^{(3)}) & d_3 p_2^{(3)} \\ d_1 p_3^{(2)} & d_2 (x p_3^{(1)} + m p_3^{(2)} + n p_3^{(3)}) & d_3 p_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Ces nombres entiers x , m et n ne sont pas tous égaux à zéro, car s'ils l'étaient, \bar{p}_2 serait l'origine; or ceci n'est pas possible.

D'autre part

$$\bar{p}_2 = d_2 (x p_1 + m p_2 + n p_3)$$

et

$$\begin{aligned} \xi(\bar{p}_2) &= e_1 d_2 (x a \pm m b \pm n c), \\ \eta(\bar{p}_2) &= e_2 d_2 (\pm x f + m g \pm n h), \\ \zeta(\bar{p}_2) &= e_3 d_2 (\pm x j \pm m k \pm n l), \end{aligned}$$

où le système de signes ci-dessus est celui du système canonique de signes dans Φ .

Les relations $a_1 = b$, $g_1 < g$, $l_1 = l$, entraînent, en vertu du théo-

rème 2. 1, la condition $g_1 < \frac{\Delta}{bl}$. Le point \bar{p}_2 du réseau se trouve parmi les points du réseau qui peuvent être écrits sous la forme

$$p = xp_1 + mp_2 + np_3 \quad (x = \pm 1 \text{ ou } 0; m, n, \text{ entiers}; |x| + |m| + |n| \geq 1)$$

et qui remplissent les conditions

$$|\xi| < b, \quad |\eta| < \frac{\Delta}{bl}, \quad |\zeta| < l;$$

et, en particulier, $\pm \bar{p}_2$ sont les deux tels points pour lesquels $|\eta| = \min.$ (1). Il est clair, alors, que si les inégalités simultanées, énoncées ci-dessus, peuvent être résolues pour obtenir le nombre fini de solutions qu'elles possèdent, \bar{p}_2 sera déterminé au signe près. On peut déterminer ensuite le signe pour que $\bar{\Phi}$ soit une matrice canonique du type I, ..., ou VI.

On a indiqué, dans le Tableau suivant, la matrice T correspondant à $\bar{\Phi}$ dans les cas divers I à V; les démonstrations seront données plus tard.

Algorithme relatif au ξ -voisin ($b > c$). — I : 1. $j > k$:

$$T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad +, +, +; \text{ V.}$$

2. $j < k$:

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad +, -, -; \text{ III.}$$

Le chiffre romain à droite indique le type de $\bar{\Phi}$; les trois signes sont les signes des produits $\bar{e}_i e_i (i = 1, 2, 3)$; les nombres e_i correspondent à $\bar{\Phi}$ relativement au théorème 2.3 et les nombres \bar{e}_i à $\bar{\Phi}$.

II et V. — Le signe supérieur est relatif au cas II, le signe inférieur au cas V.

(1) Il n'y a que deux points du réseau pour lesquels $|\eta| = \min.$, car autrement η s'annulerait pour des points du réseau autres que l'origine.

On pose

$$M = \left[\frac{G}{F} \right], \quad N = \left[\frac{\pm H}{F} \right], \quad u = a - Mb - Nc, \quad v = \pm j + Mk - Nl,$$

où F, G, et H sont les cofacteurs de f , g et $\pm h$ dans Φ . Les crochets [] désignent le symbole connu : *plus grand entier contenu dans* . . .

			<i>m.</i>	<i>n.</i>	<i>δ.</i>
1°	$u < c$	$v > k$	M - 1	N + 1	+ 1
2°	$u < b - c$	$v < 0$	M	N - 1	- 1
3°	$u < b$	$v > 0$, mais pas 1°	M	N	- 1
4°	$u < b$	$v < 0$, mais pas 2°	M	N	+ 1
5°	$u > b$	$v > 0$	M	N + 1	+ 1
6°	$u > b$	$v < 0$	M + 1	N	- 1

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \mp \delta & 0 \\ \pm \delta & \mp \delta m & 0 \\ 0 & -\delta n & 1 \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} \mp \delta, \mp \delta, +1; \\ \delta = +1, I; \quad \delta = -1, IV \end{array}$$

III : 1. $a + c < 2b$:

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right\|, \quad -, +, -; \text{ II.}$$

2. $a + c > 2b$:

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right\|, \quad +, +, +; \text{ VI.}$$

IV : 1. $a < 2b, f < h, j + k < l$:

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad +, +, +; \text{ II.}$$

2. $a > 2b$ ou $f > h$ ou $j + k > l$:

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right\|, \quad -, +, -; \text{ VI.}$$

Algorithme relatif au ξ -voisin du ξ -voisin dans les cas III-2, IV-2. —

Le signe supérieur est relatif au cas III-2, le signe inférieur au cas IV-2.

1. $b - c > c$:

$$M = \left[\frac{\pm G}{F} \right], \quad N = \left[\frac{(\pm G + H)}{F} \right];$$

$$u^0 = b - c, \quad u' = c; \quad v^0 = l, \quad v' = l - k;$$

$$u = a - M u^0 - N u', \quad v = -j + M v' - N v^0,$$

			<i>m.</i>	<i>n.</i>	$\delta.$
1 ^o	$u < u'$	$v > v'$	$M - 1$	$N + 1$	$+1$
2 ^o	$u < u'$	$v' > v > 0$	M	$N + 1$	-1
3 ^o	$u > u'$	$v > 0$	M	$N + 1$	$+1$
4 ^o	$u < u^0$	$v < 0$	M	N	$+1$
5 ^o	$u > u^0$	$v < 0$	$M + 1$	$N + 1$	-1

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \mp \delta & 0 \\ -1 & -\delta m & 0 \\ \pm 1 & \pm \delta(m - n) & \mp \delta \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} \pm 1, -\delta, \mp \delta; \\ \delta = +1, V; \quad \delta = -1, III. \end{array}$$

2. $b - c < c$:

$$M = \left[\frac{(\pm K + L)}{J} \right], \quad N = \left[\frac{\pm K}{J} \right];$$

$$u^0 = c, \quad u' = b - c; \quad v^0 = g + h, \quad v' = h;$$

$$u = a - M u^0 - N u', \quad v = -f + M v' - N v^0.$$

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \mp \delta \\ 0 & -\delta & -\delta n \\ \mp 1 & \pm \delta & \mp \delta(m - n) \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} \pm 1, -\delta, \mp \delta; \\ \delta = +1, IV; \quad \delta = -1, II. \end{array}$$

Lorsque $b > c$ le η -voisin du ξ -voisin est $\{a, g, l\}$ lui-même.

Algorithme relatif au ζ -voisin du ξ -voisin dans les cas III-2, IV-2. —
Le signe supérieur est relatif au cas III-2, le signe inférieur au cas IV-2.

1. $k < l - k$:

$$M = \left[\frac{-H}{F} \right], \quad N = \left[\frac{(\mp G - H)}{F} \right];$$

$$u^0 = l - k, \quad u' = k; \quad v^0 = b, \quad v' = b - c;$$

$$u = j - M u^0 - N u', \quad v = -a + M v' - N v^0.$$

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \mp \delta & 0 \\ \delta & -\delta(m - n) & -1 \\ 0 & \pm \delta m & \pm 1 \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} \mp \delta, -\delta, \pm 1; \\ \delta = +1, IV; \quad \delta = -1, I. \end{array}$$

2. $k > l - k$:

Dans le cas III

$$T = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad -, -, +; \\ \text{V.}$$

Dans le cas IV :

1° $j > k$:

$$T = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad -, +, -; \\ \text{II.}$$

2° $j < k$:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad +, -, -; \\ \text{V.}$$

La démonstration des algorithmes suit comme on l'indique par les chiffres romains.

I. Les conditions qui doivent être remplies par des entiers x , m , et n sont

- (1) $|xa + mb + nc| < b$
 (2) $|-xj - mk + nl| < l \quad (|x| + |m| + |n| \geq 1, x = \pm 1 \text{ ou } 0).$
 (3) $|-xf + mg - nh| = \min.$

En vertu des théorèmes 2.3 et 2.4 les coefficients remplissent les conditions $a > b > 0$, $a > c > 0$; $g > f > 0$, $g > h > 0$; $l > j > 0$, $l > k > 0$; $b + c > a$ et $f > h$ ou $j > k$. En outre, on tient compte de la condition $b > c$.

On peut écrire de nouveau (1), (2) et (3) sous les formes

- (1') $U \equiv xa + mb + nc = \lambda_1 b$
 (2') $V \equiv -xj - mk + nl = \lambda_2 l \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$
 (3') $W \equiv -xf + mg - nh = \min. \text{ en valeur absolue.}$

Puisque $x = \pm 1$ ou 0 pour toutes solutions dont il s'agit, on obtient les valeurs de m et n comme fonctions de x , λ_1 , λ_2 , a , b , c , etc.

$$m = x \frac{al + cj}{-(bl + ck)} + \frac{\lambda_1 bl - \lambda_2 cl}{bl + ck} = x \frac{G}{F} + \nu_1,$$

$$n = x \frac{ak - bj}{-(bl + ck)} + \frac{-\lambda_2 bl - \lambda_1 bk}{bl + ck} = x \frac{H}{F} + \nu_2,$$

où F , G et H sont les cofacteurs respectifs de $-f$, g , et $-h$ dans Φ , et où ν_1 et ν_2 sont les deux fractions ci-dessus dans lesquelles λ_1 et λ_2 se trouvent. Des conditions que vérifient b , c , l , k , λ_1 et λ_2 il suit tout d'abord que $|\nu_i| < 2$ ($i = 1, 2$).

Si l'on pose $x = 0$, on aura $m = \nu_1$, $n = \nu_2$ et puisque m et n sont des entiers, on aura $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$. Parmi les entiers m et n qui remplissent ces conditions, $m = 0$, $n = 0$ est le seul couple de valeurs qui remplit (1) et (2). On ne peut pas regarder ce couple comme la solution que l'on veut, parce que ceci entraînerait que \bar{p}_2 soit l'origine, ce qui contredit l'hypothèse que \bar{p}_2 est *sur la surface* d'un parallélépipède extrême. Par suite $x = \pm 1$. Se servant de la nomenclature introduite plus haut, on peut énoncer le résultat suivant :

Si l'on a $b > c$ et si la matrice Φ est canonique du type I, le ξ -voisin de $\{a, g, l\}$ sera toujours de première espèce.

Si l'on prend $x = 1$, on trouve des bornes pour $\frac{G}{F}$ et $\frac{H}{F}$. D'après le théorème 2.4 on a $b + c > a$; de là, il suit que

$$-3 < \frac{G}{F} < 0, \quad -1 < \frac{H}{F} < 1.$$

En employant ces inégalités conjointement avec les bornes trouvées pour ν_1 et ν_2 on voit, du fait que m et n sont des entiers, que m et n sont des solutions de

$$-4 \leq m \leq 1, \quad -2 \leq n \leq 2.$$

Quand on cherche parmi celles-ci les solutions de (1) et (2), on trouve les couples suivants :

(i)	$m = -3, \quad n = 1,$	$ W = f + 3g + h;$
(ii)	$m = -2, \quad n = 0,$	$ W = f + 2g;$
(iii)	$m = -2, \quad n = 1,$	$ W = f + 2g + h;$
(iv)	$m = -1, \quad n = -1,$	$ W = f + g - h;$
(v)	$m = -1, \quad n = 0,$	$ W = f + g;$
(vi)	$m = -1, \quad n = 1,$	$ W = f + g + h;$

il y en a, qui ne remplissent pas toujours (1) et (2).

La plus petite valeur de $|W|$ correspond à (iv), mais (iv) ne remplit (2) qu'à condition que $j < k$; l'inégalité (1) est toujours remplie par (iv). Donc, quand $j < k$, la solution de (1), (2) et (3) est $m = -1$, $n = -1$.

Après celle relative à (iv), la plus petite valeur de $|W|$ est celle qui correspond à (v). Puisque (v) est toujours une solution de (1) et (2), la solution de (1), (2) et (3) est $m = -1$, $n = 0$, lorsque $j > k$.

Si l'on emploie $x = -1$, on arrivera aux deux solutions

$$j < k: x = -1, m = 1, n = 1; \quad j > k: x = -1, m = 1, n = 0;$$

mais celles-ci sont les mêmes que les solutions précédentes, sauf qu'elles ont des signes opposés, et, par conséquent, elles n'en diffèrent pas essentiellement.

Il reste à déterminer $d_1, d_2, d_3, \bar{e}_1 e_1, \bar{e}_2 e_2, \bar{e}_3 e_3$, et le type de $\bar{\Phi}$.

I : 1. $j > k$:

$$\bar{p}_2 = d_2(p_1 - p_2),$$

$$T = \begin{vmatrix} 0 & d_2 & 0 \\ d_1 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{P} = PT = \begin{vmatrix} d_1 p_1^{(2)} & d_2(p_1^{(1)} - p_1^{(2)}) & d_3 p_1^{(3)} \\ d_1 p_2^{(2)} & d_2(p_2^{(1)} - p_2^{(2)}) & d_3 p_2^{(3)} \\ d_1 p_3^{(2)} & d_2(p_3^{(1)} - p_3^{(2)}) & d_3 p_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Se rappelant que $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sont les nombres e_i correspondant à \bar{P} et e_1, e_2, e_3 ceux correspondant à P , l'on a

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 d_1 \xi(p_2) & \bar{e}_1 d_2 [\xi(p_1) - \xi(p_2)] & \bar{e}_1 d_3 \xi(p_3) \\ \bar{e}_2 d_1 \eta(p_2) & \bar{e}_2 d_2 [\eta(p_1) - \eta(p_2)] & \bar{e}_2 d_3 \eta(p_3) \\ \bar{e}_3 d_1 \zeta(p_2) & \bar{e}_3 d_2 [\zeta(p_1) - \zeta(p_2)] & \bar{e}_3 d_3 \zeta(p_3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 e_1 d_1 b & \bar{e}_1 e_1 d_2 (a - b) & \bar{e}_1 e_1 d_3 c \\ \bar{e}_2 e_2 d_1 g & \bar{e}_2 e_2 d_2 (-f - g) & -\bar{e}_2 e_2 d_3 h \\ -\bar{e}_3 e_3 d_1 k & \bar{e}_3 e_3 d_2 (-j + k) & \bar{e}_3 e_3 d_3 l \end{vmatrix}.$$

Puisque les termes de la diagonale principale doivent être positifs, on a

$$d_1 = \bar{e}_1 e_1, \quad d_2 = -\bar{e}_2 e_2, \quad d_3 = \bar{e}_3 e_3$$

et

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} (\bar{e}_1 e_1)^2 b & -(\bar{e}_1 e_1)(\bar{e}_2 e_2)(a - b) & (\bar{e}_1 e_1)(\bar{e}_3 e_3) c \\ (\bar{e}_2 e_2)(\bar{e}_1 e_1) g & (\bar{e}_2 e_2)^2 (f + g) & -(\bar{e}_2 e_2)(\bar{e}_3 e_3) h \\ -(\bar{e}_3 e_3)(\bar{e}_1 e_1) k & (\bar{e}_3 e_3)(\bar{e}_2 e_2)(j - k) & (\bar{e}_3 e_3)^2 l \end{vmatrix}.$$

De ce que l'on a $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 = 1$ et $e_1 e_2 e_3 = 1$, il suit que

$$(\bar{e}_1 e_1) (\bar{e}_2 e_2) (\bar{e}_3 e_3) = 1.$$

Puis les lemmes 2.2 et 2.3 nous donnent un moyen de choisir les seuls produits $\bar{e}_1 e_1$, $\bar{e}_2 e_2$, $\bar{e}_3 e_3$, pour lesquels $\bar{\Phi}$ est une matrice canonique; on obtient

$$\bar{e}_1 e_1 = 1, \quad \bar{e}_2 e_2 = 1, \quad \bar{e}_3 e_3 = 1,$$

et l'on voit que $\bar{\Phi}$ est canonique du type V. Par suite on a

$$d_1 = 1, \quad d_2 = -1, \quad d_3 = 1, \quad \bar{p}_1 = p_2, \quad \bar{p}_2 = -p_1 + p_2, \quad \bar{p}_3 = p_3.$$

2. $j < k$:

$$\bar{p}_2 = d_2(p_1 - p_2 - p_3).$$

On emploie la même méthode que dans 1 pour obtenir

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 e_1 d_1 b & -\bar{e}_1 e_1 d_2 (-a + b + c) & \bar{e}_1 e_1 d_3 c \\ \bar{e}_2 e_2 d_1 g & -\bar{e}_2 e_2 d_2 (f + g - h) & -\bar{e}_2 e_2 d_3 h \\ -\bar{e}_3 e_3 d_1 k & -\bar{e}_3 e_3 d_2 (j - k + l) & \bar{e}_3 e_3 d_3 l \end{vmatrix},$$

donc $d_1 = e_1 e_1$, $d_2 = -\bar{e}_2 e_2$, $d_3 = e_3 e_3$. En reportant ces valeurs dans $\bar{\Phi}$ et remarquant que $b + c > a$, on applique les lemmes 2.2 et 2.3 pour montrer que $\bar{e}_1 e_1 = 1$, $\bar{e}_2 e_2 = -1$, $\bar{e}_3 e_3 = -1$, et que $\bar{\Phi}$ est canonique du type III. Par conséquent,

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1, \quad \bar{p}_1 = p_2, \quad \bar{p}_2 = p_1 - p_2 - p_3, \quad \bar{p}_3 = -p_3.$$

II et V. — Les cas II et V peuvent être simultanément résolus. Les conditions (1), (2) et (3) qu'il faut remplir dans les cas respectifs sont les suivantes :

II :

- (1) $|xa - mb - nc| < b$
- (2) $|-xj - mk + nl| < l \quad (|x| + |m| + |n| \geq 1; x = \pm 1 \text{ ou } 0).$
- (3) $|xf + mg + nh| = \min.$

V :

- (1) $|\bar{x}a - \bar{m}b + \bar{n}c| < b$
- (2) $|\bar{x}j + \bar{m}k + \bar{n}l| < l \quad (|\bar{x}| + |\bar{m}| + |\bar{n}| \geq 1; \bar{x} = \pm 1 \text{ ou } 0).$
- (3) $|\bar{x}f + \bar{m}g - \bar{n}h| = \min.$

On pose pour V, $x = \bar{x}$, $m = \bar{m}$, $n = -\bar{n}$; alors on peut écrire (1), (2), (3) pour les deux cas sous la forme

$$(1') \quad U \equiv xa - mb - nc = \lambda_1 b$$

$$(2') \quad V \equiv \pm xj + mk - nl = \lambda_2 l \quad (|\lambda_i| < 1; \lambda_i \neq 0).$$

$$(3') \quad W \equiv xf + mg + nh = \text{min. en valeur absolue.}$$

Le signe supérieur dans (2') appartient au cas II, le signe inférieur au cas V. On a aussi $F = bl + ck$, $G = al \mp cj$, $H = \pm ak + bj$. On tire de (1) et de (2) les valeurs de m et n comme il suit :

$$m = x \frac{al \mp cj}{bl + ck} + \frac{-\lambda_1 bl + \lambda_2 cl}{bl + ck} = x \frac{G}{F} + \nu_1,$$

$$n = x \frac{\pm bj + ak}{bl + ck} + \frac{-\lambda_2 bl - \lambda_1 bk}{bl + ck} = x \frac{\pm H}{F} + \nu_2.$$

Si l'on pose $x = 0$, on obtiendra $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$; parmi les entiers qui remplissent ces inégalités, $m = 0$, $n = 0$ est le seul couple qui remplit (1) et (2). Parce que \bar{p}_2 n'est pas l'origine, on peut énoncer comme dans le cas I :

Si l'on a $b > c$ et si la matrice Φ est canonique du type II ou V, le ξ voisin de $\{a, g, l\}$ sera toujours de première espèce.

Aucune borne numérique indépendante de a, b, c, \dots , ne peut être obtenue ni pour $\frac{G}{F}$ ni pour $\pm \frac{H}{F}$, par conséquent il faut exprimer les solutions comme fonctions de ces deux quantités.

On pose

$$M = \left[\frac{G}{F} \right], \quad N = \left[\pm \frac{H}{F} \right],$$

où les crochets [] ont le même sens que plus haut.

Par la théorie des déterminants on obtient pour la matrice Φ , les équations

$$a - \frac{G}{F}b - \frac{\pm H}{F}c = 0, \quad f + \frac{G}{F}g + \frac{\pm H}{F}h = \frac{\Delta}{F}, \quad \pm j + \frac{G}{F}k - \frac{\pm H}{F}l = 0.$$

On pose

$$u \equiv a - Mb - Nc, \quad v \equiv \pm j + Mk - Nl, \quad w \equiv f + Mg + Nh,$$

alors

$$0 < u < b + c, \quad -k < v < l, \quad \frac{\Delta}{F} - (g + h) < w < \frac{\Delta}{F}.$$

Des expressions trouvées plus haut pour m et n on déduit

$$\begin{aligned} \left[x \frac{G}{F} \right] + [\nu_1] &\leq m \leq \left[x \frac{G}{F} \right] + [\nu_1] + 1, \\ \left[\pm x \frac{H}{F} \right] + [\nu_2] &\leq n \leq \left[\pm x \frac{H}{F} \right] + [\nu_2] + 1, \end{aligned}$$

où $-2 \leq [\nu_i] \leq 1$. Les solutions de (1') et (2') que l'on obtient quand on pose $x = -1$, sont les mêmes au signe près que celles relatives à $x = +1$, parce que U, V, W sont des expressions homogènes en x, m et n . On pose $x = 1$.

Parce que m est un entier, $\frac{G}{F}$ est un entier si ν_1 en est un. Si l'on suppose que les deux soient entiers,

$$-m = -\frac{G}{F} - \nu_1 = -\left[\frac{G}{F} \right] + [-\nu_1]$$

il s'ensuit que $-M - 2 \leq -m \leq -M + 1$.

Lorsque ν_1 n'est pas un entier, on voit que

$$m = \frac{G}{F} + \nu_1 = \left[\frac{G}{F} \right] + [\nu_1] + 1, \quad \text{d'où } M - 1 \leq m \leq M + 2.$$

De même pour n , et l'on voit que

$$M - 1 \leq m \leq M + 2, \quad N - 1 \leq n \leq N + 2.$$

Plusieurs des seize couples possibles peuvent être écartés au moyen des bornes obtenues plus haut pour u et v . Par exemple, si l'on a

$$m = M + 2, \quad n = N - 1, \quad U = a - b(M + 2) - c(N - 1) = u - 2b + c,$$

et

$$V = \pm j + k(M + 2) - l(N - 1) = v + 2k + l;$$

il en suit que

$$-2b + c < U < -b + 2c, \quad k + l < V < 2k + 2l.$$

La condition (2), c'est-à-dire $|V| < l$, n'est donc pas remplie.

	Solutions de (1), (2).	Bornes de U et V.	W.	Cond. pour solution.
(i)	$\begin{cases} m = M + 2 \\ n = N \end{cases}$	$\begin{cases} -2b < U < -b + c \\ k < V < l + 2k \end{cases}$	$w + 2g$	$\begin{cases} u < b \\ v < l - 2k \end{cases}$
(ii)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N \end{cases}$	$\begin{cases} -b < U < c \\ 0 < V < k + l \end{cases}$	$w + g$	$\begin{cases} u > 0 \\ v < l - k \end{cases}$
(iii)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -b - c < U < 0 \\ -l < V < k \end{cases}$	$w + g + h$	$\begin{cases} u > c \\ v > -k \end{cases}$
(iv)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} -b - 2c < U < -c \\ -2l < V < k - l \end{cases}$	$w + g + 2h$	$\begin{cases} u > 2c \\ v > l - k \end{cases}$
(v)	$\begin{cases} m = M \\ n = N - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} c < U < b + 2c \\ l - k < V < 2l \end{cases}$	$w - h$	$\begin{cases} u < b - c \\ v < 0 \end{cases}$
(vi)	$\begin{cases} m = M \\ n = N \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < U < b + c \\ -k < V < l \end{cases}$	w	$\begin{cases} u < b \\ v < l \end{cases}$
(vii)	$\begin{cases} m = M \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -c < U < b \\ -l - k < V < 0 \end{cases}$	$w + h$	$\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$
(viii)	$\begin{cases} m = M - 1 \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} b - c < U < 2b \\ -l - 2k < V < -k \end{cases}$	$w - g + h$	$\begin{cases} u < c \\ v > k \end{cases}$

Après avoir fait de cette manière tous les rejets possibles, on construit le Tableau ci-dessus de toutes les solutions de (1) et (2).

Il s'agit donc du minimum de $|W|$. Les définitions de M et N et les conditions $a > b > c > 0$, $l > j$, entraînent $M \geq 0$, $N \geq -1$. Puis l'on a $w \geq f - h$ pour toutes les solutions, sauf peut-être la solution (v), et l'on en déduit $W \geq f - g > -g$. Or la définition d'un parallélépipède extrême $\{a, g, l\}$ demande qu'il n'y ait pas de solution de $|\xi| < a$, $|\zeta| < l$, pour laquelle on ait $|\eta| \leq g$; c'est-à-dire, pas de solution de (1) et (2) pour laquelle $|W| \leq g$. Donc pour toutes les solutions sauf (v), on a $W > g$. Pour (v) on a $W = w - h$, or, tant que (v) est une solution de (1) et (2), (vi) en est une aussi. On vient de montrer que $w > g$ lorsque (vi) est une solution; par conséquent, la condition $W = w - h > g - h > 0$ se trouve remplie pour (v); ceci entraîne $w - h > g$. Pour toutes les solutions on a alors $|W| = W$.

Les valeurs de W pour (viii) et (v) sont les plus petites, et, puisque (v) et (viii) ne peuvent pas être à la fois solutions de (1) et (2), (viii) est la solution de (1), (2) et (3) lorsque $u < c$, $v > k$; d'autre part, (v) est la solution lorsque $u < b - c$, $v < 0$. Après celles-ci, la plus petite valeur de W correspond à (vi) qui remplit (1) et (2)

lorsque $u < b$. Mais la condition (3) n'est pas remplie par (vi) à moins que ni (v) ni (viii) ne remplisse (1) et (2). Pourvu que les conditions sous lesquelles (v) et (viii) seraient une solution de (1) et (2) ne soient pas remplies, lorsque $u < b$, $v < l$, (vi) est la solution de (1), (2) et (3). En continuant de cette manière on arrive au Tableau suivant qui indique toutes les solutions de (1), (2) et (3) :

	Conditions.	m .	n .	Corresp.
1°	$u < c, \quad v > k$	$M - 1$	$N + 1$	(viii)
2°	$u < b - c, \quad v < 0$	M	$N - 1$	(v)
3°-4°	$u < b$, mais ni 1° ni 2°	M	N	(vi)
5°	$u > b, \quad v > 0$	M	$N + 1$	(vii)
6°	$u > b, \quad v < 0$	$M + 1$	N	(ii)

Il reste à déterminer T , $\bar{e}_1 e_1$, $\bar{e}_2 e_2$, $\bar{e}_3 e_3$, et le type de $\bar{\Phi}$. Puisque $\bar{p}_2 = d_2(p_1 + mp_2 \pm np_3)$, on a

$$T = \begin{vmatrix} 0 & d_2 & 0 \\ d_1 & d_2 m & 0 \\ 0 & \pm d_2 n & d_3 \end{vmatrix}.$$

De la même façon que dans le cas I (voir p. 33) on obtient

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} -\bar{e}_1 e_1 d_1 b & \bar{e}_1 e_1 d_2 (a - mb - nc) & \mp e_1 e_1 d_3 c \\ \bar{e}_2 e_2 d_1 g & \bar{e}_2 e_2 d_2 (f + mg + nh) & \pm \bar{e}_2 e_2 d_3 h \\ \mp \bar{e}_3 e_3 d_1 k & \bar{e}_3 e_3 d_2 (-j \mp mk \pm nl) & e_3 e_3 d_3 l \end{vmatrix}.$$

En se rappelant que $W > 0$, on trouve que $d_1 = -\bar{e}_1 e_1$, $d_2 = \bar{e}_2 e_2$, $d_3 = \bar{e}_3 e_3$, et

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} (\bar{e}_1 e_1)^2 b & (\bar{e}_1 e_1) (\bar{e}_2 e_2) U & \mp (\bar{e}_1 e_1) (\bar{e}_3 e_3) c \\ -(\bar{e}_2 e_2) (\bar{e}_1 e_1) g & (\bar{e}_2 e_2)^2 W & \pm (\bar{e}_2 e_2) (\bar{e}_3 e_3) h \\ \pm (\bar{e}_3 e_3) (\bar{e}_1 e_1) k & \mp (\bar{e}_3 e_3) (\bar{e}_2 e_2) V & (\bar{e}_3 e_3)^2 l \end{vmatrix}.$$

1° $u < c, v > k$: ici l'on a $m = M - 1$, $n = N + 1$. En remarquant que $0 < u < b + c$, $-k < v < l$, on voit que $U > 0$, $V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $\bar{e}_1 e_1 = \mp 1$, $\bar{e}_2 e_2 = \mp 1$, $\bar{e}_3 e_3 = 1$; $d_1 = \pm 1$, $d_2 = \mp 1$, $d_3 = 1$ et que $\bar{\Phi}$ est canonique du type I.

2° $u < b - c, v < 0$: $m = M$, $n = N - 1$; $U > 0$, $V > 0$. Les lemmes

2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $\bar{e}_1 e_1 = \pm 1$, $\bar{e}_2 e_2 = \pm 1$, $\bar{e}_3 e_3 = 1$, $d_1 = \mp 1$, $d_2 = \pm 1$, $d_3 = 1$, et que Φ est du type IV.

3° $u < b$, $v > 0$, mais on n'a pas les inégalités du 1° : $m = M$, $n = N$; $U > 0$, $V > 0$. Comme 2°.

4° $u < b$, $v < 0$, mais on n'a pas les inégalités du 2° : $m = M$, $n = N$; $U > 0$, $V < 0$. Comme 1°.

5° $u > b$, $v > 0$: $m = M$, $n = N + 1$; $U > 0$, $V < 0$. Comme 1°.

6° $u > b$, $v < 0$: $m = M + 1$, $n = N$; $U > 0$, $V > 0$. Comme 2°.

III et IV. — On peut traiter à la fois les deux cas. Il faut remplir les conditions suivantes dans les cas respectifs.

III.

$$(1) \quad |\bar{x}a - \bar{m}b - \bar{n}c| < b,$$

$$(2) \quad |xj + \bar{m}k + \bar{n}l| < l,$$

$$(3) \quad |-\bar{x}f + \bar{m}g - \bar{n}h| = \min.$$

IV.

$$(1) \quad |xa + mb - nc| < b,$$

$$(2) \quad |xj - mk + nl| < l,$$

$$(3) \quad |-\bar{x}f + mg + nh| = \min.$$

Dans le cas III on pose $x = \bar{x}$, $m = -\bar{m}$, $n = \bar{n}$, alors dans tous les cas on a :

$$(1') \quad U \equiv xa + mb - nc = \lambda_1 b$$

$$(2') \quad V \equiv xj - mk + nl = \lambda_2 l \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$$

$$(3') \quad W \equiv \pm \bar{x}f + mg + nh = \min. \text{ en valeur absolue.}$$

Le signe supérieur dans (3) correspond au cas III, le signe inférieur au cas IV.

$x = 0$: on tire de (1') et (2') les valeurs de m et n comme il suit,

$$m = \frac{\lambda_1 bl + \lambda_2 cl}{bl - ck}, \quad n = \frac{\lambda_2 bl + \lambda_1 bk}{bl - ck};$$

d'où

$$m - n = \lambda_1 \frac{bl - bk}{bl - ck} + \lambda_2 \frac{cl - bl}{bl - ck}.$$

Parce que $b > c$, $l > k$, on a $|m - n| < 2$; mais m et n sont des nombres entiers, et, par suite $|m - n| \leq 1$. On pose

$$m = n + \varepsilon \quad (\varepsilon = 0 \text{ ou } \pm 1).$$

Les égalités (1') et (2') deviennent alors

$$(1'') \quad n(b - c) + \varepsilon b = \lambda_1 b \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$$

$$(2'') \quad n(l - k) - \varepsilon k = \lambda_2 l$$

Les deux nombres m et n ne peuvent pas être à la fois égaux à zéro, donc $|n| + |\varepsilon| \geq 1$. On déduit de (1'') que $n \neq 0$.

Si l'on suppose que $\varepsilon = 1$ on déduira $n \leq -1$ de (1'') et $n \geq 0$ de (2''). Par conséquent, $\varepsilon \neq 1$. Si l'on suppose que $\varepsilon = -1$ on déduira $n \geq 1$ de (1'') et $n \leq 0$ de (2''). Par conséquent, $\varepsilon \neq -1$; donc $\varepsilon = 0$ et $m = n$.

Le minimum de $|W|$ a lieu lorsque $m = n = \pm 1$; cette valeur est $|W| = g + h$. Puisque $x = 0$, $m = n = 1$ est toujours une solution de (1') et (2'), elle est la solution de (1'), (2') et (3') tant qu'il n'existe aucune solution de (1') et (2') avec $x = 1$ pour laquelle $|W|$ soit plus petite que $g + h$.

$x = 1$: on tire de (1') la valeur de m et de (2') la valeur de n .

$$\begin{aligned} (1''') \quad m &= \lambda_1 - \frac{a}{b} + n \frac{c}{b} \\ (2''') \quad n &= \lambda_2 - \frac{j}{l} + m \frac{k}{l} \end{aligned} \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$$

Puisque m et n sont des nombres entiers, on a

$$m \leq [\lambda_1] + \left[\frac{-a}{b} \right] + \left[\frac{nc}{b} \right] + 2, \quad n \leq [\lambda_2] + \left[\frac{-j}{l} \right] + \left[\frac{mk}{l} \right] + 2.$$

a. Si l'on suppose que $m > 0$, $n > 0$, l'on a

$$m \leq 0 - 2 + n - 1 + 2 = n - 1 \quad \text{et} \quad n \leq 0 - 1 + m - 1 + 2 = m;$$

mais ces inégalités ne peuvent pas être remplies toutes deux à la fois, donc il faut que $m \leq 0$ ou $n \leq 0$.

b. On suppose que $n < 0$, et d'après (1'''), on en déduit

$$m \leq 0 - 2 - 1 + 2 = -1.$$

c. On suppose que $m < 0$, et d'après (2'''), on en déduit

$$n \leq 0 - 1 - 1 + 2 = 0.$$

d. On suppose que $n = 0$, et d'après (1'''), on en déduit

$$m = \lambda_1 - \frac{a}{b} < 0 \quad \text{d'où} \quad m \leq -1.$$

e. On suppose que $m = 0$, et d'après (2'''), on en déduit

$$n = \lambda_2 - \frac{j}{7} < 1, \quad \text{d'où } n \leq 0.$$

Il s'ensuit que $m \leq -1$, $n \leq 0$.

On détermine ensuite le minimum de $|W|$, et, pour cela, on traite III et IV individuellement.

III. — On déduit du théorème 2.4 que $j + k > l$, $h > f$; alors (2') n'est pas remplie par $x = 1$, $m \leq -1$, $n = 0$. Par conséquent les deux solutions pour lesquelles $|W|$ est la plus petite sont

$$\begin{aligned} m = -1, \quad n = -1; \quad |W| = -f + g + h > g; \\ m = -1, \quad n = -2; \quad |W| = -f + g + 2h > g + h. \end{aligned}$$

Seule la première de ces valeurs de $|W|$ est moindre que $g + h$. Il en résulte que $x = 1$, $m = -1$, $n = -1$ est la solution de (1'), (2'), (3') pourvu que ces valeurs satisfassent à (1') et (2'); autrement la solution de (1'), (2') et (3') est $x = 0$, $m = 1$, $n = 1$.

Le fait que $x = 1$, $m = -1$, $n = -1$ remplisse la condition (1'), entraîne que $a + c < 2b$; tandis que ces trois valeurs remplissent toujours la condition (2').

On arrive ainsi à toutes les solutions de (1'), (2') et (3') dans le cas III :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad a + c < 2b : \quad x = 1, \quad m = -1, \quad n = -1; \\ 2^\circ \quad a + c > 2b : \quad x = 0, \quad m = 1, \quad n = 1. \end{aligned}$$

Si $a + c < 2b$, le ξ -voisin sera de première espèce; si $a + c > 2b$, il sera de deuxième espèce.

IV. — Comme $m \leq -1$, $n \leq 0$, on voit que la plus petite valeur de $|W|$ correspond à $m = -1$, $n = 0$; elle est $|W| = f + g$. Pour tous les autres couples des entiers m et n qui remplissent les inégalités ci-dessus, on a $|W| \geq f + g + h > g + h$. A moins que $f < h$ et que, en même temps, $x = 1$, $m = -1$, $n = 0$ remplisse (1') et (2'), $|W|$ ne devient pas plus petite que $g + h$, sa valeur pour $x = 0$, $m = 1$, $n = 1$. Au cas où $x = 1$, $m = -1$, $n = 0$ satisfait à (1') et à (2'), les conditions $a < 2b$, $j + k < l$ doivent être remplies.

Donc dans le cas IV on a deux solutions

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & a < 2b, \quad f < h, \quad j + k < l: \quad x = 1, \quad m = -1, \quad n = 0; \\ 2^\circ \quad & a > 2b \text{ ou } f > h \text{ ou } j + k > l: \quad x = 0, \quad m = 1, \quad n = 1. \end{aligned}$$

Si $a < 2b$, $f < h$, et $j + k < l$, le ξ -voisin sera de première espèce; dans tous les autres cas il sera de deuxième espèce.

Il reste à déterminer T , $\bar{e}_i e_i$, et le type de $\bar{\Phi}$.

III :

$$T = \begin{vmatrix} 0 & x d_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & -d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Le même procédé que dans le cas I (voir p. 33) donne

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} -\bar{e}_1 e_1 d_1 b & \bar{e}_1 e_1 d_2 (x a - b + c) & -\bar{e}_1 e_1 d_3 c \\ \bar{e}_2 e_2 d_1 g & \bar{e}_2 e_2 d_2 (-x f - g + h) & -\bar{e}_2 e_2 d_3 h \\ \bar{e}_3 e_3 d_1 k & \bar{e}_3 e_3 d_2 (x j + k - l) & \bar{e}_3 e_3 d_3 l \end{vmatrix}.$$

D'où $d_1 = -\bar{e}_1 e_1$, $d_2 = \bar{e}_2 e_2$, $d_3 = \bar{e}_3 e_3$, et

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} (\bar{e}_1 e_1)^2 b & (\bar{e}_1 e_1) (\bar{e}_2 e_2) (x a - b + c) & -(\bar{e}_1 e_1) (\bar{e}_3 e_3) c \\ -(\bar{e}_2 e_2) (\bar{e}_1 e_1) g & (\bar{e}_2 e_2)^2 (-x f + g + h) & -(\bar{e}_2 e_2) (\bar{e}_3 e_3) h \\ -(\bar{e}_3 e_3) (\bar{e}_1 e_1) k & (\bar{e}_3 e_3) (\bar{e}_2 e_2) (x j + k - l) & (\bar{e}_3 e_3)^2 l \end{vmatrix}.$$

$x = 0$: Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $\bar{e}_1 e_1 = 1$, $\bar{e}_2 e_2 = 1$, $\bar{e}_3 e_3 = 1$, et que $\bar{\Phi}$ est du type VI; alors $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$.

$x = 1$: Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $\bar{e}_1 e_1 = -1$, $\bar{e}_2 e_2 = 1$, $\bar{e}_3 e_3 = -1$, et que $\bar{\Phi}$ est du type II; alors $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = -1$.

IV :

$$T = \begin{vmatrix} 0 & x d_2 & 0 \\ d_1 & -d_2 & 0 \\ 0 & (x-1) d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Le même procédé que plus haut donne

$$\bar{\Phi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 e_1 d_1 b & \bar{e}_1 e_1 d_2 (x a - b - \overline{x-1} c) & -\bar{e}_1 e_1 d_3 c \\ \bar{e}_2 e_2 d_1 g & \bar{e}_2 e_2 d_2 (-x f - g + \overline{x-1} h) & \bar{e}_2 e_2 d_3 h \\ -\bar{e}_3 e_3 d_1 k & \bar{e}_3 e_3 d_2 (x j + k + \overline{x-1} l) & \bar{e}_3 e_3 d_3 l \end{vmatrix}.$$

puis $d_1 = \bar{e}_1 e_1$, $d_2 = -\bar{e}_2 e_2$, $d_3 = \bar{e}_3 e_3$. On obtient enfin

$x = 0$: $\bar{e}_1 e_1 = -1$, $\bar{e}_2 e_2 = 1$, $\bar{e}_3 e_3 = -1$; $\bar{\Phi}$ est du type VI; et $d_1 = -1$, $d_2 = -1$, $d_3 = -1$.

$x = 1$: $\bar{e}_1 e_1 = 1$, $\bar{e}_2 e_2 = 1$, $\bar{e}_3 e_3 = 1$; $\bar{\Phi}$ est du type II; et $d_1 = 1$, $d_2 = -1$, $d_3 = 1$.

Le ξ -voisin du ξ -voisin dans les cas III-2 et IV-2 :

Soient P, Φ , les matrices et e_1, e_2, e_3 les nombres e_i du théorème 2.3 correspondant à $\{a, g, l\}$ et supposons que $P^*, \Phi^*, e_1^*, e_2^*$ et e_3^* aient les sens correspondants pour le ξ -voisin du ξ -voisin de $\{a, g, l\}$. Le raisonnement est semblable à celui qui a été fait pour le ξ -voisin dans les cas II et V.

En vertu du théorème 3.3, le déterminant de P^* est égal à 1. Les éléments de la matrice P^{-1} sont des nombres entiers, et le déterminant de P^{-1} est égal à 1. Il s'ensuit que $T^* \equiv P^{-1} P^*$ est une matrice à déterminant 1 dont tous les éléments sont des nombres entiers.

1. $b - c > c$. — Puisque l'on a $p_1^* = \pm \bar{p}_2$ et $p_3^* = \pm \bar{p}_3$, où \bar{p}_2 et \bar{p}_3 sont les points du réseau sur le ξ -voisin de $\{a, g, l\}$ que l'on a trouvé dans les cas III-2 et IV-2, il s'ensuit que

$$T^* = \begin{vmatrix} 0 & x^* d_2 & 0 \\ d_1 & m^* d_2 & 0 \\ \mp d_1 & n^* d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

où x^*, m^*, n^* , sont des nombres entiers, et les nombres d_i dont on déterminera plus tard les signes sont égaux à ± 1 . Dans la première colonne de la matrice Φ^* le signe supérieur appartient au cas III, le signe inférieur au cas IV. Parce que T^* est à déterminant 1, il s'ensuit que $|x^*| = 1$. On choisit $x^* = 1$.

En posant $m^* = \pm m$, $n^* = -(m - n)$, on obtient

$$T^* = \begin{vmatrix} 0 & d_2 & 0 \\ d_1 & \pm m d_2 & 0 \\ \mp d_1 & -(m - n) d_2 & d_3 \end{vmatrix};$$

ceci a l'effet de donner p_2^* comme une expression en $p_1, \bar{p}_2 (= p_2 \mp p_3)$, et $\bar{p}_3 (= \pm p_3)$.

On pose $u^0 = b - c$, $u' = c$; $v^0 = l$, $v' = l - k$; $w^0 = g + h$, $w' = h$;
on a $u^0 > u' > 0$; $w^0 > f > 0$, $w^0 > w' > 0$; $v^0 > j > 0$, $v^0 > v' > 0$
et dans III, $w' > f > 0$, et aussi

$$\begin{aligned}\xi(p_2^*) &= e_1 d_2 (a - mu^0 - nu'), \\ \eta(p_2^*) &= e_2 d_2 (-f \pm mw^0 \mp nw'), \\ \zeta(p_2^*) &= e_3 d_2 (j - mv' + nv^0).\end{aligned}$$

Il faut que les conditions suivantes soient remplies :

$$\begin{aligned}(1) & \quad |a - mu^0 - nu'| < u^0, \\ (2) & \quad |-j + mv' - nv^0| < v^0, \\ (3) & \quad |\mp f + mw^0 - nw'| = \min.\end{aligned}$$

On peut écrire de nouveau (1), (2) et (3) sous les formes

$$\begin{aligned}(1') \quad U &\equiv a - mu^0 - nu' = \lambda_1 u^0 \\ (2') \quad V &\equiv -j + mv' - nv^0 = \lambda_2 v^0 \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0). \\ (3') \quad W &\equiv \mp f + mw^0 - nw' = \min. \text{ en valeur absolue}\end{aligned}$$

On tire de (1') et (2') les valeurs de m et n que l'on réduit aux expressions plus simples en employant F , G et H , les cofacteurs respectifs de $-f$, g , et $\mp h$ dans Φ .

$$\begin{aligned}m &= \frac{av^0 + ju'}{u^0 v^0 + u' v'} + \frac{-\lambda_1 u^0 v^0 + \lambda_2 v^0 u'}{u^0 v^0 + u' v'} = \frac{\pm G}{F} + \nu_1, \\ n &= \frac{-ju^0 + av'}{u^0 v^0 + u' v'} + \frac{-\lambda_2 u^0 v^0 - \lambda_1 u^0 v'}{u^0 v^0 + u' v'} = \frac{\pm G + H}{F} + \nu_2.\end{aligned}$$

Des conditions $u^0 > u' > 0$, $v^0 > v' > 0$, et $|\lambda_i| < 1$, on déduit que $|\nu_i| < 2$, et, par conséquent, $M - 1 \leq m \leq M + 2$, $N - 1 \leq n \leq N + 2$.

On pose $M = \left[\frac{\pm G}{F} \right]$, $N = \left[\frac{(\pm G + H)}{F} \right]$, $u = a - Mu^0 - Nu'$,
 $v = -j + Mv' - Nv^0$, $w = \mp f + Mw^0 - Nw'$, et l'on obtient alors
pour Φ comme dans les cas II et V :

$$u^0 + u' > u > 0, \quad v^0 > v > -v', \quad w > \frac{\Delta}{\pm F} - w^0 > -w^0.$$

(Les quantités u^0 , u' , v^0 , v' , w^0 , w' s'y mettent respectivement aux places de b , c , l , k , g , et h dans les cas II et V.)

Les solutions de (1) et (2) qui s'expriment en fonction des nouveaux nombres M et N que l'on a définis, se trouvent encore exactement sous les mêmes formes que les solutions (i) — (viii) de (1) et (2) pour les cas II et V.

	Solutions de (1) et (2).	W.	Conditions à la solution.
(i)	$\begin{cases} m = M + 2 \\ n = N \end{cases}$	$\varpi + 2\varpi^0$	$\begin{cases} u < u^0 \\ \varrho < \varrho^0 - 2\varrho' \end{cases}$
(ii)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N \end{cases}$	$\varpi + \varpi^0$	$\begin{cases} u > 0 \\ \varrho < \varrho^0 - \varrho' \end{cases}$
(iii)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\varpi + \varpi^0 - \varpi'$	$\begin{cases} u > u' \\ \varrho > -\varrho' \end{cases}$
(iv)	$\begin{cases} m = M + 1 \\ n = N + 2 \end{cases}$	$\varpi + \varpi^0 - 2\varpi'$	$\begin{cases} u > 2u' \\ \varrho > \varrho^0 - \varrho' \end{cases}$
(v)	$\begin{cases} m = M \\ n = N - 1 \end{cases}$	$\varpi + \varpi'$	$\begin{cases} u < u^0 - u' \\ \varrho < 0 \end{cases}$
(vi)	$\begin{cases} m = M \\ n = N \end{cases}$	ϖ	$\begin{cases} u < u^0 \\ \varrho < \varrho^0 \end{cases}$
(vii)	$\begin{cases} m = M \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\varpi - \varpi'$	$\begin{cases} u > 0 \\ \varrho > 0 \end{cases}$
(viii)	$\begin{cases} m = M - 1 \\ n = N + 1 \end{cases}$	$\varpi - \varpi^0 - \varpi'$	$\begin{cases} u < u' \\ \varrho > \varrho' \end{cases}$

Quoique les solutions de (1) et (2) se trouvent encore sous les mêmes formes que dans II et V, lorsque l'on range les solutions par ordre de $|W|$ croissant, les solutions ne se trouvent pas dans le même arrangement que dans ces cas précédents. Il en résulte que l'on n'a pas ici les mêmes solutions de (1), (2) et (3) que là.

En vertu des conditions qui sont remplies par ϖ , ϖ^0 , et ϖ' , il est clair que $W > -\varpi^0$ pour chaque solution sauf peut-être pour (iv), (vii), et (viii); mais il n'existe pas de solutions de (1) et (2) pour lesquelles $|W| < \varpi^0$, donc les solutions pour lesquelles on a $W > -\varpi^0$ satisfont aussi à la condition $W > \varpi^0$. On peut démontrer que $W > \varpi^0$ même pour les trois solutions que l'on a mentionnées ci-dessus comme exceptions possibles. Car, si (viii) est une solution de (1) et (2), il s'ensuivra que (vi) sera aussi une solution. Alors $\varpi > \varpi^0$, et par conséquent, l'inégalité $\varpi - \varpi^0 - \varpi' > -\varpi^0$ se trouvera remplie. Il s'ensuit que $\varpi - \varpi^0 - \varpi' > \varpi^0$. Si (vii), mais pas (viii), est une solution de (1) et (2), ou (iii) ou (vi) sera aussi une solution,

et, que n'importe laquelle de ces deux soit une solution, on parvient toujours à $\omega - \omega' > \omega^0$. Il suit d'une pareille manière que $\omega + \omega^0 - 2\omega' > \omega^0$ toutes les fois que (iv) est une solution. Alors dans tous les cas on a $|W| = W$.

On obtient ainsi le Tableau suivant qui indique toutes les solutions de (1), (2), et (3) :

	Conditions.	m .	n .	Corresp.
1°	$u < u', \ v > v'$	$M - 1$	$N + 1$	(viii)
2°-3°	$u > 0, \ v > 0$ mais pas 1°	M	$N + 1$	(vii)
4°	$u < u^0, \ v < 0$	M	N	(vi)
5°	$u > u^0, \ v < 0$	$M + 1$	$N + 1$	(iii)

On détermine maintenant $d_1, d_2, d_3, e_1^*e_1, e_2^*e_2, e_3^*e_3$, et les types de Φ^* , qui correspondent aux solutions 1° - 5°.

En employant $P^* = PT^*$ on obtient

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} \mp e_1^*e_1 d_1 u^0 & e_1^*e_1 d_2 (a - mu^0 - nu') & -e_1^*e_1 d_3 u' \\ e_2^*e_2 d_1 \omega^0 & e_2^*e_2 d_2 (-f \pm m\omega^0 \mp n\omega') & \mp e_2^*e_2 d_3 \omega' \\ \mp e_3^*e_3 d_1 v' & e_3^*e_3 d_2 (j - mv' + nv^0) & e_3^*e_3 d_3 v^0 \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit que $d_1 = \mp e_1^*e_1, d_2 = \pm e_2^*e_2, d_3 = e_3^*e_3$, et

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} (e_1^*e_1)^2 u^0 & \pm (e_1^*e_1)(e_2^*e_2) U & -(e_1^*e_1)(e_3^*e_3) u' \\ \mp (e_2^*e_2)(e_1^*e_1) \omega^0 & (e_2^*e_2)^2 W & \mp (e_2^*e_2)(e_3^*e_3) \omega' \\ (e_3^*e_3)(e_1^*e_1) v' & \mp (e_3^*e_3)(e_2^*e_2) V & (e_3^*e_3)^2 v^0 \end{vmatrix}.$$

1° $u < u', \ v > v' : U > 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^*e_1 = \pm 1, e_2^*e_2 = -1, e_3^*e_3 = \mp 1$, et que Φ^* est canonique du type V. Alors $d_1 = -1, d_2 = \mp 1, d_3 = \mp 1$.

2° $u < u', \ v' > v > 0 : U < 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^*e_1 = \pm 1, e_2^*e_2 = 1, e_3^*e_3 = \pm 1$, et que Φ^* est canonique du type III. Alors $d_1 = -1, d_2 = \pm 1, d_3 = \pm 1$.

3° $u > u', \ v > 0 : U > 0, V < 0$, comme 1°.

4° $u < u^0, \ v < 0 : U > 0, V < 0$, comme 1°.

5° $u > u^0, \ v < 0 : U < 0, V < 0$, comme 2°.

2. $b - c < c$. — On a $p_1^* = d_1 p_3$ et $p_2^* = d_2 (p_2 \mp p_3)$. On pose $p_3^* = d_3 [x p_1 \pm n (p_2 \mp p_3) + m p_3]$, où x, m , et n sont des nombres

entiers et $d_3 = \pm 1$. Alors

$$T^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & xd_3 \\ 0 & d_2 & \pm nd_2 \\ d_1 & \mp d_2 & (m-n)d_3 \end{vmatrix} \quad (d_i = \pm 1).$$

Mais T^* est à déterminant 1, d'où $|x| = 1$. On choisit $x = 1$ comme plus haut. On a

$$\xi(p_3^*) = e_1 d_3 (a - n\overline{b-c} - mc),$$

$$\eta(p_3^*) = e_2 d_3 (-f \pm n\overline{g+h} \mp mh),$$

$$\zeta(p_3^*) = e_3 d_3 (j - n\overline{l-k} + ml).$$

On pose $u^0 = c$, $u' = b - c$; $v^0 = g + h$, $v' = h$; $w^0 = l$, $w' = l - k$. Il faut que les conditions suivantes soient remplies par des entiers m et n :

$$(1) \quad U \equiv a - mu^0 - nu' = \lambda_1 u^0$$

$$(2) \quad V \equiv \pm f + mv' - nv^0 = \lambda_2 v^0 \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$$

$$(3) \quad W \equiv j + mw^0 - nw' = \text{min. en valeur absolue}$$

On déduit de (1) et (2) les valeurs de m et n , que l'on réduit aux expressions plus simples en employant J, K, et L, les cofacteurs respectifs de j , $\pm k$, et l dans Φ ;

$$m = \frac{av^0 \mp fu'}{u^0 v^0 + u' v'} + \frac{-\lambda_1 u^0 v^0 + \lambda_2 u' v^0}{u^0 v^0 + u' v'} = \frac{\pm K + L}{J} + \nu_1,$$

$$n = \frac{\pm fu^0 + av'}{u^0 v^0 + u' v'} + \frac{-\lambda_2 u^0 v^0 - \lambda_1 u^0 v'}{u^0 v^0 + u' v'} = \frac{\pm K}{J} + \nu_2.$$

On pose $M = \left[\frac{(\pm K + L)}{J} \right]$, $N = \left[\frac{\pm K}{J} \right]$, puis comme plus haut on voit que $|\nu_i| < 2$ et $M - 1 \leq m \leq M + 2$, $N - 1 \leq n \leq N + 2$. On définit $u = a - Mu^0 - Nu'$, $v = \pm f + Mv' - Nv^0$, $w = j + Mw^0 - Nw'$, et l'on obtient pour Φ les conditions

$$u^0 + u' > u > 0, \quad v^0 > v > -v', \quad w > \frac{\Delta}{J} - w^0 > -w^0.$$

On voit aussi que $u^0 > u' > 0$, $v^0 > v' > 0$, $v^0 > f > 0$.

Les conditions qui doivent être remplies sont alors les mêmes que celles de la partie $b - c > c$, et par conséquent, les solutions de (1), (2) et (3) se trouvent sous les mêmes formes que là.

Les deux cas diffèrent seulement par les valeurs de $d_1, d_2, d_3, e_1^* e_1, e_2^* e_2, e_3^* e_3$, et le type de Φ^* .

En employant $P^* = PT^*$ on obtient

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} -e_1^* e_1 d_1 u^0 & \mp e_1^* e_1 d_2 u' & e_1^* e_1 d_3 U \\ \mp e_2^* e_2 d_1 v' & e_2^* e_2 d_2 v^0 & \mp e_2^* e_2 d_3 V \\ e_3^* e_3 d_1 w^0 & \mp e_3^* e_3 d_2 w' & e_3^* e_3 d_3 W \end{vmatrix}.$$

Puis $d_1 = -e_1^* e_1, d_2 = e_2^* e_2, d_3 = e_3^* e_3$, et

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} (e_1^* e_1)^2 u^0 & \mp (e_1^* e_1) (e_2^* e_2) u' & (e_1^* e_1) (e_3^* e_3) U \\ \pm (e_2^* e_2) (e_1^* e_1) v' & (e_2^* e_2)^2 v^0 & \mp (e_2^* e_2) (e_3^* e_3) V \\ - (e_3^* e_3) (e_1^* e_1) w^0 & \mp (e_3^* e_3) (e_2^* e_2) w' & (e_3^* e_3)^2 W \end{vmatrix}.$$

1° $u < u', v > v' : U > 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = \pm 1, e_2^* e_2 = -1, e_3^* e_3 = \mp 1$, et que le type de Φ^* est IV. Alors $d_1 = \mp 1, d_2 = -1, d_3 = \mp 1$.

2° $u < u', v' > v > 0 : U < 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = \pm 1, e_2^* e_2 = 1, e_3^* e_3 = \pm 1$, et que le type de Φ^* est II. Alors $d_1 = \mp 1, d_2 = 1, d_3 = \mp 1$.

3° $u > u', v > 0 : U > 0, V < 0$; comme 1°.

4° $u < u^0, v < 0 : U > 0, V < 0$; comme 1°.

5° $u > u^0, v < 0 : U < 0, V < 0$; comme 2°.

Lorsque $b > c$, le η -voisin du ξ -voisin est $\{a, g, l\}$ lui-même.

Ceci est une conséquence immédiate de la définition du voisin.

Le ζ -voisin du ξ -voisin dans les cas III-2 et IV-2 :

1. $l - k > k$:

On a

$$p_1^* = d_1 p_2, \quad p_3^* = d_3 (p_2 \mp p_3) \quad \text{et} \quad p_2^* = d_2 [x p_1 \pm m (p_2 \mp p_3) \mp n p_2].$$

Puis

$$T^* = \begin{vmatrix} 0 & x d_2 & 0 \\ d_1 & \pm (m - n) d_2 & d_3 \\ 0 & -m d_2 & \mp d_3 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de T^* est égal à 1, d'où $|x| = 1$. On choisit $x = 1$. On pose

$$u^0 = l - k, \quad u' = k; \quad v^0 = b, \quad v' = b - c; \quad w^0 = g + h, \quad w' = g;$$

on a

$$\begin{aligned}\xi(p_2^*) &= e_1 d_2 (a - m\nu' + n\nu^0), \\ \eta(p_2^*) &= e_2 d_2 (-f \pm m\nu^0 \mp n\nu'), \\ \zeta(p_2^*) &= e_3 d_2 (j - mu^0 - nu').\end{aligned}$$

Les conditions suivantes doivent être remplies :

- (1) $U \equiv j - mu^0 - nu' = \lambda_1 u^0$
 (2) $V \equiv -a + m\nu' - n\nu^0 = \lambda_2 \nu^0$ ($|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0$).
 (3) $W \equiv \mp f + m\nu^0 - n\nu' = \text{min. en valeur absolue}$

On déduit de (1) et (2) les valeurs de m et n que l'on réduit aux expressions plus simples en employant $F, G,$ et $H,$ les cofacteurs respectifs de $-f, g,$ et $\mp h$ dans Φ .

$$\begin{aligned}m &= \frac{j\nu^0 + au'}{u^0\nu^0 + u'\nu'} + \frac{-\lambda_1 u^0\nu^0 + \lambda_2 u'\nu^0}{u^0\nu^0 + u'\nu'} = \frac{-H}{F} + \nu_1, \\ n &= \frac{-au^0 + j\nu'}{u^0\nu^0 + u'\nu'} + \frac{-\lambda_2 u^0\nu^0 - \lambda_1 u^0\nu'}{u^0\nu^0 + u'\nu'} = \frac{\mp G - H}{F} + \nu_2.\end{aligned}$$

On pose $M = \left[\frac{-H}{F} \right], N = \left[\frac{(\mp G - H)}{F} \right],$ puis comme plus haut l'on voit que $|\nu_i| < 2$ et $M - 1 \leq m \leq M + 2, N - 1 \leq n \leq N + 2.$

On définit

$$u = j - Mu^0 - Nu', \quad \nu = -a + M\nu' - N\nu^0, \quad \omega = \mp f + M\nu^0 - N\nu',$$

et l'on obtient pour Φ les conditions $u^0 + u' > u > 0, \nu^0 > \nu > -\nu', \omega > \frac{\Delta}{\pm F} - \omega^0 > -\omega^0.$ Les solutions de (1), (2), et (3) se trouvent alors sous les mêmes formes que pour le ξ -voisin du ξ -voisin.

Ce cas-ci diffère des cas précédents par les valeurs de $d_1, d_2, d_3, e_1^* e_1, e_2^* e_2, e_3^* e_3,$ et le type de $\Phi^*.$

En employant $P^* = PT^*$ on obtient

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} \mp e_1^* e_1 d_1 \nu^0 & -e_1^* e_1 d_2 V & \mp e_1^* e_1 d_3 \nu' \\ e_2^* e_2 d_1 \nu' & \pm e_2^* e_2 d_2 W & e_2^* e_2 d_3 \nu^0 \\ \pm e_3^* e_3 d_1 u' & e_3^* e_3 d_2 U & \mp e_3^* e_3 d_3 u^0 \end{vmatrix}.$$

Puis $d_1 = \mp e_1^* e_1, d_2 = \pm e_2^* e_2, d_3 = \mp e_3^* e_3,$ et

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} (e_1^* e_1)^2 \nu^0 & \mp (e_1^* e_1) (e_1^* e_1) V & (e_1^* e_1) (e_3^* e_3) \nu' \\ \mp (e_2^* e_2) (e_1^* e_1) \nu' & (e_2^* e_2)^2 W & \mp (e_2^* e_2) (e_3^* e_3) \nu^0 \\ - (e_3^* e_3) (e_1^* e_1) u' & \pm (e_3^* e_3) (e_2^* e_2) U & (e_3^* e_3)^2 u^0 \end{vmatrix}.$$

1° $u < u', v > v' : U > 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = \mp 1, e_2^* e_2 = -1, e_3^* e_3 = \pm 1$, et que le type de Φ^* est IV. Alors $d_1 = 1, d_2 = \mp 1, d_3 = -1$.

2° $u < u', v' > v > 0 : U < 0, V < 0$. Les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = \pm 1, e_2^* e_2 = 1, e_3^* e_3 = \pm 1$, et que le type de Φ^* est I. Alors $d_1 = -1, d_2 = \pm 1, d_3 = -1$.

3° $u > u', v > 0 : U > 0, V < 0$. Comme 1°.

4° $u < u^0, v < 0 : U > 0, V < 0$. Comme 1°.

5° $u > u^0, v < 0 : U < 0, V < 0$. Comme 2°.

2. $k > l - k$. — On a

$$p_2^* = d_2(p_2 \mp p_3), \quad p_3^* = d_3 p_2, \quad \text{et} \quad p_1^* = d_1(x p_1 + m p_2 + n p_3).$$

Alors

$$T^* = \begin{vmatrix} x d_1 & 0 & 0 \\ m d_1 & d_2 & d_3 \\ n d_1 & \mp d_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de T^* est égal à 1, d'où $|x| = 1$. On choisit $x = 1$. On a

$$\xi(p_1^*) = e_1 d_1 (a \mp mb - nc),$$

$$\eta(p_1^*) = e_2 d_1 (-f + mg \mp nh),$$

$$\zeta(p_1^*) = e_3 d_1 (j \pm mk + nl).$$

Les conditions suivantes doivent être remplies

$$(1) \quad U \equiv -f + mg \mp nh = \lambda_1 (g + h)$$

$$(2) \quad V \equiv j \pm mk + nl = \lambda_2 k \quad (|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0).$$

$$(3) \quad W \equiv a \mp mb - nc = \text{min. en valeur absolue}$$

On déduit de (1) et (2) les valeurs de m et n que l'on réduit aux expressions plus simples en employant A, B, et C, les cofacteurs respectifs de $a, \mp b, -c$ dans Φ :

$$m = \frac{fl \mp hj}{gl + hk} + \frac{\lambda_1 gl + \lambda_1 hl \pm \lambda_2 hk}{gl + hk} = \frac{B}{A} + v_1,$$

$$n = \frac{-gj \mp fk}{gl + hk} + \frac{\lambda_2 gk \mp \lambda_1 gk \mp \lambda_1 hk}{gl + hk} = \frac{C}{A} + v_2.$$

En vertu des conditions imposées sur λ_i et des conditions du théorème 2.3 sur g, h, l et k , on obtient $|v_i| < 2$.

Puisque $b > c$, et du théorème 2.4 il suit que dans le cas III la condition $h > f$ doit être remplie; on a

$$\left. \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right\} < \frac{B}{A} < \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad -1 < \frac{C}{A} < \left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\};$$

la ligne supérieure correspond à III, la ligne inférieure à IV. Il s'ensuit que

$$\left. \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right\} \leq m \leq \left. \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}, \quad -2 \leq n \leq \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}.$$

Parmi les solutions de ces inégalités seules les suivantes remplissent les conditions (1) et (2) :

	$m.$	$n.$	Cas.	W.	Conditions à la solution.
(i)	-1	0	III	$a + b$	$f < h, j < 2k$
(ii)	0	-1	III, IV	$a + c$	$j + k > l$
(iii)	0	0	III, IV	a	$j < k$
(iv)	1	-1	III	$a - b + c$	$ j + k - l < k$
(v)	1	0	IV	$a + b$	$j < 2k$
(vi)	1	1	IV	$a + b - c$	$j + l < 2k$
(vii)	2	0	IV	$a + 2b$	$f + h > g, 3k > j > k$

Les valeurs de W sont toutes positives. Parmi les solutions pour le cas III, (iv) correspond à la plus petite valeur de W. D'autre part, la condition $|j + k - l| < k$ est toujours remplie en vertu des conditions $j + k > l, l > j > 0, l > k > 0$, des théorèmes 2.3 et 2.4. Donc (iv) est toujours la solution de (1), (2), et (3) pour le cas III.

Parmi les solutions pour le cas IV, (iii) correspond à la plus petite valeur de W, donc (iii) est la solution de (1), (2), (3), lorsque $j < k$. Lorsque $j > k$, on voit que (vi) n'est pas une solution de (1) et (2); donc (ii) correspond à la plus petite valeur de W. Il en résulte que (ii) est la solution de (1), (2), et (3) à l'exception du cas où $j + k < l$. Mais ceci n'a pas lieu lorsque $j > k$ et $k > l - k$. Donc, lorsque $j > k$, le couple (ii) est toujours la solution de (1), (2), et (3).

On détermine $d_1, d_2, d_3, e_1^* e_1, e_2^* e_2, e_3^* e_3$, et le type de Φ^* dans ce qui suit :

III :

$$T^* = \left\| \begin{matrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & -d_2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

En employant $P^* = PT^*$ on obtient

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} e_1^* e_1 d_1 (a - b + c) & -e_1^* e_1 d_2 (b - c) & -e_1^* e_1 d_3 b \\ e_2^* e_2 d_1 (-f + g + h) & e_2^* e_2 d_2 (g + h) & e_2^* e_2 d_3 g \\ e_3^* e_3 d_1 (j + k - l) & -e_3^* e_3 d_2 (l - k) & e_3^* e_3 d_3 k \end{vmatrix}.$$

Par suite $d_1 = e_1^* e_1$, $d_2 = e_2^* e_2$, $d_3 = e_3^* e_3$; et les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = -1$, $e_2^* e_2 = -1$, $e_3^* e_3 = 1$, et que le type de Φ^* est V. Alors $d_1 = -1$, $d_2 = -1$, $d_3 = 1$.

IV : 1, $j > k$:

$$T^* = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & d_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

En employant $P^* = PT^*$, on obtient :

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} e_1^* e_1 d_1 (a - c) & e_1^* e_1 d_2 (b - c) & e_1^* e_1 d_3 b \\ -e_2^* e_2 d_1 (f + h) & e_2^* e_2 d_2 (g + h) & e_2^* e_2 d_3 g \\ -e_3^* e_3 d_1 (l - j) & e_3^* e_3 d_2 (l - k) & -e_3^* e_3 d_3 k \end{vmatrix}.$$

Par suite $d_1 = e_1^* e_1$, $d_2 = e_2^* e_2$, $d_3 = -e_3^* e_3$, et les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = -1$, $e_2^* e_2 = 1$, $e_3^* e_3 = -1$, et que le type de Φ^* est II. Alors $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, et $d_3 = 1$.

IV : 2, $j < k$:

$$T^* = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & d_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

En employant $P^* = PT^*$ on obtient :

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} e_1^* e_1 d_1 a & e_1^* e_1 d_2 (b - c) & e_1^* e_1 d_3 b \\ -e_2^* e_2 d_1 f & e_2^* e_2 d_2 (g + h) & e_2^* e_2 d_3 g \\ e_3^* e_3 d_1 j & e_3^* e_3 d_2 (l - k) & -e_3^* e_3 d_3 k \end{vmatrix}.$$

Par suite $d_1 = e_1^* e_1$, $d_2 = e_2^* e_2$, $d_3 = -e_3^* e_3$, et les lemmes 2.2 et 2.3 s'appliquent pour démontrer que $e_1^* e_1 = 1$, $e_2^* e_2 = -1$, $e_3^* e_3 = -1$, et que le type de Φ^* est V. Alors $d_1 = 1$, $d_2 = -1$ et $d_3 = 1$.

SECTION IV.

UN DEUXIÈME ALGORITHME.

Dans ce qui suit on expose un procédé pour obtenir les coordonnées de points du réseau qui remplissent les inégalités suivantes :

$$(1) \quad |\xi| \leq \varepsilon_1, \quad |\eta| \leq \varepsilon_2,$$

où ε_1 et ε_2 sont des valeurs positives quelconques. Dans cette section on impose à ξ , η , et ζ les mêmes restrictions que plus haut.

THÉORÈME 4. I. — *Il existe une suite illimitée de points du réseau pour lesquels $|\xi|$ et $|\eta|$ sont aussi petits qu'on les désire.*

Soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques. Les trois formes

$$\xi' \equiv \frac{\xi \sqrt[3]{\Delta}}{\varepsilon_1}, \quad \eta' \equiv \frac{\eta \sqrt[3]{\Delta}}{\varepsilon_2}, \quad \zeta' \equiv \frac{\zeta \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}$$

sont aussi à déterminant Δ . D'après un théorème de Minkowski concernant les formes linéaires (1), il existe, outre l'origine, un point du réseau pour lequel

$$|\xi'| \leq \sqrt[3]{\Delta}, \quad |\eta'| \leq \sqrt[3]{\Delta}, \quad |\zeta'| \leq \sqrt[3]{\Delta}.$$

Il s'ensuit que les inégalités (1) sont remplies par ce point. On désigne ce point par p_1 .

Parce que l'origine est le seul point du réseau dans le plan $\xi = 0$ (ou le plan $\eta = 0$) il s'ensuit que

$$|\xi(p_1)| > \varepsilon'_1 > 0, \quad |\eta(p_1)| > \varepsilon'_2 > 0,$$

où ε'_1 et ε'_2 sont des constantes positives convenablement choisies. En employant ε'_1 et ε'_2 à la place de ε_1 et ε_2 on montre l'existence d'un deuxième point p_2 du réseau pour lequel

$$|\xi(p_2)| \leq \varepsilon'_1 < \varepsilon_1, \quad |\eta(p_2)| \leq \varepsilon'_2 < \varepsilon_2.$$

(1) H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, p. 104.

En vertu de ces dernières inégalités, l'on voit que $p_2 \neq \pm p_1$. Quand on répète ce procédé une infinité de fois, on obtient une suite illimitée de points du réseau qui sont tous différents entre eux et pour lesquels on trouve $|\xi| \leq \varepsilon_1$, $|\eta| \leq \varepsilon_2$. Ainsi le théorème est démontré.

THÉORÈME 4.2. — *Parmi les extrêmes dans la chaîne appartenant à ξ , η , ζ , il existe un parallélépipède $\{a, g, l\}$ pour lequel, un paramètre, que l'on peut choisir d'avance, se trouve aussi petit qu'on le désire.*

Il suffit de démontrer qu'il existe un parallélépipède extrême pour lequel a est aussi petit qu'on le désire. Soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques. En vertu du théorème 2.1, le parallélépipède $\left\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{\Delta}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right\}$ n'est pas libre. On baisse d'abord les ξ -faces jusqu'à ce que l'on obtienne le parallélépipède libre $\left\{ a, \varepsilon_2, \frac{\Delta}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right\}$ tel que l'on ne peut pas augmenter le premier paramètre sans introduire un point du réseau dans l'intérieur du parallélépipède. De l'hypothèse que l'origine est le seul point du réseau situé dans le plan $\xi = 0$, il résulte que $a > 0$. Ensuite l'on élève les ζ -faces de ce parallélépipède libre jusqu'à ce que le troisième paramètre soit égal à la plus grande valeur l pour laquelle le parallélépipède reste libre. Enfin on élève les η -faces jusqu'à ce que le parallélépipède devienne un parallélépipède extrême $\{a, g, l\}$. En vertu du théorème 2.1 il existe deux telles valeurs g et l . Du fait que $a < \varepsilon_1$, le théorème se trouve vérifié.

THÉORÈME 4.3. — *Quand on prend un nombre suffisamment grand de ξ -voisins successifs, on arrive à un parallélépipède extrême pour lequel le premier paramètre est aussi petit qu'on le désire. De même en prenant seulement des η — ou ζ — voisins successifs on obtient un parallélépipède extrême pour lequel le deuxième ou le troisième paramètre respectivement est aussi petit qu'on le désire.*

Il suffit de démontrer le théorème pour une suite de ξ -voisins successifs. On désigne par $\{a_0, g_0, l_0\}$ un parallélépipède extrême quelconque dont on fait usage comme point de départ. Soit $\{a_i, g_i, l_i\}$ le ξ -voisin de

$$\{a_{i-1}, g_{i-1}, l_{i-1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty).$$

De la définition du ξ -voisin il suit que

$$a_i > a_{i+1} > 0, \quad g_{i+1} \geq g_i \geq g_0, \quad l_{i+1} \geq l_i \geq l_0 \quad (i = 0, 1, \dots, \infty).$$

Par conséquent, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a \geq 0$.

Supposons que $a > 0$. En vertu du théorème 2.1 on obtiendrait les conditions

$$g_i < \frac{\Delta}{a_i l_i} < \frac{\Delta}{a l_0}, \quad l_i < \frac{\Delta}{a_i g_i} < \frac{\Delta}{a g_0}.$$

Il s'ensuivrait que la suite illimitée de ξ -voisins successifs serait contenue dans le parallélépipède $\left\{ a_0, \frac{\Delta}{a l_0}, \frac{\Delta}{a g_0} \right\}$. On note par $p_i^{(i)}$ le point du réseau dont les coordonnées se trouvent dans la première colonne de la matrice P_i qui correspond à $\{ a_i, g_i, l_i \}$ d'après le théorème 2.3. Du fait que $a_i > a_{i+1}$ les points $p_i^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, \infty$) sont tous différents entre eux. Chaque point $p_i^{(i)}$, étant sur la surface d'un parallélépipède extrême dans la suite de ξ -voisins successifs, devrait être contenu dans $\left\{ a_0, \frac{\Delta}{a l_0}, \frac{\Delta}{a g_0} \right\}$. Mais ceci est impossible, d'où l'on conclut que $a = 0$.

De la définition d'une limite il suit qu'il existe un nombre entier N_ε tel que $a_i \leq \varepsilon$ tant que $i \geq N_\varepsilon$, la valeur de ε étant choisie aussi petite qu'on la désire. Le théorème est ainsi vérifié.

Soit

$$\{ a_i, g_i, l_i \} \quad (i = 0, 1, \dots, \infty)$$

une suite illimitée des extrêmes correspondant à ξ, η, ζ , et soient Φ_i et P_i ($i = 0, 1, \dots, \infty$) les suites illimitées des matrices Φ et P qui correspondent aux extrêmes respectifs d'après le théorème 2.3. Convenons que a_i, b_i, \dots, l_i aient le même sens pour Φ_i que a, b, \dots, l ont pour Φ . On note par $p_r^{(i)}$ ($r = 1, 2, 3; i = 0, 1, \dots, \infty$) le point dont les coordonnées se trouvent dans la $r^{\text{ième}}$ colonne de la matrice P_i . On peut énoncer le lemme suivant :

LEMME 4.1. — Parmi les extrêmes dans la chaîne correspondant à ξ, η, ζ il existe une suite illimitée d'extrêmes $\{ a_i, g_i, l_i \}$ ($i = 1, \dots, \infty$) de première espèce, tous différents entre eux, telle que $c_i > c_{i+1}$, $h_i > h_{i+1}$ ($i = 1, \dots, \infty$). Pareillement, il existe une telle suite illimitée d'extrêmes de première espèce pour laquelle $b_i > b_{i+1}$, $k_i > k_{i+1}$ et une telle suite pour laquelle $f_i > f_{i+1}$, $j_i > j_{i+1}$.

A cause de la symétrie des rôles joués par ξ , η , ζ , il suffit de démontrer la première partie du lemme. Soit $\{a_0, g_0, l_0\}$ un parallélépipède extrême quelconque et soit $\{a_i, g_i, l_i\}$ ($i = 1, \dots, \infty$) la suite illimitée des extrêmes déterminée de la manière décrite dans ce qui suit.

Des restrictions imposées sur ξ , η et ζ il résulte qu'aucune des valeurs a_i, b_i, \dots, l_i ($i = 0, 1, \dots, \infty$) n'est égale à zéro. Par conséquent, le théorème 2.1 exige l'existence d'au moins un point du réseau outre l'origine dans l'intérieur du parallélépipède $\left\{c_0, h_0, \frac{\Delta}{c_0 h_0}\right\}$. Parmi tous les points du réseau (sauf l'origine) qui se trouvent dans ce parallélépipède, il y a un couple de points pour lequel la valeur absolue de ζ est la plus petite. Soit l_1 (qui remplit $l_1 > l_0$) cette valeur de $|\zeta|$, et soient $\pm p_3^{(1)}$ les deux points du réseau pour lesquels $|\zeta| = l_1$. Le parallélépipède $\{c_0, h_0, l_1\}$ est alors *libre*, mais il n'est pas extrême. Il est possible d'élever *ou* les ξ -faces *ou* les η -faces de $\{c_0, h_0, l_1\}$ sans introduire des points du réseau dans l'intérieur du parallélépipède; d'autre part, du fait que

$$|\xi(p_3^{(0)})| = c_0, \quad |\eta(p_3^{(0)})| = h_0, \quad |\zeta(p_3^{(0)})| = l_0 < l_1$$

il est impossible d'élever ces deux couples de faces à la fois sans introduire $p_3^{(0)}$ et $-p_3^{(0)}$ dans l'intérieur du parallélépipède. L'élévation des ξ -faces aussi haute que possible sans introduire des points du réseau dans l'intérieur, donne un parallélépipède *extrême*

$$\{\bar{a}_1, h_0, l_1\}, \quad \text{où } \bar{a}_1 < \frac{\Delta}{h_0 l_1} < \frac{\Delta}{h_0 l_0}.$$

Pareillement, l'élévation des η -faces donne un parallélépipède extrême

$$\{c_0, \bar{g}_1, l_1\}, \quad \text{où } \bar{g}_1 < \frac{\Delta}{c_0 l_1} < \frac{\Delta}{c_0 l_0}.$$

Il est clair que $\{c_0, \bar{g}_1, l_1\}$ est *par définition* le ξ -voisin de l'extrême $\{\bar{a}_1, h_0, l_1\}$. En vertu du théorème 3.3 l'un au moins de ces extrêmes est de première espèce. Si tous les deux sont de première espèce, on pourra choisir

$$\text{ou } a_1 = \bar{a}_1, \quad g_1 = h_0 \quad \text{ou } a_1 = c_0, \quad g_1 = \bar{g}_1$$

pour définir l'extrême $\{a_1, g_1, l_1\}$. Autrement, on définit $\{a_1, g_1, l_1\}$ comme étant celui qui est de première espèce. En employant $\{a_1, g_1, l_1\}$ à la place de $\{a_0, g_0, l_0\}$ on peut définir de la même façon un parallélépipède extrême $\{a_2, g_2, l_2\}$ de première espèce. En répétant ce procédé une infinité de fois, l'on obtient une suite illimitée d'extrêmes $\{a_i, g_i, l_i\}$ de première espèce, telle que $c_i > c_{i+1}$, $h_i > h_{i+1}$. Dans une suite construite de cette manière, l'extrême $\{a_0, g_0, l_0\}$ peut être de deuxième espèce; tous les autres $\{a_i, g_i, l_i\}$ sont toujours de première espèce, et le lemme se trouve démontré. Une telle suite, pour laquelle $c_i > c_{i+1}$, $h_i > h_{i+1}$, $l_i < l_{i+1} = \min.$ est dite *une $\xi\eta$ -suite d'extrêmes*. Pareillement, lorsque l'on construit une suite pour laquelle $b_i > b_{i+1}$, $g_i < g_{i+1} = \min.$, $k_i > k_{i+1}$, puis on la nomme *une $\xi\zeta$ -suite d'extrêmes*. De même, on définit *une $\eta\zeta$ -suite d'extrêmes*.

Dans tout ce qui suit, on énonce les résultats seulement pour les $\xi\eta$ -suites, mais l'on n'oublie pas que de pareils résultats tiennent pour les $\xi\zeta$ -et les $\eta\zeta$ -suites.

Quoi qu'il soit possible, parfois, en prenant le même $\{a_0, g_0, l_0\}$ pour point de départ, d'avoir plusieurs $\xi\eta$ -suites d'extrêmes, il est clair que *la suite l_0, l_1, \dots , des troisièmes paramètres se trouve toujours la même*. C'est-à-dire que la suite illimitée de points du réseau q_0, q_1, \dots pour lesquels $\zeta(q_i) = l_i$ reste toujours la même. Cette suite de points du réseau sera dite *la $\xi\eta$ -suite de points du réseau correspondant à $\{a_0, g_0, l_0\}$* .

LEMME 4.2. — *En prenant pour point de départ un extrême quelconque et cherchant les $\xi\eta$ -suites d'extrêmes, on détermine une seule $\xi\eta$ -suite de points du réseau q_1, q_2, \dots tous différents entre eux tels que chaque point est sur la surface de deux extrêmes consécutifs, et tels que*

$$|\xi(q_i)| = c_i, \quad |\eta(q_i)| = h_i, \quad \zeta(q_i) = l_i.$$

Parce que $l_r \neq l_s$ ($r \neq s$) les points q_1, q_2, \dots , sont tous différents entre eux. La méthode pour laquelle on obtient la $\xi\eta$ -suite montre que q_i est sur les surfaces des deux extrêmes

$$\{a_i, g_i, l_i\} \quad \text{et} \quad \{a_{i+1}, g_{i+1}, l_{i+1}\}.$$

LEMME 4.3. — *Soient c_1, c_2, c_3, \dots , et h_1, h_2, h_3, \dots , deux suites (finies ou infinies) de termes tous positifs tels que $c_i > c_{i+1}$, $h_i > h_{i+1}$;*

soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques; et soit t un nombre entier positif quelconque. Lorsque

$$n \geq 4t^2 + 2t, \quad n > \left(\frac{tc_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1, \quad n > \left(\frac{th_1}{\varepsilon_2}\right)^2 + 1,$$

il existe un entier $r \leq n - t$, tel que

$$c_r - c_{r+t} < \varepsilon_1, \quad h_r - h_{r+t} < \varepsilon_2.$$

On choisit d'abord n assez grand pour remplir les trois inégalités. (Si les suites sont finies ceci ne sera pas toujours possible.) Puis

$$\sqrt{n-1} > \frac{tc_1}{\varepsilon_1}, \quad \sqrt{n-1} > \frac{th_1}{\varepsilon_2}.$$

On voit que l'inégalité $n \geq 4t^2 + 2t$ ($t \geq 1$) entraîne $n - 1 > [\sqrt{n-1}] + 1$. Les différences $\Delta_i c = c_i - c_{i+1}$ pour lesquelles $\Delta_i c \geq \frac{\varepsilon_1}{t}$ sont toujours en nombre moindre que $[\sqrt{n-1}] + 1$, car autrement l'on trouverait

$$c_1 - c_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i c \geq \{[\sqrt{n-1}] + 1\} \frac{\varepsilon_1}{t} > c_1,$$

ce qui est impossible. De même, les différences $\Delta_i h = h_i - h_{i+1}$ pour lesquelles $\Delta_i h \geq \frac{\varepsilon_2}{t}$ sont toujours en nombre moindre que $[\sqrt{n-1}] + 1$. Les indices i pour lesquelles, ou

$$P \Delta_i c \geq \frac{\varepsilon_1}{t} \quad \text{ou} \quad P \Delta_i h \geq \frac{\varepsilon_2}{t},$$

ne sont jamais en nombre plus grand que $2[\sqrt{n-1}]$. Pour assurer que chaque différence $\Delta_r c, \Delta_{r+1} c, \dots, \Delta_{r+t-1} c$ correspondant à t indices consécutifs, $r, r+1, \dots, r+t-1$, soit moindre que $\frac{\varepsilon_1}{t}$ et en même temps chaque différence $\Delta_r h, \Delta_{r+1} h, \dots, \Delta_{r+t-1} h$ soit moindre que $\frac{\varepsilon_2}{t}$, il suffit que n remplisse $n - 1 > 2t[\sqrt{n-1}] + t - 1$. Mais cette inégalité-ci est toujours remplie lorsque $n \geq 4t^2 + 2t$. Ainsi, le lemme est démontré.

THÉOREME 4.4. — Parmi les points du réseau d'une $\xi\eta$ -suite, il y a deux points q_{s_m} et $q_{s_{m+1}}$ ($s_m + 2 \leq s_{m+1}$) pour lesquels $|\xi(q_{s_m} - q_{s_{m+1}})|$

et $|\eta(\mathfrak{q}_{s_m} - \mathfrak{q}_{s_{m+1}})|$ sont aussi petits qu'on les désire. En particulier, soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques; lorsque

$$n \geq 6, \quad n > \left(\frac{c_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1, \quad n > \left(\frac{h_1}{\varepsilon_2}\right)^2 + 1,$$

il existe un entier $m \leq n - 1$ tel que

$$c_{s_m} - c_{s_{m+1}} < \varepsilon_1, \quad h_{s_m} - h_{s_{m+1}} < \varepsilon_2,$$

où

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{q}_{s_m}) &= \delta_1 c_{s_m}, & \xi(\mathfrak{q}_{s_{m+1}}) &= \delta_1 c_{s_{m+1}} \\ \eta(\mathfrak{q}_{s_m}) &= \delta_2 h_{s_m}, & \eta(\mathfrak{q}_{s_{m+1}}) &= \delta_2 h_{s_{m+1}} \end{aligned} \quad (\delta_i = \pm 1).$$

Les plans $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ coupent l'espace en huit octants. Chaque point du réseau (sauf l'origine) est contenu dans un seul octant. Tous les points de la $\xi\eta$ -suite se trouvent dans les quatre octants pour lesquels $\zeta > 0$. Soit u un entier convenablement choisi.

L'un au moins de ces octants ne contient pas moins que $\left[\frac{u}{4}\right] + 1$ des points $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_{u+1}$ de la $\xi\eta$ -suite. Soient $\mathfrak{q}_{s_1}, \mathfrak{q}_{s_2}, \dots, \mathfrak{q}_{s_n}$ les points de la $\xi\eta$ -suite qui se trouvent dans un tel octant; on a $\frac{u}{4} \leq \left[\frac{u}{4}\right] + 1 \leq n \leq s_n \leq u$. On peut choisir u assez grand pour remplir

$$\frac{u}{4} \geq 6, \quad \frac{u}{4} > \left(\frac{c_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1, \quad \frac{u}{4} > \left(\frac{h_1}{\varepsilon_2}\right)^2 + 1.$$

on a

$$n \geq 6, \quad n > \left(\frac{c_{s_1}}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1, \quad n > \left(\frac{h_{s_1}}{\varepsilon_2}\right)^2 + 1$$

et le lemme 4.3 s'applique pour prouver l'existence de l'entier m . En vertu du lemme 4.2, les points \mathfrak{q}_i et \mathfrak{q}_{i+1} sont tous les deux sur la surface de $\{a_{i+1}, g_{i+1}, l_{i+1}\}$. Le lemme 2.1 s'applique alors pour montrer que $\mathfrak{q}_{s_{m+1}} \neq \mathfrak{q}_{s_{m+1}}$, c'est-à-dire $s_m + 2 \leq s_{m+1}$.

Parce que les points de la $\xi\eta$ -suite sont tous différents entre eux, le point $\mathfrak{r}_1 \equiv \mathfrak{q}_{s_m} - \mathfrak{q}_{s_{m+1}}$ n'est jamais l'origine. Il s'ensuit que

$$\varepsilon_1 > c_{s_m} - c_{s_{m+1}} = |\xi(\mathfrak{r}_1)| > 0, \quad \varepsilon_2 > h_{s_m} - h_{s_{m+1}} = |\eta(\mathfrak{r}_1)| > 0.$$

Soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques telles que

$$0 < \varepsilon'_1 < |\xi(\mathfrak{r}_1)|, \quad 0 < \varepsilon'_2 < |\eta(\mathfrak{r}_1)|.$$

En employant ε'_1 et ε'_2 à la place de ε_1 et ε_2 , il est clair que l'on peut appliquer le théorème 4.4 pour montrer qu'il y a, parmi les différences des points du réseau d'une $\xi\eta$ -suite, un deuxième point du réseau r_2 pour lequel $|\xi| < \varepsilon'_1$, $|\eta| < \varepsilon'_2$. Par induction l'on voit qu'il existe parmi ces différences, une suite illimitée de points du réseau r_1, r_2, \dots , tous différents entre eux tels que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\xi(r_i)| = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |\eta(r_i)| = 0.$$

LEMME 4. 4. — Parmi les points de la $\xi\eta$ -suite soient

$$q_{s_1}, q_{s_2}, \dots (s_1 < s_2 < \dots)$$

tous les points qui se trouvent dans un seul et même octant; deux au moins des quatre telles suites sont infinies. Soient ε_1 et ε_2 deux constantes positives quelconques, ou bien il existe un entier N , tel que lorsque $s_m \geq N$, on a toujours

$$|\xi(q_{s_m} - q_{s_{m+t}})| < \varepsilon_1, \quad |\eta(q_{s_m} - q_{s_{m+t}})| < \varepsilon_2 \quad (t \geq 1),$$

ou bien la suite q_{s_1}, q_{s_2}, \dots , est finie. Même pour une suite finie l'on peut trouver parfois un N qui remplit ces inégalités.

Les suites c_1, c_2, \dots et h_1, h_2, \dots tendent vers des limites respectives $c \geq 0$ et $h \geq 0$, à cause des relations $c_i > c_{i+1} > 0$, $h_i > h_{i+1} > 0$. Les inégalités $c_i > c$ et $h_i > h$ sont toujours remplies. De la définition d'une limite il suit que l'on peut trouver un entier N_1 tel que lorsque $i \geq N_1$, l'inégalité $c_i - c < \varepsilon_1$ est toujours remplie. De même, on peut trouver un entier N_2 tel que lorsque $i \geq N_2$, $h_i - h < \varepsilon_2$. Soit N le plus grand des entiers N_1 et N_2 , et soient i et r deux entiers tels que $r > i \geq N$, on a

$$0 < c_i - c_r < c_i - c < \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad 0 < h_i - h_r < h_i - h < \varepsilon_2.$$

En vertu du fait que $q_{s_{m+1}} \neq q_{s_{m+1}}$, il y a au moins deux octants qui contiennent une infinité des points q_1, q_2, \dots , les deux autres octants pouvant contenir un nombre fini des points de cette suite. Soit $s_m \geq N$, on a

$$|\xi(q_{s_m} - q_{s_{m+t}})| = c_{s_m} - c_{s_{m+t}} < \varepsilon_1, \quad |\eta(q_{s_m} - q_{s_{m+t}})| = h_{s_m} - h_{s_{m+t}} < \varepsilon_2.$$

Dans le cas où l'octant dont il s'agit ne contient qu'un nombre fini des points q_1, q_2, \dots , il n'est pas toujours possible de remplir $s_m \geq N$.

LEMME 4.5. — Dans une $\xi\eta$ -suite d'extrêmes, les troisièmes paramètres remplissent l'inégalité suivante

$$l_{i+t} > 2^{\left[\frac{t}{4}\right]} l_i \quad (i, t = 1, 2, \dots, \infty).$$

De la méthode que l'on a employée pour construire la $\xi\eta$ -suite il résulte que $l_{i+1} > l_i$. Parmi les points $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+4}$ il y en a deux au moins qui se trouvent dans le même octant (voir la preuve du théorème 4.4). Soient q_{s_1} et q_{s_2} deux tels points, le point du réseau $q = q_{s_1} - q_{s_2}$ remplit les inégalités

$$|\xi(q)| = c_{s_1} - c_{s_2} < c_{s_1}, \quad |\eta(q)| = h_{s_1} - h_{s_2} < h_{s_1}, \quad |\zeta(q)| = l_{s_2} - l_{s_1}.$$

Pour que q ne se trouve pas dans l'intérieur du parallélépipède libre $\{c_{s_1}, h_{s_1}, l_{s_1+1}\}$, l'inégalité $l_{s_2} - l_{s_1} \geq l_{s_1+1}$ doit être remplie. Parce que $l_{s_1+1} > l_{s_1}$, l'on voit que $l_{s_2} > 2l_{s_1}$. A cause de la définition de s_1 et s_2 il est clair que $i \leq s_1 < s_2 \leq i + 4$ et l'on obtient $l_{i+4} > 2l_i$. Par induction l'on obtient l'inégalité $l_{i+4t} > 2^t l_i$. Cette inégalité peut être unie avec $l_{i+1} > l_i$ pour obtenir le résultat du lemme.

THÉORÈME 4.5. — Dans une $\xi\eta$ -suite d'extrêmes, l'inégalité

$$a_{i+t} g_{i+t} < 5 a_i g_i 2^{-\left[\frac{t}{4}\right]} \quad (i, t = 1, 2, \dots, \infty),$$

est toujours remplie.

On a vu (p. 21, l. 10 du bas) que pour un extrême $\{a, g, l\}$ de première espèce la relation $5agl > \Delta D > 0$ est toujours remplie. Le théorème 2.5 montre que $D = 1$ et le théorème 2.1 montre que $agl < \Delta$. Par conséquent, on peut écrire pour chaque parallélépipède $\{a_i, g_i, l_i\}$ d'une $\xi\eta$ -suite (sauf le premier dans le cas où il serait de deuxième espèce) l'inégalité

$$\Delta > a_i g_i l_i > \frac{\Delta}{5}.$$

En employant le lemme 4.5 on trouve

$$\frac{\Delta 2^{\left[\frac{t}{4}\right]}}{5 a_i g_i} < 2^{\left[\frac{t}{4}\right]} l_i < l_{i+t} < \frac{\Delta}{a_{i+t} g_{i+t}} \quad (i, t = 1, 2, \dots, \infty)$$

d'où l'on déduit le résultat désiré.

COROLLAIRE. — Dans une $\xi\eta$ -suite d'extrêmes, l'inégalité

$$c_{i+t}h_{i+t} < 5a_i g_i 2^{-\lfloor \frac{t}{4} \rfloor} \quad (i, t = 1, 2, \dots, \infty)$$

est toujours remplie.

On établit ce résultat en employant les inégalités

$$a_i > c_i, \quad g_i > h_i \quad (i = 1, 2, \dots, \infty)$$

entre les éléments de la matrice Φ_i .

On donne maintenant une méthode pour calculer les coordonnées de tous les points du réseau sur les parallélépipèdes extrêmes d'une $\xi\eta$ -suite, en prenant pour point de départ un parallélépipède extrême quelconque de première espèce. On se sert d'un Tableau que l'on peut aussi employer pour déterminer les points du réseau sur les extrêmes d'une $\eta\zeta$ - ou une $\xi\zeta$ -suite.

Il suffit d'exposer un procédé pour évaluer les coordonnées des points du réseau sur $\{a_{i+1}, g_{i+1}, l_{i+1}\}$ lorsque les points du réseau sur $\{a_i, g_i, l_i\}$ (de première espèce) sont donnés.

THÉORÈME 4.6. — Lorsque Φ_i est canonique du type I, III ($c_i < b_i$), ou V, l'on pose

$$\xi = \eta', \quad \eta = \xi', \quad x_1 = x'_2, \quad x_2 = x'_1.$$

Après cet échange la matrice correspondante Φ'_i se trouve canonique du type respectif II, III ($c'_i > b'_i$), ou IV.

On voit tout d'abord que Φ'_i se trouve du type respectif II, III, ou IV. En vertu du théorème 2.4, lorsque Φ_i est du type III, la condition $b_i > c_i$ entraîne $h_i > f_i$. Après cet échange, h_i devient c'_i et f_i devient b'_i , et l'inégalité $c'_i > b'_i$ est remplie.

Il suffit, alors, de trouver un algorithme pour ces trois cas II, III ($c > b$), IV.

Lorsque l'on résout les inégalités

$$|\xi| < c_i, \quad |\eta| < h_i, \quad |\zeta| = \min. < \frac{\Delta}{c_i h_i},$$

on obtient deux solutions $\pm q_{i+1}$. On a

$$l_{i+1} = \zeta(q_{i+1}) > 0.$$

Ensuite, on déduit de $\{c_i, h_i, l_{i+1}\}$ les deux extrêmes $\{\tilde{a}_{i+1}, h_i, l_{i+1}\}$ et $\{c_i, \bar{g}_{i+1}, l_{i+1}\}$ en élevant, respectivement, les ξ - ou les η -faces (voir p. 56).

Il est possible, parfois, que l'un ou l'autre de ces deux extrêmes soit de deuxième espèce, mais pas tous les deux, car cette dernière circonstance est exclue par le théorème 3.3 et le fait que $\{c_i, \bar{g}_{i+1}, l_{i+1}\}$ est le ξ -voisin de $\{\tilde{a}_{i+1}, h_i, l_{i+1}\}$.

Au lieu d'associer à q_{i+1} un seul extrême de première espèce, on fait correspondre ce couple à q_{i+1} et l'on obtient ainsi une suite de couples d'extrêmes. Étant donné pour point de départ un extrême arbitraire, il n'y a qu'une telle suite qui lui corresponde. On nomme cette suite une $\xi\eta$ -suite double d'extrêmes appartenant à ξ, η , et ζ .

On pose $\bar{g}_{i+1} = h_i, a_{i+1} = c_i$. Soient \tilde{P}_{i+1} et $\tilde{\Phi}_{i+1}$ les matrices P et Φ que l'on fait correspondre d'après le théorème 2.3 à $\{\tilde{a}_{i+1}, \bar{g}_{i+1}, l_{i+1}\}$; soient \bar{P}_{i+1} et $\bar{\Phi}_{i+1}$ celles qui correspondent à $\{\bar{a}_{i+1}, \bar{g}_{i+1}, l_{i+1}\}$; et, enfin, soient P_i et Φ_i les matrices qui correspondent à l'extrême $\{a_i, g_i, l_i\}$.

Puisque $\{a_i, g_i, l_i\}$ est de première espèce, P_i est à déterminant 1 et P_i^{-1} est une matrice de la même nature dont tous les éléments sont des entiers. Soient p_1, p_2, p_3 les points du réseau dont les coordonnées sont les éléments de P_i ; soient $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ ceux de \tilde{P}_{i+1} ; et soient $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ ceux de \bar{P}_{i+1} . De ce que $\tilde{p}_2 = \pm p_2$ et $\bar{p}_1 = \pm p_1$, il résulte que les deux matrices $\tilde{T}_{i+1} = P_i^{-1} \tilde{P}_{i+1}$ et $\bar{T}_{i+1} = P_i^{-1} \bar{P}_{i+1}$ sont des matrices des types respectifs

$$\tilde{T}_{i+1} = \begin{vmatrix} \tilde{\delta}_1 \tilde{t}_{11} & 0 & \tilde{\delta}_3 t_{13} \\ \tilde{\delta}_1 \tilde{t}_{21} & 0 & \tilde{\delta}_3 t_{23} \\ \tilde{\delta}_1 \tilde{t}_{31} & \tilde{\delta}_2 & \tilde{\delta}_3 t_{33} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{T}_{i+1} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\delta}_2 \bar{t}_{12} & \bar{\delta}_3 t_{13} \\ 0 & \bar{\delta}_2 \bar{t}_{22} & \bar{\delta}_3 t_{23} \\ \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 \bar{t}_{32} & \bar{\delta}_3 t_{33} \end{vmatrix},$$

où $\tilde{t}_{11}, \dots, \tilde{t}_{12}, \dots, \tilde{t}_{33}$ sont des entiers, et $\tilde{\delta}_r = \pm 1, \bar{\delta}_r = \pm 1$.

Algorithme relatif aux \tilde{T}_{i+1} et \bar{T}_{i+1} . — Soient A, B, ..., L les cofacteurs respectifs des éléments $a_i, \pm b_i, \dots, l_i$ de Φ_i .

II. — On pose (pour plus de commodité, on omet l'indice i en écri-

vant les éléments de Φ_i)

$$\begin{aligned} M_1 &= [\theta J], & M_2 &= [-\theta K], & M_3 &= \theta L = \text{entier} & (\theta > 0); \\ |M_1| &< 6 + \frac{|J|}{ch}, & |M_2| &< 4 - \frac{K}{ch}, & |M_3| &< 3 + \frac{L}{ch}; \\ a &= u^0, & b &= u', & c &= u'', & u &\equiv -u^0 M_1 - u' M_2 + u'' M_3; \\ f &= v', & g &= v^0, & h &= v'', & v &\equiv v' M_1 - v^0 M_2 + v'' M_3; \\ j &= \omega'', & k &= \omega', & l &= \omega^0, & \omega &\equiv -\omega'' M_1 + \omega' M_2 + \omega^0 M_3; \\ & & & & & & W &\equiv -\omega'' m_1 + \omega' m_2 + \omega^0 M_3. \end{aligned}$$

III. ($c > b$). — On pose

$$\begin{aligned} M_1 &= [\theta L], & M_2 &= [\theta K], & M_3 &= \theta J = \text{entier} & (\theta > 0); \\ |M_1| &< 6 + \frac{L}{ch}, & |M_2| &< 5 + \frac{K}{ch}, & |M_3| &< 3 + \frac{J}{ch}; \\ a &= u_0, & b &= u', & c &= u'', & u &\equiv -u'' M_1 - u' M_2 + u^0 M_3; \\ f &= v', & g &= v^0, & h &= v'', & v &\equiv v'' M_1 - v^0 M_2 + v' M_3; \\ l &= \omega'', & k &= \omega', & j &= \omega^0, & \omega &\equiv \omega'' M_1 + \omega' M_2 + \omega^0 M_3; \\ & & & & & & W &\equiv \omega'' m_1 + \omega' m_2 + \omega^0 M_3. \end{aligned}$$

IV. — On pose

$$\begin{aligned} M_1 &= [-\theta K], & M_2 &= [\theta J], & M_3 &= \theta L = \text{entier} & (\theta > 0); \\ |M_1| &< 6 + \frac{|K|}{ch}, & |M_2| &< 5 + \frac{J}{ch}, & |M_3| &< 4 + \frac{L}{ch}; \\ g &= u_0, & f &= u', & h &= u'', & u &\equiv -u^0 M_1 - u' M_2 + u'' M_3; \\ b &= v', & a &= v^0, & c &= v'', & v &\equiv v' M_1 - v^0 M_2 + v'' M_3; \\ k &= \omega'', & j &= \omega', & l &= \omega^0, & \omega &\equiv \omega'' M_1 + \omega' M_2 + \omega^0 M_3; \\ & & & & & & W &\equiv \omega'' m_1 + \omega' m_2 + \omega^0 M_3. \end{aligned}$$

PREMIÈRE PARTIE. — *Détermination de t_{13}, t_{23}, t_{33} .* — Supposons que θ parcourt toutes les valeurs positives pour lesquelles M_3 devient un entier et en même temps $|M_1|$, $|M_2|$ et $|M_3|$ restent inférieurs aux bornes que l'on a données. Toutes les fois qu'il se présente un système de trois nombres M_1, M_2, M_3 pour lequel u et v remplissent deux des conditions à la solution dans le Tableau suivant, on associe à M_3 les nombres correspondants m_1 et m_2 . Parmi tous les tels systèmes m_1, m_2, M_3 (il y en a au moins un) on cherche le système s_1, s_2, s_3 pour lequel $|W| = \min. = l_{i+1}$

TABLEAU.

		Condition à la solution.		
$m_1.$	$m_2.$	II, IV.	III.	
1.	M_1	M_2	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u < u'' \\ -\rho'' < \rho < \rho'' \end{array} \right\}$	Même que II, IV
2.	M_1	$M_2 + 1$	$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u' < u < u'' + u' \\ -\rho'' + \rho^0 < \rho < \rho^0 \end{array} \right\}$	Même que II, IV
3.	$M_1 + 1$	M_2	$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u^0 < u < u'' + u^0 \\ -\rho' < \rho < \rho'' - \rho' \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u < 2u'' \\ -\rho'' < \rho < 0 \end{array} \right\}$
4.	$M_1 + 1$	$M_2 + 1$	$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u' + u^0 < u < u' + u^0 \\ -\rho'' - \rho' + \rho^0 < \rho < \rho'' - \rho' + \rho^0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} u' < u < u' + u'' \\ \rho^0 - 2\rho'' < \rho < \rho^0 \end{array} \right\}$

Supplément 1.

5.	M_1	$M_2 - 1$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u < u'' - u' \\ -\rho' < \rho < \rho'' - \rho^0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u < u'' - u' \\ -\rho'' < \rho < \rho'' - \rho^0 \end{array} \right\}$
6.	$M_1 + 1$	$M_2 + 2$	$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + 2u' + u^0 < u < u' + u^0 \\ -\rho'' - \rho' + 2\rho^0 < \rho < \rho^0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2u' < u < u' + u'' \\ -2\rho'' + 2\rho^0 < \rho < \rho^0 \end{array} \right\}$

Supplément 2.

7.	$M_1 - 1$	$M_2 + 1$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u < u'' + u' - u^0 \\ -\rho'' + \rho' + \rho^0 < \rho < \rho^0 \end{array} \right\}$
8.	$M_1 + 2$	M_2	$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + 2u^0 < u < u' + u^0 \\ -\rho' < \rho < \rho'' - 2\rho' \end{array} \right\}$

II, IV, $u' > u''$, $\rho' > \rho''$: employer seulement le Tableau.

II, IV, $u' < u''$, $\rho' > \rho''$: le Tableau uni avec le supplément 1.

II, IV, $u' > u''$, $\rho' < \rho''$: le Tableau uni avec le supplément 2.

II, IV, $u' < u''$, $\rho' < \rho''$: le Tableau uni avec les deux suppléments.

III : le Tableau uni avec le supplément 1.

Ayant calculé s_1 , s_2 et s_3 l'on emploie, dans les divers cas, les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{II :} & t_{13} = s_1, & t_{23} = -s_2, & t_{33} = s_3; \\ \text{III :} & t_{13} = s_3, & t_{23} = s_2, & t_{33} = s_1; \\ \text{IV :} & t_{13} = -s_2, & t_{23} = s_1, & t_{33} = s_3. \end{array}$$

DEUXIÈME PARTIE. — Détermination de \tilde{t}_{11} , \tilde{t}_{21} , \tilde{t}_{31} . — On obtient tous les couples des entiers y_1 et y_2 qui remplissent

$$y_1 t_{23} - y_2 t_{13} = 1 \text{ ou } 0$$

et

$$|y_1| < 2 + \frac{|J|}{ch} + \frac{A}{hl_{i+1}}, \quad |y_2| < 2 + \frac{|K|}{ch} + \frac{|B|}{hl_{i+1}}.$$

En prenant

$$|y_3| < 2 + \frac{L}{ch} + \frac{|C|}{hl_{i+1}}$$

et

$$|\pm fy_1 + gy_2 \pm hy_3| < h,$$

où les signes sont ceux qui se trouvent dans la deuxième ligne de Φ_i ; l'on associe à chaque couple y_1, y_2 , un troisième entier y_3 . Deux valeurs de y_3 au plus peuvent correspondre à un seul couple y_1, y_2 . Parmi tous ces systèmes de valeurs, on cherche celui pour lequel

$$\begin{aligned} |ay_1 \pm by_2 \pm cy_3| &= \min., \\ |\pm jy_1 \pm ky_2 + ly_3| &< l_{i+1}, \end{aligned}$$

les signes étant respectivement ceux qui se trouvent dans la première et la troisième ligne de Φ_i . C'est la solution $\bar{t}_{11}, \bar{t}_{21}, \bar{t}_{31}$.

TROISIÈME PARTIE. — Détermination de $\bar{t}_{12}, \bar{t}_{22}, \bar{t}_{32}$. — On obtient tous les couples des entiers y_1, y_2 qui remplissent

$$y_1 t_{23} - y_2 t_{13} = 1 \text{ ou } 0$$

et

$$|y_1| < 2 + \frac{|J|}{ch} + \frac{|F|}{cl_{i+1}}, \quad |y_2| < 2 + \frac{|K|}{ch} + \frac{G}{cl_{i+1}}.$$

En prenant

$$|y_3| < 2 + \frac{L}{ch} + \frac{|H|}{cl_{i+1}}$$

et

$$|ay_1 \pm by_2 \pm cy_3| < c,$$

où les signes sont ceux de la première ligne de Φ_i ; l'on associe à chaque couple y_1, y_2 un troisième entier y_3 . Deux valeurs de y_3 au plus peuvent correspondre à un seul couple y_1, y_2 . Parmi tous ces systèmes de valeurs, on cherche celui pour lequel

$$\begin{aligned} |\pm fy_1 + gy_2 \pm hy_3| &= \min., \\ |\pm jy_1 \pm ky_2 + ly_3| &< l_{i+1}, \end{aligned}$$

les signes étant respectivement ceux de la deuxième et la troisième ligne de Φ_i . C'est la solution $\bar{t}_{12}, \bar{t}_{22}, \bar{t}_{32}$.

QUATRIÈME PARTIE. — Détermination de $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ et des types de $\bar{\Phi}_{i+1}, \bar{\Phi}_{i+1}$. — On emploie les relations $\bar{P}_{i+1} = P_i \bar{T}_{i+1}, \bar{P}_{i+1} = P_i \bar{T}_{i+1}$ et les lemmes 2.2 et 2.3 pour obtenir les valeurs de $\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_3$ et les types de $\bar{\Phi}_{i+1}$ et $\bar{\Phi}_{i+1}$.

La démonstration de l'algorithme est à peu près la même dans les trois cas, c'est pourquoi cette démonstration est exposée seulement pour le cas où Φ_i est canonique de type II.

Le premier problème est celui de trouver les solutions de $|\xi| < c, |\eta| < h, |\zeta| = \min.$ en nombres entiers. Mais ceci est équivalent au problème de trouver trois entiers t_{13}, t_{23}, t_{33} qui remplissent les conditions

$$\begin{aligned} (1) \quad & |ay_1 - by_2 - cy_3| < c, \\ (2) \quad & |fy_1 + gy_2 + hy_3| < h, \\ (3) \quad & |-jy_1 - ky_2 + ly_3| = \min., \end{aligned}$$

car les deux solutions des trois inégalités écrites plus haut sont alors les coordonnées des points du réseau

$$\pm (t_{13}p_1 + t_{23}p_2 + t_{33}p_3).$$

On rappelle les définitions de $u, u^0, u', u'',$ etc., que l'on a données au commencement de l'algorithme et l'on pose

$$\begin{aligned} U &= -u^0 m_1 - u' m_2 + u'' M_3, \\ V &= v^0 m_1 - v^0 m_2 + v'' M_3. \end{aligned}$$

La résolution de (1), (2), et (3) est équivalent au problème de trouver des entiers m_1, m_2, M_3 , pour lesquels

$$\begin{aligned} (1') \quad & |U| < u'', \\ (2') \quad & |V| < v'', \\ (3') \quad & |W| = \min. \end{aligned}$$

De la théorie des déterminants on déduit

$$Ja - Kb - Lc = 0, \quad Jf + Kg + Lh = 0,$$

d'où

$$(4) \quad 0 < u < u^0 + u', \quad -v' < v < v^0.$$

On pose

$$\beta_1 = m_1 - M_1, \quad \beta_2 = m_2 - M_2.$$

Il en suit que β_1 et β_2 sont des entiers.

Étant donné M_3 , on détermine d'abord les valeurs de β_1 et β_2 auxquelles correspondent des solutions de (1') et (2'). De (1') et (2'), on déduit

$$(5) \quad \begin{cases} -u'' < u^0\beta_1 + u'\beta_2 - u < u'', \\ -v'' < v^0\beta_1 + v'\beta_2 - v < v''. \end{cases}$$

En employant (4) et (5) on obtient les relations

$$(6) \quad \begin{cases} u^0\beta_1 + u'\beta_2 + u'' > 0, \\ u^0(1 - \beta_1) + u'(1 - \beta_2) + u'' > 0, \\ v^0\beta_2 + v'(1 - \beta_1) + v'' > 0, \\ v^0(1 - \beta_2) + v'\beta_1 + v'' > 0. \end{cases}$$

En vertu du théorème 2.3 on obtient pour Φ_i les inégalités

$$(7) \quad \begin{cases} u^0 > u', & u^0 > u'', \\ v^0 > v', & v^0 > v''. \end{cases}$$

On sépare le problème en quatre cas $u' > u'', v' > v''$; $u' < u'', v' > v''$; $u' > u'', v' < v''$; $u' < u'', v' < v''$ et l'on déduit de (6) et (7) toutes les valeurs qui peuvent être employées pour β_1 et β_2 . [Dans III ($c > b$) on a toujours $u'' > u'$, par conséquent, il n'y a que deux cas.]

On remplace ces valeurs dans (5) pour obtenir les conditions à la solution. Le Tableau et les deux suppléments en résultent.

Pour trouver des bornes pour $|M_1|$, $|M_2|$ et $|M_3|$, on écrit de nouveau (1) et (2) sous les formes

$$(1'') \quad ay_1 - by_2 - cy_3 = \lambda_1 c \quad (|\lambda_r| < 1, \lambda_r \neq 0),$$

$$(2'') \quad fy_1 + gy_2 + hy_3 = \lambda_2 h$$

On emploie le théorème 2.1 pour obtenir la borne supérieure $\frac{\Delta}{ch}$ pour le minimum dans (3). On remplace (3) par

$$(3'') \quad -jy_1 - ky_2 + ly_3 = \lambda_3 \frac{\Delta}{ch} \quad (|\lambda_3| < 1, \lambda_3 \neq 0).$$

Les solutions de (1), (2) et (3) sont toutes parmi les solutions de (1''), (2'') et (3'').

Lorsque l'on résout (1''), (2'') et (3'') en y_1, y_2, y_3 , en tenant compte du théorème 2. I et des conditions $a > b, a > c; g > f, g > h$, on obtient les relations

$$|m_1| < 4 + \frac{|J|}{ch}, \quad |-m_2| < 2 - \frac{K}{ch}, \quad M_3 < 3 + \frac{L}{ch}.$$

En employant les conditions $|m_1 - M_1| \leq 2$ et $|m_2 - M_2| \leq 2$, on obtient les bornes désirées pour M_1, M_2 et M_3 .

Le deuxième problème est celui de trouver les solutions de

$$|\xi| = \min., \quad |\eta| < h, \quad |\zeta| < l_{i+1}$$

en entiers. Ceci est équivalent au problème de chercher trois entiers $\tilde{t}_{11}, \tilde{t}_{21}, \tilde{t}_{31}$ qui remplissent

$$\begin{aligned} (8) \quad & |ay_1 - by_2 - cy_3| = \min., \\ (9) \quad & |fy_1 + gy_2 + hy_3| < h, \\ (10) \quad & |-jy_1 - ky_2 + ly_3| < l_{i+1} < \frac{\Delta}{ch}. \end{aligned}$$

En raisonnant comme plus haut, on obtient les bornes supérieures pour $|\tilde{t}_{11}|, |\tilde{t}_{21}|, |\tilde{t}_{31}|$.

D'autre part, la solution de (8), (9) et (10) est facilitée par l'emploi de la relation $\tilde{t}_{11}t_{23} - \tilde{t}_{21}t_{13} = 1$ ou 0, que l'on obtient du fait que \tilde{T}_{i+1} est à déterminant 1 ou 0, selon que $\{\tilde{a}_{i+1}, \tilde{g}_{i+1}, l_{i+1}\}$ est de première ou deuxième espèce.

Le problème de déterminer $\tilde{t}_{12}, \tilde{t}_{22}$ et \tilde{t}_{32} est à peu près le même que celui d'obtenir $\tilde{t}_{11}, \tilde{t}_{21}$ et \tilde{t}_{31} . On n'a qu'à énoncer les inégalités qui doivent être résolues, car la méthode se trouve la même

$$\begin{aligned} (8) \quad & |fy_1 + gy_2 + hy_3| = \min., \\ (9) \quad & |ay_1 - by_2 - cy_3| < c, \\ (10) \quad & |-jy_1 - ky_2 + ly_3| < l_{i+1} < \frac{\Delta}{ch}. \end{aligned}$$

On obtient les résultats désirés pour les deux autres cas, III ($c > b$) et IV, d'une pareille manière.

Cet algorithme a l'avantage particulier de nous conduire directement aux points du réseau pour lesquels les valeurs absolues de deux des trois formes linéaires sont aussi petites qu'on les désire. Quoique

l'algorithme de la section 3 nous conduise éventuellement à chaque terme de la chaîne, et, en particulier, à ceux que comprennent les $\xi\eta$ -suites, ces points du réseau sont, en général, bien plus facilement obtenus par l'algorithme de cette section 4.

BIBLIOGRAPHIE.

- T. BONNESEN et W. FENCHEL, *Theorie der Konvexen Körper*, 1934.
- P. FURTWÄNGLER et M. ZEISEL, *Zur Minkowskischen Parallelepipedaapproximation* (*Mh. Math. Phys.*, XXX, 1920, p. 177-198).
- CH. HERMITE, *Œuvres*, III.
- C. G. J. JACOBI, *Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen* (*J. reine angew. Math.*, LXIX, 1868, p. 29-64).
- J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, 1936.
- L. KRONECKER, *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen* (*S.-B. preusz. Akad. Wiss.*, 1884, p. 1179-1193, 1271-1299; *Werke*, III₁, p. 47-110).
- F. G. MAUNSELL, *Some notes on Extended Continued Fractions* (*Proc. London Math. Soc.*, XXX, 1929-1930, p. 127-132).
- H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, 1910; *Diophantische Approximationen*, 1927; *Gesammelte Abhandlungen*, I, II, 1911).
- O. PERRON, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus* (*Math. Ann.*, LXIV, 1907, p. 1-76); *Die Lehre von Kettenbrüchen*, 1929.
- M. ZEISEL, *Zur Minkowski'schen Parallelepipedaapproximation* (*S.-B. Akad. Wiss. Wien*, CXXVI, 1917, p. 1221-1247)
(J. F. KOKSMA donne une bibliographie complète dans l'ouvrage cité plus haut.)

