

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LUCIEN GODEAUX

## **Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 55 (1938), p. 193-222

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1938\\_3\\_55\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55__193_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LES SURFACES MULTIPLES

AYANT UN NOMBRE FINI

DE POINTS DE DIRAMATION

PAR M. LUCIEN GODEAUX.



Dans ce travail, nous poursuivons nos recherches sur les surfaces qui représentent les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (1). Soit  $F$  une surface algébrique possédant une involution cyclique  $I_p$ , d'ordre premier  $p$ , n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par  $\Phi$  une surface image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. La surface  $\Phi$ , multiple d'ordre  $p$ , ayant ces points de diramation, est birationnellement identique à la surface  $F$ .

Les points de diramation de la surface  $\Phi$  sont singuliers pour celle-ci et le problème qui nous occupe est la détermination de ces singularités. Ce problème est lié à celui de la structure des points unis correspondants de l'involution  $I_p$ .

Soient  $A$  un point uni de l'involution  $I_p$ ,  $A'$  le point de diramation correspondant de la surface  $\Phi$ . Aux sections hyperplanes  $\Gamma$  de la surface  $\Phi$  correspondent sur  $F$  des courbes  $C_i$ . La nature de la singularité de la surface  $\Phi$  en  $A'$  dépend du comportement en  $A$  des courbes  $C_i$ .

---

(1) Nous avons résumé nos recherches antérieures sur cette question dans un exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

passant par ce point. Après avoir étudié le cas général, nous considérons d'une manière plus approfondie celui où le cône tangent en  $A'$  à la surface  $\Phi$  se scinde en deux parties. Nous établissons la propriété suivante :

*Si les courbes  $C_1$  passant par  $A$  ont la multiplicité  $n_1 + n_2$  en ce point, ces courbes ayant en commun dans une direction,  $(2k + 1)n_2$  points multiples d'ordre  $n_1$  infiniment voisins successifs de  $A$  et, dans une autre direction,  $(2k + 1)n_1$  points multiples d'ordre  $n_2$  infiniment voisins successifs de  $A$ , le point  $A'$  est multiple d'ordre  $n_1 + n_2$  pour la surface  $\Phi$ , le cône tangent à cette surface en ce point se composant de deux cônes rationnels, d'ordres  $n_1$  et  $n_2$ , ayant une droite en commun. Au point  $A'$  sont infiniment voisins successifs  $k$  points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. On a  $p = (2k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2$ .*

*Si les deux suites de points infiniment voisins de  $A$  appartenant aux courbes  $C_1$  passant par  $A$  sont formées l'une de  $2(k + 1)n_2$  points multiples d'ordre  $n_1$ , l'autre de  $2(k + 1)n_1$  points multiples d'ordre  $n_2$ , au point  $A'$  sont infiniment voisins successifs  $k$  points doubles biplanaires suivis d'un point double conique. On a*

$$p = 2(k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2.$$

Nous terminons en donnant un exemple des particularités précédentes, la surface  $F$  étant un plan et  $I_p$  l'involution engendrée par une homographie non homologique de période  $p$ . Un second exemple analogue montre que le cône tangent à la surface  $\Phi$  au point  $A'$  peut être composé de trois cônes.

1. Soit  $F$  une surface algébrique contenant une involution cyclique  $I_p$  d'ordre premier  $p$ , n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface  $F$  une surface normale d'un espace linéaire  $S_r$ , à  $r$  dimensions, satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° L'involution  $I_p$  est engendrée, sur la surface  $F$ , par une homographie  $H$  de période  $p$  de  $S_r$ ;
- 2° L'homographie  $H$  possède  $p$  axes ponctuels  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ , de dimensions respectives  $r_1, r_2, \dots, r_p$  dont un seul, pour fixer les

idées  $S^{(1)}$ , rencontre  $F$  en un nombre fini de points : les points unis de l'involution.

Désignons par  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  les systèmes linéaires d'hyperplans unis de l'homographie  $H$ , les hyperplans de  $\Sigma_i$  passant par les axes  $S^{(1)}, \dots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \dots, S^{(p)}$ . Soient  $C_i$  les courbes découpées sur la surface  $F$  par les hyperplans de  $\Sigma_i$ . Le système  $|C_i|$ , linéaire, incomplet, est composé au moyen de l'involution  $I_p$ . Dans le système linéaire complet  $|C|$  des sections hyperplanes de la surface  $F$ , il existe donc  $p$  systèmes linéaires partiels  $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_p|$  composés au moyen de l'involution  $I_p$ ; le premier de ces systèmes est dépourvu de points-base, les  $p - 1$  derniers ont comme points-base les points unis de l'involution  $I_p$ .

Rapportons projectivement les courbes du système  $|C_i|$  aux hyperplans d'un espace linéaire  $S_{r_i}$  à  $r_i$  dimensions. A la surface  $F$  correspond une surface  $\Phi$  dont les points représentent les groupes de l'involution  $I_p$ . Dans la correspondance  $(1, p)$  existant entre les surfaces  $\Phi$  et  $F$ , les points de diramation de la surface  $\Phi$  sont des points isolés, singuliers pour la surface.

Nous désignerons par  $\Gamma$  les sections hyperplanes de la surface  $\Phi$ , par  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$  les courbes de cette surface qui correspondent respectivement aux courbes  $C_2, C_3, \dots, C_p$  de  $F$ . Les systèmes linéaires  $|\Gamma|, |\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \dots, |\Gamma_p|$  sont complets.

Soient  $n$  l'ordre de la surface  $\Phi$ ,  $\pi$  le genre de ses sections hyperplanes  $\Gamma$ . Le système linéaire  $|C_i|$  et par suite le système linéaire  $|C|$  ont le degré  $pn$  et, d'après la formule de Zeuthen, le genre  $p(\pi - 1) + 1$ .

2. Soient  $A$  un point uni de l'involution  $I_p$ ,  $\alpha$  le plan tangent à la surface  $F$  en  $A$ . Nous supposons donc que la surface  $F$  a un point simple en  $A$ ; nous supposons en outre que le plan tangent  $\alpha$  ne rencontre l'axe  $S^{(1)}$  de l'homographie  $H$  qu'au seul point  $A$ .

La surface  $F$  et le point  $A$  étant unis pour l'homographie  $H$ , le plan  $\alpha$  est également uni pour cette homographie. Par conséquent, ce plan s'appuie suivant une droite sur l'un des axes  $S^{(2)}, S^{(3)}, \dots, S^{(p)}$  de l'homographie  $H$ , ou en un point sur deux de ces axes. Dans le premier cas, toute tangente à la surface  $F$  au point  $A$  est unie pour  $H$ , cette homographie déterminant dans le plan  $\alpha$  une homologie de

centre A; le point A est un point uni parfait de l'involution  $I_p$ . Dans le second cas, il n'en est plus de même et A est un point uni non parfait de l'involution  $I_p$ .

Examinons de plus près la structure du point uni A. Soit  $F^*$  une transformée birationnelle de F telle qu'au point A corresponde une courbe exceptionnelle  $\alpha$  (on peut par exemple projeter la surface F du point A sur un hyperplan de  $\Sigma_1$  ne passant pas par A; la courbe exceptionnelle  $\alpha$  est alors la droite suivant laquelle le plan  $\alpha$  rencontre cet hyperplan). A l'involution  $I_p$  correspond sur la surface  $F^*$  une involution cyclique  $I_p^*$ .

Lorsque le point A est uni parfait pour  $I_p$ , tous les points de  $\alpha$  sont unis pour  $I_p^*$ , mais lorsque le point A est uni non parfait, l'involution  $I_p^*$  détermine sur la droite  $\alpha$  une involution cyclique d'ordre  $p$  possédant deux points unis distincts  $A_1^*$ ,  $A_2^*$ . Ces points seront unis pour  $I_p^*$  et l'on peut reprendre, au sujet de chacun d'eux, le raisonnement qui vient d'être fait pour le point A. Et ainsi de suite.

Supposons que A soit un point uni non parfait et retournons à la surface F. Aux points  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  correspondent des points  $A_1$ ,  $A_2$ , distincts, infiniment voisins de A, unis pour l'involution  $I_p$ . La tangente  $AA_1$  à la surface F est unie pour l'homographie H et s'appuie en un point  $B_1$  sur un des axes  $S^{(2)}$ ,  $S^{(3)}$ , ...,  $S^{(p)}$ , par exemple sur  $S^{(2)}$ . De même, la tangente  $AA_2$  s'appuie par exemple sur  $S^{(3)}$  en un point  $B_2$ . Si le point  $A_1^*$  par exemple est uni parfait pour  $I_p^*$ , nous dirons que le point  $A_1$  est uni parfait pour  $I_p$ , qu'il est non parfait dans le cas contraire.

Dans le domaine du premier ordre du point A sur la surface F, l'homographie H détermine une involution d'ordre  $p$  possédant les points unis  $A_1$ ,  $A_2$ . Dans le domaine du premier ordre du point  $A_1$ , l'homographie H détermine soit l'identité si  $A_1$  est uni parfait, soit une involution cyclique d'ordre  $p$ , possédant deux points unis  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  si A est un point uni non parfait. De même, dans le domaine du premier ordre de  $A_2$ , tous les points sont unis pour l'homographie H, ou il y a deux points unis  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  pour l'involution  $I_p$ . Et ainsi de suite, tous les points infiniment voisins de  $A_{11}$  par exemple sont unis pour  $I_p$ , ou il y a deux de ces points unis pour  $I_p$ , selon que  $A_{11}$  est uni parfait ou non.

En examinant successivement les domaines des ordres successifs du point uni non parfait  $A$ , on trouvera que ce point est le pied d'une sorte d'arbre dont les différentes branches sont formées de points unis de l'involution  $I_p$ . Chaque branche s'arrête éventuellement à un point uni parfait. L'ensemble de ces points unis forme la structure du point  $A$ .

3. Considérons les courbes  $C_i$  passant par le point  $A$  et désignons-les par  $C'_i$ . Les hyperplans découpant sur  $F$  les courbes  $C'_i$  appartiennent à  $\Sigma_i$  et passent par  $A$ ; ils contiennent donc le plan tangent  $\alpha$  à  $F$  en  $A$ ; les courbes  $C'_i$  ont donc un point double au moins en  $A$ . Nous allons montrer que nous pouvons supposer que cette multiplicité est inférieure à  $p$ .

Désignons par  $|\bar{C}|$  le système linéaire  $|pC|$ , par  $\bar{r}$  sa dimension. En rapportant projectivement les courbes  $\bar{C}$  aux hyperplans d'un espace linéaire à  $\bar{r}$  dimensions, nous transformons la surface  $F$  en une surface  $\bar{F}$  sur laquelle nous pouvons raisonner comme plus haut, sans autre modification qu'un changement de notations.

Cela étant, considérons une courbe  $C$  passant par  $A$  et y touchant la droite  $AB_1$ . L'homographie  $H$  et ses puissances lui font correspondre  $p - 1$  courbes  $C$  touchant également la droite  $AB_1$  en  $A$ . L'ensemble de ces  $p$  courbes  $C$  est une courbe  $\bar{C}$  unie pour  $H$ . Construisons une seconde courbe  $\bar{C}$  analogue à la première mais en partant d'une courbe  $C$  tangente en  $A$  à la droite  $AB_2$ . Observons d'autre part que les courbes  $\bar{C}$  formées de  $p$  courbes  $C$  transformées les unes dans les autres par l'homographie  $H$  appartiennent totalement à un système linéaire partiel  $|\bar{C}_1|$ , dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution  $I_p$ . Les deux courbes construites plus haut, ayant en  $A$  un point multiple d'ordre  $p$  et  $p$  tangentes confondues avec  $AB_1$  pour la première,  $AB_2$  pour la seconde, appartiennent à  $|\bar{C}_1|$  et déterminent dans ce système un faisceau de courbes ayant en  $A$  un point multiple d'ordre  $p$  à tangentes variables.

Revenons maintenant à notre surface  $F$  primitive. De ce qui précède, il résulte que nous pouvons choisir cette surface de manière qu'il existe des courbes  $C_i$  ayant en  $A$  la multiplicité  $p$  et des tangentes variables. Ces courbes sont des courbes  $C'_i$  particulières ou coïncident

avec ces courbes. Plaçons-nous dans cette seconde hypothèse et soit  $A'$  le point de diramation de la surface  $\Phi$  qui correspond au point uni  $A$ . Aux courbes  $C'_i$  correspondent, sur  $\Phi$ , les sections  $\Gamma'$  par les hyperplans passant par  $A'$ . Le système  $|C'_i|$  a le degré effectif  $pn - p^2$ , donc le système  $|\Gamma'|$  a le degré effectif  $n - p$  et le point  $A'$  est multiple d'ordre  $p$  pour la surface  $\Phi$ .

D'autre part, les courbes  $C'_i$  ont le genre  $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p - 1)$ . Sur une de ces courbes, l'involution  $I_p$  détermine une involution privée de points unis, car sur cette courbe se trouve un groupe de  $p$  points distincts infiniment voisins de  $A$ . D'après la formule de Zeuthen, les courbes  $\Gamma'$  ont donc le genre  $\pi - \frac{1}{2}(p - 1)$ . Mais cela est absurde, car le point  $A'$ , multiple d'ordre  $p$  pour  $\Phi$ , abaisse le genre de  $p - 1$  unités. Il en résulte que les courbes  $C'_i$  ayant un point multiple d'ordre  $p$  en  $A$ , ne peuvent être que des courbes  $C'_i$  particulières. En d'autres termes, les courbes  $C'_i$  ont en  $A$  une multiplicité inférieure à  $p$ .

Les tangentes à une courbe  $C'_i$  en  $A$  étant en nombre inférieur à  $p$ , doivent être unies pour l'homographie  $H$ , par conséquent elles coïncident avec les droites  $AB_1, AB_2$ .

4. Les courbes  $C'_i$  ont en commun le point  $A$  et les points  $A_1, A_2$ ; si ces points ne sont pas tous deux unis parfaits, les courbes  $C'_i$  ont encore en commun un certain nombre de points fixes, infiniment voisins de  $A$ , unis pour l'involution  $I_p$ . Considérons une branche d'origine  $A$  d'une courbe  $C'_i$ . Tout point du domaine de  $A$ , appartenant à cette branche et restant fixe lorsque la courbe  $C'_i$  varie, doit être uni pour  $I_p$ , puisque chaque courbe  $C'_i$  est transformée en elle-même par  $H$ . La branche considérée passera donc par un certain nombre de points unis de  $I_p$ , infiniment voisins successifs de  $A$ . Soit  $P$  le dernier de ces points. Le point infiniment voisin de  $P$  situé sur la branche considérée, varie avec la courbe  $C'_i$  et doit d'autre part être uni pour  $I_p$ ; il en résulte que le point  $P$  est uni parfait pour l'involution  $I_p$ .

Ainsi donc, les courbes  $C'_i$  ont en commun certaines suites de points fixes infiniment voisins successifs de  $A$ , unis pour l'involution  $I_p$ , les derniers points de chacune de ces suites étant unis parfaits. Soient

$P_1, P_2, \dots, P_k$  les derniers points de chacune de ces suites,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  leurs multiplicités respectives pour les courbes  $C'_i$ .

Envisageons une courbe  $C'_i$  et la courbe  $\Gamma'$  qui lui correspond sur  $\Phi$ . Soient  $R$  un groupe de l'involution  $I_\rho$  appartenant à  $C'_i$  et  $R'$  le point qui lui correspond sur  $\Gamma'$ . Lorsque le groupe  $R$  se déplace sur  $C'_i$  et tend vers un point uni du domaine de  $P_i$  par exemple, le point  $R'$  tend sur  $\Gamma'$  vers le point  $A'$  et la droite  $A'R'$  tend vers une tangente à la surface  $\Phi$  en  $A'$ . Il en résulte qu'aux  $n_i$  points de la courbe  $C'_i$  infiniment voisins de  $A'$  correspondent  $n_i$  tangentes à la surface  $\Phi$  en  $A'$ . Lorsque la courbe  $C'_i$  varie, la courbe  $\Gamma'$  varie et ces  $n_i$  tangentes engendrent un cône d'ordre  $n_i$ , tangent à  $\Phi$  en  $A'$ . En répétant le même raisonnement pour les points  $P_2, P_3, \dots, P_k$ , on voit que la surface  $\Phi$  a en  $A'$  un point multiple d'ordre  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , le cône tangent en ce point à la surface étant décomposé en  $k$  cônes respectivement d'ordres  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

Rapportons projectivement les courbes  $C'_i$  aux hyperplans d'un espace linéaire à  $r_i - 1$  dimensions; à la surface  $F$  correspond une surface  $\Phi_i$ , image de l'involution  $I_\rho$ , projectivement identique à la projection à partir de  $A'$  de la surface  $\Phi$  sur un hyperplan de l'espace ambiant. Aux domaines des points  $P_1, P_2, \dots, P_k$  correspondent, sur  $\Phi_i$ , des courbes rationnelles  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ , respectivement d'ordre  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . L'ensemble de ces courbes représente le domaine du point  $A'$  sur la surface  $\Phi$ .

La surface  $\Phi_i$  est d'ordre  $n - (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ .

5. Les courbes  $C'_i$  assujetties à toucher en  $A$  une droite (du plan  $\alpha$ ) distincte des droites  $AB_1, AB_2$ , forment un système linéaire de dimension  $r_i - 2$ ; nous les désignerons par  $C''_i$ . Les courbes  $C''_i$  ont en  $A$  une multiplicité supérieure d'une unité au moins à celle des courbes  $C'_i$  et d'autre part au plus égale à  $p$ . Aux courbes  $C''_i$  correspondent, sur la surface  $\Phi$ , les courbes  $\Gamma''$  découpées par les hyperplans passant par une droite issue de  $A'$ . A ces courbes correspondent sur la surface  $\Phi_i$  des courbes que nous désignerons par la même notation  $\Gamma''$ , découpées par les hyperplans passant par un point  $A'_i$  appartenant à quelques-unes des courbes  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ .

Si les courbes  $C''_i$  ont en  $A$  une multiplicité inférieure à  $p$ , leurs

tangentes en ce point sont confondues avec les droites  $AB_1, AB_2$ . On reprendra, pour les courbes  $C_1''$ , le raisonnement fait pour les courbes  $C_1'$  et l'on parviendra ainsi à déterminer la singularité de la surface  $\Phi_1$  en  $A_1'$ .

En rapportant projectivement les courbes  $C_1''$  aux hyperplans d'un espace linéaire à  $r_1 - 2$  dimensions, il correspondra à la surface  $F$  une surface  $\Phi_2$ , image de l'involution  $I_p$ , projectivement identique à la projection de  $\Phi_1$ , à partir de  $A_1'$ , sur un hyperplan de l'espace dans lequel est plongée cette surface. On observera que si la courbe  $\gamma_1$  par exemple, passe par le point  $A_1'$ , il lui correspondra sur la surface  $\Phi_2$  une certaine courbe  $\gamma_1'$ , d'ordre  $n_1 - 1$ . Il en résulte que parmi les points fixes du domaine de  $A$  communs à toutes les courbes  $C_1''$ , on rencontrera le point  $P_1$  si  $n_1 > 1$ . Si la courbe  $\gamma_1$  ne passe pas par le point  $A_1'$ , les courbes  $C_1''$  auront la même multiplicité que les courbes  $C_1'$  en  $P_1$ .

Considérons maintenant les courbes  $C_1'$  assujetties à toucher en  $A$  une droite distincte de  $AB_1, AB_2$  et désignons-les par  $C_1'''$ . Ces courbes ont en  $A$  une multiplicité au plus égale à  $p$ . Si cette multiplicité est inférieure à  $p$ , on recommencera sur les courbes  $C_1'''$  le raisonnement fait pour les courbes  $C_1'$ , et ainsi de suite.

Comme les multiplicités en  $A$  des courbes  $C_1', C_1'', C_1''', \dots$  vont en croissant, on parviendra finalement à un dernier système  $|C_1^{(v)}|$  dont les courbes ont, en  $A$ , un point multiple d'ordre  $p$  à tangentes variables. On obtiendra par suite une suite de surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_v$ , images de l'involution  $I_p$ . La dernière,  $\Phi_v$ , aura l'ordre  $n - p$  et aux groupes de  $I_p$  formés de points infiniment voisins de  $A$ , situés sur les courbes  $C_1^{(v)}$ , correspondront sur cette surface les points d'une droite simple.

On parviendra ainsi à analyser la singularité de la surface  $\Phi$  au point  $A'$ . Le point singulier  $A'$  sera équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles dont chacune représente le domaine d'un point uni parfait de l'involution  $I_p$ , situé dans l'entourage du point uni  $A$ .

Il convient cependant de remarquer qu'il ne sera pas toujours nécessaire, pour analyser la singularité en question, d'aller jusqu'aux courbes  $C_1^{(v)}$ . La circonstance suivante peut en effet se présenter :

Supposons qu'en analysant la singularité des courbes  $C_1^{(k)}$  en  $A$ , nous ayons été conduit à trouver que le cône tangent à la surface  $\Phi_{k-1}$  du point  $A'_{k-1}$  se décompose en deux cônes ayant en commun une droite  $a$ . Nous trouverons donc, sur la surface  $\Phi_k$ , deux courbes  $\gamma_{k1}$ ,  $\gamma_{k2}$ , équivalentes à l'ensemble des points de  $\Phi_{k-1}$  infiniment voisins de  $A'_{k-1}$ , se rencontrant en un point  $A'_0$ . Il se peut qu'aux courbes  $C_1^{(k+1)}$  correspondent, sur la surface  $\Phi_k$ , des sections hyperplanes passant par un point distinct de  $A'_0$ . Ce dernier sera en général simple pour la surface  $\Phi_k$  et la singularité du point  $A'$  sera alors complètement connue.

6. Aux courbes  $C_2, C_3, \dots, C_p$ , formant des systèmes linéaires composés au moyen de  $I_p$ , correspondent sur la surface  $\Phi$  des courbes que nous avons désignées par  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$ . Les systèmes linéaires  $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \dots, |\Gamma_p|$  sont complets.

Considérons une courbe  $C$  qui ne soit pas transformée en elle-même par l'homographie  $H$ . Il lui correspond sur  $\Phi$  une courbe  $\Gamma^*$ , de genre effectif  $p(\pi - 1) + 1$ , possédant  $\frac{1}{2}p(p-1)n$  points doubles, correspondant aux couples de points de la courbe  $C$  appartenant à des groupes de  $I_p$ . Lorsque la courbe  $C$  varie, la courbe  $\Gamma^*$  engendre un système continu rationnel appartenant par conséquent à un système linéaire.

Faisons varier la courbe  $C$  d'une manière continue dans  $|C|$  jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe  $C_1$ . La courbe  $\Gamma^*$  varie d'une manière continue et vient coïncider avec la courbe  $\Gamma$  correspondante, comptée  $p$  fois. La courbe  $\Gamma^*$  appartient donc au système  $|p\Gamma|$ .

Faisons maintenant varier la courbe  $C$  d'une manière continue dans  $|C|$  de manière qu'elle vienne coïncider avec une courbe  $C_2$ . La courbe  $\Gamma^*$  vient coïncider avec la courbe  $\Gamma_2$  homologue, comptée  $p$  fois. Mais les courbes  $\Gamma_2$  passent par les points de diramation de la surface  $\Phi$ ; elles rencontrent donc certaines composantes infiniment petites de ces points, et ces composantes interviennent dans la composition de la courbe  $\Gamma^*$  correspondant à la courbe  $C_2$ . Nous devons donc écrire que la courbe  $\Gamma^*$  envisagée se réduit à la courbe  $p\Gamma_2 + \Delta_2$ ,  $\Delta_2$  étant un certain ensemble des composantes des points de dira-

mation de  $\Phi$ . Nous avons donc

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \Delta_2|.$$

Projectivement, cela signifie que parmi les hypersurfaces qui découpent sur  $\Phi$  les courbes du système  $|p\Gamma|$ , il en est une au moins ayant un contact d'ordre  $p - 1$  avec la surface le long d'une courbe  $\Gamma_2$  arbitrairement choisie.

Le même raisonnement peut être repris pour les courbes  $\Gamma_3, \dots, \Gamma_p$  et l'on aura

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \Delta_2| = |p\Gamma_3 + \Delta_3| = \dots = |p\Gamma_p + \Delta_p|,$$

$\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_p$  étant formées de courbes infiniment petites, composantes des points de diramation de la surface  $\Phi$ .

Donnons-nous maintenant, dans  $S_{r_1}$ , la surface  $\Phi$  par ses équations

$$(1) \quad \begin{cases} \rho x_i = \psi_i(u_0, u_1, u_2, u_3) & (i = 0, 1, 2, \dots, r_1), \\ \psi(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0, \end{cases}$$

où les  $\psi_i$  sont des polynômes de même degré et  $\psi$  un polynôme irréductible. Supposons que nous ayons pu construire, sur cette surface, une des courbes  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$  et soit

$$\Psi(x_0, x_1, \dots, x_{r_1}) = 0$$

l'équation de l'hypersurface ayant un contact d'ordre  $p - 1$  avec la surface le long de cette courbe. Considérons maintenant, dans  $S_{r_1+1}$ , la surface représentée par les équations (1) et

$$x_{r_1+1} = \sqrt[p]{\Psi}.$$

S'il existe sur la surface  $\Phi$  au moins un point de diramation, cette dernière surface est irréductible et précisément birationnellement identique à la surface  $F$ .

### 7. Envisageons, sur la surface $F$ , le système linéaire

$$|D| = |2C|.$$

Le système  $|D|$  n'est pas composé au moyen de l'involution  $I_p$ , mais l'homographie  $H$  échange ses courbes entre elles. Le système  $|D|$

contient  $p$  systèmes linéaires partiels  $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_p|$  composés au moyen de l'involution  $I_p$ . On peut les définir en disant que ces systèmes contiennent respectivement les courbes

$$2C_1, C_1 + C_2, \dots, C_1 + C_p.$$

Ces systèmes se comportent donc comme les systèmes  $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_p|$ . Le système  $|D_1|$  est dépourvu de points-base; les autres ont comme points-base les points unis de  $I_p$ .

Deux des courbes

$$C_1 + C_2, 2C_2, C_2 + C_3, \dots, C_2 + C_p$$

ne peuvent appartenir à un même système linéaire composé au moyen de  $I_p$ . L'une de ces courbes appartient donc au système  $|D_1|$ . Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la courbe  $C_2 + C_p$ . Cette courbe passe par le point A, et aura donc le même comportement que l'une des courbes  $C'_1, C'_2, \dots$ .

On peut poursuivre ce raisonnement et disposer des indices pour que les courbes  $C_3 + C_{p-2} + \dots$  aient le même comportement en A que l'une des courbes  $C'_1, C'_2, \dots$ . Cependant, cette façon de disposer des indices n'a rien d'absolu; il peut se faire que les courbes  $C_2 + C_3$  aient en A le même comportement que les courbes  $C'_1$ , alors que les courbes  $C_2, C_3$  ont en A un comportement bien déterminé, comme on va le voir.

8. Les courbes  $C_2$  sont découpées sur F par les hyperplans de  $\Sigma_2$ . Ces hyperplans passent par  $S^{(1)}, S^{(3)}, \dots, S^{(p)}$  mais non par  $S^{(2)}$ ; ils ne contiennent donc pas le plan tangent  $\alpha$  en A à F. Il en résulte que les courbes  $C_2$  ont un point simple en A et y touchent la droite  $AB_2$ .

Les courbes  $C_2$  ont en commun, au point A, une suite de points simples fixes infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution  $I_p$ , le dernier étant uni parfait.

Le nombre des points d'intersection des courbes  $C_2$  avec une des courbes  $C'_1, C'_2, \dots$ , absorbés en A, est naturellement multiple de  $p$ .

Les courbes  $C_3$  sont découpées sur F par les hyperplans de  $\Sigma_3$ , hyperplans ne passant pas par l'axe  $S^{(3)}$  de l'homographie H et ne contenant par conséquent pas le plan tangent  $\alpha$  à F en A. Les courbes  $C_3$  ont un point simple en A et y touchent la droite  $AB_1$ .

Supposons que les courbes  $C_2 + C_3$  appartiennent au système  $|D_1|$ ; elles ont un point double en A et par conséquent les courbes  $D_1$  passant par A y ont un point double. Il en est de même des courbes  $C'_1$  et au point de diramation  $A'$ , la surface  $\Phi$  possède un point double biplanaire auquel peuvent être infiniment voisins successifs des points doubles.

9. Nous allons poursuivre l'étude du point de diramation  $A'$  de la surface  $\Phi$  dans l'hypothèse où le cône tangent à la surface en ce point se décompose en deux cônes, nécessairement rationnels, ayant en commun une droite unique (simple pour chacun des cônes). Sur la surface  $\Phi_1$ , nous aurons donc deux courbes rationnelles  $\gamma_1, \gamma_2$ , respectivement d'ordres  $n_1, n_2$ , se rencontrant en un seul point  $A'_1$ . Nous commencerons par supposer que le point  $A'_1$  est simple pour la surface  $\Phi_1$ .

Nous avons, sur la surface  $\Phi_1$ , dont les sections hyperplanes sont les courbes  $\Gamma'$ ,

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Soient  $\nu_1, \nu_2$  les degrés respectifs de  $\gamma_1, \gamma_2$ . En considérant les intersections de la courbe  $\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2$  avec  $\gamma_1$  puis avec  $\gamma_2$ , on a

$$0 = n_1 + \nu_1 + 1, \quad 0 = n_2 + 1 + \nu_2,$$

d'où

$$\nu_1 = -(n_1 + 1), \quad \nu_2 = -(n_2 + 1).$$

Nous avons, d'autre part,

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \Delta'_2|,$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant des entiers et  $\Delta'_2$  le terme provenant de la présence éventuelle d'autres points de diramation. Les courbes  $\Gamma_2$  rencontrent l'une des courbes  $\gamma_1, \gamma_2$ , par exemple la première en un point et ne rencontre pas l'autre. On a donc

$$p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_2\nu_2 = 0;$$

par conséquent

$$p = \lambda_2(\nu_1\nu_2 - 1) = \lambda_2(n_1n_2 + n_1 + n_2),$$

$p$  étant un nombre premier, et le second facteur étant supérieur à

l'unité, on a

$$\lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 = n_2 + 1, \quad p = n_1 n_2 + n_1 + n_2.$$

Par suite,

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + (n_2 + 1)\gamma_1 + \gamma_2 + \Delta'_2|.$$

On aura de même

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_3 + \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_2 + \Delta'_3|,$$

$\Delta'_3$  provenant de la présence d'autres points de diramation.

Si les courbes  $\Gamma_2 + \Gamma_3$  appartiennent au système  $|D_1|$ , nous avons  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  et  $p = 3$ . Inversement, si  $p = 3$ , on a  $n_1 = n_2 = 1$ . La surface  $\Phi$  possède en  $A'$  un point biplanaire ordinaire, comme nous l'avons d'ailleurs établi antérieurement.

Supposons  $p > 3$  et soit  $\Gamma_k$  une courbe rencontrant  $\gamma_1$  en  $k_1$  points et  $\gamma_2$  en  $k_2$  points. Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_k + (k_2 - k_1\nu_2)\gamma_1 + (k_1 - k_2\nu_1)\gamma_2 + \Delta_k|,$$

$\Delta_k$  étant le terme qui provient des points de diramation distincts de  $A'$ .

En particulier, on a

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_p + (p - n_2 - 1)\gamma_1 + (p - 1)\gamma_2 + \Delta_p|,$$

relation que l'on pourrait également déduire de

$$|\Gamma_2 + \Gamma_p| = |\Gamma + \Gamma'|.$$

Des relations précédentes, on déduit que les courbes  $C'_i$  ont  $p$  points d'intersection avec les courbes  $C_2$  ou  $C_3$ , réunis en  $A$ .

10. Retournons à la surface  $F$ . Les courbes  $C'_i$  ont en  $A$  une multiplicité  $\rho$ . A ce point multiple sont infiniment voisins successifs  $h$  points multiples d'ordres  $\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{1h} = n_1$ , le dernier étant  $P_1$ , et dans une autre direction,  $k$  points successifs multiples d'ordres  $\rho_{21}, \rho_{22}, \dots, \rho_{2k} = n_2$ , le dernier étant  $P_2$ . On a

$$\rho \geq \rho_{11} + \rho_{21}, \quad \rho_{11} \geq \rho_{12} \geq \dots \geq n_1, \quad \rho_{21} \geq \rho_{22} \geq \dots \geq n_2.$$

En évaluant le nombre des intersections absorbées en  $A$  de deux

courbes  $C'_1$ , ou d'une courbe  $C'_1$  et d'une courbe  $C_2$  ou  $C_3$ , on a

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho_{11}^2 + \rho_{12}^2 + \dots + \rho_{1h}^2 + \rho_{21}^2 + \rho_{22}^2 + \dots + \rho_{2k}^2 &= p(n_1 + n_2), \\ \rho + \rho_{11} + \rho_{12} + \dots + \rho_{1h} &= p, \\ \rho + \rho_{21} + \rho_{22} + \dots + \rho_{2k} &= p. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \rho(\rho - n_1 - n_2) + \rho_{11}(\rho_{11} - n_1) + \dots + \rho_{1h}(\rho_{1h} - n_1) \\ + \rho_{21}(\rho_{21} - n_2) + \dots + \rho_{2k}(\rho_{2k} - n_2) = 0. \end{aligned}$$

Tous les termes du premier membre devant être positifs ou nuls, on a

$$\rho = n_1 + n_2, \quad \rho_{11} = \dots = \rho_{1h} = n_1, \quad \rho_{21} = \dots = \rho_{2k} = n_2.$$

On a en outre  $h = n_2$ ,  $k = n_1$ .

Les courbes  $C'_1$  ont donc en A un point multiple d'ordre  $n_1 + n_2$  auquel sont infiniment voisins successifs : dans une direction,  $n_2$  points multiples d'ordre  $n_1$ ; dans une autre direction,  $n_1$  points multiples d'ordre  $n_2$ . Ces points sont unis pour l'involution  $I_p$ , les derniers points de chaque suite étant unis parfaits.

Les courbes  $C_2$  passent par les points de la première suite, les courbes  $C_3$  par les points de la seconde suite.

Pour  $n_2 = 1$ ,  $n_1 = \frac{1}{2}(p - 1)$ , on retrouve un résultat que nous avons établi directement <sup>(1)</sup>, en supposant que l'involution  $I_p$  possède un point uni parfait dans le domaine du premier ordre du point A.

Retournons au cas général. Le genre d'une courbe  $C'_1$  est égal à

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_2 + n_2 - 1) - \frac{1}{2}n_2n_1(n_1 - 1) - \frac{1}{2}n_1n_2(n_2 - 1).$$

D'autre part, sur une courbe  $C'_1$ , l'involution  $I_p$  détermine une involution cyclique d'ordre  $p$  possédant  $n_1 + n_2$  points unis. D'après la formule de Zeuthen, le genre  $\pi'$  de la courbe  $\Gamma'$  correspondante est donc donné par

$$\begin{aligned} 2p(\pi' - 1) + (n_1 + n_2)(p - 1) \\ = 2p(\pi - 1) - (n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1) - n_1n_2(n_1 + n_2 - 2). \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1930. p. 450-467).

On en déduit

$$\pi' = \pi - (n_1 + n_2 - 1),$$

valeur que l'on obtient directement en évaluant le genre  $\pi$  de la courbe  $\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2$ .

11. Nous avons supposé que le cône tangent à la surface  $\Phi$  au point de diramation  $A'$  était formé de deux cônes rationnels, d'ordres  $n_1, n_2$ , ayant en commun une droite simple pour chacun des cônes. Nous avons considéré le cas où il n'existe pas de point multiple infiniment voisin de  $A'$ . Nous allons maintenant faire l'hypothèse opposée.

Sur la surface  $\Phi_1$ , nous aurons deux courbes rationnelles  $\gamma_1, \gamma_2$  passant par un point  $A'_1$  qui sera maintenant multiple pour la surface (mais simple pour les courbes  $\gamma_1, \gamma_2$ ). Le point  $A'_1$  sera cette fois équivalent à une courbe rationnelle ou à une somme de courbes rationnelles que nous représenterons par  $\gamma_0$ . La courbe  $\gamma_0$  rencontrera en un point chacune des courbes  $\gamma_1, \gamma_2$ . Ces deux dernières devront être considérées, au point de vue des transformations birationnelles, comme ne se rencontrant pas.

Nous avons actuellement

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2.$$

En considérant les intersections de cette courbe avec  $\gamma_1, \gamma_2$ , on trouve encore que les degrés de ces courbes sont

$$\nu_1 = -(n_1 + 1), \quad \nu_2 = -(n_2 + 1).$$

Soit  $\nu_0$  le degré de  $\gamma_0$ . Les courbes  $\Gamma'$  ne rencontrent pas  $\gamma_0$ ; donc en considérant l'intersection de la courbe précédente avec  $\gamma_0$ , on trouve  $\nu_0 = -2$ .

Passons de la surface  $\Phi_1$  à la surface  $\Phi_2$ . Sur celle-ci, il correspond à  $\gamma_1, \gamma_2$  des courbes  $\gamma'_1, \gamma'_2$  d'ordres respectifs  $n_1 - 1, n_2 - 1$ . Les sections hyperplanes  $\Gamma''$  de  $\Phi_2$  sont données par

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \gamma_1 + 2\gamma_0 + \gamma_2.$$

On en déduit que les courbes  $\Gamma''$  rencontrent en deux points la courbe  $\gamma_0$ , c'est-à-dire que le point  $A'_1$  est double pour la surface  $\Phi_1$ .



On en déduit

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= -\lambda_2 \nu_2, & \lambda_{22} &= -(2\nu_2 + 1)\lambda_2, & \dots, & & \lambda_{k2} &= -(k\nu_2 + k - 1)\lambda_2, \\ & & \lambda_{k1} &= -[(k + 1)\nu_2 + k]\lambda_2, & \dots, & & & \\ \lambda_{11} &= (2k\nu_2 + 2k - 1)\lambda_2, & \lambda_1 &= -[(2k + 1)\nu_2 + 2k]\lambda_2. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans la première relation, on obtient

$$p = [(2k + 1)\nu_1\nu_2 + 2k(\nu_1 + \nu_2) + 2k - 1]\lambda_2$$

ou, en remplaçant  $\nu_1, \nu_2$  par leurs valeurs

$$p = [2kn_1n_2 + n_1n_2 + n_1 + n_2]\lambda_2.$$

Le premier facteur du second membre est supérieur à l'unité;  $p$  étant premier, on a

$$\lambda_2 = 1, \quad p = (2k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= n_2 + 1, & \lambda_{22} &= 2n_2 + 1, & \dots, & & \lambda_{k2} &= kn_2 + 1, & \dots, \\ \lambda_{11} &= 2kn_2 + 1, & \lambda_1 &= (2k + 1)n_2 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |p\Gamma| &= |p\Gamma_2 + \{(2k + 1)n_2 + 1\}\gamma_1 + (2kn_2 + 1)\gamma_{11} + \dots \\ &\quad + (2n_2 + 1)\gamma_{22} + (n_2 + 1)\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2|. \end{aligned}$$

Les courbes  $\Gamma_3$  rencontrent la courbe  $\gamma_2$  en un point mais ne rencontrent pas les autres courbes  $\gamma$ . Par une méthode analogue à la précédente, on trouve

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_3 + \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_{11} + \dots + (2kn_1 + 1)\gamma_{12} + \{(2k + 1)n_1 + 1\}\gamma_2 + \Delta_3|.$$

13. Supposons maintenant que la singularité de la surface  $\Phi_1$  au point  $A'_1$  se compose d'une suite de  $k + 1$  points doubles infiniment voisins successifs, les  $k$  premiers étant biplanaires et le dernier conique. Cette singularité est équivalente à un ensemble de  $2k + 1$  courbes rationnelles

$$\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{k1}, \gamma_k, \gamma_{k2}, \gamma_{22}, \gamma_{12},$$

chacune des courbes de cet ensemble rencontrant la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, nous pouvons supposer que  $\gamma_{11}$  rencontre  $\gamma_1$  en un point mais ne ren-

contre pas  $\gamma_2$ , tandis que  $\gamma_{12}$  a un point commun avec  $\gamma_2$ , mais ne rencontre pas  $\gamma_1$ .

On aura encore une relation de la forme

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_{11}\gamma_{11} + \dots + \lambda_k\gamma_k + \dots + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta_2|.$$

En opérant comme tantôt pour exprimer que les courbes  $\Gamma_2$  rencontrent la courbe  $\gamma_1$  en un point mais ne rencontre pas les autres, on aura

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= -\lambda_2\nu_2, & \lambda_{22} &= -(2\nu_2 + 1)\lambda_2, & \dots, \\ \lambda_{k2} &= -(k\nu_2 + k - 1)\lambda_2, & \lambda_k &= -[(k + 1)\nu_2 + k]\lambda_2; \\ \lambda_{k1} &= -[(k + 2)\nu_2 + k]\lambda_2, & \dots, \\ \lambda_{11} &= -[(2k + 1)\nu_2 + 2k]\lambda_2, & \lambda_1 &= -[(2k + 2)\nu_2 + 2k + 1]\lambda_2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation

$$p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_{11} = 0,$$

on aura

$$p = [(2k + 2)\nu_1\nu_2 + (2k + 1)(\nu_1 + \nu_2) + 2k]\lambda_2,$$

d'où

$$\lambda_2 = 1, \quad p = (2k + 2)\nu_1\nu_2 + (2k + 1)(\nu_1 + \nu_2) + 2k.$$

En remplaçant  $\nu_1, \nu_2$  par leurs valeurs, on aura enfin

$$p = 2(k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2.$$

La relation fonctionnelle liant  $|\Gamma|$  et  $|\Gamma_2|$  sera cette fois

$$\begin{aligned} |p\Gamma| &= |p\Gamma_2 + \{(2k + 2)n_2 + 1\}\gamma_1 + \{(2k + 1)n_2 + 1\}\gamma_{11} + \dots \\ &\quad + \{(k + 1)n_2 + 1\}\gamma_k + \dots + (n_2 + 1)\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2|. \end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} |p\Gamma| &= |p\Gamma_3 + \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_{11} + \dots + \{(k + 1)n_1 + 1\}\gamma_k + \dots \\ &\quad + \{(2k + 1)n_1 + 1\}\gamma_{12} + \{(2k + 2)n_1 + 1\}\gamma_2 + \Delta_3|. \end{aligned}$$

14. Supposons que les courbes  $C_2 + C_3$  appartiennent au système  $|C_1 + C'_1|$ . Sur la surface  $\Phi$ , nous avons

$$|\Gamma_2 + \Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'| = |2\Gamma - \gamma_1 - \gamma_{11} - \dots - \gamma_2|.$$

D'autre part, les courbes  $C_2, C_3$  passant simplement par A, les courbes  $C'_1$  ont un point double en A et l'on a  $n_1 = n_2 = 1$ .

Plaçons-nous en premier lieu dans le cas où  $\Phi$ , a en  $A'$  une suite de points doubles biplanaires (n° 12). Nous avons, en tenant compte des liaisons fonctionnelles des courbes  $\Gamma_2, \Gamma_3$ ,

$$|2p\Gamma| = |p(\Gamma_2 + \Gamma_3) + (2k + 3)(\gamma_1 + \gamma_{11} + \dots + \gamma_{12} + \gamma_2) + \Delta_2 + \Delta_3|.$$

On doit donc avoir  $2k + 3 = p$ . La surface  $\Phi$  possède en  $A'$  un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs  $\frac{1}{2}(p - 3)$  points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. On retrouve un cas que nous avons étudié antérieurement (1).

Plaçons-nous en second lieu dans l'hypothèse où la suite de points doubles infiniment voisins successifs de  $A'$  se termine par un point double conique (n° 13). Le raisonnement que nous venons de faire, répété dans cette hypothèse, nous conduit à  $2k + 4 = p$ , ce qui est impossible puisque  $p$  est, par hypothèse, premier.

Supposons que les courbes  $C_2 + C_3$  n'appartiennent pas au système  $|C_1 + C'_1|$ , c'est-à-dire que l'on a  $n_1 + n_2 > 2$ . Appelons  $C_p$  les courbes  $C_1 + C'_1 - C_2$  et  $C_{p-1}$  les courbes  $C_1 + C'_1 - C_3$ .

De la relation

$$|2\Gamma| = |\Gamma_2 + \Gamma_p + \gamma_1 + \gamma_{11} + \dots + \gamma_{12} + \gamma_2|,$$

on déduit la relation fonctionnelle liant les courbes  $\Gamma_p$ .

Dans l'hypothèse du n° 12, on a

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_p + \{p - (2k + 1)n_2 - 1\}\gamma_1 + \{p - 2kn_2 - 1\}\gamma_{11} + \dots + (p - 2n_2 - 1)\gamma_{22} + (p - n_2 - 1)\gamma_{12} + (p - 1)\gamma_2 + \Delta_p|$$

et, de même,

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_{p-1} + (p - 1)\gamma_1 + (p - n_1 - 1)\gamma_{11} + \dots + \{p - (2k + 1)n_1 - 1\}\gamma_2 + \Delta_{p-1}|.$$

Dans l'hypothèse du n° 13, on a

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_p + \{p - (2k + 2)n_2 - 1\}\gamma_1 + \dots + (p - 1)\gamma_2 + \Delta_p|$$

et

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_{p-1} + (p - 1)\gamma_1 + \dots + \{p - (2k + 2)n_1 - 1\}\gamma_2 + \Delta_{p-1}|.$$

---

(1) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1931, p. 1131-1150).

On vérifie aisément que dans chaque cas, les courbes  $\Gamma_p$  rencontrent  $\gamma_1$  en  $n_1 - 1$  points et  $\gamma_2$  en  $n_2$  points. Les courbes  $\Gamma_{p-1}$  rencontrent la courbe  $\gamma_1$  en  $n_1$  points et la courbe  $\gamma_2$  en  $n_2 - 1$  points.

15. Le raisonnement fait au n° 10, pour déterminer la singularité des courbes  $C'_1$  au point A, peut être en partie repris dans le cas actuel. Les courbes  $C'_1$  ont en A un point multiple d'ordre  $n_1 + n_2$  auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction,  $h$  points multiples d'ordre  $n_1$  dont le dernier,  $P_1$ , est uni parfait pour  $I_p$ ; dans une autre direction,  $h'$  points multiples d'ordre  $n_2$  dont le dernier,  $P_2$ , est uni parfait pour  $I_p$ .

En considérant les intersections des courbes  $C'_1$  avec  $C_2, C_3$ , on a

$$n_1 + n_2 + hn_1 = p, \quad n_1 + n_2 + h'n_2 = p.$$

Dans l'hypothèse du n° 12, on a

$$p = (2k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2, \quad h = (2k + 1)n_2, \quad h' = (2k + 1)n_1.$$

Dans l'hypothèse du n° 13, on a

$$p = 2(k + 1)n_1n_2 + n_1 + n_2, \quad h = 2(k + 1)n_2, \quad h' = 2(k + 1)n_1.$$

Aux courbes  $C''_1$  correspondent, sur  $\Phi$ , les courbes  $\Gamma''$  données par

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \gamma_1 + 2(\gamma_{11} + \dots + \gamma_{12}) + \gamma_2.$$

Les courbes  $\Gamma''$  rencontrent  $\gamma_1$  en  $n_1 - 1$  points,  $\gamma_2$  en  $n_2 - 1$  points,  $\gamma_{11}$  et  $\gamma_{12}$  en un point chacune; elles ne rencontrent pas les autres courbes  $\gamma$ . Les courbes  $C''_1$  ont donc en A un point de multiplicité supérieure à  $n_1 + n_2$  et elles ont en commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs de A; ces suites se terminent par quatre points unis parfaits de l'involution  $I_p$ : le point  $P_1$ , multiple d'ordre  $n_1 - 1$ , le point  $P_2$  multiple d'ordre  $n_2 - 1$ , deux points simples  $P_{11}, P_{12}$  donnant respectivement naissance aux courbes  $\gamma_{11}, \gamma_{12}$ . On observera que dans le domaine du premier ordre de A, les courbes  $C''_1$  ne peuvent avoir que deux points multiples. Les courbes  $C''_1$  ont en commun les points communs aux courbes  $C'_1$ . De ces deux suites de points se détachent deux suites de points terminées par les points simples  $P_{11}, P_{12}$ .

Aux courbes  $C_1'''$  correspondent, sur  $\Phi_1$ , les courbes  $\Gamma'''$  données par

$$\Gamma \equiv \Gamma''' + \gamma_1 + 2\gamma_{11} + 3(\gamma_{21} + \dots + \gamma_{22}) + 2\gamma_{12} + \gamma_2.$$

Les courbes  $\Gamma'''$  rencontrent  $\gamma_1$  en  $n_1 - 1$  points,  $\gamma_2$  en  $n_2 - 1$  points,  $\gamma_{21}$  et  $\gamma_{22}$  chacune en un point; elles ne rencontrent pas les autres courbes  $\gamma$ .

Les courbes  $C_1'''$  ont en A un point multiple (d'ordre supérieur à la multiplicité du même point pour les courbes  $C_1''$ ) auquel sont infiniment voisins un certain nombre de points fixes infiniment voisins successifs. Ces suites se terminent par quatre points unis parfaits de l'involution  $I_p$ : le point  $P_1$ , multiple d'ordre  $n_1 - 1$ , le point  $P_2$  multiple d'ordre  $n_2 - 1$ , deux points simples  $P_{21}$ ,  $P_{22}$  donnent naissance aux courbes  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{22}$ .

Et ainsi de suite. Les courbes  $C_1^{(k+1)}$  auront un comportement analogue aux courbes  $C_1''$ ,  $C_1'''$ . Les suites de points communs à ces courbes se termineront par le point  $P_1$ , multiple d'ordre  $n_1 - 1$ , le point  $P_2$ , multiple d'ordre  $n_2 - 1$  et par deux points simples  $P_{k1}$ ,  $P_{k2}$ .

Les courbes  $C_1^{(k+2)}$  auront un comportement différent. Les suites de points communs à ces courbes, infiniment voisins successifs de A, se termineront par le point  $P_1$ , multiple d'ordre  $n_1 - 1$ , le point  $P_2$  multiple d'ordre  $n_2 - 1$  et par un point  $P_k$ , simple ou double suivant que l'on se trouve dans l'hypothèse du n° 12 ou dans celle du n° 13.

Inversement, si les courbes  $C_1'$ ,  $C_1''$ , ... ont en A les comportements précédents, la singularité de la surface  $\Phi$  au point de diramation A' présente les particularités indiquées précédemment.

16. Nous allons maintenant considérer un exemple que nous empruntons à la théorie des homographies cycliques du plan.

Supposons que F soit un plan et considérons l'involution  $I_p$  engendrée dans ce plan par l'homographie de période  $p$ .

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

$\varepsilon$  étant une racine primitive  $p^{\text{ième}}$  de l'unité.

Comme système  $|C|$ , nous prendrons le système des courbes planes d'ordre  $p$ . Les points unis de l'involution  $I_p$  sont les sommets du triangle de référence; nous étudierons le point uni  $A(1, 0, 0)$ .

Pour pouvoir écrire l'équation du système  $|C_1|$ , nous devons considérer deux cas :  $p = 6\nu + 1$  et  $p = 6\nu + 5$  <sup>(1)</sup>.

Dans le cas  $p = 6\nu + 1$ , l'équation du système  $|C_1|$  s'écrit

$$\lambda_0 x_1'' + \sum_{i=1}^{2\nu+1} \lambda_i x_1^{4\nu-2i+2} x_2^{3i-2} x_3^{2\nu-i+1} + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} x_1^{2\nu-2j-1} x_2^{3j-1} x_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} x_3'' = 0 \quad (1).$$

Les courbes  $C_1$  sont données par  $\lambda_0 = 0$ . Elles ont en A un point multiple d'ordre  $2\nu + 1$ , une tangente étant  $x_2 = 0$ , les  $2\nu$  autres étant confondues avec  $x_3 = 0$ .

Avant d'analyser la singularité des courbes  $C_1$  au point A, formons les équations de la surface  $\Phi$ . Celle-ci s'obtiendra en rapportant projectivement les courbes (1) aux hyperplans d'un espace  $S_{3\nu+2}$  à  $3\nu + 2$  dimensions. Les équations paramétriques de la surface  $\Phi$  seront

$$\begin{aligned} \rho X_0 &= x_1'', & \rho X_i &= x_1^{4\nu-2i+2} x_2^{3i-2} x_3^{2\nu-i+1}, & (i=1, 2, \dots, 2\nu+1), \\ \rho X_{2\nu+1+j} &= x_1^{2\nu-2j-1} x_2^{3j-1} x_3^{4\nu-j+1}, & (j=1, 2, \dots, \nu); & & \rho X_{3\nu+2} &= x_3''. \end{aligned}$$

La surface  $\Phi$  sera d'ordre  $p$ . La surface  $\Phi_1$  s'obtiendra en projetant  $\Phi$  du point  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  sur l'hyperplan  $X_0 = 0$ . Ses équations paramétriques s'obtiendront en supprimant la première des équations précédentes.

Pour étudier la singularité des courbes  $C_1$  au point A, nous utiliserons les transformations quadratiques <sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} (T_1) \quad & x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3, \\ (T_2) \quad & x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Cf. STEVENS, *Sur la structure des points unis des homographies planes cycliques non homologues* (Bulletin de la Société royale de Liège, 1935, p. 128-132).

<sup>(2)</sup> Voir nos travaux, *Sur les homographies planes cycliques* (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 1928, p. 1-26); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (Id., 1930, p. 1-21); *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (Id., 1931, p. 1-14).

La première fait correspondre au point infiniment voisin de A sur  $x_3 = 0$  le point  $(1, 0, 0)$ , la seconde fait correspondre au point infiniment voisin de A sur  $x_2 = 0$  le point  $(1, 0, 0)$ .

Effectuons deux fois de suite la transformation  $T_1$  sur les courbes  $C'_i$ ; nous obtenons une courbe d'équation

$$y_1^{1+2\nu+2} \sum_{i=1}^{2\nu+1} \lambda_i y_2^{i-1} y_3^{2\nu-i+1} + y_1^{0\nu+1} \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} y_2^{4\nu+j} y_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} y_2^{8\nu+1} y_3^{6\nu+1} = 0.$$

On en conclut que les courbes  $C'_i$  ont deux points infiniment voisins successifs de A, multiples d'ordre  $2\nu$ , le premier étant sur  $x_3 = 0$ . Le dernier est uni parfait pour  $I_p$ . Soit  $P_1$  ce point.

Les équations paramétriques de  $\Phi_1$  peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \rho X_i &= y_1^{1+2\nu+2} y_2^{i-1} y_3^{2\nu-i+1} & (i = 1, 2, \dots, 2\nu + 1), \\ \rho X_{2\nu+1+j} &= y_1^{0\nu+1} y_2^{4\nu+j} y_3^{4\nu-j+1} & (j = 1, 2, \dots, \nu), \\ \rho X_{3\nu+2} &= y_2^{8\nu+1} y_3^{6\nu+1}. \end{aligned}$$

Pour obtenir sur cette surface la courbe qui représente les points infiniment voisins de  $P_1$ , posons  $y_3 = \lambda y_2$  puis faisons tendre  $y_2$  vers zéro. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{\lambda^{2\nu}} &= \frac{X_2}{\lambda^{2\nu-1}} = \dots = \frac{X_{2\nu+1}}{1}, \\ X_{2\nu+2} &= X_{2\nu+3} = \dots = X_{3\nu+2} = 0. \end{aligned}$$

La courbe  $\gamma_1$  est donc une courbe rationnelle normale d'ordre  $2\nu$ .

Effectuons maintenant sur les courbes  $C'_i$  la transformation  $T_2^{\nu}$ ; nous obtenons

$$z_1^{4\nu} (\lambda_1 z_2 + \lambda_{3\nu+2} z_3) + \dots = 0,$$

les termes non écrits contenant  $z_1$  à une puissance inférieure à  $4\nu p$ . Les courbes  $C'_i$  ont en commun  $4\nu$  points simples infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur  $x_2 = 0$  et le dernier,  $P_2$ , étant uni parfait pour  $I_p$ .

En raisonnant comme précédemment, on voit qu'aux points infiniment voisins de  $P_2$  correspondent sur  $\Phi_1$  les points de la droite  $\gamma_2$  d'équations

$$X_2 = \dots = X_{2\nu+1} = X_{2\nu+2} = \dots = X_{3\nu+1} = 0$$

Appelons  $O_i$  le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf  $X_i$ . La courbe  $\gamma_1$  et la droite  $\gamma_2$  ont en commun le point  $O_1$ .

Il s'agit d'examiner la multiplicité de  $O_1$  pour la surface  $\Phi_1$ . A cet effet, nous allons considérer les courbes  $C_1''$  données en posant  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  dans l'équation (1). Ces courbes ont en A la multiplicité  $2\nu + 3$ , quatre tangentes étant confondues avec  $x_2 = 0$ , les  $2\nu - 1$  autres avec  $x_3 = 0$ .

En appliquant aux courbes  $C_1''$  la transformation  $T_1^2$ , on obtient

$$y_1^{12\nu+2} \sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i y_2^{i-2} y_3^{2\nu-i+1} + y_1^{6\nu+1} \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} y_2^{4\nu+j-1} y_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} y_2^{8\nu} y_3^{6\nu+1} = 0.$$

Les courbes  $C_1''$  ont donc deux points multiples d'ordre  $2\nu - 1$ , infiniment voisins successifs de A. Ce sont les points déjà rencontrés en étudiant les courbes  $C_1'$ .

Les équations paramétriques de la surface  $\Phi_2$ , projection de  $\Phi_1$  à partir de  $O_1$  sur  $X_1 = 0$ , peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \rho X_i &= y_1^{12\nu+2} y_2^{i-2} y_3^{2\nu-i+1} & (i = 2, 3, \dots, 2\nu + 1), \\ \rho X_{2\nu+1+j} &= y_1^{6\nu+1} y_2^{4\nu+j-1} y_3^{4\nu-j+1} & (j = 1, 2, \dots, \nu), \\ \rho X_{3\nu+2} &= y_2^{8\nu} y_3^{6\nu+1}. \end{aligned}$$

Aux points infiniment voisins de  $P_1$  correspondent, sur  $\Phi_2$ , les points de la courbe

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{\lambda^{2\nu-1}} &= \frac{X_3}{\lambda^{2\nu-2}} = \dots = \frac{X_{2\nu+1}}{1}, \\ X_{2\nu+2} &= X_{2\nu+3} = \dots = X_{3\nu+2} = 0. \end{aligned}$$

C'est la projection de  $\gamma_1$  à partir de  $O_1$  sur l'hypothèse  $X_1 = 0$ .

Appliquons à la courbe  $C_1''$  la transformation  $T_2^{\nu-1}$ ; nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i z_1^{(2\nu-1)(2\nu-i+1)} z_2^{i-2} z_3^{(i-2)(2\nu-i)} \\ &+ \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} z_1^{6\nu+2-2\nu-1-(2\nu-1)j} z_2^{3j-1} z_3^{(3\nu-i)(j-1)+2} + \lambda_{3\nu+2} z_1^{(\nu-1)\nu} z_3^6 = 0. \end{aligned}$$

Le terme de plus haute puissance en  $z_1$  est

$$\lambda_2 z_1^{(3\nu-1)(2\nu-1)} z_2^2.$$

La courbe possède donc un point quadruple en  $(1, 0, 0)$  et par conséquent les courbes  $C_i''$  ont  $\nu - 1$  points quadruples infiniment voisins successifs de A.

Opérons encore une fois  $T_2$  sur la courbe précédente. On obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i z_1^{(3\nu+2)(2\nu-i+1)} z_2^{3i-2} z_3^{(i-2)(5\nu-1)} \\ & + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} z_1^{(3\nu+2)(2\nu-j)+1} z_2^{3j-1} z_3^{(3\nu-1)(j-1)+1} + \lambda_{3\nu+2} z_1^{2\nu} z_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Le terme de plus haute puissance en  $z_1$  est le dernier et par conséquent aux  $n - 1$  points quadruples fait suite un point double.

Opérons enfin la transformation  $T_1$ . Nous obtenons une courbe d'équation

$$z_1^{2\nu p} (\lambda_2 z_2^2 + \lambda_{2\nu+2} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+2} z_3^2) + \dots = 0,$$

les termes non écrits contenant  $z_1$  à une puissance inférieure à  $2\nu p$ . Nous obtenons un dernier point double, uni parfait pour l'involution  $I_p$ . Au domaine de ce point correspond sur la surface  $\Phi_2$  la conique d'équations

$$X_{2\nu+2}^2 - X_2 X_{3\nu+2} = 0, \quad X_3 = \dots = X_{2\nu+1} = X_{2\nu+3} = \dots = X_{3\nu+1} = 0.$$

Désignons-la par  $\gamma_0$ . Cette conique rencontre la courbe  $\gamma_1'$ , projection de  $\gamma_1$ , au point  $O_2$ .

Nous voyons que le point  $A_1'$  est double conique pour la surface  $\Phi_1$ . Au point  $A' \equiv O_0$ , la surface  $\Phi$  possède donc la multiplicité  $2\nu + 1$ , le cône tangent étant décomposé en un cône d'ordre  $2\nu$  et un plan ayant une droite commune. Au point  $A'$  est infiniment voisin un point double conique.

17. Envisageons maintenant le cas  $p = 6\nu + 5$ . L'équation des

courbes  $C_i$  s'écrit

$$(1) \quad \lambda_0 x_1^{2\nu+2} + \sum_{i=1}^{2\nu+2} \lambda_i x_1^{4\nu-2i+4} x_2^{2i-1} x_3^{2\nu-i+2} \\ + \sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_{2\nu+2+j} x_1^{2\nu-2j+3} x_2^{2j-2} x_3^{4\nu-j+4} + \lambda_{3\nu+4} x_3^{2\nu+2} = 0.$$

Nous obtiendrons les équations paramétriques de la surface  $\Phi$ , image de l'involution  $I_p$ , dans un espace linéaire  $S_{3\nu+4}$ , en posant

$$\rho X_0 = x_1^{2\nu+2}, \quad \rho X_i = x_1^{4\nu-2i+4} x_2^{2i-1} x_3^{2\nu-i+2} \quad (i=1, 2, \dots, 2\nu+2), \\ \rho X_{2\nu+2+j} = x_1^{2\nu-2j+3} x_2^{2j-2} x_3^{4\nu-j+4} \quad (j=1, 2, \dots, \nu+1), \\ \rho X_{3\nu+4} = x_3^{2\nu+2}.$$

Les courbes  $C'_i$  sont caractérisées par  $\lambda_0 = 0$ ; elles ont en  $A$  la multiplicité  $2\nu+3$ , deux tangentes étant confondues avec  $x_2 = 0$  et  $2\nu+1$  avec  $x_3 = 0$ .

Opérons sur les courbes  $C'_i$  la transformation  $T_1^2$ ; on obtient

$$y_1^{12\nu+10} \sum_{i=1}^{2\nu+2} \lambda_i y_2^{i-1} y_3^{2\nu-i+2} + y_1^{6\nu+5} \sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_{2\nu+2+j} y_2^{4\nu+j+2} y_3^{4\nu-j+4} + \lambda_{3\nu+4} y_2^{8\nu+5} y_3^{6\nu+5} = 0.$$

Les courbes  $C'_i$  ont donc deux points multiples d'ordre  $2\nu+1$ , infiniment voisins successifs de  $A$ . Au domaine du dernier,  $P_1$ , de ces points correspond, sur la surface  $\Phi_1$ , la courbe  $\gamma_1$ , courbe normale d'ordre  $2\nu+1$ ,

$$\frac{X_1}{\lambda^{2\nu+1}} = \frac{X_2}{\lambda^{2\nu}} = \dots = \frac{X_{2\nu+2}}{1}, \\ X_{2\nu+3} = \dots = X_{3\nu+3} = X_{3\nu+4} = 0.$$

Opérons d'autre part, sur les courbes  $C'_i$ , la transformation  $T_2^{2\nu+1}$ . On a

$$z_1^{12\nu^2+16\nu+5} (\lambda_1 z_2^2 + \lambda_{2\nu+3} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+4} z_3^2) + \dots = 0.$$

Les courbes  $C'_i$  ont donc en commun une suite de  $2\nu+1$  points doubles infiniment voisins successifs. Au domaine du dernier,  $P_2$ , de ces points correspond sur la surface  $\Phi_1$  la conique  $\gamma_2$  d'équations

$$X_{2\nu+3}^2 - X_1 X_{3\nu+4} = 0, \quad X_2 = \dots = X_{2\nu+2} = 0, \quad X_{2\nu+4} = \dots = X_{3\nu+3} = 0.$$

Les courbes  $\gamma_1, \gamma_2$  ont en commun le point  $O_1$ .

Considérons maintenant les courbes  $C''_1$ , caractérisées par  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ . Elles ont en A la multiplicité  $2\nu + 5$ ,  $2\nu$  tangentes coïncidant avec  $x_3 = 0$  et cinq avec  $x_2 = 0$ .

Appliquons aux courbes  $C''_1$  la transformation  $T_1^2$ ; nous obtenons

$$y_1^{12\nu+10} \sum_{i=2}^{2\nu+2} \lambda_i y_2^{i-2} y_3^{2\nu-i+2} + \dots = 0.$$

Les courbes  $C''_1$  ont deux points multiples d'ordre  $2\nu$  infiniment voisins successifs de A. Au domaine du dernier,  $P_1$ , correspond sur la surface  $\Phi_2$  la courbe  $\gamma'_1$  projection de  $\gamma_1$  à partir de  $O_1$  sur l'hyperplan  $X_1 = 0$ .

Appliquons aux courbes  $C''_1$  la transformation  $T_2$ ; à cet effet, nous distinguerons deux cas, suivant que  $\nu$  est pair ou impair.

Supposons en premier lieu  $\nu = 2\nu'$  et effectuons  $T_2^{\nu'-1}$ . En n'écrivant pour abrégier que les termes de l'équation qui nous intéressent, nous obtenons

$$\lambda_2 z_1^{2\nu(3\nu'-1)} z_2^5 + \lambda_{2\nu+3} z_1^{2\nu(3\nu'-1)-5} z_2 z_3^7 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{2\nu(3\nu'-2)-3\nu'-5} z_3^{3\nu'+10} + \dots = 0.$$

Les courbes  $C''_1$  possèdent  $\nu' - 1$  points quintuples infiniment voisins successifs dont le premier est situé sur la droite  $x_2 = 0$ .

En appliquant une nouvelle fois  $T_2$ , on obtient

$$(2) \quad \lambda_2 z_1^{3\nu'+4\nu} z_2^5 + \lambda_{2\nu+3} z_1^{3\nu'+4\nu+1} z_2 z_3^5 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{3\nu'+2\nu+\nu'} z_3^{2\nu-\nu'+5} + \dots = 0.$$

Au dernier point quintuple fait donc suite un point quadruple.

En appliquant à la courbe (2) la transformation  $T_2^{3\nu'+1}$ , on trouve que le coefficient de la plus haute puissance de  $z_1$  est  $\lambda_{2\nu+3} z_2 + \lambda_{3\nu+4} z_3$ . Au point quadruple font donc suite  $3\nu' + 1$  points simples dont le dernier est  $P_2$ . Au domaine de ce point correspond, sur la surface  $\Phi_2$ , la droite

$$X_2 = \dots = X_{2\nu+2} = 0, \quad X_{2\nu+4} = \dots = X_{3\nu+3} = 0,$$

projection de la conique  $\gamma_2$  sur l'hyperplan  $X_1 = 0$  (contenant  $\Phi_2$ ).

Reprenons la courbe (2). La transformation  $T_1$  donne

$$\lambda_2 y_1^{2\nu(3\nu'+1)} y_2 + \lambda_{2\nu+3} y_1^{2\nu(3\nu'+1)-2} y_3^5 + \dots = 0.$$

Au point quadruple de la courbe (2) est donc infiniment voisin, dans la direction  $z_3 = 0$ , un point simple.

En appliquant à la courbe précédente la transformation  $T_2^2$ , on trouve finalement

$$z_1^{2\nu+3}(\lambda_2 z_2 + \lambda_{2\nu+3} z_3) + \dots = 0.$$

Au point simple font donc encore suite deux points simples dont le dernier,  $P_0$ , est uni parfait pour l'involution  $I_\rho$ . Au domaine de ce point correspond, sur  $\Phi_2$ , la droite  $O_2 O_{2\nu+3}$ .

Il résulte de ceci que dans le cas  $\nu = 2\nu'$ , le point  $A'_1 = O_1$  est simple pour la surface  $\Phi_1$ , le plan tangent étant  $O_1 O_2 O_{2\nu+3}$ .

On parvient aux mêmes conclusions dans le cas  $\nu = 2\nu' + 1$ . On trouve sans difficulté qu'au point A sont infiniment voisins successifs  $\nu'$  points quintuples, le premier étant sur  $x_2 = 0$ ; on trouve ensuite un point double. A ce dernier point sont infiniment voisins successifs dans une direction  $3\nu' + 2$  points simples dont le dernier est  $P_2$ , dans une autre direction, trois points simples. Le plan tangent à la surface  $\Phi_1$  en  $O_1$  est  $O_1 O_2 O_{2\nu+3}$ .

Le point  $A' \equiv O_0$  est donc multiple d'ordre  $2\nu + 3$  pour la surface  $\Phi$ , le cône tangent étant formé d'un cône rationnel d'ordre  $2\nu + 1$  et d'un cône du second ordre ayant une seule droite en commun avec le premier. Il n'y a pas de point multiple infiniment voisin de A.

18. Nous voudrions actuellement montrer sur un exemple, emprunté également à la théorie des homographies cycliques du plan, que le cône tangent à la surface  $\Phi$  au point de diramation  $A'$ , peut être décomposé en plus de deux parties.

Considérons l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3,$$

où  $\varepsilon$  est une racine primitive d'ordre 23 de l'unité. Cette homographie engendre une involution  $I_{23}$  d'ordre 23, ayant comme points unis les sommets du triangle de référence. Nous étudierons le point uni  $A(1, 0, 0)$ .

Pour système  $|C|$ , prenons le système des courbes d'ordre 23. Le

système  $|C_1|$  a pour équation

$$(1) \quad \lambda_0 x_1^{23} + \lambda_1 x_1^{17} x_2 x_3^5 + \lambda_2 x_1^{16} x_2^2 x_3^5 + \lambda_3 x_1^{11} x_2^2 x_3^{10} + \lambda_4 x_1^{10} x_2^6 x_3^7 \\ + \lambda_5 x_1^9 x_2^{10} x_3^4 + \lambda_6 x_1^8 x_2^{11} x_3 + \lambda_7 x_1^7 x_2^3 x_3^{15} + \lambda_8 x_1^4 x_2^7 x_3^{12} + \lambda_9 x_1^3 x_2^{11} x_3^8 \\ + \lambda_{10} x_1^2 x_2^{15} x_3^6 + \lambda_{11} x_1 x_2^{19} x_3^3 + \lambda_{12} x_2^{23} + \lambda_{13} x_3^{23} = 0.$$

La surface  $\Phi$  sera obtenue en rapportant projectivement les courbes (1) aux hyperplans d'un espace linéaire  $S_{13}$ . Le point de diramation correspondant au point A sera le point  $A' \equiv O_0$ .

Les courbes  $C_1$  sont données par  $\lambda_0 = 0$ ; elles ont un point sextuple en A, une tangente coïncidant avec  $x_2 = 0$  et cinq avec  $x_3 = 0$ .

Appliquons à la courbe  $C_1$  la transformation  $T_1$ . La courbe obtenue

$$(2) \quad \lambda_1 \varepsilon_1^{33} \varepsilon_3^6 + \lambda_2 \varepsilon_1^{27} \varepsilon_2 \varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^{24} \varepsilon_3^6 \varepsilon_3 (\lambda_3 \varepsilon_3^9 + \lambda_4 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3^6 + \lambda_5 \varepsilon_1^4 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^3 + \lambda_6 \varepsilon_1^6 \varepsilon_3^3) \\ + \varepsilon_1^{13} \varepsilon_2^{12} (\lambda_7 \varepsilon_3^{15} + \lambda_8 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3^{12} \\ + \lambda_9 \varepsilon_1^4 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^9 + \lambda_{10} \varepsilon_1^6 \varepsilon_3^3 \varepsilon_3^6 + \lambda_{11} \varepsilon_1^8 \varepsilon_2^4 \varepsilon_3^3 + \lambda_{12} \varepsilon_1^{10} \varepsilon_2^2) + \lambda_{13} \varepsilon_2^{17} \varepsilon_3^{23} = 0$$

possède un point triple à tangentes  $\varepsilon_2 \varepsilon_3^2 = 0$  au point  $(1, 0, 0)$ , donc les courbes  $C_1$  ont un point triple infiniment voisin de A sur la tangente  $x_3 = 0$ .

Appliquons à la courbe (2) la transformation  $T_1^7$ ; nous obtenons

$$\varepsilon_1^{184} (\lambda_2 \varepsilon_3^2 + \lambda_6 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \lambda_{12} \varepsilon_2^2) + \dots = 0,$$

les termes non écrits contenant  $\varepsilon_1$  à une puissance inférieure à 184. Les courbes  $C_1$  ont donc une suite de sept points doubles infiniment voisins successifs du point triple trouvé plus haut. Le dernier de ces points est uni parfait pour  $I_{23}$ . Sur la surface  $\Phi_1$  de  $S_{12}$ , il lui correspond la conique

$$X_6^2 - X_2 X_{12} = 0$$

du plan  $O_2 O_6 O_{12}$ .

Effectuons au contraire sur la courbe (2) la transformation  $T_2^2$ ; nous obtenons

$$\varepsilon_1^{112} (\lambda_1 \varepsilon_3 + \lambda_2 \varepsilon_2) + \dots = 0.$$

Il y a donc deux points simples infiniment voisins successifs du point triple. Le dernier de ces points est uni parfait pour  $I_{23}$  et il lui correspond, sur  $\Phi_1$ , la droite  $O_1 O_2$ .

Reprenons la courbe (1) et effectuons la transformation  $T_2^7$ ; nous

obtenons

$$z_1^{3p_1}(\lambda_{12}z_2 + \lambda_{13}z_3) + \dots = 0.$$

Les courbes  $C'_i$  ont donc dix-sept points simples infiniment voisins successifs de  $A$ , le premier étant sur  $x_2 = 0$ . Le dernier est un parfait pour  $I_{23}$  et à son domaine correspond, sur la surface  $\Phi_1$ , la droite  $O_1O_{13}$ .

Nous voyons donc que la surface  $\Phi$  possède au point de diramation  $A'$  un point quadruple, le cône tangent étant formé d'un cône du second ordre et de deux plans; les deux plans se rencontrent suivant une droite et l'un d'eux rencontre le cône du second ordre suivant une droite.

On peut continuer l'étude de la singularité de la surface  $\Phi$  au point  $A'$ ; la question ne présente aucune difficulté; nous nous bornerons à donner les résultats.

Sur la surface  $\Phi_1$ , nous avons une conique  $\gamma_2$  et deux droites  $\gamma_{11} = O_1O_2$ ,  $\gamma_{12} = O_1O_{13}$  se rencontrant au point  $O_1$ . Seule la première droite  $\gamma_{11}$  rencontre la conique  $\gamma_2$  au point  $O_2$ . Le point  $O_2$  est simple pour la surface  $\Phi_1$ , le point  $O_1$  est double biplanaire ordinaire. Ce point est équivalent à deux droites  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{22}$  de degré  $-2$ , se rencontrant en un point. La droite  $\gamma_{21}$  rencontre  $\gamma_1$  en un point et la droite  $\gamma_{22}$  rencontre  $\gamma_{12}$  en un point. Les droites  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{22}$  coïncident respectivement, sur la surface  $\Phi_2$ , avec les droites  $O_2O_3$ ,  $O_3O_{13}$ .