ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur les intégrales abéloïdes dépendant d'un paramètre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 81-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__81_0>

SUR

LES INTÉGRALES ABÉLOÏDES

DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

PAR M. ÉMILE COTTON,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Introduction. — Dans le quotient de deux séries entières en x, y, z, remplaçons y par une fonction algébroïde de x et z; et considérons l'intégrale, prise par rapport à x, de la fonction ainsi obtenue. Nous étudions ici cette *intégrale abéloïde*, comme fonction du paramètre z. Bien qu'il ne s'agisse que d'une étude locale (x, y, z restent voisins de zéro), ces intégrales jouissent de propriétés voisines de celles des intégrales abéliennes fonction d'un paramètre, qui ont fait l'objet de travaux bien connus de Fuchs et de M. Picard. J'ai montré antérieurement[1] (*A. É. N.*, 2; *B.*) que si les fonctions algébroïdes sont d'ordre 2, on peut adapter à notre problème une méthode de M. Picard consistant à suivre la déformation continue du chemin d'intégration lorsque z fait, dans son plan, un tour complet autour de $z = 0$.

Mais il est plus difficile de l'appliquer lorsque l'ordre des fonctions

---

(1) Les abréviations suivantes désignent dans le présent travail les renvois à nos articles antérieurs :

Annales de l'École Normale, 3e série, t. 49, p. 371... (*A. É. N.*, 1); t. 50, p. 351... (*A. É. N.*, 2); t. 51, p. 131... (*A. É. N.*, 3); *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. 58, p. 175... (B.); *Comptes rendus*, t. 198, p. 1285... (*C. R.*).

algébroïdes est supérieur à 2, et c'est une autre idée qui va dans le cas général nous conduire au but cherché : la décomposition de l'intégrale en parties dont l'étude est aisée (*C. R.*).

Certaines représentations paramétriques des variables x, z et de la fonction algébroïde y vont nous être utiles; nous rappelons et complétons tout d'abord (n^{os} 1, 2) ce que nous avions dit précédemment à leur propos (*A. É. N.*, 3). A ces représentations correspondent dans le plan de la variable x, certains domaines ou anneaux dont les frontières sont des circonférences. On divise le chemin d'intégration L (qui joint deux points fixes) en parties respectivement intérieures à ces divers anneaux. Avec les représentations paramétriques on obtient pour chaque intégrale partielle suivant la nature de l'anneau, soit un développement en série, soit un produit de deux facteurs; dans les deux cas, la nature de la fonction de z obtenue apparaît immédiatement (n^{os} 3 à 6); par addition des diverses intégrales partielles, on a la proposition suivante : *les intégrales étudiées ont la forme des intégrales régulières de Fuchs dans la théorie des équations différentielles linéaires; les logarithmes ne figurant qu'au premier degré, les racines de l'équation déterminante étant des nombres rationnels dont les dénominateurs sont les mêmes que ceux des exposants de z dans les séries $x(z)$, $y(z)$ qui donnent les points singuliers pôles, points de ramification* (*A. É. N.*, 3) *de la fonction sous le signe* $\int$. Viennent enfin quelques exemples (n° 7).

1. Représentation paramétrique d'une surface analytique au voisinage de l'un de ses points. — Soit

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

l'équation d'une surface analytique S passant à l'origine, l'axe Oy non situé sur S rencontre cette surface en n points confondus avec O. Pour l'étude de S au voisinage de O, on peut utiliser des représentations paramétriques de deux catégories, correspondant les unes aux arêtes, les autres aux faces d'un polyèdre N, qui est pour la série entière f l'analogue du polygone de Newton d'une série entière à deux variables. Rappelons brièvement leur forme (pour ces questions voir *A. É. N.*, 3, Chap. II et III).

Les représentations de la première catégorie, relatives aux arêtes de N, s'écrivent

$$(2) \qquad x = \lambda^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}, \qquad y = \eta(1+\psi)\lambda^{\beta_1}\mu^{\beta_2}, \qquad z = \lambda^{\gamma_1}\mu^{\gamma_2},$$

les paramètres sont λ et μ, les exposants $\alpha_1, \ldots, \gamma_2$ sont des entiers non négatifs, η est une constante, ψ est une fonction holomorphe de λ, μ s'annulant pour $\lambda = \mu = 0$.

La seconde catégorie de représentations paramétriques est relative aux faces de N; on a alors

$$(3) \qquad x = \xi\lambda^{\alpha}, \qquad y = (\eta+\psi)\lambda^{\beta}, \qquad z = \lambda^{\gamma},$$

α, β, γ sont des entiers positifs (un ou deux peuvent être nuls); η est une fonction de ξ donnée par une relation $F(\xi, \eta, 1) = 0$ dont le premier membre est un polynome; ψ est une fonction de ξ et de λ s'annulant pour $\lambda = 0$; $\eta + \psi$ est développable en série entière en $\xi - \xi_0$ et λ au voisinage de tout point ξ_0, η_0 de la courbe C d'équation $F(\xi, \eta, 1) = 0$.

Ces représentations peuvent être utilisées pour l'étude des n fonctions algébroïdes $y(x, z)$ définies (pour $|x|$ et $|z|$ petits) par l'équation (1).

Quand z est donné, on fait correspondre à chacune des représentations (2) ou (3), dans le plan de la variable complexe x, un anneau limité par deux circonférences ayant leur centre au point $x = 0$. En prenant x à l'intérieur de l'anneau chaque représentation (2) donne un certain nombre de solutions $y(x, z)$; pour le cas des anneaux de faces les représentations (3) sont utilisables lorsque x est intérieur à l'anneau et extérieur à certains cercles d'isolement σ. En dehors de ces cercles on retrouve à l'aide de ces diverses représentations les n solutions de (1); enfin un changement de variables permet d'appliquer une méthode analogue à l'étude des solutions de (1) à l'intérieur des cercles d'isolement. Nous admettons, dans ce qui suit, que les difficultés qui peuvent survenir parfois dans cette étude (facteurs multiples de faces ou d'arêtes) ont été résolues, et qu'on est arrivé à caractériser les divers cycles d'Halphen donnant les points de ramification du cercle de Riemann associé à (1).

2. **Représentations paramétriques d'une fonction définie sur** S. — Soit $h(x, y, z)$ une série entière; en remplaçant x, y, z par les expressions (2) ou par les expressions (3), nous aurons une représentation paramétrique $\mathrm{H}(\lambda, \mu)$ ou $\mathcal{H}(\lambda, \xi)$ de $h(x, y, z)$ considérée comme fonction composée de x et z par l'intermédiaire des fonctions algébroïdes $y(x, z)$. Pour la première catégorie $\mathrm{H}(\lambda, \mu)$ est une série entière; dans le cas de la seconde $\mathcal{H}(\lambda, \xi)$ est développable en série entière en λ et $\xi - \xi_0$ lorsque ξ_0 et $\eta(x_0)$ ne sont pas les valeurs exceptionnelles correspondant aux cercles d'isolement σ.

Le même résultat s'applique au quotient $g = \dfrac{h(x, y, z)}{k(x, y, z)}$ de deux séries entières, la série dénominateur ne s'annulant pas pour $x = y = z = 0$.

Mais lorsque $k(0, 0, 0) = 0$, la fonction $\dfrac{h[x, y(x, z), z]}{k[x, y(x, z), z]}$ présente deux sortes de singularités locales (*A. É. N.*, 2, nos 4, 5) analogues à celles des fonctions rationnelles d'un point sur une surface de Riemann, points de ramification et pôles (un point singulier peut parfois appartenir à l'une et à l'autre classe). Les points de ramification ont été déjà considérés (ils sont intérieurs aux cercles d'isolement); il reste à tenir compte des pôles locaux, c'est-à-dire des solutions du système

$$f(x, y, z) = 0, \qquad k(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

A ces solutions correspondent des cycles d'Halphen, c'est-à-dire des développements en séries entières $x(t), y(t)$, la variable t étant liée à z par une relation $z = t^\gamma$, où γ est entier positif. On a une méthode régulière (*A. É. N.*, 3) pour trouver les termes successifs de ces séries.

Soient alors $\xi_1 t^\alpha, \eta_1 t^\beta$ les premiers termes des séries $x(t)\ y(t)$; si ces parties principales ont été rencontrées déjà dans la recherche des points de ramification locaux, on a déjà un cercle d'isolement; mais si ces parties principales interviennent pour la première fois nous aurons deux cas à distinguer : lorsque α, β, γ sont les paramètres directeurs d'une normale à une face de N, nous ajouterons seulement un nouveau cercle d'isolement de centre donné par la nouvelle abscisse exceptionnelle $\xi_1 t^\alpha$ (à laquelle nous associons $y = \eta_1 t^\beta$) son rayon est $\varepsilon |t|^\alpha$, ε est un nombre positif voisin de zéro, les nombres m et M relatifs à la face (*A. É. N.*, 3) peuvent être choisis de façon à comprendre entre eux les modules $|\xi_1|$ des abscisses exceptionnelles anciennes et nouvelles.

Dans le second cas, le plan d'appui P du polyèdre N normal à la direction α, β, γ touche N suivant une arête $\mathfrak{A}$; soient α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les paramètres directeurs des normales aux faces adjacentes, on a (*A. É. N.*, 3, n° 3),

$$\alpha = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2, \qquad \beta = p_1\beta_1 + p_2\beta_2, \qquad \gamma = p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2;$$

p_1 et p_2 étant positifs (sur le diagramme plan le point α, β, γ est intérieur aux segments déterminés par les points α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2).

Nous traitons ce plan d'appui P comme une face (fictive) de N : nous portons $x = \xi\lambda^\alpha$, $y = \eta\lambda^\beta$, $z = \lambda^\gamma$ dans l'équation obtenue en égalant à zéro le polynome $F(x, y, z)$ relatif à l'arête de contact du plan d'appui P; ce qui donne η en fonction de ξ par l'équation

$$F(\xi, \eta, 1) = 0,$$

nous déterminons ensuite ψ de façon que

$$x = \xi\lambda^\alpha, \qquad y = (\eta + \psi)\lambda^\beta, \qquad z = \lambda^\gamma \tag{5}$$

donne une représentation paramétrique de notre surface analytique (1).

Cette représentation de seconde catégorie sera utilisée pour un anneau

$$m\,|z|^s < |x| < M\,|z|^s, \qquad \left(s = \frac{\alpha}{\gamma}\right);$$

cet anneau est troué par un ou plusieurs cercles d'isolement construits comme plus haut, il est intérieur à l'anneau primitif relatif à l'arête $\mathfrak{A}$. S'il n'y a qu'un seul plan de face fictive P touchant N suivant $\mathfrak{A}$, nous remplacerons la représentation (2) relative à cette arête par trois autres : celle (5) dont nous venons de parler et deux de même forme que (2) mais construites, l'une avec les exposants $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et α, β, γ, l'autre avec α, β, γ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$. En même temps, l'ancien anneau d'arête est décomposé en trois anneaux : l'un relatif à la face fictive P et les deux autres analogues aux anneaux d'arête.

Si l'on avait m faces fictives, on remplacerait de même la représentation (2) par $2m+1$ représentations, $m+1$ de première catégorie et m de seconde : et l'anneau primitif est remplacé de même par $2m+1$ anneaux correspondant à ces nouvelles représentations.

Supposons effectués tous les changements que la considération des pôles locaux fait apporter aux représentations paramétriques primitives. Portons dans $g=\frac{h}{k}$ l'un des groupes d'expressions (2) que nous avons maintenant à considérer, g devient le quotient de deux séries entières $\frac{H(\lambda, \mu)}{K(\lambda, \mu)}$. Mettons en facteur, s'il y a lieu, dans la série dénominateur, le monome $\lambda^p \mu^q$, p et q étant aussi grands que possible : $K(\lambda, \mu)=\lambda^p\mu^q K_1(\lambda, \mu)$ la série entière $K_1(\lambda, \mu)$ a un terme constant différent de zéro. En effet, s'il en était autrement, dans le plan λ, μ la courbe analytique $K_1=0$ passerait à l'origine, la méthode de Puiseux donnerait pour les branches passant en ce point des développements holomorphes $\lambda(t)$ avec $\mu=t^\delta$; et auxquels correspondraient des cycles d'Halphen donnant les solutions de (4). Or, toutes les solutions de ce système ont été considérées et ont donné des faces fictives et des développements (2), l'hypothèse $K_1(0, 0)=0$ ne peut être vérifiée. Dès lors $\frac{1}{K_1(\lambda, \mu)}$ est développable en série entière et $G(\lambda, \mu)=\frac{H(\lambda, \mu)}{K(\lambda, \mu)}$ est de la forme $\frac{\varphi(\lambda, \mu)}{\lambda^p\mu^q}$, φ étant holomorphe.

Substituons maintenant les expressions (3) relatives à une face à x, y, z dans $\frac{h}{k}$, on obtient une fonction de λ et de ξ contenant en général en facteur une puissance λ^m de λ (à exposant m positif ou négatif), soit $\lambda^m\varpi(\xi, \lambda)$. Le second facteur $\varpi(\xi, \lambda)$ est développable en série entière en $\xi-\xi_0$ et λ au voisinage de tout point ξ_0, η_0 tel que $\xi_0\lambda^\alpha$, $\eta_0\lambda^\beta$ soit extérieur à un cercle d'isolement (1).

---

(1) Soient $\overline{h}(x, y, z)$, $\overline{k}(x, y, z)$ $F(x, y, z)$ les premiers termes des séries obtenues en ordonnant $h(x, y, z)$, $k(x, y, z)$ $f(x, y, z)$ normalement à la direction α, β, γ (*A. É. N.*, 3, p. 142), $\overline{h}$, $\overline{k}$, F sont, en général, des polynomes. La fonction $\varpi(\xi, 0)$ s'obtient en remplaçant η dans l'expression $\frac{\overline{h}(\xi, \eta, 1)}{\overline{k}(\xi, \eta, 1)}$ par la fonction algébrique définie par $F(\xi, \eta, 1)=0$.

On peut trouver de même les termes de la série $\varphi(\lambda, \mu)$ dont le degré en λ est minimum (ou ceux dont le degré en μ est minimum) :

A λ correspondent ici les exposants α_1, β_1, γ_1 et les groupes de termes $\overline{h}_1(x, y, z)$

3. **Intégrales abéloïdes.** — Soit c la circonférence tracée dans le plan de la variable x avec $x=0$ pour centre et r pour rayon. Donnons-nous une valeur de z et un chemin L intérieur à c partant de $x=r$ et y revenant ou parfois aboutissant en un point $x=\psi(z)$, ψ série entière en $z^{\frac{1}{\gamma}}$ où γ est l'un des nombres considérés à propos des faces; $\psi(0)=0$. On supposera r et $|z|$ assez petits pour qu'on puisse suivre par continuité le long de L la valeur de la fonction algébroïde $y(x, z)$ solution de (1) dont la détermination de départ au point $x=r$ a été préalablement choisie.

Remplaçons y par cette fonction implicite dans l'expression $\dfrac{h(x, y, z)}{k(x, y, z)}$ et considérons l'*intégrale abéloïde* $\int_L \frac{h}{k}\,dx$. Nous admettons d'abord que L ne pénètre pas à l'intérieur des cercles d'isolement, mais les extrémités de L peuvent être situées sur leurs circonférences frontières.

Faisons varier d'une façon continue la valeur attribuée à z sans changer r et déformons L de façon continue, de sorte qu'il ne pénètre jamais à l'intérieur d'une circonférence σ; l'intégrale varie aussi; c'est une fonction $I(z)$ admettant diverses déterminations correspondant aux divers chemins L. Ces fonctions admettent $z=0$ comme point singulier, nous allons en étudier la nature directement, c'est-à-dire sans faire usage de l'équation différentielle linéaire à laquelle elles satisfont et du groupe de monodromie (*voir A. É. N.*, 2, p. 386).

$\overline{k}_1(x, y, z)$, $F_1(x, y, z)$ (à μ correspondent α_2, β_2, γ_2 et $\overline{h}_2$, $\overline{k}_2$, $\overline{F}_2$) les termes de moindre degré en λ proviennent de $\dfrac{h_1}{k_1}$ où l'on fait

$$x=\lambda^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}, \qquad y=\eta[1+\psi(0, \mu)]\,\lambda^{\beta_1}\mu^{\beta_2}, \qquad z=\lambda^{\gamma_1}\mu^{\gamma_2},$$

$\psi(\lambda, \mu)$ étant la série entière telle que $\eta(1+\psi)\lambda^{\beta_1}\mu^{\beta_2}$ donne la représentation paramétrique de y relative à l'arête considérée. Et $\Psi(\mu)=\psi(0, \mu)$ peut aussi être déterminé par l'équation implicite $F_1[\mu^{\alpha_2}, \eta(1+\Psi)\mu^{\beta_2}, \mu^{\gamma_2}]=0$.

(1) Si au chemin L correspond un chemin fermé sur le cercle de Riemann relatif à (1) (*A. É. N.*, 2, p. 375), c'est-à-dire si après avoir parcouru une fois L on revient au point $x=r$ et avec la même détermination de y qu'au départ, on peut évidemment modifier L de façon à l'écarter du point $x=r$, et cela sans changer l'intégrale. Si celle-ci n'est pas nulle, c'est une *période locale* de l'intégrale abéloïde $\int \frac{h}{k}\,dx$.

Pour cela nous fractionnons L en arcs l respectivement intérieurs aux anneaux d'arêtes ou de faces (réelles ou fictives). Les extrémités de ces arcs sont soit sur les circonférences séparant les anneaux de faces et les anneaux d'arêtes (*A. É. N.*, 3, n° 12), c'est-à-dire

$$c_s \quad |x| = m\,|z|^s \quad \text{ou} \quad C_s \quad |x| = \mathrm{M}\,|z|^s, \qquad \left(s = \frac{\alpha}{\gamma}\right),$$

soit sur un cercle d'isolement. Il nous est loisible de prendre l'extrémité commune de deux arcs consécutifs l, l' supposée située sur C_s au point $A_s x = \mathrm{M}z^s$ de cette circonférence, car si l'on avait un autre point P de C_s, on ajouterait les intégrales prises le long de PA_s et le long de A_sP respectivement à celles prises le long de l et l'. Nous pouvons de même admettre qu'une extrémité située sur c_s est au point $x = mz^s$. Enfin, si le chemin d'intégration doit pénétrer à l'intérieur d'un cercle d'isolement de centre $\xi_e z^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ et de rayon $\varepsilon\,|z|^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ nous prendrons comme point de passage $x = (\xi_e + \varepsilon)\,z^{\frac{\alpha}{\gamma}}$.

Pour étudier les intégrales relatives aux arcs l, nous utilisons la représentation paramétrique valable dans l'anneau où l est tracé ; deux cas sont à distinguer suivant qu'il s'agit d'une arête ou d'une face.

4. **Intégrales relatives à un anneau d'arête.** — Soit la représentation paramétrique

$$(2) \qquad x = \lambda^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}, \qquad y = \eta(1+\psi)\lambda^{\beta_1}\mu^{\beta_2}, \qquad z = \lambda^{\gamma_1}\mu^{\gamma_2},$$

utilisable dans l'anneau

$$\mathrm{M}\,|z|^{\frac{\alpha_2}{\gamma_2}} < |x| < m\,|z|^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} \qquad \mathbf{b}d = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2,$$

lorsque

$$(6) \qquad |\lambda| \leqq \mathcal{L} = \mathrm{M}^{-\frac{\gamma_2}{\mathbf{b}d}}, \qquad |\mu| \leqq \mathfrak{M} = m^{-\frac{\gamma_1}{\mathbf{b}d}}.$$

Dans ces conditions, la fonction $g = \frac{h}{k}$ considérée plus haut s'exprime en fonction de λ et μ par $g = \frac{\varphi(\lambda,\mu)}{\lambda^p\mu^q}$, $\varphi = \Sigma\, a_{ij}\lambda^i\mu^j$ est une série entière en λ et μ. On suppose m et M pris le premier assez petit, le second assez grand, pour que la série $\Sigma\,\mathfrak{A}_{ij}\mathcal{L}^i\mathfrak{M}^j$ soit convergente ($\mathfrak{A}_{ij} = |a_{ij}|$). Quand les inégalités (6) sont satisfaites, la série φ est une série normalement convergente (BAIRE, *Leçons sur les théories de l'Analyse*, t. 2, Chap. IV).

L'intégration de g est faite pour z constant et x décrivant l'arc l; on a donc

$$(7) \qquad \mathrm{I} = \int_l \varphi \lambda^{-p} \mu^{-q}\, dx = z^{-r} \mathrm{I}', \qquad \mathrm{I}' = \int_l \varphi \lambda^{r\gamma_1 - p} \mu^{r\gamma_2 - q}\, dx,$$

et si $\gamma_1 \gamma_2 \neq 0$ on peut prendre r assez grand pour que I' porte sur une série entière en λ et μ; il suffit alors d'étudier les intégrales I pour lesquelles $p = q = 0$.

La convergence normale de la série φ entraîne la convergence uniforme et permet l'intégration terme à terme. Les intégrales

$$\mathrm{S}_{ij} = \int_l \lambda^i \mu^j\, dx$$

sont calculées pour z constant. Supposons $\gamma_1 \gamma_2 \neq 0$, l'équation

$$(8) \qquad \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2} = z,$$

où λ et μ sont considérés comme les coordonnées d'un point, définit une courbe algébrique du plan λ, μ si γ_1, γ_2 sont premiers entre eux; elle définit D courbes analogues si γ_1, γ_2 ont un plus grand commun diviseur D. Il nous suffit d'examiner le second cas, en faisant dans les formules obtenues $\mathrm{D} = 1$, on aura les résultats relatifs au premier cas.

Posons

$$(9) \qquad \gamma_1 = \mathrm{D} c_1, \qquad \gamma_2 = \mathrm{D} c_2, \qquad \lambda = \left(\frac{u}{\rho}\right)^{c_2}, \qquad \mu = (u\rho)^{c_1},$$

d'où

$$(10) \qquad z = u^{2\mathrm{D} c_1 c_2}, \qquad x = u^{\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1} \rho^{\alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2}.$$

Les intégrales indéfinies s_{ij} correspondant aux intégrales S_{ij} sont données par les formules suivantes :

$$(11) \qquad \begin{cases} (\alpha_2 + j) c_1 - (\alpha_1 + i) c_2 = \dfrac{1}{\mathrm{D}} [(\alpha_2 + j)\gamma_1 - (\alpha_1 + i)\gamma_2] \neq 0, \\[2ex] s_{ij} = \dfrac{\alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2}{(\alpha_2 + j) c_1 - (\alpha_1 + i) c_2}\, u^{(\alpha_2 + j) c_1 + (\alpha_1 + i) c_2} \rho^{(\alpha_2 + j) c_1 - (\alpha_1 + i) c_2}. \end{cases}$$

$$(12) \qquad (\alpha_2 + j) c_1 - (\alpha_1 + i) c_2 = 0, \qquad s'_{ij} = (\alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2)\, u^{(\alpha_2 + j) c_1 + (\alpha_1 + i) c_2} \log \rho.$$

La série $\varphi = \Sigma a_{ij} \lambda^i \mu^j$ précédemment considérée est la somme de deux séries analogues, l'une, que nous désignons par $\varphi_1 = \Sigma_1 a_{ij} \lambda^i \mu^j$, contient les termes pour lesquels $(\alpha_2 + j) c_1 \neq (\alpha_1 + i) c_2$, l'autre $\varphi_2 = \Sigma_2 a_{ij} \lambda^i \mu^j$ comprend au contraire les termes pour lesquels ces produits sont égaux entre eux.

Remplaçons dans la première série chaque binome $\lambda^i \mu^j$ par l'intégrale s_{ij} correspondante; la série obtenue

$$\Phi_1(u, v) = \Sigma_1 a_{ij} s_{ij},$$

est normalement convergente lorsque les inégalités (6) sont satisfaites, car les modules de ses termes ne peuvent surpasser les produits des termes correspondants de la série $\Sigma_1 \mathfrak{A}_{ij} \mathfrak{L}^{\alpha_1+i} \mathfrak{M}^{\alpha_2+j}$ par $|\alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2|$.

Dans les mêmes conditions, la série

$$\Phi_2(u) = \Sigma_2 a_{ij} \frac{s'_{ij}}{\log v} = (\alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2) \Sigma_2 a_{ij} \lambda^{\alpha_1+i} \mu^{\alpha_2+j}$$

est aussi normalement convergente.

Quand x décrit dans l'anneau considéré le chemin l, v décrit dans un anneau analogue un chemin l_v qui se déduit aisément du premier.

Affectons des indices 0 et 1 les éléments $(x, v, \ldots)$ relatifs à l'origine et à l'extrémité de l, l'intégrale définie est

$$\text{(13)} \qquad I = \Phi_1(u, v_1) - \Phi_1(u, v_0) + \Phi_2(u)(\log v_1 - \log v_0).$$

Tenons compte maintenant du choix particulier des extrémités des arcs l. Supposons que λ_0, μ_0 corresponde à $x_0 = mz^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} = m' u^{2\alpha_1 c_2}$ (m' est une constante, produit de m par une racine de l'unité), et

$$\text{(14)} \qquad v_0 = m'^{\frac{1}{\varepsilon}} u^{-1}, \qquad \varepsilon = \alpha_2 c_1 - \alpha_1 c_2.$$

Dans la série $\Phi_1(u, v_0)$, $s_{ij}(\lambda_0, \mu_0)$ est le produit d'un facteur numérique par $u^{2(\alpha_1+i)c_2} = z^{\frac{\alpha_1+i}{\gamma_1}}$; $\Phi_1(u, v_0)$ est donc une série entière en $z^{\frac{1}{\gamma_1}}$; on peut aussi lui donner la forme

$$\text{(15)} \qquad \Phi_1(u, v_0) = \sum_{s=0}^{\gamma_1 - 1} z^{\frac{s}{\gamma_1}} P_s(z),$$

les $P_s(z)$ étant des séries entières en z.

Si la seconde extrémité de l coïncide avec la première, on a pour v_1 une expression analogue à (14) (mais où le facteur de u^{-1} peut avoir une valeur différente); si, au contraire, la seconde extrémité est $x_1 = \mathrm{M} z^{\frac{\alpha_2}{\gamma_2}}$, on trouve

$$v_1 = \mathrm{M}^{\frac{1}{l^2}} u, \tag{16}$$

et

$$\Phi_1(u, v_1) = \sum_{s=0}^{\gamma_1 - 1} z^{\frac{s}{\gamma_2}} \mathrm{Q}_s(z), \tag{17}$$

en désignant par $\mathrm{Q}_s(z)$ des séries entières en z.

Les exposants de u dans les termes de la série $\Phi_2(u)$ sont d'après les formules (12) de la forme

$$(\alpha_2 + j)c_1 + (\alpha_1 + i)c_2 = 2(\alpha_2 + j)c_1 = 2(\alpha_1 + i)c_2,$$

leurs quotients par 2 sont multiples de c_1 et c_2 et par suite de $c_1 c_2$, comme $u^{2c_1c_2} = z^{\frac{1}{\mathrm{D}}}$ la série $\Phi_2(u)$, est une série entière en $z^{\frac{1}{\mathrm{D}}}$ où l'on peut grouper les termes de façon à avoir

$$\Phi_2(u) = \sum_{n=0}^{\mathrm{D}-1} z^{\frac{n}{\mathrm{D}}} \mathrm{R}_n(z), \tag{18}$$

les R_n sont des séries entières en z.

Il est facile de voir avec les expressions (14), (16) trouvées précédemment pour v_0 et v_1 et la relation (10) entre z et u, que $\log v_1 - \log v_0$ *est une constante si les deux extrémités de l'arc l sont sur une même circonférence frontière de l'anneau;* et, dans le cas contraire, cette différence est la somme d'une constante et de $\frac{1}{\mathrm{D} c_1 c_2} \log z$.

En résumé, si $\gamma_1 \gamma_2 \neq 0$, on peut grouper les termes de la série donnant I de façon à avoir une somme dont chacun des termes est le produit d'un facteur holomorphe en z, soit par une puissance de $z^{\frac{1}{\gamma_1}}$, soit par une puissance de $z^{\frac{1}{\gamma_2}}$, soit enfin par le produit d'une puissance de $z^{\frac{1}{\mathrm{D}}}$ par $\log z$ (¹).

(¹) La partie principale de cette intégrale (terme de degré minimum en z dans la

Bien entendu, pour une intégrale déterminée quelques-uns seulement des termes précédents peuvent intervenir (*voir* l'exemple 1° donné plus loin).

Examinons maintenant le cas où l'un des nombres γ_1, γ_2 est nul. L'anneau relatif à l'arête est maintenant remplacé par un cercle de centre $x=0$ (*A. É. N.*, 3, p. 148, note). Le chemin l entre dans ce cercle et en sort par un même point de la circonférence frontière; par déformation continue on peut le ramener à un nombre entier de parcours sur cette circonférence, et une intégrale abéloïde prise sur un tel chemin peut être rattachée à l'anneau de face dont cette circonférence est également frontière. La nature de l'intégrale considérée comme fonction de z résultera de l'étude que nous abordons maintenant.

5. Intégrales relatives à un anneau de face. — Soit avec les notations antérieures (n° 3)

$$m\,|z|^{\frac{\alpha}{\gamma}} \leqq |x| \leqq \mathrm{M}\,|z|^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

un anneau relatif à une face du polyèdre N; portons la représentation paramétrique (3) dans $g(x, y, z)=\frac{h}{k}$, nous avons une fonction de la forme $\lambda^{\rho}\varpi(\xi, \lambda)$, ρ est un entier (positif, négatif ou nul) tel que ϖ reste fini (et en général différent de zéro) quand ξ est dans son plan extérieur aux cercles σ_ξ qui correspondent aux cercles d'isolement. Dans les mêmes conditions, ϖ est holomorphe (car les cercles σ isolent non seulement les pôles, mais aussi les points de ramification), et les rayons de convergence associés des séries entières en $\xi-\xi_0$, λ donnant les développements de $\varpi(\xi, \lambda)$ au voisinage d'un point ξ_0 de l'anneau du plan ξ troué par les cercles σ_ξ ont une borne inférieure positive.

L'intégrale abéloïde devient

$$\mathrm{I}=\int_l g\,dx=\lambda^{\rho+\alpha}\int_{l_\xi}\varpi(\xi, \lambda)\,d\xi=\lambda^{\rho+\alpha}\mathrm{J} \qquad \mathrm{J}=\int_{l_\xi}\varpi\,d\xi,$$

l_ξ se déduit de l par la similitude qui permet de passer du plan x au

---

série I ordonnée suivant les puissances de $z^{\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}}$) peut se trouver en utilisant les indications de la note (1), p. 86.

plan ξ

$$x = \xi\lambda^{\alpha} \qquad (\lambda \text{ constant}),$$

et les extrémités de l_ξ sont des points dont les abscisses $(m, \mathrm{M}, \xi_l + \varepsilon)$ sont des constantes. Dans ces conditions, J est fonction holomorphe [1] de λ.

Remplaçons λ par $z^{\frac{1}{\gamma}}$, nous avons pour I soit une série entière en $z^{\frac{1}{\gamma}}$, soit la somme d'une telle série et d'un nombre fini de monones en $z^{\frac{1}{\gamma}}$ à exposants entiers et négatifs [2].

Chacun des chemins l et l_ξ peut aussi être constitué par plusieurs tours sur une courbe fermée, le nombre de ces tours étant tel qu'après leur parcours on retrouve la détermination initiale de la fonction algébroïde $y(x, z)$. A un tel chemin correspond une période locale de l'intégrale abéloïde considérée, et la période est une fonction de z de la forme que nous venons d'indiquer.

En résumé, *les intégrales correspondant aux parties l du chemin* L *extérieures aux cercles d'isolement ont ainsi la forme des intégrales régulières d'une équation différentielle linéaire du type de Fuchs, le logarithme figurant au plus au premier degré et les racines de l'équation déterminante étant des nombres rationnels dont les dénominateurs sont donnés par les projections γ sur Ωc des intervalles réticulaires des normales aux faces du polyèdre* N.

6. **Intérieur des cercles d'isolement.** — L'étude des intégrales cor-

---

(1) Le théorème appliqué ici, nature holomorphe d'une fonction d'un paramètre définie par une intégrale portant sur une fonction holomorphe de la variable d'intégration et du paramètre, est classique. La démonstration habituelle (GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. 2, Chap. XVII) utilise les méthodes de Cauchy; on peut procéder aussi par subdivision du chemin d'intégration et addition des intégrales partielles (*A. É. N.*, 1, nos 11, 12).

(2) La partie principale de cette intégrale I, c'est-à-dire le terme de degré minimum en $\lambda = z^{\frac{1}{\gamma}}$ est évidemment

$$\lambda^{\alpha+\rho}\int_{l_\xi} \varpi(\xi, 0)\, d\xi;$$

$\varpi(\xi, 0)$, a été calculé plus haut (p. 86, note); le coefficient de $\lambda^{\alpha+\rho}$ est (en général) une intégrale abélienne relative à la courbe $\mathrm{F}(\xi, \eta, 1) = 0$.

respondant à la partie l du chemin intérieure à un cercle d'isolement

$$\left| x - \xi_e z^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right| \leqq \varepsilon \left| z \right|^{\frac{\alpha}{\gamma}} \tag{19}$$

est facile. Le changement de variables utilisé en pareil cas (*A. É. N.*, 3, p. 162)

$$x = (\xi_e + x') z'^{\alpha}, \qquad y (\eta_e + y') z'^{\beta}, \qquad z = z'^{\gamma}, \tag{20}$$

fait correspondre à la surface analytique $f(x, y, z) = 0$ une surface analogue

$$f_1(x', y', z') = 0, \tag{21}$$

au cercle σ un cercle c' du plan x' ayant pour centre $x' = 0$. De même, la fraction $\dfrac{h(x, y, z)}{k(x, y, z)}$ devient $z'^{\nu} \dfrac{h_1(x', y', z')}{k_1(x', y', z')}$, ν étant entier (positif, négatif ou nul) et l'intégrale donne

$$\int_l \frac{h}{k}\, dx = z'^{\nu+\alpha} \int_{L'} \frac{h_1}{k_1}\, dx',$$

le nouveau chemin d'intégration L$'$ est, dans le plan x', intérieur à c'. Nous sommes ainsi ramenés au cas précédemment considéré; *les intégrales relatives aux chemins l intérieurs à σ* (mais extérieurs aux nouveaux cercles d'isolement σ_1 qu'il faut parfois considérer dans σ) *ont la forme précédemment considérée :* le dénominateur γ des racines de l'équation déterminante est toutefois remplacé par les produits tels que $\gamma\gamma_1$: γ provenant de la transformation (20) est donné par la face de N dont l'anneau contient σ, et γ_1 est donné par une face du polyèdre N_1 relatif à la surface (21).

On peut, de même, en pénétrant dans les nouveaux cercles σ_1, avoir à considérer des dénominateurs analogues $\gamma\gamma_1\gamma_2$, ... et ainsi de suite; l'introduction d'un nouveau cercle d'isolement donne un nouveau facteur, mais ce facteur est égal à l'unité et l'on s'arrête lorsqu'on parvient à caractériser un cycle d'Halphen (*A. É. N.*, 3, p. 171, note).

Si donc la réduction en cycles d'Halphen des singularités, c'est-à-dire des solutions des systèmes

$$f = 0, \qquad f'_y = 0,$$

et

$$f = 0, \qquad k = 0,$$

peut être effectuée par la méthode que nous venons d'indiquer, le résultat énoncé dans l'introduction se trouve établi.

7. **Exemples.** — 1° Reprenons d'abord les intégrales que nous avions antérieurement étudiées (*A. É. N.*, 1 et 2)

$$I = \int \frac{\theta(x, z)\, dx}{y},$$

où θ est une série entière, la fonction $y(x, z)$ est donnée par

$$y^2 = R(x, z), \tag{22}$$

R est un polynome de degré n en x,

$$R(x, o) = Ax^n,$$

A est une constante, les autres coefficients de ce polynome sont des séries entières en z s'annulant pour $z = o$, la série entière $R(o, z)$ commence par un terme du premier degré. Le chemin d'intégration part du point $x = r$ et y revient.

Soit $\mathcal{F}_1$ la face du polyèdre N ayant pour équation $c = o$, on a pour elle

$$\alpha_1 = \beta_1 = o, \qquad \gamma_1 = 1.$$

Le polyèdre N a une seule face $\mathcal{F}_2$ distincte des plans coordonnés, elle a pour équation

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{2} + c = 1.$$

On a donc :

pour n impair :

$$\alpha_2 = 2, \qquad \beta_2 = n, \qquad \gamma_2 = 2n,$$

pour n pair :

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \frac{n}{2}, \quad \gamma_2 = n.$$

Seules ces deux faces et leur arête d'intersection $\mathfrak{A}_{12}$ sont utiles; pour cette arête

$$D = 1, \qquad \gamma_1 = c_1, \qquad \gamma_2 = c_2.$$

Les valeurs de γ_2 donnant les dénominateurs des exposants de z dans la représentation de Fuchs des intégrales $I(z)$ concordent bien avec les résultats antérieurs.

Les termes en $\log z$ ne peuvent provenir que des arcs l intérieurs à l'anneau relatif à l'arête $\mathfrak{A}_{12}$. En considérant l'équation qui détermine la série entière $\psi(\lambda, \mu)$ des formules (2), on voit facilement que *si n est impair* les exposants de μ dans cette série sont tous pairs; ils sont alors tous impairs dans la série $\eta(1+\psi)\lambda^{\beta_1}\mu^{\beta_2}$ (puisque $\beta_2 = n$ impair). Ces exposants sont pairs pour la série provenant de $\theta(x, z)$; les nombres j, $\alpha_2 + j$, des expressions S_{ij} du n° 4 sont impairs et ne peuvent être égaux à

$$(\alpha_1 + i)c_2 = 2n(\alpha_1 + i)$$

qui est pair.

On retrouve ainsi l'absence de termes logarithmiques pour n impair.

Mais on l'explique plus simplement encore en observant d'abord que l'intégrale proposée lorsque le chemin L se compose d'un seul tour C sur la circonférence $|x| = r$, qui est dans l'anneau relatif à la face $\mathcal{F}_1$, est une fonction holomorphe de z. D'autre part, en ajoutant s'il est nécessaire, C à L, on peut obtenir qu'après parcours du chemin d'intégration on revienne au point de départ avec la même valeur de y; autrement dit ce chemin (complété au besoin) est un chemin fermé sur le cercle de Riemann et l'intégrale est une somme de périodes cycliques de l'intégrale I. Mais le tracé des coupures classiques $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $b_1, b_2, \ldots, b_p$ (Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, Chap. III) peut être fait évidemment de façon qu'elles ne sortent pas de la partie du cercle de Riemann qui correspond à l'anneau relatif à $\mathcal{F}_1$; la représentation de Fuchs de ces périodes ne fait donc pas intervenir de termes logarithmiques.

2° Considérons l'équation

$$y^3 + R(x, z) = 0, \tag{23}$$

où R est un polynome du quatrième degré en x dont les coefficients sont fonctions holomorphes de z, R(o, o) étant nul; écrivons les termes intervenant dans la construction de son polygone de Newton

$$R(x, z) = -x^4 + zx - z^2 + \ldots.$$

Le polyèdre N relatif au premier membre de (23) a une face $\mathcal{F}_0$ dans le plan $b = 0$; ses autres faces ont en commun le point o, 3, o de l'axe Ωb et passent par les côtés du polygone de Newton; deux faces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ de N sont distinctes des plans de coordonnées; elles sont seules intéressantes pour nous. Voici les valeurs des exposants α, β, γ et les polynomes F qui leur correspondent

$$(\mathcal{F}_1) \qquad \alpha_1 = 3, \qquad \beta_1 = 4, \qquad \gamma_1 = 9, \qquad F_1 = y^3 - x^4 + zx,$$
$$(\mathcal{F}_2) \qquad \alpha_2 = 3, \qquad \beta_2 = 2, \qquad \gamma_2 = 3, \qquad F_2 = y^3 + zx - z^2.$$

La surface de Riemann relative à (23) a quatre points de ramification à distance finie (et un à l'infini), les valeurs de x correspondantes sont les racines de $R = 0$, elles sont infiniment petites avec z et données par la méthode de Puiseux.

On a ainsi : un premier cycle de trois racines e_1, e_2, e_3, données par une série entière en $z^{\frac{1}{3}}$ dont le premier terme est $z^{\frac{1}{3}}$ et une autre racine e_4 fonction holomorphe de z, $e_4 = z + \ldots$.

A toutes ces racines est associée la même valeur $y = 0$; les quatre points de ramification sont d'ordre 2.

L'équation est de la forme

$$(24) \qquad y^3 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

étudiée dans un Ouvrage classique (Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, Chap. V) où se trouve la construction d'un système de coupures a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 rendant simplement connexe la surface de Riemann correspondante. Si l'on considère seulement le cercle de Riemann, partie de la surface de Riemann pour laquelle $|x| \leqq r$, r étant donné, on adjoint à ces coupures le contour Γ du cercle de Riemann (formé d'arcs de circonférences superposées) et une coupure α joignant Γ à l'une des coupures précédentes.

Soit

$$I(z) = \int \frac{h(x, y, z)}{y^2}\, dx$$

une intégrale abélienne attachée à la courbe (23), le numérateur est un polynome en x, y à coefficients holomorphes en z. Cette intégrale est de première ou de seconde espèce; considérons les périodes cycliques A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 correspondant aux *coupures* a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 *que nous supposons construites comme elles le sont dans l'ouvrage cité plus haut,* e_4 *jouant ici le rôle de* α.

Les coupures a_1, a_3, b_2, b_3 entourent les seuls points β, γ, δ; elles peuvent être tracées à l'intérieur de l'anneau du plan x correspondant à $\mathcal{F}_1$; *les périodes* A_1, A_3, B_2, B_3 *sont donc* (n° 5) *soit des fonctions holomorphes de* $z^{\frac{1}{3}}$, *soit la somme d'une telle fonction et de monomes en* $z^{\frac{1}{3}}$ *à exposants négatifs* $\left(\text{supérieurs évidemment à } -\frac{7}{3}\right)$.

Par contre, les coupures a_2 et b_1 entourent à la fois le point e_4 et l'un des points β, γ, δ; elles traversent nécessairement l'anneau du plan x correspondant à l'arête $\mathfrak{A}_{12}$ commune aux faces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ du polyèdre N; A_2 et B_1 *peuvent contenir des termes logarithmiques.*

3° Dans l'exemple précédent nous avions une intégrale abélienne; dans celui que nous allons donner il s'agit d'une intégrale abéloïde : le premier membre de la relation $f(x, y, z)$ ne se réduit pas à un polynome quand on l'ordonne par rapport à x et y. Toutefois, le théorème de factorisation de Poincaré-Weierstrass permet d'admettre que f est un polynome en y dont les coefficients sont des séries entières en x et z. Nous prendrons

$$I = \int \frac{h(x, y, z)\,dx}{f'_y},$$

avec

$$f = y^3 + P(x, z)y^2 + Q(x, z)y + R(x, z) = 0, \tag{25}$$

$$P(x, z) = A_{20}x^2 + A_{01}z + \ldots, \qquad Q(x, z) = B_{30}x^3 + B_{02}z^2 + \ldots,$$
$$R(x, y) = -x^4 + zx - z^2 + \ldots,$$

les termes écrits étant ceux qui interviennent dans la construction des polygones de Newton de ces trois séries.

Le polyèdre N relatif à (25) est le même que dans l'exemple précédent, les polynomes $F(x, y, z)$ relatifs aux deux faces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ ne sont pas changés non plus.

Par contre, les cycles d'Halphen correspondant aux solutions du système

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_y(x, y, z) = 0,$$

ne sont plus situés dans le plan $y = 0$; et le cercle de Riemann a 8 points de ramification simples au lieu de 4 points d'ordre 2.

Pour le démontrer, on étudie les fonctions algébroïdes définies par (25) à l'intérieur des cercles d'isolement (*A. É. N.*, 3, n° 14).

La courbe algébrique $F_1(\xi, \eta, 1)$ est ici $\eta^3 - \xi^4 + \xi = 0$, les tangentes parallèles à $\omega\eta$ et distinctes de cet axe sont données par les trois racines ξ_i de l'équation $\xi^3 - 1 = 0$, qui est aussi l'équation algébrique analogue que donne l'arête d'intersection de la face $\mathcal{F}_1$ et de la face $b=0$ du polyèdre N. On peut donc employer ici une substitution (*loc. cit.*, formules 33)

$$(26) \qquad x=(\xi_i+x')z', \qquad y=y', \qquad z=z'^3,$$

qui donne la nouvelle équation

$$g(x', y', z')=y'^3+B_{30}y'z'^3-3x'z'^4+\ldots,$$

le polyèdre N relatif à g admet la face (de troncature)

$$a+3b+2c=9.$$

On pose donc

$$x'=\xi'\lambda, \qquad y'=(\eta'+\psi)\lambda^3, \qquad z'=\lambda^2;$$

ξ' et η' vérifient l'équation

$$\eta'^3+B_{30}\eta'-3\xi'=0.$$

Pour cette courbe, les tangentes parallèles à $\omega\eta$ sont données par

$$3\eta'^2+B_{30}=0,$$

qui donne deux racines η_{i1}, η_{i2} auxquelles correspondent ξ_{i1}, ξ_{i2} et les cycles d'Halphen donnés par les formules

$$x=\xi_i t^2+\xi_{ih}t^3+\ldots, \qquad y=\eta_{ih}t^3+\ldots, \qquad z=t^6,$$

(caractérisés par les termes écrits) donnent bien pour z donné (voisin de zéro) six points de ramification simples du cercle de Riemann relatif à (25) : chaque cercle d'isolement $\left(\text{de centre } \xi_i z^{\frac{1}{3}} \text{ de rayon } \varepsilon|z|^{\frac{1}{3}}\right)$ contient un point de ramification e_i d'ordre 2 concernant la courbe algébrique (23) et deux points de ramification e_{i1}, e_{i2} simples concernant (25).

La face $\mathcal{F}_2$ donne de même la substitution

$$x=(1+x')z', \qquad y=y', \qquad z=z',$$

et l'équation

$$g(x', y', z')=y'^3+A_{01}y'^2z'+B_{02}y'z'^2+x'z'^2+\ldots=0.$$

Le polyèdre N qui la concerne a une face de troncature pour laquelle $\alpha=\beta=\gamma=1$, l'équation algébrique correspondante

$$\eta'^3+A_{01}\eta'^2+B_{02}\eta'+\xi'=0$$

représente une courbe ayant deux tangentes parallèles à $\omega\eta$, avec contacts simples, aux points ξ_{41}, η_{41}, ξ_{42}, η_{42}; η_{41}, η_{42} étant racines de

$$3\eta'^2 + 2A_{01}\eta' + B_{02} = 0.$$

Nous avons donc deux cycles d'Halphen où x et y sont fonctions holomorphes de z

$$x = z + \xi_{4i}z^2 + \ldots, \qquad y = \eta_{4i}z + \ldots;$$

et le cercle d'isolement de centre z de rayon $\varepsilon|z|$ contient encore un point de ramification e_4 d'ordre 2 relatif à (23) et deux points de ramification simples e_{41}, e_{42} relatifs à (25).

Soit (C) une courbe fermée sans point multiple tracée dans le plan représentatif de la variable complexe x, cette courbe entourant une fois le point de ramification e_h et les points de ramification simples correspondants e_{h1}, e_{h2}, tous les autres points de ramification étant extérieurs à (C). Il est facile de voir qu'en partant d'un point x_0 de (C) avec la détermination y_0 de y, on revient en x_0 après 1, 2, 3, ... tours dans le même sens en rencontrant successivement dans un ordre déterminé les trois racines y_0, y_1, y_2 de l'équation (25) considérée comme équation en y.

Il en résulte *qu'à l'extérieur du cercle d'isolement* σ_h *contenant* e_h, e_{h1}, e_{h2} *on peut admettre que les deux lignes de passage du cercle de Riemann relatif à* (25) (*lignes issues de* e_{h1}, e_{h2}, *qui unissent chacune deux feuillets*) *peuvent être remplacées par la ligne de passage unique du cercle de Riemann relatif à* (23) *issue de* e_h (*qui réunit les trois feuillets deux à deux*). Autrement dit, les cercles de Riemann relatifs à (23) et à (25) peuvent être construits de la même façon à l'extérieur des cercles d'isolement, mais les rondelles intérieures à ces cercles sont différentes. Néanmoins toutes ces rondelles sont simplement connexes.

On en conclut que les coupures a_i, b_i, c_i, d qui avec le contour extérieur Γ rendent le cercle de Riemann simplement connexe, peuvent être pris de la même façon pour les deux cercles de Riemann. Et comme les anneaux de face et d'arête que traversent ces coupures sont les mêmes dans les deux cas et correspondent aux mêmes exposants α, β, γ, *les conclusions énoncées plus haut pour les périodes locales de l'intégrale abélienne relative à* (23) *restent valables pour les périodes correspondantes de l'intégrale abéloïde relative à l'équation* (25).