LUCIEN GODEAUX

Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 55-79
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__55_0>

RECHERCHES

SUR LES

INVOLUTIONS CYCLIQUES DU TROISIÈME ORDRE

APPARTENANT

A UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A TROIS DIMENSIONS

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait qu'une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) est caractérisée par le fait que tout système linéaire de courbes tracé sur la surface est son propre adjoint; la surface possède donc une courbe canonique (et des courbes pluricanoniques) d'ordre zéro. Une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genres un, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ou de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Dans le premier cas, elle possède huit points unis; dans le second cas, elle est dépourvue de points unis et sur une surface image de cette involution, tout système linéaire de courbes est distinct de son adjoint, mais coïncide avec son second adjoint ou biadjoint [1]. On retrouve ainsi une surface découverte antérieurement par M. Enriques et qui peut se ramener, par une

---

(1) Cette observation a été faite par MM. Enriques et Severi. Nous aurons fréquemment recours, dans ce travail, aux propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. On trouvera un exposé de ces questions et la bibliographie y relative dans notre Ouvrage sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 270. Paris, Hermann, 1935).

transformation birationnelle, à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre ([1]).

Il était intéressant de se demander ce que donneraient des considérations analogues relatives aux variétés algébriques à trois dimensions. Considérons une variété algébrique à trois dimensions V, privée d'intégrales simples de première espèce, sur laquelle tout système linéaire de surfaces soit son propre adjoint. Cette variété possède donc des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. Soit I_2 une involution du second ordre appartenant à la variété V. Nous avons démontré que si l'involution I_2 est dépourvue de points unis ou possède ∞^1 points unis, tout système linéaire de surfaces tracé sur une variété image de l'involution est son propre adjoint. Si l'involution possède un nombre fini positif de points unis, tout système linéaire de surfaces tracé sur une variété image de l'involution est distinct de son adjoint, mais coïncide avec son biadjoint ([2]). On trouve donc ici une variété analogue à la surface de bigenre un de M. Enriques.

L'étude des involutions cycliques du troisième ordre appartenant à V, qui fait l'objet de ce travail, va nous conduire à une variété plus intéressante. Supposons que la variété V contienne une involution cyclique du troisième ordre I_3, possédant au plus ∞^1 points unis. Nous démontrons que si l'involution I_3 est dépourvue de points unis, ou possède une courbe unie (et éventuellement des points unis isolés), tout système linéaire de surfaces tracé sur la variété image de l'involution est son propre adjoint. Par contre, si l'involution I_3 possède un nombre fini (non nul) de points unis, tout système linéaire de surfaces tracé sur la variété image de l'involution est distinct de son adjoint et de son biadjoint, mais coïncide avec son triadjoint. *Cette variété est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro.* Pour une telle variété, on a donc

---

([1]) *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (*Mem. Soc. Ital. delle Scienze*, 1896, 3e série, t. X, p. 1-81). Au sujet de ces surfaces et de la bibliographie relative, voir notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 123, Paris, Hermann, 1934).

([2]) *Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, 9 déc. 1935, p. 1169-1170).

$P_g = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 1$, $P_4 = 0$, ..., et d'une manière générale $P_i = 0$ ou 1 suivant que i n'est pas ou est multiple de trois. Nous avons d'ailleurs construit un exemple d'une variété de cette nature.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Ses surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro;

2° Son irrégularité superficielle est nulle;

3° Il existe une transformation birationnelle T, de période trois, transformant la variété en elle-même.

Soit $|F|$ un système linéaire de surfaces tracées sur V. Puisque la surface canonique de V est d'ordre zéro, l'adjoint $|F'|$ de $|F|$ doit coïncider avec ce dernier système,

$$|F'| = |F|.$$

Ce fait entraîne comme conséquence que toutes les surfaces pluricanoniques de V sont d'ordre zéro et que tout système linéaire de surfaces tracé sur V est son propre adjoint.

D'autre part, le système caractéristique d'un système linéaire de surfaces tracées sur une variété d'irrégularité superficielle nulle, est complet (¹), donc sur une surface F de $|F|$, les surfaces de ce système découpent le système canonique complet.

La transformation birationnelle T engendre sur V une involution I_3, d'ordre trois. Cette involution peut posséder soit un nombre fini de points unis, soit une courbe unie (dont tous les points sont unis), soit une surface unie. Nous exclurons ce dernier cas, nous limitant à la considération d'involutions cycliques possédant ∞^0 et ∞^1 points unis.

2. Considérons sur V un système linéaire de surfaces $|A_1|$, simple,

(¹) *Voir* Rosati, *Sugli spazi normali delle varietà algebriche* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1908-1909, p. 75-84), et Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (*Rendiconti Circolo Matematico*, Palermo, 1909, t. XXVIII, p. 33-87). *Cf.* la fin du n° 17.

Rappelons qu'une variété d'irrégularité superficielle nulle est dépourvue d'intégrales simples de première espèce (Castelnuovo-Enriques).

n'ayant pas pour points-base des points unis de l'involution I_3. Au système $|A_1|$, T fait correspondre le système $|A_2|$ et T^2 le système $|A_3|$. Considérons le système linéaire complet

$$|F| = |A_1 + A_2 + A_3|.$$

Le système $|F|$ est transformé en lui-même par T et il en est de même de ses multiples. De plus, d'après les hypothèses faites sur $|A_1|$, ce système n'a pas pour points-base des points unis de l'involution I_3, à condition toutefois qu'aucun de ces points ne soit fondamental pour l'involution, hypothèse dans laquelle nous nous placerons désormais.

Le système $|F|$ ne peut être composé au moyen d'une involution distincte de I_3, puisque par hypothèse le système $|A_1|$ est simple, mais $|F|$ pourrait être composé au moyen de l'involution I_3. Plaçons-nous dans cette hypothèse et remarquons que les systèmes $|F|$, $|2F|$, ..., $|\lambda F|$, ... découpent, sur une surface F déterminée, le système canonique, le système bicanonique, ..., le système λ-canonique, ... de cette surface. Si tous les multiples de $|F|$ étaient composés au moyen de l'involution I_3, les systèmes pluricanoniques d'une surface F seraient tous composés au moyen de cette involution.

Soient $\overline{F}$ une surface générique du système $|F|$ et $\overline{I}_3$ l'involution cyclique d'ordre trois formée par les groupes de I_3 appartenant à $\overline{F}$. Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de $\overline{F}$ et $|C|$ le système canonique de cette surface, celui-ci est composé au moyen de $\overline{I}_3$ de même que les systèmes pluricanoniques $|2C|$, ..., $|\lambda C|$, ..., et le système $|\lambda C|$ a pour degré et genre

$$\lambda^2(p^{(1)} - 1), \qquad \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)(p^{(1)} - 1) + 1.$$

Observons que la surface $\overline{F}$ possède au plus un nombre fini de points unis de $\overline{I}_3$, et que par suite les courbes C, 2C, ..., λC, ... ne contiennent en général pas de points unis. Cela étant, si Φ est une surface image de $\overline{I}_3$ et Γ les courbes qui correspondent aux courbes C, au système $|\lambda C|$ correspondra le système $|\lambda\Gamma|$ de degré et genre

$$\frac{1}{3}\lambda^2(p^{(1)} - 1), \qquad \frac{1}{3}\lambda(\lambda + 1)(p^{(1)} - 1) + 1.$$

A partir d'une certaine valeur de λ, les systèmes $|\lambda C|$, $|\lambda\Gamma|$ sont réguliers, mais la dimension du premier croît plus vite que celle du second, alors que sous les hypothèses faites, ces dimensions doivent constamment être égales. Nous parvenons donc à une absurdité, et par conséquent si $|F|$ est composé au moyen de I_3, on peut le remplacer par un de ses multiples non composé au moyen de I_3. En changeant éventuellement de notation, nous pouvons donc supposer que $|F|$ est simple.

Le système de dimension minimum, compris dans $|F|$ et comprenant les surfaces $A_1 + A_2 + A_3$, est composé au moyen de I_3, et ses surfaces ne passent pas en général par les points unis de l'involution I_3. Nous désignerons par $|F_1|$ le système compris dans $|F|$, le plus ample possible, composé au moyen de I_3, contenant les surfaces $A_1 + A_2 + A_3$.

Le système $|F|$ contient un système linéaire partiel $|F_1|$ composé au moyen de I_3, par conséquent il en contient au moins un second $|F|$ et au plus un troisième $|F_3|$.

Supposons que $|F|$ ne contienne que deux systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$ composés au moyen de I_3. Alors, le système $|2F|$ en contient trois, que l'on peut représenter par

$$|2F_1|, \quad |F_1 + F_2|, \quad |2F_2|.$$

En changeant éventuellement de notations, nous pourrons donc toujours supposer que $|F|$ contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3.

Nous avons donc construit sur V un système linéaire de surfaces $|F|$, transformé en lui-même par T, contenant trois systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ composés au moyen de l'involution I_3, dont le premier n'a pas pour points-base des points unis de cette involution.

Nous désignerons respectivement par r, r_1, r_2, r_3 les dimensions de $|F|$, $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$. Remarquons qu'en remplaçant éventuellement $|F|$ par un de ses multiples, on peut supposer ces dimensions aussi grandes qu'on le veut.

3. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. A la variété V correspond birationnellement une variété que nous continuerons à désigner par V. De même, nous continuerons à appeler F les sections hyperplanes de ce nouveau modèle projectif de V.

A la transformation T correspond une transformation échangeant entre elles les sections hyperplanes et les faisceaux de sections hyperplanes de S_r; elle est donc déterminée par une homographie de période trois de S_r, que nous désignerons toujours par T.

L'homographie T possède trois systèmes linéaires d'hyperplans unis, découpant respectivement sur V les systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$, composés au moyen de I_3. Par conséquent, cette homographie possède trois axes ponctuels (espaces linéaires lieux de points unis) que nous désignerons par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$.

Pour préciser, nous supposerons que les hyperplans passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ découpent sur V le système $|F_1|$, les hyperplans passant par $S^{(3)}$, $S^{(1)}$, le système $|F_2|$, et enfin les hyperplans passant par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ le système $|F_3|$.

Le système $|F_1|$ n'a pas pour points-base des points unis de I_3, par conséquent, les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ ne rencontrent pas V, et sur le modèle projectif de cette variété envisagé ici, l'involution I_3 possède ∞^0 ou ∞^1 points unis, appartenant à l'axe $S^{(1)}$.

De plus, les espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ ont respectivement r_1, r_2, r_3 dimensions et, d'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$r_1 + r_2 + r_3 = r - 2.$$

4. Rapportons projectivement les surfaces F_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1} à r_1 dimensions, ou, si l'on préfère, projetons V sur $S^{(1)}$ à partir de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $S^{(2)}$, $S^{(3)}$. A la variété V correspond dans S_{r_1} une variété Ω image de l'involution I_3.

Nous désignerons par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ les systèmes linéaires qui correspondent respectivement à $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ sur Ω. Ces systèmes sont complets, et le premier est formé par les sections hyperplanes de Ω.

Si n est l'ordre de Ω, π le genre des courbes sections de cette variété par les espaces à $r_1 - 2$ dimensions, la variété V est d'ordre $3n$ et ses sections par les espaces à $r - 2$ dimensions de S_r sont de genre $3\pi - 2$. Désignons par C ces dernières courbes (courbes caractéristiques du système $|F|$); ce sont les courbes canoniques des surfaces F, et par conséquent si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de ces surfaces, on a

$$p^{(1)} = 3\pi - 2 = 3n + 1, \qquad n = \pi - 1.$$

Le genre arithmétique et le genre géométrique d'une surface F sont égaux, puisque l'irrégularité superficielle de V est nulle; on a $p_a = p_g = r$.

Observons encore que la variété Ω est nécessairement dépourvue d'intégrales de différentielles totales de première espèce, et que, par suite, son irrégularité superficielle est nulle.

I. — Involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

5. Nous commencerons par étudier les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis et, en premier lieu, celles qui en sont dépourvues.

Soit donc I_3 une involution privée de points unis, appartenant à la variété V. L'axe ponctuel $S^{(1)}$ de T ne rencontre donc pas V, et les systèmes de surfaces $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ sont analogues.

Nous nous appuierons sur le théorème suivant (¹) :

S'il existe sur une surface algébrique régulière une involution cyclique d'ordre premier p, dont le genre arithmétique n'est pas nul, privée de points unis, le transformé du système canonique de la surface image de l'involution est celui des systèmes composés au moyen de l'involution, formé de courbes canoniques de la surface, qui a la dimension minimum.

Supposons, pour fixer les idées, $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ et fixons l'attention sur une surface $\overline{F}_1$ de $|F_1|$. Soit $\overline{\Phi}_1$ la surface qui lui correspond sur Ω. Appliquons à la surface $\overline{F}_1$ la propriété qui vient d'être rappelée.

Le système canonique $|(\overline{F_1}, F)|$ de $\overline{F}_1$ contient trois systèmes linéaires partiels $|(\overline{F}_1, F_1)|$, $|(\overline{F}_1, F_2)|$, $|(\overline{F}_1, F_3)|$ composés au moyen de I_3 et dont les dimensions sont $r_1 - 1 < r_2 \leqq r_3$. Le transformé du système canonique de la surface $\overline{\Phi}_1$ est celui des systèmes précédents qui a la dimension minimun (²), c'est-à-dire $|(\overline{F}_1, F_1)|$. Il en résulte

(¹) L. Godeaux, *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, p. 672-679).

(²) On peut toujours supposer que la surface Φ_1 a le genre arithmétique supérieur à zéro, car on peut toujours remplacer $|F|$ par un de ses multiples. D'ailleurs, si le genre que les courbes canoniques de $\overline{\Phi}_1$ sont découpées sur cette surface par les surfaces Φ_1. Le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint,

$$|\Phi'_1| = |\Phi_1|,$$

la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro et tout système tracé sur Ω est son propre adjoint.

On en conclut

$$|\Phi'_2| = |\Phi_2|, \qquad |\Phi'_3| = |\Phi_3|.$$

Sur une surface F_2, il y a trois systèmes de courbes canoniques composés au moyen de I_3, et celui de ces systèmes quiest le transformé du système canonique de la surface Φ_2 homologue, a la dimension minimum. On a donc

$$r_2 - 1 < r_1 \leqq r_3,$$

d'où $r_1 = r_2$. On établirait de même $r_1 = r_2 = r_3$. On en déduit $r = 3r_1 + 2$.

Les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 ont les genres $\pi_a = \pi_g = r_1$, et les surfaces F_1 les genres $p_a = p_g = 3\pi_a + 1$. Entre les genres arithmétiques d'une surface F_i et de la surface Φ_i homologue, nous avons donc la relation

$$p_a + 1 = 3(\pi_a + 1),$$

conforme à la relation que nous avons établie antérieurement (¹).

A une surface F n'appartenant à aucun des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ correspond sur Ω une surface Φ. Lorsque F varie d'une manière continue dans $|F|$ et tend vers une surface F_1, la surface Φ se déplace d'une manière continue et se réduit à une surface $3\Phi_1$. De même, lorsque F tend vers une surface F_2 ou F_3, Φ se réduit à une surface $3\Phi_2$ ou $3\Phi_3$. On a donc

$$|3\Phi_1| = |3\Phi_2| = |3\Phi_3|$$

et la variété Ω a le diviseur $\sigma = 3$ (²).

---

arithmétique de Φ_1 était nul, cette surfaceserait isolée, et l'on a observé plus haut que la dimension r_1 de $|\Phi_1|$ pouvait être choisie aussi grande qu'on le veut.

(¹) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1929, p. 1-16). Cette formule pourrait d'ailleurs se déduire, comme nous l'avons fait remarquer, d'une formule très générale sur les correspondances entre les surfaces, due à M. Severi (*Rend. R. Istituto Lombardo*, 1903),

(²) *Voir* à ce sujet la fin du Mémoire de M. Severi, *La base minima pour la totalité*

Une involution cyclique du troisième ordre, privée de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions V *d'irrégularité superficielle nulle et possédant une surface canonique d'ordre zéro, a pour image une variété d'irrégularité superficielle nulle, possédant une surface canonique d'ordre zéro et de diviseur trois* [1].

6. Nous supposerons maintenant que l'involution I_3 possède un nombre fini de points unis et commencerons par étudier ceux-ci.

Un point uni A appartient, comme nous l'avons remarqué, à l'axe ponctuel $S^{(1)}$ de l'homographie T. Nous supposerons que le point A est simple pour la variété V, ce qui n'est d'ailleurs pas une restriction, et nous désignerons par α l'espace à trois dimensions tangent à V en A. Cet espace est transformé en lui-même par T; celle-ci subordonne dans α une homographie h.

L'espace α peut *a priori* occuper les positions suivantes :

1° Il a un plan en commun avec l'espace $S^{(1)}$ et rencontre l'un des axes $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, par exemple $S^{(3)}$, en un point.

2° Il a une droite en commun avec l'axe $S^{(1)}$ et rencontre soit l'espace $S^{(3)}$ suivant une droite, soit chacun des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ suivant un point.

3° Il n'a que le point A en commun avec l'espace $S^{(1)}$.

Dans les deux premiers cas, l'espace S_{r-2} commun à un hyperplan passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ et à un hyperplan passant par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, coupe en général la variété V suivant une courbe C ayant un point simple en A. Cette courbe C contient ∞^1 groupes de l'involution I_3, et l'on aurait ainsi, sur cette courbe, une involution n'ayant qu'un point uni, ce qui est en contradiction avec la formule de Zeuthen. On en conclut que l'espace tangent α en A à V n'a que le point A en commun avec $S^{(1)}$.

Cela étant, deux hypothèses peuvent être faites :

---

des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1908, p. 449-468). On y trouvera un aperçu de l'extension aux variétés algébriques de la théorie de la base construite par ce géomètre dans le cas des surfaces. Le nombre σ se définit pour les variétés comme pour les surfaces.

[1] Nous avons énoncé ce théorème, dans le cas plus général d'une involution cyclique d'ordre p dépourvue de points unis, dans une communication faite au *Congrès international des Mathématiciens*, à Oslo (juillet 1936).

1° L'espace α rencontre l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ suivant un plan (et ne rencontre pas l'autre).

2° L'espace α rencontre l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ suivant une droite, l'autre suivant un point.

Dans le premier cas, l'homographie h induite par T dans l'espace α est une homologie de centre A. Par analogie avec les surfaces, nous dirons que le point A est un point uni parfait.

Dans le second cas, l'homographie h est une homographie axiale hyperbolique générale, et nous dirons que le point A est un point uni non parfait.

Nous étudierons successivement ces deux sortes de points unis.

7. Soit A un point uni parfait de I_3. Supposons que l'espace tangent α à V en A rencontre l'axe $S^{(3)}$ suivant un plan α'. L'homographie h est donc une homologie de centre A et de plan α'.

Un hyperplan passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ coupe α suivant un plan τ, variable avec cet hyperplan. La surface F_3, section de V par l'hyperplan considéré a, en général, un point simple en A et touche en ce point le plan τ. Il en résulte que les groupes de I_3 appartenant à F_3 forment une involution ayant en A un point uni parfait (¹). Par conséquent, les surfaces F_1 passant par A coupent la surface F_3 considérée suivant une courbe ayant un point triple à tangentes distinctes et variables en A. On en conclut que sur une surface F_1 passant par A, les surfaces F_3 découpent des courbes ayant un point triple à tangentes variables en A. Par suite, le point A est triple pour les surfaces F_1 passant par ce point. On remarquera d'ailleurs qu'un hyperplan passant par les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ et par A, hyperplan coupant V suivant une surface F_1, contient l'espace α et que, *a priori*, A est au moins double pour la surface F_1 considérée.

Soit A′ le point de diramation de Ω qui correspond au point uni A. Deux surfaces F_1 passant par A se coupent suivant une courbe C ayant un point multiple d'ordre neuf en A et dans le domaine de ce point, il existe un point uni de I_3 sur chacune des neuf branches de la courbe. A cette courbe C correspond sur Ω une courbe Γ ayant un point multiple

(¹) *Recherches sur les involutions...* (*loc. cit.*).

d'ordre neuf en A'; cette courbe Γ appartient à un espace linéaire à $r_1 - 2$ dimensions passant par A'; donc ce point est multiple d'ordre neuf pour la variété Ω.

Désignons par Ψ le cône tangent, d'ordre neuf, à la variété Ω en A'. Observons que les cônes cubiques tangents en A aux surfaces F_1 passant par ce point, appartiennent à l'espace α, et que, d'autre part, il y a une projectivité entre les surfaces F_1 passant par A et les sections hyperplanes de Ω passant par A'. On en conclut que le cône Ψ représente les cônes cubiques de sommet A appartenant à l'espace à trois dimensions α. En d'autres termes, les sections du cône Ψ par des hyperplans ne passant pas par A', sont des surfaces du neuvième ordre représentant les courbes du troisième ordre d'un plan. Une telle surface appartient à un espace linéaire à neuf dimensions, par conséquent le cône Ψ appartient à un espace linéaire à dix dimensions.

A un point uni parfait de l'involution I_3 *sur* V *correspond sur* Ω *un point de diramation multiple d'ordre neuf pour cette variété, le cône tangent ayant pour sections hyperplanes des surfaces représentant les cubiques d'un plan.*

8. Supposons maintenant que A soit un point uni non parfait. L'espace α s'appuie en une droite a sur $S^{(3)}$ et en un point A_1 sur $S^{(2)}$. L'homographie h induite par T dans cet espace possède un axe ponctuel a et deux points unis isolés A, A_1 (homographie axiale hyperbolique générale).

Les surfaces F_1 passant par A appartiennent à des hyperplans passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, A et contenant par suite α; elles ont donc en A un point double au moins.

Les surfaces F_2 ont en A un point simple, le plan tangent à ces surfaces en ce point étant le plan Aa. L'involution formée par les groupes de I_3 appartenant à une surface F_2 possède en A un point uni parfait; par conséquent, les surfaces F_1 passant par A découpent sur cette surface des courbes ayant un point triple à tangentes variables en A. Par suite, les surfaces F_2 coupent toute surface F_1 passant par A suivant des courbes ayant un point triple en A.

Les surfaces F_3 ont, en général, un point simple en A; le plan tangent en ce point à une de ces surfaces contient deux tangentes et deux seulement unies pour T; ce sont la tangente AA_1 et une droite située dans le plan Aa. On sait que les surfaces F_1 passant par A découpent, sur une surface F_3, des courbes ayant un point double en A, une des tangentes en ce point étant la droite AA_1, l'autre la droite située dans dans le plan Aa, dont il vient d'être question. Les surfaces F_3 découpent donc, sur les surfaces F_1 passant par A, des courbes ayant un point double en ce point.

Il résulte de tout ceci qu'une surface F passant par A a nécessairement un point double biplanaire en ce point, l'un des plans tangents étant le plan Aa, l'autre plan tangent passant par la droite AA_1.

Deux surfaces F_1 passant par A se rencontrent suivant une courbe ayant un point quadruple en ce point, une des tangentes étant la droite AA_1, les trois autres tangentes appartenant au plan Aa. Sur une telle courbe, il y a quatre points unis de I_3, infiniment voisins de A. On en conclut qu'au point de diramation A' de Ω, homologue de A, la variété Ω possède un point quadruple.

Puisque toutes les surfaces F_1 passant par A y sont tangentes à la droite AA_1, au point infiniment voisin de A situé sur cette droite correspondent les points infiniment voisins de A' sur Ω, situés dans un plan ψ_1.

D'autre part, aux droites du faisceau de centre A et de plan Aa correspondent des tangentes à Ω en A' formant un cône cubique rationnel Ψ_3.

Il résulte de nos recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique, déjà citées, que les surfaces Φ_3 ont en A' un point double biplanaire. Fixons l'attention sur une surface F_3 et la surface Φ_3 homologue; soient α' le plan tangent à F_3 en A, a' la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan Aa. Au point infiniment voisin de A sur la droite AA_1 correspondent les points infiniment voisins de A' dans le plan ψ_1; au point infiniment voisin de A sur la droite a' correspondent les points infiniment voisins de A' situés dans un certain plan ψ'_1 passant par A' et coupant ψ_1 suivant une droite. La surface Φ_3 a comme plans tangents en A' les plans ψ_1, ψ'_1. Le cône tangent à Ω en A' est le lieu du plan ψ'_1. Ce plan coupe le cône ψ_3 suivant la droite qui correspond à la droite a' du plan Aa. D'autre part, à chaque plan de l'espace α passant par AA_1 correspond une droite du plan ψ_1 passant par A′, précisément la droite $\psi_1\psi'_1$. On en conclut qu'il existe une homographie entre les droites du faisceau (A', ψ_1) et les droites du cône ψ_3, les plans ψ'_1 étant déterminés par les couples de droites homologues.

Coupons la figure par un hyperplan ξ ne passant pas par A′. La section de ψ_3 par ξ est une cubique gauche (ξ, ψ_3); la section de ψ_1 une droite (ξ, ψ_1) homographique à la cubique gauche précédente. Les sections des plans ψ' par ξ sont des droites engendrant une surface réglée normale du quatrième ordre, et le cône tangent à Ω en A′ est la projection de cette réglée à partir de A′. Ce cône appartient en général à un espace à cinq dimensions.

A un point uni non parfait de l'involution I_3 *sur* V *correspond sur* Ω *un point de diramation multiple d'ordre quatre pour cette variété, le cône tangent ayant pour sections hyperplanes des surfaces réglées rationnelles normales, dont les directrices sont une droite et une cubique gauche homographiques* [1].

9. Nous allons maintenant rechercher l'influence des points unis de I_3 sur la détermination des systèmes adjoints à $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$.

Supposons en premier lieu que l'involution I_3 possède un point uni parfait A, l'espace α tangent à V en A coupant l'axe $S^{(3)}$ de T suivant un plan α'.

Les surfaces F_1 ne passent pas en général par A. Les surfaces F_2 appartiennent à des hyperplans contenant $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, A, donc l'espace α, et ont donc un point double en A. Les surfaces F_3 passent simplement par A.

Nous avons remarqué que l'involution d'ordre trois déterminée par I_3 sur une surface F_3 avait en A un point uni parfait. Par conséquent, aux courbes canoniques de la surface Φ_3 homologue correspondent sur F_3 des courbes canoniques passant simplement par A. Ces dernières courbes ne peuvent être découpées que par les surfaces F_1, F_2 ou F_3. Or, les sections de F_3 par les surfaces F_1 ne passent pas en

(1) Au sujet des deux derniers théorèmes, voir notre note *Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1931, p. 29-39).

général par A; les sections de F_3 par les surfaces F_2 ont un point double en A et les surfaces F_1, F_2 ne peuvent nous convenir.

Restent les surfaces F_3. Observons que deux hyperplans passant par $S^{[1]}$, $S^{[2]}$ coupent en général l'espace α suivant des plans distincts, c'est-à-dire que deux surfaces F_3 ont en général des plans tangents distincts en A. On en conclut que l'adjoint du système $|\Phi_3|$ coïncide avec ce système.

Si l'involution I_3 *possède un point uni parfait, la variété* Ω *possède une surface canonique d'ordre zéro.*

Supposons, en second lieu, que l'involution I_3 possède un point uni non parfait A, l'espace α tangent à V en A s'appuyant suivant une droite a sur $S^{[3]}$ et en un point A_1 sur $S^{[2]}$.

Comme nous l'avons vu, les surfaces F_2 ont en A un point simple, le plan tangent en ce point étant le plan Aa. L'involution d'ordre trois déterminée par I_3 sur une surface F_2 possède en A un point uni parfait, donc les courbes canoniques de cette surface, transformées des courbes canoniques de la surface Φ_2 homologue, passent simplement par A. Observons que les surfaces F_1 ne passent pas en général par A; que les surfaces F_2 ont même plan tangent en A et que, par suite, la courbe commune à deux de ces surfaces a un point double en A; enfin que les surfaces F_3 passent simplement par A sans y toucher les surfaces F_2. On en conclut que l'adjoint de $|\Phi_2|$ est le système $|\Phi_3|$, c'est-à-dire

$$|\Phi'_2| = |\Phi_3|.$$

Une surface F_3 contient ∞^2 groupes de I_3 formant une involution dont A est un point uni parfait, donc les courbes canoniques de cette surface transformées des courbes canoniques de la surface Φ_3 homologue ne passent pas en général par A. On en déduit que l'adjoint de $|\Phi_3|$ est $|\Phi_1|$;

$$|\Phi'_3| = |\Phi_1|.$$

L'adjoint du système $|\Phi_1|$ ne peut être que $|\Phi_2|$:

$$|\Phi'_1| = |\Phi_2|.$$

On en conclut que la variété Ω ne possède pas de surface canonique.

Le second adjoint de $|\Phi_1|$ est

$$|\Phi''_1| = |\Phi'_2| = |\Phi_3|,$$

par conséquent, la variété Ω est dépourvue de surface bicanonique.

Le troisième adjoint de $|\Phi_1|$ est

$$|\Phi_1'''| = |\Phi_3'| = |\Phi_1|,$$

par conséquent, la variété Ω possède une surface tricanonique d'ordre zéro.

Si l'involution I_3 *possède un point uni non parfait, la variété* Ω *est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro.*

On en conclut que :

L'involution I_3 *ne peut posséder à la fois des points unis parfaits et des points unis non parfaits.*

10. Considérons une involution I_3 ne possédant que des points unis parfaits. En un certain nombre, τ_2, de ces points, les espaces tangents à V rencontreront l'axe $S^{(2)}$ de T suivant des plans, et, aux τ_3 points restants, les espaces tangents à V rencontreront l'axe $S^{(3)}$ suivant des plans. Nous désignerons par A_2 l'un quelconque des premiers points, par A_3 l'un quelconque des derniers.

Les surfaces F_2 possèdent des points simples, à plans tangents variables, aux points A_2 et des points doubles, à cônes tangents variables, aux points A_3. Les surfaces F_3 passent doublement par les points A_2 et simplement par les points A_3.

Considérons une surface F_1 soit $\overline{F}_1$, ne passant par aucun des points A_2, A_3, et soit $\overline{\Phi}_1$ la surface qui lui correspond sur Ω. Le genre arithmétique de $\overline{F}_1$ est $p_a = r$ et celui de $\overline{\Phi}_1$ est $\pi_a = r_1$. Puisque la correspondance entre $\overline{\Phi}_1$ et $\overline{F}_1$ est dépourvue de points de diramation, on a

$$p_a + 1 = 3(\pi_a + 1). \tag{1}$$

D'autre part, nous avons établi [1] que les systèmes de courbes $|(\overline{F}_1, F_2)|$, $|(\overline{F}_1, F_3)|$, compris dans le système canonique de F_1, composés avec I_3 et qui ne sont pas les transformés du système canonique de $\overline{\Phi}_1$, ont la dimension π_a. Les systèmes $|F_2|$, $|F_3|$ ont donc la dimension $r_2 = r_3 = \pi_a$. Il en résulte que, bien que la correspondance entre une surface Φ_2 (ou Φ_3) et la surface homologue F_2 (ou F_3) ait des

[1] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis*... (*loc. cit.*).

points de diramation, la relation (1) subsiste entre les genres arithmétiques de ces surfaces.

Mais, d'autre part, il existe, entre les genres arithmétiques des surfaces Φ_2, F_2, une relation tenant compte des éléments de diramation de la correspondance entre ces surfaces, relation que l'on peut déduire des formules de M. Severi [1].

Considérons une surface $\overline{F}_2$ et la surface $\overline{\Phi}_2$ homologue. La surface $\overline{\Phi}_2$ est obtenue en rapportant projectivement les courbes découpées sur $\overline{F}_2$ par les surfaces F_1 aux hyperplans de l'espace linéaire à r_1 dimensions contenant Ω. C'est une surface normale d'ordre $\pi^{(1)}-1$ et dont les sections hyperplanes ont le genre $\pi^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ étant le genre linéaire de Φ_1.

On a, d'ailleurs, entre $\pi^{(1)}$ et le genre linéaire $p^{(1)}$ des surfaces F, la relation

$$p^{(1)}-1=3(\pi^{(1)}-1).$$

Nous savons que la surface $\overline{\Phi}_2$ possède, aux τ_2 points de diramation A'_2 homologues des points A_2, des points triples à cônes tangents rationnels.

En un point A_3, la surface $\overline{F}_2$ a un point double conique et les surfaces F_1 contenant ce point, des points triples coniques. On en conclut qu'aux points de diramation A'_3, homologues des points A_3, la surface $\overline{\Phi}_2$ a des points sextuples coniques. On observe d'ailleurs que le domaine d'un point A_3, sur la surface F_2, équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2 unie pour l'involution I_3 appartenant à $\overline{F}_2$.

Soit δ la classe de la surface $\overline{\Phi}_2$. En considérant un faisceau de sections hyperplanes de cette surface, on trouve, pour l'invariant de Zeuthen-Segre I' de $\overline{\Phi}_2$, la valeur

$$I'=\delta+3\tau_2+6\tau_3-(\pi^{(1)}-1)-4\pi^{(1)}.$$

L'invariant de Zeuthen-Segre I de $\overline{F}_2$, calculé au moyen du faisceau correspondant, a pour valeur

$$I=3\delta+4\tau_2+6\tau_2-(p^{(1)}-1)-4p^{(1)}.$$

---

(1) *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, 1903, p. 495-511).

L'élimination de δ entre ces deux relations donne

$$(2) \qquad 3(I'+4) = I + 4 + 5\tau_2 + 12\tau_3.$$

D'autre part, les courbes canoniques de $\overline{\Phi}_2$ ont pour transformées, sur $\overline{F}_2$, les courbes découpées sur les surfaces F_2. Ces courbes passent simplement par les points A_2 et ont des points quadruples aux points A_3. On en conclut que le genre linéaire $\rho^{(1)}$ de la surface $\overline{\Phi}_2$ est donné par

$$(3) \qquad 3(\rho^{(1)} - 1) = p^{(1)} - 1 - \tau_2 - 4\tau_3.$$

En additionnant membre à membre les équations (2) et (3) et, en tenant compte de la formule de Noether,

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9,$$

on obtient

$$3 \times 12(\pi_a + 1) = 12(p_a + 1) + 4\tau_2 + 8\tau_3.$$

Comparant cette relation à la formule (1), on en conclut $\tau_2 = \tau_3 = 0$.

Si une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une variété algébrique V *d'irrégularité superficielle nulle et possédant une surface canonique d'ordre zéro, n'a qu'un nombre fini de points unis, ceux-ci sont des points unis non parfaits.*

11. Supposons maintenant que V contienne une involution I_3 possédant des points unis non parfaits. Nous avons vu que dans ce cas, la variété Ω image de l'involution I_3 est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro.

Supposons qu'en un des points unis A_1, l'espace tangent à V rencontre $S^{(3)}$ suivant une droite et $S^{(2)}$ suivant un point, et qu'en un second point uni A_2, l'espace tangent à V rencontre $S^{(3)}$ suivant un point et $S^{(2)}$ suivant une droite.

L'existence du premier point entraîne, comme nous l'avons vu,

$$|\Phi'_2| = |\Phi_3|, \qquad |\Phi'_3| = |\Phi_1|.$$

L'existence du second point entraîne, au contraire,

$$|\Phi'_3| = |\Phi_2|.$$

Les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ étant distincts, nous arrivons à une absurdité.

Nous supposerons donc que l'involution I_3 possède τ points unis, l'espace tangent à V en chacun de ces points rencontrant $S^{(3)}$ suivant une droite et $S^{(2)}$ en un point.

Dans ces conditions, on a

$$|\Phi'_1| = |\Phi_2|, \qquad |\Phi'_2| = |\Phi_3|, \qquad |\Phi'_3| = |\Phi_1|.$$

Il en résulte que les genres arithmétiques des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont respectivement $r_2 + 1, r_3 + 1, r_1 + 1$. Sur une surface $\overline{\Phi}_1$, nous avons trois systèmes linéaires $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_1)|$, $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_2)|$, $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_3)|$ provenant de systèmes appartenant au système canonique de la surface $\overline{F}_1$ homologue de $\overline{\Phi}_1$. L'un de ces systèmes, le second, est le système canonique de $\overline{\Phi}_1$. D'après le théorème invoqué plus haut sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique, théorème applicable ici puisque $\overline{F}_1$ ne passe pas en général par les points unis de I_3, les systèmes $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_1)|$, $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_3)|$ ont la dimension π_a, $\pi_a = r_2 + 1$ étant le genre arithmétique de $\overline{\Phi}_1$. On a donc

$$r_1 - 1 = r_3 = r_2 + 1, \qquad 3r_1 = r + 1.$$

Entre les genres arithmétiques π_a de Φ_1 et p_a de F_1, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 3(\pi_a + 1)$$

qui se ramène à $3r_1 = r + 1$.

L'involution déterminée par I_3 sur la surface F_2 possède τ points unis parfaits; entre le genre arithmétique p_a d'une surface F_2 et le genre arithmétique π'_a de la surface Φ_2 correspondante, nous avons la relation

$$3(p_a + 1) = q(\pi'_a + 1) - \tau.$$

On a $p_a = r$, $\pi'_a = r_3 + 1 = r_1$, d'où $\tau = 9$.

De même, l'involution déterminée par I_3 sur une surface F_3 possède τ points unis non parfaits. Entre le genre arithmétique p_a de cette surface et le genre arithmétique π''_a de la surface Φ_3 homologue, on a la relation

$$3(p_a + 1) = q(\pi''_a + 1) - 2\tau.$$

Nous avons $p_a = r$, $\pi''_a = r_1 + 1$; on en déduit $\tau = 9$, ce qui confirme le résultat précédent.

Si une involution cyclique du troisième ordre, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions d'irrégularité superficielle nulle et ayant une surface canonique d'ordre zéro, possède un nombre fini de points unis, ceux-ci sont des points unis non parfaits et sont au nombre de neuf. La variété image de l'involution est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique d'ordre zéro (¹).

II. — Involutions ayant une courbe unie.

12. Après avoir considéré les involutions ayant un nombre fini de points unis, nous passerons à l'étude des involutions ayant une courbe unie.

Soit donc I_3 une involution cyclique ayant une courbe unie D. Cette courbe appartient à l'axe $S^{(1)}$ de l'homographie T. Nous supposerons que la courbe D est simple pour la variété V et que l'espace linéaire à trois dimensions tangent à V en un point de D n'a en commun avec $S^{(1)}$ que la tangente à la courbe D en ce point. Cet espace tangent est uni pour l'homographie T et deux hypothèses peuvent être faites :

1° L'espace tangent à V en un point de la courbe D rencontre l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ suivant une droite et ne rencontre pas l'autre.

2° Cet espace rencontre les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ chacun en un point.

Dans le premier cas, nous dirons que la courbe D est une courbe unie parfaite, dans le second une courbe unie non parfaite.

Désignons par τ l'ordre de la courbe D. Un hyperplan ξ passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ coupe la courbe D en τ points et la variété V suivant une surface $\overline{F}_1$. L'involution d'ordre trois déterminée sur cette surface $\overline{F}_1$ par I_3 possède des points unis aux τ points de rencontre de la courbe D avec l'hyperplan ξ. Soit A un de ces points et soit α l'espace tangent en A à la variété V.

Si la courbe D est une courbe unie parfaite, l'espace α coupe l'un des

(¹) Nous avons construit récemment un exemple de l'involution considérée ici; voir notre note *Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1937, p. 82-96).

espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, par exemple le dernier, suivant une droite a'. Le plan tangent à la surface $\overline{F}_1$ en A est le plan Aa'. Toutes les droites de ce plan passant par A sont unies pour l'homographie T, et le point A est uni parfait pour l'involution d'ordre trois appartenant à F_1.

Au point A correspond, sur la surface $\overline{\Phi}_1$ de Ω homologue de $\overline{F}_1$, un point de diramation A'. Nous avons démontré que le point A' est triple conique (à cône tangent rationnel) pour la surface $\overline{\Phi}_1$. On en déduit que la courbe de diramation Δ, qui correspond sur Ω à la courbe D, est triple pour cette variété. La courbe Δ est évidemment d'ordre τ.

Si l'involution I_3 *possède une courbe unie parfaite, la courbe de diramation correspondante sur la variété* Ω *image de l'involution, est triple pour cette variété.*

Si D est une courbe unie non parfaite, l'espace α s'appuie en un point A_2 sur $S^{(2)}$ et en un point A_3 sur $S^{(3)}$. La surface $\overline{F}_1$ a comme plan tangent en A le plan AA_2A_3, et dans ce plan, l'homographie T détermine une homographie non homologique ayant comme points unis A, A_2, A_3. Le point A est uni non parfait pour l'involution déterminée par I_3 sur $\overline{F}_1$. Nous avons démontré que le point de diramation A' homologue de A sur Ω est double biplanaire ordinaire pour la surface Φ_1 qui correspond à $\overline{F}_1$.

Laissons fixe le point A et faisons varier l'hyperplan ξ passant par A. L'hyperplan ξ' découpant sur Ω la surface $\overline{\Phi}_1$ varie en passant toujours par A'. Toutes les sections hyperplanes de Ω faites par des hyperplans passant par A' ont donc en ce point un point double biplanaire ordinaire. Il en résulte que la variété Ω a un point double en A', le cône tangent à la variété en ce point étant formé de deux espaces linéaires à trois dimensions.

Si l'involution I_3 *possède une courbe unie non parfaite, la courbe de diramation correspondante sur la variété* Ω *image de l'involution, est double pour cette variété.*

13. Reprenons, pour l'étudier plus en détail, le cas où l'involution I_3 possède une courbe D unie parfaite, les espaces tangents à la variété V

aux points de cette courbe rencontrant l'axe $S^{(3)}$ de T suivant des droites et ne rencontrant pas l'axe $S^{(2)}$.

Les surfaces F_2 sont découpées sur V par les hyperplans passant par $S^{(1)}$ et $S^{(3)}$; ces hyperplans contiennent les espaces tangents à V aux points de D, donc cette courbe est double pour les surfaces F_2.

Les surfaces F_3 sont découpées sur V par les hyperplans passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ de T; ces hyperplans ne contiennent par les espaces tangents à V aux points de la courbe D, donc celle-ci est simple pour les surfaces F_3.

Reprenons la surface $\overline{F}_1$ et son homologue $\overline{\Phi}_1$ sur Ω. Les points de D appartenant à $\overline{F}_1$ sont des points unis parfaits de l'involution déterminée par I_3 sur cette surface, donc aux courbes canoniques de $\overline{\Phi}_1$ correspondent sur $\overline{F}_1$ des courbes canoniques de cette surface passant simplement par les points unis en question. Il en résulte que le système canonique de $\overline{\Phi}_1$ est découpé sur cette surface par le système $|\Phi_3|$. L'adjoint de $|\Phi_1|$ est donc

$$|\Phi'_1| = |\Phi_3|.$$

Considérons une surface $\overline{F}_3$ et soit $\overline{\Phi}_3$ la surface homologue sur Ω. L'involution déterminée par I_3 sur $\overline{F}_3$ possède une courbe unie D, donc aux courbes canoniques de $\overline{\Phi}_3$ correspondent sur $\overline{F}_3$ des courbes qui, jointes à la courbe D comptée deux fois, donnent des courbes canoniques de cette surface. Il en résulte que ces courbes sont découpées sur $\overline{F}_3$ par les surfaces F_2. Par conséquent, l'adjoint de $|\Phi_3|$ est

$$|\Phi'_3| = |\Phi_2|.$$

Par conséquent, l'adjoint du système $|\Phi_2|$ est nécessairement

$$|\Phi'_2| = |\Phi_1|.$$

Considérons une surface $\overline{F}_2$ et la surface $\overline{\Phi}_2$ correspondante. Comme nous l'avons vu, la surface $\overline{F}_2$ a comme courbe double la courbe D. Chaque point de $\overline{F}_2$, infiniment voisin de D, est uni pour l'involution I_3. Il en résulte qu'à une courbe canonique de $\overline{\Phi}_2$ correspond sur $\overline{F}_2$ une courbe qui, ajoutée aux courbes de $\overline{F}_2$ infiniment voisines de D, donne une courbe canonique de la surface. Cette courbe canonique ne peut être située sur une surface F_1 et par conséquent $|\Phi_1|$ ne peut être l'adjoint de $|\Phi_2|$. Nous parvenons donc à une contradiction.

Si l'involution I_3 possède une courbe unie, celle-ci est nécessairement une courbe unie non parfaite.

14. Cela étant, considérons sur V une involution I_3 possédant une courbe unie non parfaite D. En tout point A de D, l'espace α tangent à V s'appuie en un point A_2 sur $S^{(2)}$ et en un point A_3 sur $S^{(3)}$. Lorsque le point A décrit D, la droite AA_2 engendre une surface que nous désignerons par Δ_2 et la droite AA_3, une surface qui sera désignée par Δ_3.

Les surfaces F_2, découpées sur V par les hyperplans passant par $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, contiennent la courbe D. En un point A de cette courbe, le plan tangent à une surface F_2 est déterminé par la tangente à D en A et par la droite AA_3 ; il en résulte que les surfaces F_2 passent simplement par la courbe D et se raccordent, le long de cette courbe, à la surface Δ_3.

De même, les surfaces F_3 passent simplement par la courbe D et se raccordent, le long de cette courbe, à la surface Δ_2.

Les points de rencontre d'une surface F_1 avec la courbe D sont des points unis non parfaits de l'involution déterminée sur cette surface par I_3. Par conséquent, aux courbes canoniques de la surface Φ_1 homologue, correspondent sur la surface F_1 considérée des courbes canoniques ne passant pas par les points unis en question. Il en résulte que $|\Phi_1|$ est son propre adjoint. La variété Ω possède donc une surface canonique d'ordre zéro.

A une courbe canonique d'une surface Φ_2 correspond sur la surface homologue F_2, une courbe qui, augmentée de la courbe D comptée deux fois, donne une courbe canonique de cette surface. Comme les surfaces F_2 se raccordent le long de D, cette courbe est tracée par une autre surface F_2. Il en résulte que $|\Phi_2|$ est son propre adjoint, ce qui découlait d'ailleurs du fait que Ω possède une surface canonique d'ordre zéro.

De même, le système $|\Phi_3|$ est son propre adjoint.

Si l'involution I_3 possède une courbe unie (non parfaite), la variété image de l'involution possède une surface canonique d'ordre zéro.

15. Supposons que l'involution I_3 possède une courbe unie (non parfaite) D, éventuellement réductible, sans aucun point uni en dehors de cette courbe.

Les surfaces F passant par la courbe D sont transformées les unes dans les autres par T et le système qu'elles forment contient deux systèmes linéaires $|F_2|$, $|F_3|$ de surfaces unies; par conséquent il y a r_2+r_3+2 surfaces F linéairement indépendantes passant par D. Il en résulte que la courbe D appartient à un espace linéaire ayant $r-r_2-r_3-2=r_1$ dimensions et non à un espace de dimension inférieure. La courbe D détermine donc complètement l'espace $S^{(1)}$, et par suite la courbe de diramation Δ qui lui correspond sur Ω ne peut appartenir à une section hyperplane de cette variété.

Fixons l'attention sur une surface $\overline{F}_1$ et sur la surface $\overline{\Phi}_1$ qui lui correspond sur Ω. Entre le genre arithmétique $p_a=r$ de $\overline{F}_1$ et celui, $\pi_a=r_1$, de $\overline{\Phi}_1$, nous avons la relation

$$3(p_a+1)=9(\pi_a+1)-2\tau.$$

On en déduit que τ est multiple de 3; nous poserons $\tau=3\tau'$. On a alors

$$r+1=3(r_1+1)-2\tau'.$$

Les courbes $(\overline{\Phi}_1, \Phi_2)$ sont de degré $n-2\tau'$ et de genre $n-\tau'+1$; elles ne peuvent être spéciales et, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension r_2 du système $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_2)|$ satisfait donc à l'inégalité

$$r_2 \geqq \pi_a-\tau'.$$

On a de même

$$r_3 \geqq \pi_a-\tau'.$$

On en déduit, en tenant compte de l'égalité précédente et de la relation liant r, r_1, r_2 et r_3,

$$r_2+r_3 \geqq 2\pi_a-2\tau'=2r_1-2\tau'=r-r_1-2, \qquad r_2=r_3=\pi_a-\tau'.$$

Nous avons montré antérieurement l'existence d'une involution du type considéré ici [1].

---

[1] *Sur deux involutions...* (*loc. cit.*).

16. Peut-il exister sur la variété V une involution cyclique I_3 possédant une courbe unie et des points unis isolés? La réponse est affirmative, comme nous allons le montrer par un exemple simple.

Soit I_3 une involution ayant une courbe unie D et des points unis isolés A_1, A_2, ... Tout d'abord, D doit être une courbe unie non parfaite. D'autre part, s'il existe un point uni non parfait, la variété Ω est dépourvue de surface canonique, alors que la présence de D implique l'existence d'une surface canonique d'ordre zéro. Les points unis A_1, A_2, ... sont donc des points unis parfaits.

On prouverait d'ailleurs, comme dans le cas où il n'y a pas de points unis en dehors de D, que l'ordre de la courbe D est multiple de trois et que l'on a $r_2 = r_3$.

On construit une involution du type indiqué de la manière suivante :

Soit, dans un espace S_4 à quatre dimensions, l'homographie de période trois

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon x_3} = \frac{x'_4}{\varepsilon^2 x_4}, \tag{1}$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Les axes ponctuels de l'homographie (1) sont les points $O_3(0, 0, 0, 1, 0)$, $O_4(0, 0, 0, 0, 1)$ et le plan $x_3 = x_4 = 0$.

Considérons l'hypersurface du cinquième ordre d'équation

$$\left\{\begin{aligned} & a x_3^4 x_4 + b x_4^4 x_3 + x_3^2 x_4^2 \alpha_1(x_0, x_1, x_2) \\ & \quad + x_3^3 \alpha_2(x_0, x_1, x_2) + x_4^3 \beta_2(x_0, x_1, x_2) \\ & \quad + x_3 x_4 \alpha_3(x_0, x_1, x_2) + \alpha_5(x_0, x_1, x_2) = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où a, b sont des constantes, les α, β étant des formes algébriques dont les degrés sont indiqués par les indices.

L'irrégularité superficielle de cette hypersurface est nulle; elle possède une surface canonique d'ordre zéro et elle est transformée en elle-même par l'homographie (1). Celle-ci engendre, sur l'hypersurface (2), une involution I_3 d'ordre trois, ayant :

1° Les points unis parfaits O_3, O_4 ;

2° La courbe unie non parfaite D, d'équations

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad \alpha_5(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

En effet, l'espace tangent en O_3 a pour équation $x_4 = 0$, et, dans cet espace, l'homographie (1) détermine une homologie de centre O_3 et de plan $x_3 = x_4 = 0$. De même pour le point O_4.

L'espace tangent à l'hypersurface (2) en un point de la quintique D contient la tangente à cette courbe en ce point et passe par les points O_3, O_4. Dans cet espace, (1) détermine bien une homographie axiale hyperbolique générale.

Pour obtenir un modèle projectif de l'hypersurface (2) présentant les propriétés de la variété V considérées plus haut, envisageons les hypersurfaces cubiques de S_4. Elles forment un système linéaire de dimension 34, et, dans ce système, il y a trois systèmes d'hypersurfaces unies pour l'homographie (1), à savoir :

$$\lambda_0 x_3^3 + \lambda'_0 x_4^3 + x_3 x_4 \lambda_1(x_0, x_1, x_2) + \lambda_3(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_0 x_3^2 x_4 + x_4^2 \lambda_1(x_0, x_1, x_2) + x_3 \lambda_2(x_0 x_1, x_2) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_0 x_3 x_4^2 + x_3^2 \lambda_1(x_0, x_1, x_2) + x_4 \lambda_2(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{5}$$

où les λ sont des formes algébriques dont les degrés sont indiqués par les indices, à coefficients variables. Ces systèmes ont respectivement les dimensions 14, 9, 9.

En rapportant projectivement les hypersurfaces cubiques de S_4 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{34}, on obtient une transformée birationnelle V de l'hypersurface (2); V est d'ordre 5.3^3 et présente trois systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I_3. Le système $|F_1|$ correspond au système (3) et les systèmes $|F_2|$, $|F_3|$ aux systèmes (4) et (5).

Les hyperplans découpant sur V les systèmes $|F_2|$, $|F_3|$ ont en commun un espace $S^{(1)}$, uni pour l'homographie de S_{34} qui correspond à (1) et qui contient les points unis, homologues de O_3, O_4 et la courbe unie, d'ordre 15, homologue de la quintique D.

On obtiendra Ω en rapportant projectivement des hypersurfaces (3) aux hyperplans d'un espace S_{15}. C'est une variété d'ordre 5.3^2 possédant une surface canonique d'ordre zéro.

Liége, le 6 janvier 1937.