Annales scientifiques de l'É.N.S.

Keldysch
Lavrentieff

Sur la représentation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DES DOMAINES LIMITÉS PAR DES COURBES RECTIFIABLES

PAR MM. KELDYSCH ET LAVRENTIEFF

(Moscou).

INTRODUCTION.

Soit (D) un domaine simplement connexe, univalent, limité par une courbe simple et rectifiable, situé dans le plan de la variable complexe. Désignons par $w = f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine (D) sur le cercle $|w| < 1$, et soit $z = \varphi(w)$ la fonction inverse. Quelques problèmes aux limites de la théorie des fonctions se réduisent à la question suivante : *la fonction harmonique* $\log|\varphi'(w)|$ *est-elle représentable dans le cercle* $|w| < 1$ *par l'intégrale de Poisson de ses valeurs limites sur la circonférence* $|w| = 1$?

Par exemple, M. V. Smirnoff a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que le système des polynomes orthogonaux sur le contour Γ du domaine (D) soit complet, est que la fonction $\log|\varphi'(w)|$ soit représentable par l'intégrale de Poisson. M. Smirnoff a démontré que cette représentation est, en même temps, une condition nécessaire et suffisante pour que chaque fonction définie dans (D) et représentable par l'intégrale de Cauchy satisfasse au principe du maximum (1).

Dans la première Partie de cet article, nous démontrons quelques théorèmes sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme, de ces théorèmes nous allons obtenir quelques conditions géométriques suffisantes pour que $\log|\varphi'(w)|$ soit représentable par l'intégrale de Poisson.

Dans la deuxième Partie, nous allons construire un exemple d'un domaine (D), qui donne la réponse négative à la question générale posée plus haut. Ensuite, nous allons indiquer quelques propriétés des domaines pour lesquels la fonction $\log|\varphi'(w)|$ n'est pas représentable par l'intégrale de Poisson.

La troisième Partie est consacrée à l'étude de quelques classes de polynomes extrémaux introduits par M. Julia. L'étude de la convergence de ces polynomes est étroitement liée à la question traitée dans la première Partie.

Les résultats de cet article ont été énoncés, sans démonstration, dans nos trois Notes : *Sur la représentation conforme* (2), *Sur une classe de polynomes extrémaux* (3) et *Sur quelques propriétés des fonctions univalentes* (4).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Pour abréger les démonstrations et les énoncés des propositions qui suivent, introduisons quelques notions géométriques.

Soit (D) un domaine simplement connexe, borné, qui contient le cercle $|z| < \frac{1}{2}$ et soit Γ la frontière de (D). L'arc γ étant un arc quelconque de Γ, nous allons désigner par $\bar{\gamma}$ l'arc de longueur minimale, qui vérifie les conditions suivantes : 1° $\bar{\gamma}$ appartient au domaine fermé $\bar{D} = D + \Gamma$; 2° les extrémités de $\bar{\gamma}$ appartiennent à Γ et sont extérieures à γ; 3° le domaine simplement connexe fermé, dont la

(1) Smirnoff, *Journ. Soc. phys. Math. Leningrad*, t. II, fasc. I, 1928; *Bull. de l'Acad. Sci. U. R. S. S.*, 1932.

(2) Keldysch et Lavrentieff, *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, t. I, 1935, nos 2-3.

(3) Keldysch, *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, 1936.

(4) Lavrentieff, *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, 1935.

frontière est formée par $\bar{\gamma}$ et par une partie de Γ, qui ne contient pas γ, contient le point $z = 0$.

Indiquons quelques propriétés évidentes des arcs $\bar{\gamma}$: 1° si la différence entre les arguments des extrémités de γ est plus petite que π, alors $\bar{\gamma}$ ne contient pas le point $z = 0$; 2° le rapport de la longueur de $\bar{\gamma}$ à son diamètre ne dépasse pas π.

Nous disons qu'un arc γ est *atteint* si les extrémités de γ et de $\bar{\gamma}$ coïncident et si le domaine, limité par $\bar{\gamma}$ et par les évolventes de $\bar{\gamma}$, qui passent par les extrémités de $\bar{\gamma}$, appartient à D.

Soit γ un arc atteint de Γ, soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ un système d'arcs de γ, tel que la somme des diamètres des $\bar{\gamma}_i$ ne dépasse pas l et soit L la longueur de $\bar{\gamma}$. Faisons la représentation conforme

$$w = f(z), \qquad f(0) = 0,$$

du domaine D sur le cercle $|w| < 1$ et désignons par S la longueur de l'arc, qui correspond à γ et par s la somme des longueurs des arcs, qui correspondent aux arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Nous disons que le domaine D vérifie la condition $A(h, k)$, $0 < h < 1$, $0 < k < 1$ si pour chaque γ et pour chaque système $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tels que

$$l < hL,$$

nous avons

$$s < kS.$$

Lemme 1. — *Soit* D *un domaine quelconque, qui vérifie la condition* $A(h, k)$ $(h < 1, k < 1)$ *et qui contient le cercle* $|z| < \frac{1}{2}$, *et soit* Γ *la frontière de* D. *Si la mesure linéaire d'un ensemble* E *de* Γ *est plus petite que* ε (¹), $\varepsilon > 0$, *alors dans la représentation conforme* $w = f(z)$, $f(0) = 0$ *du domaine* D *sur le cercle* $|w| < 1$, *il correspond à l'ensemble* E *sur la circonférence* $|w| = 1$ *un ensemble de mesure plus petite que* $2\pi\varepsilon^{\delta}$ *où* δ, $\delta > 0$, *ne dépend que de k et h.*

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que E est formé par un système fini d'arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ atteints, tels que la

(¹) La mesure linéaire de E est plus petite que ε s'il existe un ensemble fini de cercles $\{C_k\}$ tels que : 1° chaque point de E appartienne à C_k; 2° la somme des diamètres des C_k soit plus petite que ε. L'ensemble E à la mesure linéaire nulle, si, quel que soit ε, $\varepsilon > 0$ la mesure linéaire de E est plus petite que ε.

somme de leurs diamètres ne dépasse pas ε. Les arcs γ_i étant fixés, d'après les théorèmes classiques de M. Caratheodory sur la continuité des fonctions univalentes, nous pouvons d'ailleurs supposer que Γ est une courbe analytique située au-dessus de la droite $\mathcal{I}z = 1$. Pour abréger l'écriture nous allons dire que le point P de Γ est plus gauche (plus droit) que le point Q de Γ si, quand on parcourt Γ dans le sens positif, le point P suit (précède) le point Q. Nous allons supposer que l'arc γ_i sur Γ est plus gauche que γ_j pour $j > i$.

Cela posé, passons à la démonstration du lemme. Considérons un arc quelconque δ_1 de Γ, $\delta_1 \subset \Gamma$, contenant l'arc γ_1. Soit l_1 la longueur de $\overline{\delta}_1$ et soit S_1 la somme des diamètres des arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, situés entre les extrémités de δ_1. Parmi les arcs atteints δ_1, qui vérifient la condition

$$\frac{s_1}{l_1} = h,$$

nous choisissons l'arc $\gamma_1^{(1)}$ dont l'extrémité droite est la plus éloignée de γ_1.

Les arcs $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(1)}$, étant définis de manière que tous les arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ soient contenus dans les $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(1)}$ et l'arc $\gamma_{\mu+1}$ étant extérieur à $\gamma_\nu^{(1)}$, nous définissons l'arc $\gamma_{\nu+1}^{(1)}$. A cet effet considérons un arc quelconque $\delta_{\nu+1}$ de Γ, qui contient $\gamma_{\mu+1}$, et dont l'extrémité gauche est plus droite que γ_μ. Désignons par $l_{\nu+1}$ la longueur de $\overline{\delta}_{\nu+1}$ et par $s_{\nu+1}$ la somme des diamètres des arcs $\gamma_{\mu+1}, \gamma_{\mu+2}, \ldots$ contenus entre les extrémités de $\overline{\delta}_{\nu+1}$. Parmi les arcs atteints $\delta_{\nu+1}$, qui vérifient la condition

$$\frac{s_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} = h,$$

nous choisissons l'arc $\gamma_{\nu+1}^{(1)}$, dont l'extrémité droite est la plus éloignée de $\gamma_{\mu+1}$.

Nous obtenons ainsi un système d'arcs atteints $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$, ayant les propriétés suivantes : 1° chaque arc γ_j est contenu dans un arc $\gamma_i^{(1)}$; 2° les arcs $\gamma_j^{(1)}$ sont deux à deux sans points communs; 3° les arcs $\overline{\gamma}_j^{(1)}$ sont deux à deux sans points communs; 4° ε_1 étant la somme des diamètres des $\overline{\gamma}_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$, nous avons

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{h}.$$

5° considérons la représentation $w = f(z)$ et désignons par η la somme des longueurs des images des arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, par η_1 la somme des longueurs des images des arcs $\overline{\gamma}_1^{(1)}, \overline{\gamma}_2^{(1)}, \ldots, \overline{\gamma}_{n_1}^{(1)}$. D'après la condition A et les propriétés précédentes des $\overline{\gamma}_j^{(1)}$, nous avons

$$\eta < k\eta_1.$$

Désignons par Φ l'opération qui réalise la correspondance entre les systèmes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$

$$(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}) = \Phi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n).$$

Le système $\gamma_1^{(p)}, \gamma_2^{(p)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(p)}$ étant défini, nous posons

$$(\gamma_1^{(p+1)}, \gamma_2^{(p+1)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(p+1)}) = \Phi(\gamma_1^{(p)}, \gamma_2^{(p)}, \ldots, \gamma_{n_p}^{(p)}).$$

Cela posé, désignons par ε_p la somme des diamètres des arcs $\overline{\gamma}_j^{(p)}$ et soit m le plus grand nombre entier, tel que

$$\varepsilon_m \leqq 1.$$

En désignant par η_p la somme des longueurs des images des arcs $\gamma_1^{(p)}$, $\gamma_2^{(p)}, \ldots, \gamma_{n_p}^{(p)}$ [dans la représentation $w = f(z)$], nous avons, d'après la condition A pour $p \leqq m$,

$$\eta_{p-1} < k\eta_p,$$

donc

(1) $$\eta < k^m \eta_m < 2\pi k^m.$$

D'autre part

$$1 < \varepsilon_{m+1} < \frac{\varepsilon}{h^m},$$

donc

(2) $$m > \frac{\log \varepsilon}{\log h} - 1.$$

Des inégalités (1) et (2), il suit

$$\eta < \frac{2\pi}{k} \varepsilon^{\frac{\log k}{\log h}},$$

ce qui prouve la proposition.

2. Nous allons chercher maintenant des conditions géométriques suffisantes pour que la condition A soit remplie. A cet effet, démontrons quelques propositions préliminaires.

Lemme 2. — *Soit $w = F(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle fermé $|z| \leqq 1$ telle que $F(0) = 0$ et $\mathcal{J}F(z) \geqq -m$, $m > 0$, pour $|z| = 1$. Dans ces conditions nous avons*

$$\int_0^{2\pi} \lambda[|F(e^{i\theta})|, m)\, d\theta < 2\pi,$$

où $\lambda(t, m)$ est une fonction positive des deux variables réelles t et m, croissante par rapport à t et telle que $\lim_{t \to \infty} \lambda(t, m) = \infty$.

On vérifie aussitôt que la fonction

$$\lambda(t, m) = \frac{\log^+ t}{2(\log^+ m' + 2)} \qquad (m' = m + 1)$$

satisfait à l'énoncé du lemme. En effet, il est évident que cette fonction est positive et croissante par rapport à t et que $\lim_{t \to \infty} \lambda(t, m) = \infty$.

D'autre part

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda(F, m)\, d\theta \leqq \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{\log^+|F| - \log^+ m' - 2}{2(\log^+ m' + 2)} + \frac{1}{2}\right] d\theta$$
$$\leqq \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{\log^+|F + im'|}{2(\log^+ m' + 2)} + \frac{1}{2}\right] d\theta;$$

la fonction $\log|F + im'|$ est une fonction harmonique positive dans le cercle $|z| < 1$, et par conséquent la valeur moyenne de $\log^+|F + im'|$ sur la circonférence $|z| = 1$ est égale à $\log|F(0) + im'| = \log m'$, donc

$$\int_0^{2\pi} \lambda(F, m)\, d\theta < 2\pi.$$

3. Introduisons maintenant quelques notions géométriques. Soit C une courbe fermée analytique du plan z, t étant un point quelconque de C, désignons par $\alpha(t)$ l'angle formé par l'axe réel et la tangente T de C menée par le point t. Soit t_0 le point de C, le plus voisin au point $z = 0$ [1]. En supposant que la valeur initiale de $\alpha(t)$ au point t_0 est comprise entre 0 et π, $0 \leqq \alpha(t) \leqq \pi$, désignons par $m(C)$ et $M(C)$

---

[1] S'il existe plusieurs points de C, dont la distance à $z = 0$ est minimale pour t_0, nous prendrons le point dont l'argument est minimal.

respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des valeurs de la fonction continue $\alpha(t)$ quand t décrit C dans le sens positif.

Définition. — Nous disons qu'un domaine simplement connexe D appartient à la classe $R(m)$, $[R'(M)]$ si, quel que soit le domaine fermé $\overline{D}_1$ $(\overline{D}_1 \subset D)$, il existe une courbe simple fermée analytique C, contenue dans D et telle que : 1° le domaine limité par C contient $\overline{D}_1$; 2° $m \leqq m(C)\,[M \geqq M(C)]$.

Supposons que D contient le point $z=0$ et faisons la représentation conforme $z=\varphi(w)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$ du cercle $|w|<1$ sur le domaine D. De l'interprétation géométrique de $\arg\varphi'(w)$ on déduit la proposition suivante :

Pour qu'un domaine D, contenant l'origine $z=0$ appartienne à la classe $R(m)$, $[R'(M)]$, il suffit que

$$\arg\varphi'(w) \geqq m+4\pi \qquad [\arg\varphi'(w) \leqq M-4\pi],$$

et il est nécessaire que

$$\arg\varphi'(w) \geqq m-4\pi \qquad [\arg\varphi'(w) \leqq M+4\pi].$$

LEMME 3. — *Soit* D *un domaine simplement connexe de classe* $R(m)$, *contenant le cercle* $|z|<1$ *et soit* Γ *la frontière de* D. *Faisons la représentation conforme,* $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)>0$ *du domaine* D *sur le cercle* $|w|<1$. *Alors, si la mesure linéaire d'un ensemble* E, $E \subset \Gamma$, *est plus petite que* ε, *la mesure de l'image de* E *sur* $|w|=1$ *est plus petite que* $\eta(\varepsilon, m)$ *où* $\eta(\varepsilon, m)$ *est une fonction positive, croissante par rapport à* ε *et telle que* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon, m)=0$ (¹).

Supposons, par impossible, qu'il n'existe pas de fonction η, ayant les propriétés indiquées. Quel que soit le nombre ε, de l'hypothèse faite, il résulte l'existence d'un domaine D_1 de la classe $R(m)$ ayant les propriétés suivantes : 1° la frontière Γ_1 de D_1 est une courbe simple fermée analytique; 2° le domaine D_1 contient le cercle $|z|<1$; 3° dans la représentation conforme du cercle $|w|<1$ sur le domaine D_1, $z=\varphi_1(w)$, $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1'(0)>0$, à un système fini d'arcs de $|w|<1$, dont la somme des longueurs dépasse une constante numérique l_1, il

(¹) On peut remplacer la classe $R(m)$ par la classe $R'(M)$.

correspond un système d'arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de Γ_1 tels que la somme des diamètres des $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ ne dépasse pas ε. Désignons par D_2 le domaine maximal, contenu dans D_1 et qui ne contient pas des points des arcs $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$; le domaine D_1 contient le cercle $|z| < 1$ donc, pour ε suffisamment petit, le domaine D_2 contient le cercle $|z| < 1$. Faisons la représentation conforme du cercle $|w| < 1$ sur le domaine D_2, $z = \varphi_2(w)$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi'_2(0) > 0$. D'après le principe de M. Montel [1], dans cette représentation tous les arcs des $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ qui appartiennent à la frontière Γ_2 de D_2, sont des images d'un système d'arcs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (de la circonférence) dont la somme des longueurs est plus grande que l_1. En remarquant que la somme des longueurs des $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ est plus petite que $\pi\varepsilon$, nous obtenons

$$\sum \int_{\alpha_\nu} |\varphi'_2(e^{i\theta})|\, d\theta < \pi\varepsilon. \tag{1}$$

D'autre part, le domaine D_2, ainsi que le domaine D_1, appartient à la classe $R(m)$, donc

$$\arg \varphi'_2(w) > m - 4\pi = m_1.$$

Par conséquent, d'après le lemme 2, nous avons

$$\sum \int_{\alpha_\nu} \lambda\Big[\big|\log|\varphi'_2(e^{i\theta})|\big|,\, m_1\Big]\, d\theta < \int_0^{2\pi} \lambda\Big[\big|\log|\varphi'_2(e^{i\theta})|\big|,\, m_1\Big]\, d\theta < 2\pi,$$

ce qui est impossible puisque d'après les propriétés de la fonction λ et d'après (1), pour ε suffisamment petit, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \lambda\Big[\big|\log|\varphi'_2(e^{i\theta})|\big|,\, m_1\Big]\, d\theta > \lambda\left(\log\frac{l_1}{\pi\varepsilon},\, m_1\right) l_1 > 2\pi.$$

4. La conclusion du lemme démontré ne cesse d'être vraie, si nous considérons, au lieu des domaines de classe $R(m)$ ou bien de classe $R'(M)$, des domaines dont les frontières sont rectifiables [2]. Dans ce cas il est facile d'obtenir le résultat plus précis suivant :

---

[1] P. MONTEL, *Journ. de Math.*, 7e série, t. 3, 1917, p. 31-32; LAVRENTIEFF, *C. R. Acad. Sc.*, juin 1927.

[2] Cela résulte d'un théorème de MM. Lusin et Privaloff (*Ann. de l'École Norm. Sup.*, 3e série, t. XLII, 1925).

THÉORÈME I. — *Si* D *contient le cercle* $|z| < 1$ *et* Γ *est une courbe rectifiable, dont la longueur ne dépasse pas* l, *alors dans la représentation conforme* $w = f(z)$, $f(0) = 0$ *de* D *sur le cercle* $|w| < 1$ *à l'ensemble* E *de* Γ, $\operatorname{mes} E \leqq \varepsilon$ *il correspond sur* $|w| = 1$ *un ensemble* $\mathcal{E}$

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} < \frac{K l}{|\log \varepsilon| + 1},$$

où K *est une constante absolue.*

Démonstration. — Il est suffisant de considérer le cas où E est formé par un nombre fini d'arcs simples. Donc, d'après le théorème connu de M. Courant sur la convergence uniforme des fonctions univalentes, on peut supposer, en outre, que Γ est une courbe simple fermée analytique.

Cela posé, désignons par $z = \varphi(w)$ la fonction inverse de $w = f(z)$. On a

$$\int_0^{2\pi} |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta = l.$$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta < l \quad (1). \tag{1}$$

D'autre part, le domaine D contient le cercle $|z| < 1$. En appliquant le lemme de Schwarz à la fonction $f(z)$, on obtient $f'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} \leqq 1$, et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \log |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta = \log |\varphi'(0)| \geqq 0. \tag{2}$$

De (1) et (2) il résulte

$$\int_{\mathcal{E}} \log^- |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta \geqq \int_0^{2\pi} \log^- |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta > -l.$$

---

(1) D'une manière plus précise

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log^+ |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{e} l, & \text{pour } l < 2\pi e; \\ 2\pi \log \dfrac{l}{2\pi}, & \text{pour } l > 2\pi e. \end{cases}$$

Par conséquent, en posant $\eta = \text{mes}\,\mathcal{E}$, nous obtenons

$$\varepsilon \geqq \text{mes}\,\mathrm{E} = \int_{\mathcal{E}} |\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta > \eta e^{-\frac{l}{\eta}},$$

donc

$$\text{mes}\,\mathcal{E} = \eta < \frac{l + \eta \log \eta}{\log \varepsilon}.$$

En remarquant que $\eta < 2\pi$ nous obtenons le résultat cherché.

Nous allons voir plus loin que dans l'énoncé du théorème on ne peut pas, dans le cas général, remplacer l'expression $\mathrm{K}l(1 + |\log \varepsilon|)^{-1}$ par l'expression $\mathrm{K}l(1 + \log|\varepsilon|)^{-(1+\delta)}$, sans que le théorème cesse d'être vrai.

5. En appliquant les propositions démontrées il est facile d'obtenir quelques conditions géométriques suffisantes pour qu'un domaine vérifie la condition A.

Si un domaine simplement connexe D, contenant le cercle $|z| < 1$, appartient à la classe $\mathrm{R}(m)$, alors D vérifie la condition $\mathrm{A}(h, k)$, où les constantes h et k ne dépendent que de m.

En effet, supposons par impossible qu'il existe un domaine D de classe $\mathrm{R}(m)$ qui ne vérifie aucune des conditions $\mathrm{A}(h, k)$. De l'hypothèse faite il résulte que, quel que soit le nombre ε, il existe un arc atteint γ de la frontière Γ de D et un système d'arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ contenus dans γ et tels que : 1° le rapport de la somme des diamètres des arcs $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ à la longueur de $\overline{\gamma}$ est plus petit que ε; 2° faisons la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w| < 1$, $w = f(z)$, $f(0) = 0$, et désignons par S la longueur de l'arc, qui correspond à γ et par s la somme des longueurs des arcs, qui correspondent aux arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; dans ces conditions on a $s > \frac{1}{2}\mathrm{S}$.

Désignons par Δ le domaine simplement connexe dont la frontière est formée par γ et par les arcs des evolventes de $\overline{\gamma}$, qui passent par les extrémités de γ. Désignons par z_0 le centre du cercle maximal, contenu dans Δ et soit ρ le rayon de ce cercle. Faisons la transformation linéaire du plan z sur le plan z' et désignons par D', Γ', γ', γ'_1, γ'_2, ..., γ'_n les figures qui correspondent respectivement aux figures D, Γ, γ, γ_1, γ_2, ..., γ_n. Faisons maintenant la représentation conforme

$$w = F(z'), \qquad F(0) = 0,$$

du domaine D' sur le cercle $|w| < 1$. D'après ce qui précède il est facile de voir que la somme Σ des longueurs des images des arcs γ'_1, γ'_2, ..., γ'_n dépasse une constante numérique. Ceci est impossible puisque la somme des diamètres des $\bar{\gamma}'_1$, $\bar{\gamma}'_2$, ..., $\bar{\gamma}'_n$ ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{\rho}$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0$ et D' appartient à la classe $R(m)$, donc, d'après le lemme 3,

$$\Sigma < \eta\left(\frac{\varepsilon}{\rho}, m\right) \to 0 \qquad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0.$$

En appliquant le lemme 1, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2. — *Si le domaine simplement connexe* D *appartient à la classe* $R(m)$, $[R(M)]$, *si* D *contient le cercle* $|z| < 1$ *et si la mesure linéaire d'un ensemble* E *de* Γ *est plus petite que* ε, $\varepsilon > 0$, *alors dans la représentation conforme* $w = f(z)$, $f(0) = 0$ *du domaine* D *sur le cercle* $|w| < 1$ *à l'ensemble* E *il correspond sur la circonférence* $|w| = 1$ *un ensemble de mesure plus petite que* $2\pi\varepsilon^\delta$ *où* $\delta > 0$ *ne dépend que de* m, (M).

6. Par des raisonnements tout pareils, en appliquant le théorème I, on obtient le résultat suivant.

Théorème III. — *Si dans les conditions du théorème* I *nous supposons que quel que soit l'arc* γ *de* Γ *le rapport de la longueur de cet arc à sa corde est inférieur à* p, $p > 0$, *alors dans la représentation conforme* $w = f(z)$, $f(0) = 0$ *de* D *sur le cercle* $|w| < 1$ *à l'ensemble* E *de* Γ, $\operatorname{mes} E \leq \varepsilon$, *il correspond sur* $|w| = 1$ *un ensemble* $\mathcal{E}$,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} \leq 2\pi\varepsilon^\delta,$$

où δ *ne dépend que de* ρ.

7. Indiquons maintenant une inégalité élémentaire essentielle dans les applications des théorèmes démontrés.

LEMME 4. — *Soit* F $= \{y(x)\}$ *une famille de fonctions définies sur un ensemble* E, mes E $= l$ *mesurables et positives sur* E *et telles que pour chaque ensemble* e, $e \subset$ E *on a*

$$(1) \qquad \mathcal{J}(y, e) = \int_e y(x)\,dx \geqq \mathrm{K}(\operatorname{mes} e)^{\nu} \qquad (\nu > 1),$$

où K *et* ν *sont deux constantes positives. Dans ces conditions, pour chaque fonction de la famille* F *on a*

$$(2) \qquad \mathrm{J}(y) = \int_{\mathrm{E}} \log y(x)\,dx \geqq l \log \mathrm{K}\nu + (\nu - 1)(l \log l - l).$$

Il est évident qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que E est l'intervalle $(0, l)$. D'autre part, il est facile de voir que la borne inférieure cherchée de $\mathrm{J}(y)$ coïncide avec la borne inférieure de $\mathrm{J}(y)$, si l'on ne considère que des fonctions non décroissantes. En effet, soit $y(x)$ une fonction quelconque de la famille F$\{y(x)\}$, soient n un nombre entier et m_k la mesure de l'ensemble des valeurs des x tels que

$$\frac{k-1}{n} < y(x) \leqq \frac{k}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons par $y_n(x)$ la fonction égale à $\frac{k}{n}$ pour

$$\sum_{j=1}^{k-1} m_j < x \leqq \sum_{j=1}^{k} m_j,$$

la fonction $y_n(x)$ est non décroissante, d'autre part pour $0 < x < l$ on a

$$y_1(x) \geqq y_2(x) \geqq \ldots \geqq y_n(x) \geqq \ldots.$$

Donc, la suite des fonctions $y_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ converge et la fonction limite $\bar{y}(x)$ est non décroissante. Toutes les fonctions $y_n(x)$ appartenant à la famille F, la fonction $\bar{y}(x)$ appartient à la même famille. D'autre part, on a

$$\int_0^l \log y(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^l \log y_n(x)\,dx = \int_0^l \log \bar{y}(x)\,dx.$$

En considérant les fonctions de la famille F non décroissantes, nous pouvons remplacer la condition (1) par la condition suivante :

$$\int_0^x y(x)\,dx \geqq \mathrm{K}x^\nu.$$

Démontrons que le minimum de $\mathrm{J}(y)$ est atteint quand on a

$$\int_0^x y(x)\,dx = \mathrm{K}x^\nu.$$

En effet, supposons qu'on a

$$\int_0^{x_0} y(x)\,dx > \mathrm{K}x_0^\nu \qquad 0 < x_0 < l,$$

et désignons par $\eta(x)$ la fonction égale à $y(x_0 - \delta) - y(x)$, $0 < \delta < x_0$ pour $x_0 - \delta < x < x_0$ égale à ε pour $x_0 \leqq x \leqq l$ et égale à zéro pour $0 \leqq x \leqq x_0 - \delta$. La fonction $\bar{y}(x) = y(x) + \eta(x)$ est non décroissante et appartient à la famille F, d'autre part on peut toujours définir les constantes δ et ε de manière que

$$\mathrm{J}(\bar{y}, x) \geqq \mathrm{K}x^\nu \qquad \text{pour} \quad 0 < x < l,$$
$$\mathrm{J}(\bar{y}) < \mathrm{J}(y).$$

Par conséquent le minimum cherché est atteint par

$$y(x) = \mathrm{K}\nu x^{\nu-1},$$

ce qui prouve la proposition.

8. Du lemme démontré et des théorèmes II et III on peut déduire la proposition suivante, dont nous allons faire usage dans la troisième Partie de cet article.

THÉORÈME IV. — *Supposons qu'un domaine simplement connexe* D, *limité par une courbe rectifiable* Γ, *vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

1. D *appartient à la classe* $\mathrm{R}(m)$;
2. *Quel que soit l'arc* γ, $\gamma \subset \Gamma$, *le rapport de la longueur de cet arc à sa corde est inférieur à* p, $p > 0$.

Alors, $z = \varphi(w)$ *étant une fonction qui réalise une représentation* *conforme du cercle* $|w| < 1$ *sur le domaine* D, *la fonction harmonique* $\log|\varphi'(w)|$ *est représentable dans le cercle* $|w| < 1$ *par l'intégrale de Poisson*

$$\log|\varphi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2)\log|\varphi'(e^{i\alpha})|}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha,$$

où $\varphi'(e^{i\alpha})$ *est définie presque partout sur l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *par les valeurs limites de* $\varphi'(\rho e^{i\alpha})$ *pour* $\rho \to 1$.

Démontrons la proposition en supposant que la condition 1 est remplie.

Pour $r < \rho < 1$ on a

$$\log|\varphi'(re^{i\alpha})| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{(\rho^2-r^2)\log|\varphi'(\rho e^{i\theta})|}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha,$$

il faut démontrer qu'on peut faire le passage à la limite sous le signe d'intégrale.

Désignons par l la longueur de Γ et supposons pour abréger l'écriture, que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. Quel que soit ρ, $\rho < 1$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqq l.$$

Par conséquent, quel que soit l'ensemble E, $\operatorname{mes} E = \eta$ de l'intervalle $(0, 2\pi)$, pour η suffisamment petit, nous avons

$$\int_E \log^+|\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqq \varepsilon \log\frac{l}{\varepsilon}.$$

D'après la condition du théorème le domaine D appartient à la classe $R(m)$, donc l'image du cercle $|w| < \rho$ [dans la représentation $z = \varphi(w)$] appartient à la classe $R(m - 8\pi)$. En appliquant le théorème II nous obtenons pour chaque ensemble e de mesure α, $\operatorname{mes} e = \alpha$ l'inégalité suivante

$$\int_e |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta > K\alpha^{\nu},$$

où K et ν, $\nu > 1$ sont des constantes. De cette inégalité et du lemme 4 il résulte

$$(2)\qquad \int_E \log|\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta > \eta\log K\nu + (\nu - 1)(\eta\log\eta - \eta).$$

De (1) et (2) on déduit

$$(3) \qquad \int_E \left| \log |\varphi'(\rho e^{i\theta})| \right| d\theta < K'\eta \log \frac{1}{\eta} \qquad (K' = \text{const.}).$$

Or, pour chaque valeur numérique de r, $r < 1$, pour $\rho \to 1$ l'expression $\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)}$ reste bornée, donc il suit de l'inégalité (3) que quel que soient les nombres ε et r, il existe toujours un nombre η tel que pour mes$E < \eta$ et $\rho > 1 - \frac{1-r}{2}$, on a

$$\int_E \left| \frac{(\rho^2 - r^2) \log |\varphi'(\rho e^{i\alpha})|}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} \right| d\alpha < \varepsilon,$$

ce qui prouve la proposition.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Pour résoudre la question générale posée dans l'Introduction, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Quel que soit le nombre positif ρ, il existe un domaine Δ jouissant des propriétés suivantes :*

1. *Le domaine Δ est simplement connexe, univalent et limité par une courbe simple et rectifiable Γ, renfermant l'origine $z = 0$.*
2. *Le domaine Δ ne coïncide pas avec le cercle $|z| < 1$ et est contenu dans le cercle $|z| < \rho$.*
3. *Dans la représentation conforme $z = \varphi(w)$, $\varphi(0) = 0$ du domaine Δ sur le cercle $|w| < 1$, il correspond à chaque arc γ de la courbe Γ un arc de même longueur sur la circonférence $|w| = 1$.*

2. Indiquons, tout d'abord, quelques propriétés d'une transformation conforme élémentaire, qui nous sera utile dans la suite.

Considérons le cercle $|z| < 1$. Soit $z = re^{i\theta}$ et C_φ l'arc de la circonférence $|z| = 1$ défini par l'inégalité $-\varphi \leqq \theta \leqq +\varphi$. Remplaçons l'arc C_φ par un arc circulaire $C_{\varphi,\gamma}$ situé au dehors du cercle $|z| < 1$, dont les extrémités coïncident avec les points $e^{-i\varphi}$ et $e^{+i\varphi}$ et qui forme un angle égal à $\gamma\pi$ avec l'arc C_φ. Désignons par $D_{\varphi,\gamma}$ le domaine contenant l'origine et limité par la courbe obtenue. Soit $w = h_\gamma(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D_{\varphi,\gamma}$ sur le cercle et qui satisfait aux conditions $h_\gamma(0) = 0$, $h'_\gamma(0) > 0$. La fonction $h_\gamma(z)$ est donné par la formule

$$\left(\frac{h_\gamma(z) - e^{-i\frac{\varphi}{1+\gamma}}}{h_\gamma(z) - e^{+i\frac{\varphi}{1+\gamma}}}\right)^{1+\gamma} = \frac{z - e^{-i\varphi}}{z - e^{+i\varphi}}. \tag{1}$$

Supposons que les nombres φ et γ vérifient les inégalités

$$\varphi < \frac{\pi}{4}, \qquad \gamma < \frac{1}{2}, \tag{2}$$

et indiquons quelques propriétés de la fonction $h_\gamma(z)$. En utilisant un principe, bien connu, de M. Montel (¹) on démontre immédiatement que :

1° *Sur la partie de la circonférence $|z| = 1$ appartenant à la frontière de $D_{\varphi,\gamma}$, on a l'inégalité*

$$|h'_\gamma(z)| \geqq 1. \tag{3}$$

En reprenant le calcul élémentaire, on obtient la propriété suivante :

2° *La valeur minimale de la fonction $|h'_\gamma(z)|$ sur $C_{\varphi,\gamma}$ est atteinte au point z_0 de l'intersection de l'arc $C_{\varphi,\gamma}$ avec l'axe réel* (²). Cette valeur

---

(¹) *Voir* page 9.

(²) En effet, posons

$$w = \rho e^{i\omega}, \qquad \psi = \frac{\varphi}{1+\gamma}.$$

Sur l'arc $|\omega| \leqq \psi$ de la circonférence $|w| = 1$ correspondant à l'arc $C_{\varphi,\gamma}$, on a l'expression pour le module de la dérivée

$$\frac{dz}{dw} = (1+\gamma)\sin\varphi\sin\psi$$
$$\times \frac{\sin^\gamma\frac{\psi+\omega}{2}\sin^\gamma\frac{\psi-\omega}{2}}{\sin^{2(1+\gamma)}\frac{\psi-\omega}{2} + \sin^{2(1+\gamma)}\frac{\psi+\omega}{2} - 2\sin^{1+\gamma}\frac{\psi-\omega}{2}\sin^{1+\gamma}\frac{\psi+\omega}{2}\cos(1+\gamma)(\pi+\psi)}.$$

minimale est donnée par la formule

$$h'_\gamma(z_0) = \frac{1}{1+\gamma} \frac{\left(1 - \cos\frac{\varphi}{1+\gamma}\right)[1 + \cos(\gamma\pi + \varphi)]}{\sin\varphi \sin\frac{\varphi}{1+\gamma}}.$$

Il résulte de cette expression et des inégalités (2) qu'il existe une constante C_1, indépendante de φ et γ, et telle que

$$|h'_\gamma(z_0)| > \frac{1}{1+C_1\gamma}.$$

Désignons par s la longueur de l'arc C_φ, σ la longueur de l'arc $C_{\varphi,\gamma}$. Il est facile de voir que si les inégalités (2) sont satisfaites, il existe une constante C_2 indépendante de φ et γ, et telle que

$$\frac{\sigma - s}{s} > C_2\gamma^2.$$

En s'appuyant sur ces deux inégalités, et en tenant compte de l'inégalité $|h'_\gamma(z_0)| \leqq 0$, on obtient tout de suite la proposition suivante :

3° *Si les nombres φ et γ vérifient les inégalités* (2), *il existe une cons-*

Il est évident que si la condition (2) est vérifiée, le numérateur atteint la valeur maximale sur l'arc $|\omega| \leqq \psi$ au point $\omega = 0$. Désignons par $g(\omega)$ le dénominateur de l'expression de $\frac{dz}{dw}$. La dérivée de $g(\omega)$ peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} g'(\omega) = \frac{1+\gamma}{2}\Bigg\{&\left(\sin^{2\gamma}\frac{\psi+\omega}{2} - \sin^{2\gamma}\frac{\psi-\omega}{2}\right)\sin\psi\cos\omega \\ &+ \left[\left(\sin^{2\gamma}\frac{\psi+\omega}{2} + \sin^{2\gamma}\frac{\psi-\omega}{2}\right)\cos\psi \right. \\ &\left. - 2\sin^\gamma\frac{\psi+\omega}{2}\sin^\gamma\frac{\psi-\omega}{2}\cos(\gamma\pi+\varphi)\right]\sin\omega\Bigg\}. \end{aligned}$$

Supposons que les conditions (2) sont remplies. Alors on a

$$\psi < \frac{\pi}{2}, \qquad \psi < \gamma\pi + \varphi < \pi.$$

Il en résulte pour $|\omega| < \psi$, que l'expression $g'(\omega)$ a le même signe que ω; par conséquent, $g(\omega)$ atteint son minimum au point $\omega = 0$. Ceci démontre que $\left|\frac{dz}{dw}\right|$ atteint son maximum au point $\omega = 0$, et le minimum de $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ est au point z_0.

tante C *indépendante de* φ *et* γ, *et telle que les longueurs des arcs* C_φ *et* $C_{\varphi,\gamma}$ *vérifient l'inégalité*

$$\frac{\sigma - s}{s} > C[1 - h'_\gamma(z_0)]^2. \tag{4}$$

3. **La construction du domaine Δ.** — Passons maintenant à la construction du domaine Δ, satisfaisant aux conditions du théorème énoncé. Nous allons construire une suite de domaines $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_m, \ldots$, dont chacun contient le précédent. Le domaine Δ sera défini comme la somme des domaines Δ_m.

Posons la définition suivante. Soit C un arc de la circonférence $|z| = r$. On désigne par C_γ l'arc de la circonférence, dont les extrémités coïncident avec les extrémités de l'arc C, qui est situé en dehors du cercle $|z| < r$ et qui forme un angle égal à $\gamma\pi$ avec l'arc C.

Soit, encore, η_n une suite de nombres convergeant vers zéro.

Le domaine Δ_0. — Soit $\rho < 1$ un nombre positif arbitrairement petit, qui figure dans l'énoncé du théorème. Le domaine Δ_0 est le cercle $|z| < \frac{1}{2}\rho$.

Le domaine Δ_1. — Divisons la circonférence $|z| = \frac{1}{2}\rho$ en quatre parties égales, et soit C_0^i l'une de ces parties. Remplaçons l'un des arcs C_0^i par $C_{0,\gamma}^i$ et désignons par $D_{0,\gamma}^i$ le domaine limité par la partie restante de la circonférence $|z| = \frac{1}{2}\rho$ et l'arc $C_{0,\gamma}^i$. Soit $w = h_{0,\gamma}^i(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D_{0,\gamma}^i$ sur le cercle $|w| < 1$, et telle que $h_{0,\gamma}^i(0) = 0$, $h_{0,\gamma}^{i'}(0) > 0$. D'après la propriété 2° de la fonction $h_{0,\gamma}^i(z)$ (§ 2), la valeur minimale de $|h_{0\gamma}^{i'}(z)|$ sur la frontière du domaine $D_{0,\gamma}^i$ est atteinte au milieu z_i de l'arc $C_{0,\gamma}^i$. Définissons, maintenant, le nombre $\bar{\gamma}$ de la manière suivante : s'il existe une valeur de γ inférieure à $\frac{1}{2}$, et telle que $|h_{0,\gamma}^{i'}(z_i)| = 1$, $\bar{\gamma}$ est égale à la plus petite valeur de γ jouissant de cette propriété ; dans le cas contraire, $\bar{\gamma} = \frac{1}{2}$.

Par définition, le domaine Δ_1 est la somme des quatre domaines $D_{0,\gamma}^i$. Le domaine Δ_1 est simplement connexe, univalent et limité par quatre arcs circulaires. Dans la suite, nous allons désigner ces arcs par Γ_1^i et toute la frontière du domaine Δ_1 par Γ_1. Il est évident que le domaine Δ_1, ainsi que sa frontière, est contenu dans le cercle $|z| < \rho$.

Soit $w = f_1(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine Δ_1 sur le cercle $|w| < 1$, et telle que

$$f_1(0) = 0, \qquad f'_1(0) > 0.$$

D'après le principe de M. Montel et les propriétés de la fonction $h_\gamma(z)$, on a, dans le domaine fermé Δ_1, l'inégalité

$$|f'_1(z)| \geqq 1.$$

Le domaine Δ_m, $m \geqq 2$. — Supposons que le domaine Δ_{m-1} est construit et satisfait aux conditions suivantes :

a. Le domaine Δ_{m-1} est simplement connexe, univalent et est contenu, ainsi que sa frontière Γ_{m-1}, à l'intérieur du cercle $|z| < \rho$.

b. Le contour Γ_{m-1} est une courbe simple qui est la somme d'une infinité dénombrable d'arcs analytiques Γ_{m-1}^k.

c. La fonction $w = f_{m-1}(z)$, qui réalise la représentation conforme du domaine Δ_{m-1} sur le cercle $|w| < 1$, en vérifiant les conditions

$$f_{m-1}(0) = 0, \qquad f'_{m-1}(0) > 0,$$

satisfait à l'inégalité

$$|f'_{m-1}(z)| \geqq 1.$$

Nous supposons encore qu'on a construit un domaine Ω_{m-2} limité par une courbe simple, contenu dans le cercle $|z| < \rho$ et renfermant le domaine Δ_{m-1}, ainsi que tous les points réguliers de Γ_{m-1}. La frontière de Ω_{m-2} ne contient qu'une partie de l'ensemble des points irréguliers de la courbe Γ_{m-1} (1).

Passons maintenant à la construction du domaine Δ_m. Soit, tout d'abord, Ω_{m-1} un domaine jouissant des propriétés suivantes :

Le domaine Ω_{m-1} est contenu dans le domaine Ω_{m-2}, donc, *a fortiori*, Ω_{m-1}, ainsi que sa frontière, appartient au cercle $|z| < \rho$;

---

(1) Ω_0 est le cercle $|z| < \rho$.

Le domaine Ω_{m-1} contient le domaine Δ_{m-1}, et la frontière de Ω_{m-1} ne contient que tous les points irréguliers du contour Γ_{m-1};

La frontière de Ω_{m-1} est une courbe simple;

La fonction $f_{m-1}(z)$ est régulière et univalente à l'intérieur de Ω_{m-1}.

Soient ϑ_{m-1} le domaine correspondant à Ω_{m-1} dans le plan de la variable $\zeta = f_{m-1}(z)$, $\mathfrak{C}_{m-1}^{(i)}$ les arcs de la circonférence $|\zeta| = 1$ correspondant aux arcs $\Gamma_{m-1}^{(i)}$, $z = \varphi_{m-1}(\zeta)$ la fonction inverse de $\zeta = f_{m-1}(z)$. Dans le cercle $|\zeta| < 1$, on a l'inégalité

$$|\varphi'_{m-1}(\zeta)| \leqq 1. \tag{6}$$

Partageons chaque arc $\mathfrak{C}_{m-1}^{(i)}$ en une infinité dénombrable d'arcs partiels, de telle manière que : quel que soit un arc C de la subdivision, les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1° Le domaine K limité par les arcs circulaires C et $C_{\frac{1}{2}}$ est situé complètement à l'intérieur du domaine ϑ_{m-1}.

2° A l'intérieur de chaque domaine K, la fonction $\varphi_{m-1}(\zeta)$ satisfait à l'inégalité

$$\operatorname{osc} |\varphi'_{m-1}(\zeta)| < \eta_{m-1} \min |\varphi'_{m-1}(\zeta)|. \tag{7}$$

3° Soient Σ l'arc de la frontière Γ_{m-1}, du domaine Δ_{m-1}, correspondant à C, δ la corde de l'arc Σ; alors on a

$$\frac{\text{longueur}\,\Sigma}{\text{longueur}\,\delta} < 1 + \eta_{m-1}. \tag{8}$$

Une telle subdivision est évidemment possible. Nous avons obtenu ainsi une subdivision de toute la circonférence $|\zeta| = 1$ en une infinité dénombrable d'arcs C_{m-1}^n avec les domaines correspondants K_{m-1}^n. Désignons par Σ_{m-1}^n les arcs correspondants de la courbe Γ_{m-1}.

Soit μ_{m-1}^n la valeur maximale de $|\varphi'_{m-1}(\zeta)|$ dans le domaine K_{m-1}^n. Remplaçons l'arc C_{m-1}^n de la circonférence $|\zeta| = 1$ par un arc $C_{m-1,\gamma}^n$, et soit $D_{m-1,\gamma}^n$ le domaine limité par la partie restante de la circonférence et par l'arc $C_{m-1,\gamma}^n$. Désignons par

$$w = h_{m-1,\gamma}^n(\zeta)$$

la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D^n_{m-1,\gamma}$ sur le cercle $|w| < 1$,

$$h^n_{m-1,\gamma}(0) = 0, \qquad h^{n\prime}_{m-1,\gamma}(0) > 0$$

et soit ζ_n le milieu de l'arc $C^n_{m-1,\gamma}$. Nous allons maintenant définir un nombre $\overline{\gamma}_n$ de la manière suivante : s'il existe une valeur de γ inférieure à $\frac{1}{2}$, et telle que

$$|h^{n\prime}_{m-1,\gamma}(\zeta_n)| = \mu^n_{m-1},$$

$\overline{\gamma}_n$ est égal à la plus petite valeur de γ jouissant de cette propriété, dans le cas contraire $\overline{\gamma}_n = \frac{1}{2}$.

Désignons par D_m la somme de tous les domaines $D^n_{m-1,\overline{\gamma}}$, par $w = h_{m-1}(\zeta)$ la fonction qui donne la représentation conforme de ce domaine sur le cercle $|w| < 1$ et vérifie les conditions

$$h_{m-1}(0) = 0, \qquad h'_{m-1}(0) > 0.$$

En utilisant le principe de M. Montel, on vérifie aussitôt que sur chaque arc $C^n_{m-1,\overline{\gamma}_n}$, on a

$$(9) \qquad |h'_{m-1}(z)| \geqq \mu^n_{m-1}.$$

D'autre part, la propriété 3° (§ 2) de la fonction $h^n_{m-1,\gamma}$ entraîne l'inégalité

$$(10) \qquad \frac{\sigma^n_{m-1} - s^n_{m-1}}{s^n_{m-1}} > C(1 - \mu^n_{m-1})^2,$$

en désignant par s^n_{m-1} la longueur de l'arc C^n_{m-1}, σ^n_{m-1} la longueur de $C^n_{m-1,\overline{\gamma}_n}$, C étant une constante absolue.

Par définition, le domaine Δ_m est le domaine correspondant à D_m, d'après la représentation $z = \varphi_{m-1}(\zeta)$. Le domaine Δ_m est simplement connexe, univalent et est contenu, ainsi que sa frontière, dans le cercle $|z| < \rho$, parce que le domaine D_m est à l'intérieur du domaine $\mathfrak{S}_{m-1}$. La représentation conforme

$$w = f_m(z) \qquad [f_m(0) = 0, f'_m(0) > 0]$$

de Δ_m sur le cercle $|w| < 1$ est donnée par la formule

$$(11) \qquad w = f_m(z) = h_{m-1}[f_{m-1}(z)].$$

De cette relation, on déduit facilement qu'à l'intérieur de Δ_m on a l'inégalité

$$|f'_m(z)| \geqq 1. \tag{12}$$

En effet, soit Γ_m^n l'arc de la frontière de Δ_m, correspondant à un arc circulaire $C_{m,\bar{\gamma}_n}^n$. Sur $C_{m,\bar{\gamma}}^n$, on a

$$|h'_{m-1}(\zeta)| \geqq \mu_{m-1}^n, \qquad |\varphi'_{m-1}(\zeta)| \leqq \mu_{m-1}^n,$$

donc, sur l'arc Γ_m^n la fonction $f'_{m-1}(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|f'_{m-1}(z)| \geqq \frac{1}{\mu_{m-1}^n},$$

et, par conséquent, sur cet arc Γ_m^n, on a

$$|f'_m(z)| = |f'_{m-1}(z)|\,|h'_{m-1}(\zeta)| \geqq 1.$$

Il en résulte que l'inégalité (12) est remplie sur la frontière de Δ_m. Elle a lieu à l'intérieur de Δ_m, *a fortiori*, parce que la fonction $f'_m(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de ce domaine.

La frontière Γ_m de Δ_m est la somme d'une infinité dénombrable d'arcs analytiques Γ_m^n correspondant aux arcs $C_{m-1,\bar{\gamma}}^n$. Désignons par l_m^n la longueur de l'arc Σ_{m-1}^n, λ_m^n la longueur de Γ_m^n. Soit ν_m^n le minimum de $|\varphi'_{m-1}(\zeta)|$ dans le domaine K_{m-1}^n. En tenant compte de l'inégalité (7), on obtient

$$\lambda_m^n \geqq \nu_m^n \sigma_{m-1}^n, \qquad l_m^n \leqq \nu_m^n(1 + \eta_{m-1}) s_{m-1}^n,$$

et, en vertu de (10), nous obtenons l'inégalité essentielle

$$\frac{\lambda_m^n - l_m^n}{l_m^n} \geqq (1 - \eta_{m-1})\, C(1 - \mu_{m-1}^n)^2 - \eta_{m-1}. \tag{13}$$

Les domaines Δ_m étant construits, on définit le domaine Δ comme la somme de tous les domaines Δ_m.

4. **La démonstration du théorème.** — Démontrons que le domaine Δ satisfait à toutes les conditions du théorème énoncé. Il est évident que le domaine Δ est simplement connexe univalent et est contenu dans le cercle $|z| < \rho$, parce que chaque domaine Δ_m satisfait à ces conditions. Il résulte de la dernière propriété men-

tionnée du domaine Δ, qu'il ne coïncide pas avec le cercle $|z| < 1$, $(\rho < 1)$. La frontière Γ du domaine Δ est une courbe simple. En effet, un arc de Γ, dont les extrémités coïncident avec les extrémités d'un arc analytique de la courbe Γ_m, est situé entre cet arc de Γ_m et un arc de la frontière de Ω_m ayant les mêmes extrémités. Il en résulte que des arcs de Γ, dont les extrémités coïncident avec les extrémités de deux arcs de Γ_n, n'ont pas de points communs.

Soit $w = f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine Δ sur le cercle $|w| < 1$,

$$[f(0) = 0, f'(0) > 0].$$

D'après un théorème de M. Carathéodory,

$$f(z) = \lim f_m(z). \tag{14}$$

Il en résulte qu'à l'intérieur de Δ, on a l'inégalité

$$|f'(z)| \geqq 1. \tag{15}$$

Ceci démontre que la frontière Γ est une courbe rectifiable, et que

$$\text{longueur}\,\Gamma \leqq 2\pi. \tag{16}$$

Il ne reste qu'à démontrer que le domaine Δ satisfait à la condition (3) du théorème énoncé. Pour voir que la condition (3) est vérifiée, il suffit de démontrer l'égalité

$$\text{longueur}\,\Gamma = 2\pi. \tag{17}$$

En effet, il résulte de cette égalité et de la relation (15), que presque partout sur la courbe Γ, on a $|f'(z)| = 1$.

D'après la construction de Δ, la courbe Γ contient toutes les extrémités des arcs analytiques Γ_m^n. En vertu de l'inégalité (8), il résulte que

$$\text{longueur}\,\Gamma_m < (1 + \eta_m) \times \text{longueur}\,\Gamma. \tag{18}$$

Supposons, par impossible, que la longueur de Γ est inférieure à 2π, longueur $\Gamma = 2\pi(1 - \beta)$. En vertu de (18) si le nombre m est assez grand, on obtient

$$\text{longueur}\,\Gamma_m = \int_C |\varphi'_m(w)|\,|dw| < 2\pi\left(1 - \frac{\beta}{2}\right). \tag{19}$$

C étant la circonférence $|w| = 1$, $\varphi_m(w)$ la fonction inverse de $f_m(z)$. Soit E_m l'ensemble des points vérifiant l'inégalité

$$|\varphi'_n(w)| < 1 - \frac{\beta}{4}.$$

D'après une évaluation bien connue, il résulte de (19)

$$\operatorname{mes} E_m > \pi\beta,$$

par suite, la somme des longueurs d'arcs C''_m, telles que

$$\mu''_m < \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)(1 + \eta_m)$$

est supérieure à $\pi\beta$. Il en résulte, qu'il existe une constante absolue α telle que la somme des longueurs des arcs Σ''_m correspondants est supérieure à α [1]. En tenant compte de l'inégalité (13) pour chacun de ces arcs Σ''_m, nous avons

$$\frac{\lambda''_{m+1} - l''_{m+1}}{l''_{m+1}} > (1 - \eta_m)\, C\left(\frac{\beta}{4} - \eta_m\right)^2 - \eta_m,$$

pour tous les autres arcs Σ''_m par suite de l'inégalité (8), nous avons

$$\frac{\lambda''_{m+1} - l''_{m+1}}{l''_{m+1}} > -\eta_m,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{longueur}\,\Gamma_{m+1} > {} & (\text{longueur}\,\Gamma_m - \alpha)(1 - \eta_m) \\ & + \alpha\left[1 + C(1 - \eta_m)\left(\frac{\beta}{4} - \eta_m\right)^2 - \eta_m\right]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire si le nombre m est assez grand, on a

$$\text{longueur}\,\Gamma_{m+1} > (1 - \eta_m)\,\text{longueur}\,\Gamma_m + C\alpha\,\frac{\beta^2}{32}.$$

L'inégalité obtenue est incompatible avec (19), par suite la longueur de Γ est égale à 2π.

5. Pour donner une réponse négative à la question posée dans l'Introduction, démontrons la proposition suivante :

---

(1) Cela résulte du théorème I de la première Partie.

Soit Δ *un domaine satisfaisant aux conditions du théorème,* $z = \varphi(w)$, *la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle* $|w| < 1$ *sur* Δ, $[\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0]$. *La fonction* $\log|\varphi'(w)|$ *n'est pas représentable par l'intégrale de Poisson de ses valeurs limites sur la circonférence* $|w| = 1$.

En effet,

$$\int_{|w|=1} \log|\varphi'(w)|\,|dw| = 1,$$

tandis que d'après le lemme de Schwarz $|\varphi'(0)| \leqq \rho < 1$, $\log|\varphi'(0)| < 0$.

Indiquons quelques propriétés intéressantes des domaines Δ, qu'on obtient en rapprochant les résultats de M. Smirnoff [1] avec la proposition précédente.

a. Pour le domaine Δ il n'existe aucun système complet de polynomes orthogonaux sur le contour Γ.

b. Il existe une fonction $F(z)$ représentable par l'intégrale de Cauchy à l'intérieur de Δ et telle qu'à l'intérieur de Δ on a $|F(z)| > 1$ et sur la frontière de Δ on a presque partout $|F(z)| = 1$.

On obtient l'exemple d'une telle fonction en posant

$$F(z) = f'(z),$$

$f(z)$ étant la fonction réalisant la représentation conforme du domaine Δ sur le cercle $|w| < 1$.

c. Soit D_n une suite de domaines convergeant vers Δ, de manière que chaque D_n contient $\bar{\Delta} = \Delta + \Gamma$. Désignons par s_n la longueur de la courbe correspondant à Γ dans la représentation conforme du domaine Δ_n sur le cercle $|w| < 1$.

On a

$$\liminf_{n \to \infty} (s_n) \geqq 2\pi + \alpha,$$

α étant une constante ne dépendant que du domaine Δ.

En effet, M. Smirnoff a démontré que s'il existe une suite de domaines Δ_n, tels que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 2\pi$, le système des polynomes ortho-

---

(1) *Loc. cit.*, p. 2.

gonaux sur le contour Γ est complet [1]. Par conséquent, la propriété *a.* entraîne la propriété *c.* Il est facile de démontrer la propriété *c.* directement. En effet, en désignant par $f_n(z)$, $[f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0]$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine Δ_n sur le cercle $|w| < 1$, on a, en vertu de l'égalité $|\varphi'(w)| = 1$, ayant lieu presque partout,

$$s_n = \int_\Gamma |f'_n(z)|\,|dz| = \int_{|w|=1} \left| \frac{d}{dz} f_n[\varphi(w)] \right| d\theta \geqq f'_n(0)\,2\pi,$$

d'où

$$\liminf_{n \to \infty} s_n \geqq \lim_{n \to \infty} 2\pi\,|f'_n(0)| = 2\pi\,|f'(0)|,$$

et l'on achève la démonstration en remarquant que $|f'(0)| > 1$.

Indiquons, encore, une propriété de la fonction $f(z)$ qui réalise la représentation conforme du domaine Δ sur le cercle.

d. Quels que soient deux nombres positifs K et δ, il existe deux nombres $r < 1$ et $\varepsilon > 0$ et un système d'arcs γ_n, dont la somme des longueurs est égale à ε, située sur la courbe $|f(z)| = r$, tel que dans la représentation conforme de Δ sur le cercle $|w| < 1$ il correspond aux arcs γ_n un système d'arcs de $|w| = r$ dont la somme des longueurs est plus grande que $K(1 + |ln\,\varepsilon|)^{-(1+\delta)}$.

Supposons par impossible que l'on peut trouver deux nombres K et δ qui ne satisfont pas à l'énoncé du théorème. Quel que soit l'ensemble E, situé sur la courbe $|f(z)| = r$ et de mesure inférieure à ε, on a l'inégalité

$$\int_E |f'(z)|\,ds < K(1 + |\log\varepsilon|)^{-(1+\delta)}. \tag{20}$$

D'autre part, des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 7 de la première Partie conduisent à l'inégalité suivante

$$\int_H |f'(z)| \log^+ |f'(z)|\,|dz| \leqq \int_0^\mu \frac{K\,d\varepsilon}{\varepsilon(1 + |\log\varepsilon|)^{1+\delta}}, \tag{21}$$

H étant un ensemble quelconque situé sur Γ_ρ, mes $H = \mu$.

Considérons maintenant la fonction $\log|\varphi'(w)|$. Les valeurs limites de cette fonction sur la circonférence $|w| = 1$ sont égales presque partout

---

(1) *Loc. cit.*, p. 354.

à $\log|\varphi'(e^{i\theta})|$. En appliquant un théorème de M. Egoroff on peut trouver un ensemble $\mathcal{E}$ tel que $\operatorname{mes}\mathcal{E} \geqq 2\pi - \eta$ et

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r'\to 1}} \int_{\mathcal{E}} \big| \log|\varphi'(r'e^{i\theta})| - \log|\varphi'(re^{i\theta})| \big|\, d\theta = 0.$$

D'autre part,

$$\int_{C\mathcal{E}} \big|\log|\varphi'(re^{i\theta}) - \log|\varphi'(r'e^{i\theta})| \big|\, d\theta \leqq \int_{C\mathcal{E}} \log^+|\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$+ \int_{C\mathcal{E}} \log^+|\varphi'(r'e^{i\theta})|\, d\theta + \int_{C\mathcal{E}} \log^-|\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_{C\mathcal{E}} \log^-|\varphi'(r'e^{i\theta})|\, d\theta.$$

La fonction $\varphi'(w)$ appartient à la classe H_1 et $\log^+|\varphi'(w)| < |\varphi'(w)|$. Il en résulte que les deux premières intégrales ne surpassent pas un nombre $h(\eta)$ infiniment petit avec η. Évaluons les deux dernières intégrales. En vertu de (21), on a

$$\int_{C\mathcal{E}} \log^-|\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{H} |f'(z)| \log^+|f'(z)|\, |dz| \leqq \int_0^{\mu} \frac{K\, d\varepsilon}{\varepsilon(1+|\log\varepsilon|)^{1+\delta}}.$$

Et comme μ ne surpasse pas un nombre $h(\eta)$ infiniment petit avec η, il en est de même avec les deux dernières intégrales. On déduit de ces évaluations que

$$\lim_{r, r'\to 1} \int_{-\pi}^{+\pi} \big| \log|\varphi'(r'e^{i\theta})| - \log|\varphi'(re^{i\theta})| \big|\, d\theta = 0.$$

Il en résulte que la fonction $\log|\varphi'(re^{i\theta})|$ est représentable par l'intégrale de Poisson, ce qui contredit à la propriété fondamentale du domaine Δ.

Il résulte de la propriété démontrée du domaine Δ que le théorème I n'est pas susceptible d'une généralisation essentielle.

TROISIÈME PARTIE.

1. Posons quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite. Soit D un domaine simplement connexe, contenant l'origine et limité par une courbe rectifiable Γ. Soit $w = f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w| < \rho$ et vérifie les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et soit $\varphi(w)$ la fonction inverse.

Nous dirons qu'une fonction $F(z)$ régulière à l'intérieur du domaine D appartient dans ce domaine à la classe E_p, s'il existe une suite de courbes rectifiables C_n, situées à l'intérieur de D et convergeant vers la frontière Γ de D, telle que les intégrales

$$(1) \qquad \int_{\mathcal{C}_n} |F(z)|^p \, dS$$

restent bornées.

Il est facile de démontrer que cette définition, qui n'exige pas la connaissance de la représentation conforme du domaine D sur le cercle, est équivalente à la définition de classe E_p due à M. Smirnoff[1]. D'après M. Smirnoff, la fonction $F(z)$ appartient à la classe E_p si les intégrales

$$(2) \qquad \int_{\Gamma_r} |F(z)|^p \, dS$$

restent bornées pour $r \to \rho$, Γ_r étant la courbe définie par l'équation $|f(z)| = r$, $(r < \rho)$.

Il est évident que si la condition (2) est vérifiée, la fonction $F(z)$ satisfait à la condition (1). Démontrons que la proposition inverse est aussi exacte. Soit $\varphi_n(w)$, $[\varphi_n(0) = 0,\ \varphi'_n(0) > 0]$, la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle $|w| < \rho$ sur le domaine limité par la courbe C_n et posons

$$\Phi(w) = F[\varphi(w)]\sqrt[p]{\varphi'(w)}, \qquad \Phi_n(w) = F[\varphi_n(w)]\sqrt[p]{\varphi'_n(w)}.$$

La fonction $\Phi_n(w)$ appartient à la classe H_p de M. Riesz, parce que $F[\varphi_n(w)]$ est bornée et $\sqrt[p]{\varphi'(w)}$ appartient à la classe H_p, donc, si $r < \rho$

$$r\int |\Phi_n(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leqq \rho \int |\Phi_n(\rho e^{i\theta})|^p \, d\theta = \int_{\mathcal{C}_n} |F(z)|^p \, dS < K.$$

D'autre part, d'après un théorème de M. Carathéodory, les fonctions $\Phi_n(w)$ convergent uniformément vers la fonction $\Phi(w)$ à l'intérieur du cercle $|w| < \rho$. Il en résulte que

$$\int_{\Gamma_r} |F(z)|^p \, dS = \int_{|w|=r} |\Phi(w)|^p \, |dw| = \lim_{n \to \infty} \int_{|w|=r} |\Phi_n(w)|^p \, |dw| < K.$$

---

(1) SMIRNOFF, *loc. cit.*, p. 1.

En s'appuyant sur la proposition démontrée nous pouvons énoncer quelques propriétés des fonctions $F(z)$ appartenant à la classe E_p. Il est connu que la fonction $F(z)$ a presque partout sur le contour Γ des valeurs limites $F(z)$, suivant les chemins non tangents, que cette fonction est sommable et que l'on a la relation

$$(3) \qquad \lim_{r \to \rho} \int_{\Gamma_r} |F(z)|^p \, dS = \int_{\Gamma} |F(z)|^p \, dS.$$

2. Cela posé, nous pouvons énoncer un principe extrémal, qui définit la fonction $f(z)$ réalisant la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w| < \rho$, principe dû à M. Julia ([1]).

Considérons la famille des fonctions, appartenant à la classe E_p, ($p > 0$) *dans le domaine* D *et satisfaisant à la condition* $F(0) = 1$. *La valeur minimale de l'intégrale*

$$(4) \qquad \int_{\Gamma} |F(z)|^p \, dS$$

est atteinte pour la fonction unique $F_0(z) = [f'(z)]^{\frac{1}{p}}$.

En particulier, pour $p = 1$ nous avons le principe suivant : *Parmi toutes les fonctions régulières à l'intérieur du domaine* D, *continues dans le domaine fermé, absolument continues sur la frontière* Γ *et satisfaisant à la condition*

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 1,$$

la fonction $f(z)$ *donne la plus petite valeur à l'intégrale*

$$(5) \qquad \int_{\Gamma} |F'(z)| \, dS.$$

Les propriétés extrémales indiquées ont été démontrées par M. Julia dans des conditions un peu plus restrictives, mais en s'appuyant sur l'égalité (3), on peut appliquer sa démonstration dans le cas considéré.

Il est bien connu qu'à chaque principe extrémal, caractérisant la fonction qui réalise la représentation conforme d'un domaine sur le

([1]) Julia, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1928.

cercle, on peut attacher une suite de polynomes extrémaux. Soit p un nombre positif fixé. Le polynome extrémal $p_n(z)$ est défini par la propriété suivante :

Parmi tous les polynomes de degré n satisfaisant à la condition $q_n(0)=1$, le polynome $p_n(z)$ donne la plus petite valeur à l'intégrale

$$(6)\qquad \mu_n^p=\int_\Gamma |q_n(z)|^p\, dS.$$

Pour démontrer l'existence du polynome extrémal $p_n(z)$, il suffit de remarquer que les polynomes $q_n(z)$ pour lesquels les intégrales (6) sont uniformément bornées ont des coefficients uniformément bornés. Remarquons encore que le polynome extrémal $p_n(z)$ est unique si $p>1$. Cela résulte de l'inégalité de Minkowski.

Dans ce qui suit nous allons étudier la convergence des polynomes $p_n(z)$. Ensuite nous donnerons une application des résultats obtenus au problème de la meilleure approximation des fonctions en moyenne d'ordre $p>0$ sur le contour Γ du domaine D [1].

3. Désignons par $z=\varphi(w)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle $|w|<\rho$ sur le domaine D, vérifiant les conditions $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. La fonction $\varphi'(w)$ appartient à la classe H_1, donc la fonction $\log|\varphi'(\rho e^{i\theta})|$ est définie presque partout et est sommable [2]. Posons

$$(7)\qquad \Phi(w)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\rho e^{i\theta}+w}{\rho e^{i\theta}-w}\log|\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta}.$$

Il est connu que la fonction $\Phi(w)$ appartient à la classe H_1 et jouit de la propriété suivante : quelle que soit une autre fonction $\Phi_1(w)$ appartenant à la classe H_1, dont le module a presque partout les mêmes valeurs limites, on a

$$|\Phi_1(w)|\leqq|\Phi(w)|,$$

si le signe d'égalité a lieu pour un point intérieur $w_0(|w_0|<\rho)$ la fonction $\Phi_1(w)$ ne diffère de $\Phi(w)$ que par un facteur constant dont

---

(1) Les résultats obtenus généralisent quelques théorèmes de M. Smirnoff sur les systèmes de polynomes orthogonaux.

(2) Riesz, *Math. Zeit.*, Bd. 8, H. 1/2.

le module est égal à l'unité (¹). Il en résulte que $\Phi(0) \geqq 1$, et si le signe d'égalité a lieu, on a $\Phi(w) \equiv \varphi'(w)$. Donc : *pour que la fonction harmonique* $\log|\varphi'(w)|$ *soit représentable par l'intégrale de Poisson de ses valeurs limites sur la circonférence* $|w| = \rho$ *il est nécessaire et suffisant qu'on ait l'égalité* $\Phi(0) = 1$.

4. Nous pouvons maintenant démontrer la propriété suivante de la suite des polynomes extrémaux

Théorème I. — *Quel que soit* $p > 0$, *on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^p = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma |p_{n,p}(z)|^p \, dS = 2\pi\rho\,\Phi(0) \geqq 2\pi\rho. \tag{8}$$

Remarquons, tout d'abord, que $\mu_n^p \geqq \mu_{n+1}^p$, donc la limite de μ_n^p existe. Désignons par $\pi_{n,p}(w)$ la transformée du polynome $p_{n,p}(w)$ dans le plan de la variable $w = f(z)$, et soit $\beta_{n,p}(w)$ la fonction de Blaschke qui a les mêmes zéros dans le cercle $|w| < \rho$, que la fonction $\pi_{n,p}(w)$. Posons

$$\pi_{n,p}(w) = \beta_{n,p}(w)\, x_{n,p}(w),$$

alors on a

$$|x_{n,p}(0)| \geqq 1, \qquad |x_{n,p}(\rho e^{i\theta})| = |\pi_{n,p}(\rho e^{i\theta})|, \qquad |\varphi'(\rho e^{i\theta})| = |\Phi(\rho e^{i\theta})|.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |p_{n,p}(z)|^p \, dS &= \rho \int_{-\pi}^{+\pi} |\pi_{n,p}(\rho e^{i\theta})|^p \, |\varphi'(\rho e^{i\theta})| \, d\theta \\ &= \rho \int_{-\pi}^{+\pi} |x_{n,p}(\rho e^{i\theta})|^p \, |\Phi(\rho e^{i\theta})| \, d\theta \geqq 2\pi\rho\,\Phi(0),\end{aligned}$$

parce que la fonction $x_{n,p}^p(w).\Phi(w)$ est régulière à l'intérieur du cercle $|w| < \rho$ et appartient à la classe H_1. Donc

$$\lim \mu_n^p \geqq 2\pi\rho\,\Phi(0). \tag{9}$$

Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que l'on peut

(¹) Szegö, *Beiträge zur Théorie der Toeplitzschen Formen* (*Math. Zeit.*, Bd. 6, H. 3/4, Bd. 9, H. 3/4). — Smirnoff, *Journ. Soc. Phys. Math. Leningrad*, t. II, fasc. II, 1930.

construire un polynome $q(z)$, tel que

$$(10) \qquad q(0)=1, \qquad \int_\Gamma |q(z)|^p\, dS < 2\pi\rho\, \Phi(0)+\varepsilon.$$

En effet, si m est le degré du polynome $q(z)$, on a

$$\mu_m^p \leqq \int_\Gamma |q(z)|^p\, dS,$$

et comme la suite μ_m^p est décroissante,

$$\lim \mu_n^p \leqq 2\pi\rho\, \Phi(0)+\varepsilon.$$

Donc $\mu_n^p \to 2\pi\rho\,\Phi(0)$.

Passons maintenant à la construction du polynome $q(z)$. Soit

$$g(\theta) = |\Phi(\rho e^{i\theta})| : \Phi(0),$$

la fonction $g(\theta)$ est sommable et

$$\int_0^{2\pi} \log g(\theta)\, d\theta = 0.$$

Il existe alors un ensemble P, tel que les fonctions $g(\theta)$ et $\frac{1}{g(\theta)}$ sont bornées sur P et

$$\int_{CP} |\log g(\theta)|\, d\theta = \log(1+\varepsilon'), \qquad \int_{CP} g(\theta)\, d\theta < \varepsilon'.$$

Désignons par $j(\theta)$ la fonction qui est égale à $\frac{1}{g(\theta)}$ sur P et à 1 ailleurs. La fonction bornée

$$x(w) = e^{\frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho e^{i\theta}+w}{\rho e^{i\theta}-w} \log j(\theta)\, d\theta}$$

satisfait aux conditions

$$\int_0^{2\pi} |x(\rho e^{i\theta})|^p\, |\Phi(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < (2\pi+\varepsilon')\, \Phi(0)\rho, \qquad |x(0)-1| < \varepsilon'.$$

Par suite, il existe un polynome $x_1(w)$ satisfaisant aux mêmes inégalités. En désignant par $q_1(z)$ la fonction correspondante dans le plan de la variable $z=\varphi(w)$, nous avons

$$|q_1(0)-1| < \varepsilon', \qquad \int_\Gamma |q_1(z)|\, dS < (2\pi+\varepsilon')\rho\, \Phi(0).$$

La fonction $q_1(w)$ est continue dans le domaine fermé. D'après un théorème de Walsch et parce que le nombre ε' est arbitrairement petit, il existe un polynome $q(z)$ satisfaisant aux conditions posées plus haut (10).

5. Pour déduire les conséquences du théorème démontré, nous avons besoin d'un lemme sur les suites de fonctions.

Lemme. — *Soit $f_n(z)$ une suite de fonctions définies dans le cercle $|w| < \rho$ et appartenant à la classe $H_p(p > 0)$ telle que*

$$(a) \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 1,$$

$$(b) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 2\pi,$$

alors on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^p \, d\theta = 0 \quad (^1).$$

Démontrons d'abord ce lemme dans le cas particulier $p = 2$. Dans ce cas nous avons l'identité

$$|f_n(z) - 1|^2 = [|f_n(z)|^2 - 1] - 2(\text{réel} f_n(z) - 1),$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^2 \, d\theta \leqq \left| \int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta})|^2 \, d\theta - 2\pi \right| - 4\pi \, |\text{réel} f_n(0) - 1|.$$

Ce qui démontre le lemme pour $p = 2$. En particulier, il résulte de la proposition démontrée que si $p = 2$ la suite $f_n(e^{i\theta})$ converge en mesure vers l'unité. Soit maintenant p un nombre positif arbitraire. Désignons par $b_n(z)$ la fonction de M. Balschke dont les zéros coïncident avec

---

(1) Si $p > 1$ on peut démontrer un lemme analogue pour les fonctions d'une variable réelle. Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions définies dans l'intervalle $(0, 1)$ et appartenant à la classe L_p. Supposons que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f_n(x)|^p \, dx = 1,$$

on a alors

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f_n(x) - 1|^p \, dx = 0.$$

Dans le cas $p \leqq 1$, la proposition n'est pas exacte.

ceux de la fonction $f_n(z)$, et soit

$$f_n(z) = b_n(z)\, g_n(z).$$

La fonction $g_n(z)$ n'a pas de zéros dans le cercle. Nous pouvons supposer que la décomposition est faite de telle manière que $b_n(0)$ est réel et positif. Dans le cas contraire il suffit de multiplier la fonction $b_n(z)$ par un facteur constant dont le module est égal à l'unité. Alors les fonctions $[g_n(z)]^{\frac{p}{2}}$, $b_n(z)$ vérifient les conditions du lemme pour $p = 2$. En effet, il est évident que ces fonctions appartiennent à la classe H_2 et la condition (b) est satisfaite, parce que l'on a presque partout

$$|b_n(e^{i\theta})| = 1, \qquad |g_n(e^{i\theta})| = |f_n(e^{i\theta})|.$$

D'autre part,

$$g_n(0)\, b_n(0) \to 1, \qquad |b_n(0)| \leqq 1.$$

$$|g_n(0)|^p \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |g_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta \to 1,$$

il en résulte que la condition a est aussi satisfaite. D'après la proposition démontrée pour $p = 2$, les fonctions $b_n(e^{i\theta})$, $[g_n(e^{i\theta})]^{\frac{p}{2}}$ convergent en mesure vers l'unité; par conséquent $f_n(e^{i\theta})$ converge en mesure vers l'unité. Soit E_n l'ensemble des points définis par l'inégalité $|1 - f_n(e^{i\theta})| < \varepsilon$ et soit $2\pi(1 + \eta_n)$ — la valeur de l'intégrale b. On a alors

$$\int_{CE_n} |f_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p - \int_{E_n} |f_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta < 2\pi(1 + \eta_n) - (1 - \varepsilon)^p\, mE_n$$

et comme $mE_n \to 2\pi$, $\eta_n \to 0$, la limite supérieure de cette intégrale est inférieure à $2\pi[1 - (1 - \varepsilon)^p]$. D'autre part

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^p\, d\theta \leqq \int_{E_n} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^p\, d\theta + 2^p\left[m(CE_n) + \int_{CE_n} |f_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right],$$

donc la limite supérieure de la première partie est inférieure à $2\pi[1 + \varepsilon^p - (1 - \varepsilon)^p]$, et la proposition est complètement démontrée.

6. En s'appuyant sur les deux propositions démontrées précédemment, nous allons démontrer quelques théorèmes sur la convergence de la suite des polynomes $p_{n,p}(z)$.

Désignons par $F_p(z)$ la transformée de la fonction $\left(\frac{\Phi(0)}{\Phi(w)}\right)^p$. On a alors le

THÉORÈME II. — *Les polynomes $p_{n,p}(z)$ convergent uniformément vers la fonction $F_p(z)$ à l'intérieur du domaine D et sur le contour Γ du domaine D on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma |F_p(z)-p_{n,p}(z)|^p\,dS=0.$$

En effet, soit $\pi_{n,p}(w)$ la transformée du polynome $p_{n,p}(z)$. D'après le théorème I et en vertu de l'égalité $|\varphi'(\rho e^{i\theta})|=|\Phi(\rho e^{\theta i})|$, qui a lieu presque partout, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}|\pi_{n,p}(\rho e^{i\theta})|^p\,\frac{|\Phi(\rho e^{i\theta})|}{\Phi(0)}\,d\theta=2\pi.$$

D'autre part

$$\pi_{n,p}(0)=1.$$

La fonction $\pi_{n,\rho}(w)\left(\frac{\Phi(w)}{\Phi(0)}\right)^{\frac{1}{p}}$ appartient à la classe H_p. D'après le lemme démontré tout à l'heure, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|1-\pi_{n,p}(\rho e^{i\theta})\left(\frac{\Phi(\rho e^{i\theta})}{\Phi(0)}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p d\theta=0.$$

En revenant au plan de la variable z, nous obtenons l'égalité cherchée

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma |F_p(z)-p_{n,p}(z)|^p\,dS=0.$$

Il est connu que cette égalité entraîne la convergence uniforme de la suite $p_{n,p}(z)$ vers la fonction $F_p(z)$ à l'intérieur du domaine D.

Du théorème démontré il résulte immédiatement le

THÉORÈME III. — *Pour que la suite des polynomes $p_{n,p}(z)$ converge vers la fonction $[f'(z)]^{\frac{1}{p}}$ à l'intérieur du domaine D, il est nécessaire et suffisant que la fonction $\log|\varphi'(w)|$ soit représentable par l'intégrale de Poisson de ses valeurs limites sur la circonférence $|w|=\rho$. Si la condition est satisfaite, la convergence est uniforme à l'intérieur de D et* *sur le contour* Γ *on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \left| [f'(z)]^{\frac{1}{p}} - p_{n,p}(z) \right|^p dS = 0.$$

Faisons encore une application de ce théorème pour le cas $p = 1$. Soit

$$P_n(z) = \int_0^z p_{n,1}(z)\,dz.$$

Le polynome $P_n(z)$ peut être défini comme il suit : $P_n(z)$ est le polynome qui réalise le minimum de l'intégrale

$$\int_\Gamma |Q'_n(z)|\,dS,$$

dans l'ensemble des polynomes du degré n, satisfaisant aux conditions

$$Q_n(0) = 0, \qquad Q'_n(0) = 1.$$

Dans ce cas le théorème précédant conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Pour que la suite des polynomes* $P_n(z)$ *converge vers la fonction* $f(z)$ *à l'intérieur du domaine* D *il faut et il suffit que la fonction* $\log|\varphi'(w)|$ *soit représentable par l'intégrale de Poisson. Si la condition est satisfaite, la convergence est uniforme dans le domaine fermé* $\overline{D}$.

7. Soit $F(z)$ une fonction appartenant à la classe E_p dans le domaine D. Désignons par $P_n(z)$ le polynome qui rend le minimum de l'intégrale

$$(11) \qquad \mu^p(F, Q_n) = \int_\Gamma |F(z) - Q_n(z)|^p\,dS,$$

dans l'ensemble des polynomes de degré n, et soit $\mu_n^p(F) = \mu^p(F, P_n)$. Nous dirons que la famille des polynomes est complète dans le domaine D par rapport à la fonctionnelle $\mu^p(F, Q_n)$ si quelle que soit la fonction $F(z)$ appartenant à la classe E_p on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^p(F) = 0.$$

Dans le cas $p = 2$ cette propriété est équivalente à la fermeture du système des polynomes orthogonaux. En s'appuyant sur les résultats obtenus on démontre facilement le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Soit p un nombre positif fixe. Pour que la famille de tous les polynomes soit complète dans le domaine* D *par rapport à la fonctionnelle* $\mu^p(\mathrm{F}, \mathrm{Q})$ *il faut et il suffit que la fonction* $\log|\varphi'(w)|$ *soit représentable par l'intégrale de Poisson de ses valeurs limites sur la circonférence* $|w| = \rho$.

La condition est nécessaire. Soit $f(z)$, $[f(0) = 0,\ f'(0) = 1]$, la fonction qui réalise la représentation conforme de D sur le cercle $|w| < \rho$, et soit $\mathrm{F}_0(z) = [f'(z)]^{\frac{1}{p}}$. La fonction $\mathrm{F}_0(z)$ appartient évidemment à la classe E_p. Si la condition du théorème n'est pas satisfaite, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^p(\mathrm{F}_0) > 0.$$

En effet, dans le cas contraire on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^p(\mathrm{F}_0, \mathrm{P}_n) = 0$. En tenant compte de l'inégalité de Minkowski pour $p \geqq 1$ et de l'inégalité

$$\int |f + \varphi|^p d\mathrm{S} \leqq \int |f|^p d\mathrm{S} + \int |\varphi|^p d\mathrm{S}$$

pour $p < 1$, on déduit aisément que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma |\mathrm{P}_n(z)|^p d\mathrm{S} = 2\pi\rho.$$

D'autre part, il est facile de voir que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(0) = 1$. En effet, posons $\mathrm{F}_0(z) - \mathrm{P}_n(z) = b_n(z) g_n(z)$, $b_n(z)$ étant la fonction de Blaschke relative au domaine D. La fonction $g_n^p(z)$ est représentable par l'intégrale de Cauchy, et par conséquent $|g_n^p(0)| < \frac{\mu_n^p(\mathrm{F})}{\delta}$, δ étant le rayon d'un cercle ayant le centre à l'origine et contenu dans D. Il en résulte $g_n(0) b_n(0) \to 0$ et $\lim \mathrm{P}_n(0) = \mathrm{F}_0(0) = 1$. Soit $q_n(z) = \frac{\mathrm{P}_n(z)}{\mathrm{P}_n(0)}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma |q_n(z)|^p = 2\pi\rho,$$

mais si la condition du théorème n'est pas satisfaite, on a $\Phi(0) > 1$ et le résultat obtenu contredit au théorème I.

La condition est suffisante. — En effet, si la condition du théorème est vérifiée, il résulte du théorème II que l'on a

$$(12) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_\Gamma \left| [f'(z)]^{\frac{1}{p}} - p_{n,p}(z) \right|^p dS = 0.$$

Soit $F(z)$ une fonction appartenant à la classe E_p. La fonction

$$F[\varphi(w)] \sqrt[p]{\varphi'(w)}$$

appartient à la classe H_p, donc il existe un polynome $x(w)$, tel que

$$\rho \int_{-\pi}^{+\pi} | F[\varphi(w)] \sqrt[p]{\varphi'(w)} - x(w) |^p d\theta = \int_\Gamma | F(z) - \sqrt[p]{f'(z)}\, x[f(z)] |^p dS < \varepsilon.$$

D'après (12) on peut trouver un polynome $\pi(z)$, tel que la valeur de l'intégrale

$$\int_\Gamma \left| [f'(z)]^{\frac{1}{p}} - \pi(z) \right|^p dS$$

est aussi petite que l'on veut. D'autre part, d'après un théorème bien connu de Walsch, il existe un polynome $x_1(z)$ tel que la différence $x[f(z)] - x_1(z)$ ne surpasse pas un nombre positif arbitrement petit. Soit $P(z) = \pi(z) x_1(z)$. En appliquant l'inégalité de Minkowski dans le cas $p \geqq 1$ et l'inégalité

$$\int |f + \varphi|^p dS < \int |f|^p dS + \int |\varphi|^p dS$$

dans le cas $p < 1$, on démontre que l'on peut trouver les polynomes $\pi(z)$ et $x_1(z)$ de telle manière que l'on a

$$\int_\Gamma | F(z) - P(z) |^p dS < \varepsilon,$$

ce que démontre le théorème.