Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Delsarte

Sur un problème de diffraction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 223-273

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__223_0>

SUR

UN PROBLÈME DE DIFFRACTION

Par M. J. DELSARTE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

INTRODUCTION.

Les problèmes de diffraction, tels qu'ils sont posés par la théorie électromagnétique de la lumière, se ramènent à certains problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires hyperboliques du second ordre. Si, dans un but de simplification, on suppose que les corps diffractants sont des écrans infiniment minces, on est conduit à des problèmes mixtes hyperboliques extérieurs, lesquels relèvent de procédés classiques; c'est ainsi que Sommerfeld a pu traiter complètement [1] de la diffraction par un demi-plan indéfini dans le cas de l'équation des ondes sphériques. Si, au contraire, on donne aux corps diffractants des dimensions finies, on est conduit à un problème de Cauchy hyperbolique, dans tout l'espace, pour une équation ou un système d'équations, dont les coefficients sont discontinus sur certaines surfaces, la solution étant assujettie à remplir certaines conditions de continuité à la traversée de ces surfaces.

Une étude systématique de ce genre de question reste encore à faire; le présent Mémoire n'est que l'examen d'un cas particulier fort simple.

---

[1] Sommerfeld, *Mathem. Ann.*, Bd. 47, p. 317, 1896 et *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, Bd. 46, p. 11, 1901.

Nous ferons tout de suite une remarque importante : les physiciens recherchent avec prédilection, dans tous ces problèmes, les solutions stationnaires, c'est-à-dire périodiques et sinusoïdales par rapport au temps; ils y trouvent de nombreux avantages, et d'abord celui de la simplicité, puisqu'on substitue ainsi à des équations hyperboliques à quatre variables, des équations elliptiques à trois variables; de plus, on évite la difficulté provenant du fait que les milieux traversés sont dispersifs, difficulté qui empêcherait en toute rigueur, d'écrire les équations de Maxwell sous leur forme classique et qui conduirait à les remplacer par des équations intégrales; enfin il est bien naturel de penser que cette substitution est conforme à la nature des choses, car l'état initial d'un phénomène vibratoire est physiquement assez mal défini, tandis que sa fréquence principale et ses harmoniques sont des choses sur lesquelles il n'y a, expérimentalement, aucun doute.

Il faut cependant reconnaître que, lorsqu'il s'agit de problèmes extérieurs, une telle simplification n'est pas légitime, elle n'est même pas faisable. C'est ainsi, par exemple, que l'équation des ondes sphériques devient, quand on y remplace la fonction inconnue par $u(x;y;z)e^{i\omega t}$,

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{V^2} u = 0,$$

où V désigne la vitesse de propagation; on sait que, pour cette équation, les problèmes extérieurs, qu'ils soient de Dirichlet ou de Neumann, sont indéterminés, la régularité à l'infini ne permettant pas de choisir la solution. Or, que les problèmes soient extérieurs, ou plutôt, qu'ils intéressent tout l'espace, c'est un fait constant en théorie de Maxwell. Il est donc tout à fait nécessaire de passer par le biais du problème de Cauchy, en se résignant naturellement à négliger la dispersion (1).

(1) Malgré cette difficulté, certains auteurs n'ont pas craint de rechercher les solutions stationnaires dans des problèmes de diffraction par des corps non-infiniment minces (diffraction par une sphère). Ils ont été naturellement conduits à choisir les solutions extérieures en faisant appel à des considérations fort discutables, telles que le comportement des solutions pour des valeurs imaginaires des coordonnées. *Voir*, en particulier, J. Mie, *Ann. Physik*, (4), Bd. 25, 1908, S. 377; P. Debye, *Ann. Physik*, (4); Bd. 30, 1909, S. 57.

C'est ce que nous faisons ci-dessous.

Nous supposons l'espace divisé en deux régions 1 et 2, par un plan indéfini : nous traitons successivement le problème de la diffraction par ce plan indéfini, pour l'équation scalaire de propagation des ondes sphériques et pour le système des équations de Maxwell.

Dans le premier cas, la vitesse de propagation prend des valeurs distinctes dans les régions 1 et 2 : nous cherchons une solution continue ainsi que toutes ses dérivées premières dans tout l'espace, connaissant les données de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de la fonction inconnue et de sa première dérivée par rapport au temps à l'instant initial. Il est naturel de prendre comme inconnue auxiliaire la valeur prise, à tout instant, par la fonction inconnue dans le plan diffractant; la résolution de deux problèmes mixtes hyperboliques donne alors la fonction inconnue dans les régions 1 et 2 : en écrivant la continuité de la dérivée normale de cette fonction à la traversée du plan diffractant, on est conduit à l'équation intégro-différentielle dont l'inconnue auxiliaire est solution. On trouvera l'exposé de ces calculs dans le Chapitre I.

La résolution de cette équation intégro-différentielle fait la matière du Chapitre II; il se trouve que malgré son assez grande complexité, cette équation peut être intégrée en termes finis; cela tient à ce que l'opérateur auquel la fonction inconnue est soumise, dans cette équation, admet le groupe des translations dans le plan diffractant; il fait alors partie d'une classe d'opérateurs linéaires permutables, ce qui facilite beaucoup son inversion.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du même problème, au point de vue de la théorie de Maxwell. On rencontre ici des difficultés très inattendues. Désignons par ε_1, ε_2, μ_1, μ_2, respectivement, les constantes diélectriques (pouvoir inducteur), et magnétiques (perméabilité), des milieux 1 et 2; nous supposons que ces milieux ne sont pas conducteurs. Nous nous donnons les conditions initiales de Cauchy dans tout l'espace et nous nous imposons les conditions de continuité maxwelliennes à la traversée du plan diffractant, à savoir : continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique, continuité des composantes normales des inductions électrique et magnétique. On prend des inconnues auxiliaires qui sont les composantes du champ électrique parallèles au plan de séparation des deux milieux; la résolution de problèmes mixtes hyperboliques donne les champs dans tout l'espace, en écrivant les conditions de continuité on est conduit à deux équations intégro-différentielles permettant de déterminer les inconnues auxiliaires. Comme dans le cas précédent et pour les mêmes raisons, ces équations, quoique compliquées, sont susceptibles de transformations simples; on les réduit en effet à trois équations aux dérivées partielles portant séparément sur trois fonctions inconnues, ces fonctions n'étant d'ailleurs pas indépendantes; voici ces équations

$$(a)\qquad \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=A(y;\,z;\,t);$$

$$(b)\qquad \left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=B(y;\,z;\,t);$$

$$(c)\qquad \left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=C(y;\,z;\,t).$$

Les seconds membres sont connus, les fonctions f, g, F sont nulles ainsi que leurs dérivées premières par rapport au temps, pour $t=0$. La détermination des inconnues se fera donc par des procédés classiques si les équations (a), (b), (c) sont hyperboliques; au contraire le problème sera impossible si l'une au moins de ces équations est elliptique. Une discussion facile montre que la première éventualité se produit pour

$$k=(\mu_1-\mu_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\leqq 0.$$

C'est au contraire la seconde qui se rencontre pour k positif.

Il est permis de penser que le même phénomène se reproduira pour des corps diffractants de forme quelconque. Nous nous croyons donc autorisé à dire que la théorie de Maxwell conduit, lorsqu'on l'applique à des questions de diffraction, à des problèmes *mal posés*, en entendant cette expression dans le sens que lui ont donné Poincaré et M. Hadamard.

Peut-on, d'une manière ou d'une autre, faire disparaître cette grosse difficulté ?

On peut d'abord remarquer que nous n'avons traité qu'un cas limite, celui des corps infiniment résistants; peut-être l'introduction des conductibilités des milieux 1 et 2 feraient-elles disparaître cette circonstance gênante. Nous pensons revenir ultérieurement sur le cas des milieux conducteurs.

Au point de vue physique, on peut dire aussi qu'on a l'habitude dans toutes ces questions de propagation lumineuse, de prendre $\mu_1 = \mu_2 = 1$; ceci paraît en effet fort légitime puisque, sauf pour les corps ferro-magnétiques, auxquels ne s'applique plus la théorie de Maxwell, la perméabilité magnétique ne diffère de l'unité que de quelques millionièmes; de fait, pour cette valeur de μ_1 et μ_2, k est nul et il n'y a plus de difficulté. On doit cependant objecter que ce qui importe, c'est le signe de k; cette quantité est petite, mais elle a un signe déterminé, d'ailleurs variable suivant les milieux 1 et 2, comme le montre le tableau suivant [1] :

1.	2.	$k.10^6$.
Glycérine..................	Acétone	$+1,2$
Id.	Chloroforme	$+0,4$
Id.	Benzène	$-1,6$
Id.	Éther	$-2,5$

Nous pensons donc que la difficulté subsiste entière et qu'on n'est, en aucune façon, autorisé à considérer que la solution, pour k positif et très petit, est infiniment voisine de la solution pour $k = 0$, cela précisément parce que la nature profonde du problème change pour cette dernière valeur de k.

Les conclusions essentielles de ce travail ont été publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* les 9 et 23 mars 1936.

---

(1) Ces données numériques nous ont été communiquées par M. Félix Esclangon.

CHAPITRE I.

MISE EN ÉQUATION.

1. Le problème que nous nous proposons d'étudier est le suivant :

Déterminer une fonction $u(x; y; z; t)$ par les conditions que voici :

a. Conditions indéfinies :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{pour} \quad x > 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{pour} \quad x < 0; \tag{2}$$

les variables x, y, z prennent toutes les valeurs réelles, t prend toutes les valeurs réelles positives ou nulles, la fonction u est continue ainsi que toutes ses dérivées premières pour l'ensemble de ces valeurs.

b. Conditions aux limites :

$$u(x; y; z; 0) = \alpha(x; y; z); \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}\cdot u(x; y; z; t)\right]_{t=0} = \beta(x; y; z). \tag{3}$$

Nous prendrons une inconnue auxiliaire

$$\gamma(y; z; t) = u(0; y; z; t)$$

représentant les valeurs prises par la fonction u dans le plan $x = 0$, pour les valeurs positives du temps t; les concordances

$$\alpha(0; y; z) = \gamma(y; z; 0); \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}\cdot\gamma(y; z; t)\right]_{t=0} = \beta(0; y; z) \tag{4}$$

sont supposées remplies ; enfin nous désignerons par 1 et 2 les régions où la coordonnée x est respectivement positive ou négative. La détermination de u dans chacune de ces régions s'obtient, lorsqu'on regarde γ comme connue, par la résolution d'un problème mixte classique. Dans la région 1 par exemple, on a (¹)

$$(5)\quad \begin{aligned} &u(x; y; z; t) \\ &= \gamma\left(y; z; t - \frac{x}{\omega_1}\right) - \frac{x}{\omega_1 t} \mathrm{N}\left[y; z; 0; \sqrt{\omega_1^2 t^2 - x^2}\right] \\ &+ 2x^2 \int_{\lambda_0}^{1} \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} \cdot \mathrm{N}\left[y; z; t - \frac{x}{\omega_1 \lambda}; \frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &+ \frac{1}{2}\Bigg\{ \int_{-1}^{\lambda_0} \mathrm{M}_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad - \int_{\lambda_0}^{1} \mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + t \int_{-1}^{\lambda_0} \mathrm{M}_1\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad - t \int_{\lambda_0}^{1} \mathrm{M}_1\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t \int_{-1}^{\lambda_0} \sqrt{1-\lambda^2}\, \frac{\partial}{\partial \rho} . \mathrm{M}_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad - \omega_1 t \int_{\lambda_0}^{1} \sqrt{1-\lambda^2}\, \frac{\partial}{\partial \rho} . \mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad - \omega_1 t \int_{-1}^{\lambda_0} \lambda \frac{\partial}{\partial x} . \mathrm{M}_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t \int_{\lambda_0}^{1} \lambda \frac{\partial}{\partial x} . \mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \Bigg\}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \mathrm{N}(y; z; t; \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(y + \rho\cos\varphi; z + \rho\sin\varphi; t)\, d\varphi;$$

$$(7)\qquad \mathrm{M}_0(x; y; z; \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(x; y + \rho\cos\varphi; z + \rho\sin\varphi)\, d\varphi;$$

$$(8)\qquad \mathrm{M}_1(x; y; z; \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(x; y + \rho\cos\varphi; z + \rho\sin\varphi)\, d\varphi;$$

$$(9)\qquad \lambda_0 = \frac{x}{\omega_1 t}; \qquad \mathrm{R} = \rho^2.$$

(¹) Pour la démonstration de cette formule, nous renvoyons à l'ouvrage fondamental de M. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, IV, I, 3, p. 156 et 157.

On aurait une formule analogue dans la région 2, en remplaçant ω_1 par ω_2 et en changeant le signe du premier argument dans les fonctions M_0 et M_1 : il n'y a pas lieu de changer les signes des termes ou se trouve un $\frac{\partial}{\partial x}$, car cette dérivation y est supposée faite par rapport à l'x qui figure dans le premier argument, et non par rapport au premier argument lui-même.

Nous allons former maintenant une équation intégro-différentielle à laquelle satisfait l'inconnue auxiliaire $\gamma(y; z; t)$ en écrivant la continuité de $\frac{\partial u}{\partial x}$ à la traversée du plan $x = 0$.

2. Plaçons-nous dans la région 1, calculons $\frac{\partial u}{\partial x}$; nous ferons ensuite tendre x vers zéro. La dérivation des termes dépendant de γ donne

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t\left(y; z; t-\frac{x}{\omega_1}\right)-\frac{1}{\omega_1 t}\mathrm{N}\left[y; z; 0; \sqrt{\omega_1^2 t^2-x^2}\right]\\
&+\frac{2x^2}{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}.\mathrm{N}\left[y; z; 0; \sqrt{\omega_1^2 t^2-x^2}\right]\\
&+4x\int_{\lambda_0}^{1}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}.\mathrm{N}\left[y; z; t-\frac{x}{\omega_1\lambda}; \frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda\\
&-2\omega_1 t\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}.\mathrm{N}\left[y; z; 0\sqrt{\omega_1^2 t^2-x^2}\right]\\
&+2x^2\int_{\lambda_0}^{1}\frac{2x}{\lambda^4}(1-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{R}^2}.\mathrm{N}\left[y; z; t-\frac{x}{\omega_1\lambda}; \frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda\\
&-2x^2\int_{\lambda_0}^{1}\frac{1}{\omega_1\lambda^3}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{R}\,\partial t}.\mathrm{N}\left[y; z; t-\frac{x}{\omega_1\lambda}; \frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda.
\end{aligned}
$$

Passons à la limite pour $x = 0$; le premier et le second terme donnent directement

$$-\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t(y; z; t)-\frac{1}{\omega_1 t}\mathrm{N}(y; z; 0; \omega_1 t).$$

Il n'y a pas de difficulté non plus pour le troisième et le cinquième terme : nous avons supposé en effet, pour pouvoir écrire l'expression précédente, que γ était dérivable en y et z jusqu'au quatrième ordre; N est alors une fonction régulière de R jusqu'au second ordre : la limite des termes envisagés se réduit dans ces conditions à

$$-2\omega_1 t \frac{\partial}{\partial R}.N(y;\ z;\ 0;\ \omega_1 t).$$

Passons au quatrième terme; λ_0 tend vers zéro avec x; par le changement de variable $x = \lambda\rho$, ce terme s'écrit

$$4\int_x^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial R}.N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \sqrt{\rho^2 - x^2}\right] d\rho,$$

dont la limite est

$$4\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial R}.N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho.$$

Le même procédé s'applique aux sixième et septième termes; ils tendent respectivement vers

$$4\int_0^{\omega_1 t} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2}\, N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho$$

et

$$-\frac{2}{\omega_1}\int_0^{\omega_1 t} \rho \frac{\partial^2}{\partial R\, \partial t}\, N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho.$$

La partie dépendant de γ dans l'expression de $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}$ s'écrit maintenant

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & -\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t(y;\ z;\ t) - \frac{1}{\omega_1 t}\, N(y;\ z;\ 0;\ \omega_1 t) - 2\omega_1 t \frac{\partial}{\partial R}\, N(y;\ z;\ 0;\ \omega_1 t) \\
& + 4\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial R}\, N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho \\
& + 4\int_0^{\omega_1 t} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2}\, N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho \\
& - \frac{2}{\omega_1}\int_0^{\omega_1 t} \rho \frac{\partial^2}{\partial R\, \partial t}\, N\left[y;\ z;\ t - \frac{\rho}{\omega_1};\ \rho\right] d\rho.
\end{aligned}
$$

Elle est susceptible de simplification; introduisons la dérivée totale de $\frac{\partial N}{\partial R}$ par rapport à ρ

$$\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]\right\} = -\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial t} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] + 2\rho\frac{\partial^2}{\partial R^2} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right];$$

les deux derniers termes de (10) deviennent

$$2\int_0^{\omega_1 t}\rho\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]\right\}d\rho,$$

et la réunion des trois derniers donne

$$\begin{aligned}&2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]d\rho\\ &\quad+2\int_0^{\omega_1 t}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]\right\}d\rho\\ &=2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]d\rho+2\omega_1 t\frac{\partial}{\partial R} N[y; z; 0; \omega_1 t];\end{aligned}$$

une réduction se produit et l'on obtient au lieu de (10)

$$-\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t(y; z; t)-\frac{1}{\omega_1 t} M_0(0; y; z; \omega_1 t) + 2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial R} N\left[y; z; t-\frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right]d\rho, \tag{11}$$

compte tenu de la concordance

$$M_0(0; y; z; \omega_1 t) = N(y; z; 0; \omega_1 t),$$

qui est conséquence de (4).

3. En dehors de l'expression (11), on trouve encore dans $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}$ des termes connus, c'est-à-dire dépendant de α et β; ils proviennent de la dérivation des intégrales qui, dans (5), portent sur M_0 et M_1. Leur calcul ne présente pas la moindre difficulté, c'est pourquoi nous l'omettons; après quelques réductions simples on trouve pour limite

de $\frac{\partial u}{\partial x}$ quand x tend vers zéro par valeurs positives

$$(12)\quad \delta_1(y;z;t)=2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}\,\mathrm{N}\left[y;z;t-\frac{\rho}{\omega_1};\rho\right]d\rho-\frac{1}{\omega_1}\gamma_t'(y;z;t)$$

$$+\frac{1}{\omega_1}\,\mathrm{M}_1(0;y;z;\omega_1 t)+\frac{\partial}{\partial\rho}\,\mathrm{M}_0(0;y;z;\omega_1 t)$$

$$+\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda$$

$$+t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}_1\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda$$

$$+\omega_1 t\int_0^1\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda$$

$$+\omega_1 t\int_0^1\lambda\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda.$$

Dans cette formule, les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial\rho}$ sont calculées par rapport au premier et au quatrième argument des fonctions $\mathrm{M}_0(x;y;z;\rho)$ et $\mathrm{M}_1(x;y;z;\rho)$. Ici encore il y a lieu de faire un certain nombre de simplifications : considérons la dérivée totale

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]$$

$$+\lambda\omega_1 t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]$$

$$-\frac{\lambda^2\omega_1 t}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right];$$

son introduction dans l'expression de δ_1 permet d'écrire le cinquième et le huitième terme sous la forme

$$\alpha_x'(\omega_1 t;y;z)+\omega_1 t\int_0^1\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial x}\,\mathrm{M}_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda;$$

et en réduisant avec le septième terme, on trouve

$$(13)\quad \delta_1(y;z;t)=2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial R}\,N\left[y;z;t-\frac{\rho}{\omega_1};\rho\right]d\rho-\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t(y;z;t)$$
$$+\frac{1}{\omega_1}\,M_1(0;y;z;\omega_1 t)+\frac{\partial}{\partial\rho}\,M_0(0;y;z;\omega_1 t)+\alpha'_x(\omega_1 t;y;z)$$
$$+t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\,M_1\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda$$
$$+2\omega_1^2 t^2\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial R}\,M_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda.$$

Nous utiliserons encore les relations

$$(14)\quad 2\omega_1^2 t^2\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial R}\,M_0\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda+\frac{\partial}{\partial\rho}\,M_0(0;y;z;\omega_1 t)$$
$$=2\omega_1\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t\theta\frac{\partial}{\partial R}\,M_0\left[\omega_1\sqrt{t^2-\theta^2};y;z;\omega_1\theta\right]d\theta\right\}$$

et

$$(15)\quad t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\,M_1\left[\lambda\omega_1 t;y;z;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda+\frac{1}{\omega_1}\,M_1(0;y;z;\omega_1 t)$$
$$=\frac{1}{\omega_1 t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t\theta.M_1\left[\omega_1\sqrt{t^2-\theta^2};y;z;\omega_1\theta\right]d\theta\right\},$$

que le lecteur obtiendra facilement en faisant le changement de variable

$$\theta=t\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Elles permettent d'écrire

$$(16)\quad \delta_1(y;z;t)=2\int_0^{\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial R}\,N\left[y;z;t-\frac{\rho}{\omega_1};\rho\right]d\rho-\frac{1}{\omega_1}\gamma'_t(y;z;t)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{2\omega_1 t^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}\,M_0\left[\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2};y;z;\lambda\omega_1 t\right]d\lambda\right.$$
$$+\frac{1}{\omega_1}\alpha(\omega_1 t;y;z)$$
$$\left.+\frac{t}{\omega_1}\int_0^1\lambda.M_1\left[\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2};y;z;\lambda\omega_1 t\right]d\lambda\right\}$$
$$+\frac{1}{\omega_1}\int_0^1\lambda.M_1\left[\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2};y;z;\lambda\omega_1 t\right]d\lambda.$$

Enfin nous devons encore transformer le terme en N; plaçons-nous dans l'espace (y, z, t), soit $C_{yzt\rho}$ le cercle d'équations

$$\tau = t \geqq 0; \qquad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2,$$

on a

$$N(y; z; t; \rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{C_{yzt\rho}} \gamma(\eta; \zeta; \tau)\, ds; \qquad \frac{\partial}{\partial R} N(y; z; t; \rho) = \frac{-1}{4\pi\rho^2}\int_{C_{yzt\rho}} \frac{d\gamma}{dn}\, ds,$$

où l'on a pris, dans la seconde formule, la dérivée normale vers l'intérieur du cercle; l'application de la formule de Green à l'aire limitée par $C_{yzt\rho}$ dans le plan $\tau = t$, permet enfin d'écrire le premier terme de l'expression de δ_1 sous la forme d'une intégrale triple

$$\frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

étendue au volume du cône de révolution Γ^1_{yzt} défini par les inégalités

(17) $$0 < \tau < t; \qquad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - \omega_1^2(\tau - t)^2 < 0.$$

Nous prendrons comme forme définitive de δ_1 l'expression (16), l'intégrale simple en N y étant remplacée par l'intégrale triple précédente.

4. Un calcul tout à fait semblable conduit à la valeur de la limite de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives; on l'obtiendra en changeant ω_1 en ω_2 dans $\delta_1(y; z; t)$ et en tenant compte du changement d'orientation de l'axe des x; on trouve ainsi

(16′) $$\begin{aligned}\delta_2(y; z; t) = {} & \frac{-1}{2\pi\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{1}{\omega_2}\gamma'_t(y; z; t) \\ & - \frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{ 2\omega_2 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[-\omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 t\right] d\lambda \\ & \qquad + \frac{1}{\omega_2}\alpha(-\omega_2 t; y; z) \\ & \qquad + \frac{t}{\omega_2}\int_0^1 \lambda . M_1\left[-\omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 t\right] d\lambda \Bigg\} \\ & - \frac{1}{\omega_2}\int_0^1 \lambda . M_1\left[-\omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 t\right] d\lambda,\end{aligned}$$

le volume du cône de révolution Γ^2_{yzt} étant défini par les inégalités

$$(17') \qquad 0 < \tau < t; \qquad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - \omega_2^2(\tau - t)^2 < 0.$$

On est conduit à l'équation intégro-différentielle du problème en égalant δ_1 et δ_2, ce qui donne

$$(18) \qquad \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)\gamma'_t(y;z;t)$$
$$- \frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\tau$$
$$- \frac{1}{2\pi\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\tau = \mathfrak{A}(y;z;t),$$

$\mathfrak{A}(y;z;t)$ est une fonction connue. Il est commode d'intégrer cette équation de 0 à t par rapport au temps; nous mettrons l'équation résultant de cette opération sous la forme

$$(19) \qquad \mathcal{D}_1[\gamma] + \mathcal{D}_2[\gamma] = \mathrm{A}(y;z;t),$$

où l'on a posé

$$(20) \quad \mathcal{D}_1[\gamma] = \frac{1}{\omega_1}\left[\gamma(y;z;t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left\{\iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} \frac{1}{(\tau-\theta)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\theta\right\} d\tau\right],$$

$$(21) \quad \mathcal{D}_2[\gamma] = \frac{1}{\omega_2}\left[\gamma(y;z;t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left\{\iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{1}{(\tau-\theta)^2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right] d\eta\, d\zeta\, d\theta\right\} d\tau\right],$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad A(y;z;t) = {} & \frac{1}{\omega_1}\alpha(\omega_1 t; y; z) + \frac{1}{\omega_2}\alpha(-\omega_2 t; y; z) \\
& + 2\omega_1 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0[\ \ \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_1 t]\, d\lambda \\
& + 2\omega_2 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0[-\omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 t]\, d\lambda \\
& + \frac{t}{\omega_1}\int_0^1 \lambda . M_1[\ \ \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_1 t]\, d\lambda \\
& + \frac{t}{\omega_2}\int_0^1 \lambda . M_1[-\omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 t]\, d\lambda \\
& + \frac{1}{\omega_1}\int_0^t \int_0^1 \lambda . M_1[\ \ \omega_1 \tau\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_1 \tau]\, d\lambda\, d\tau \\
& + \frac{1}{\omega_2}\int_0^t \int_0^1 \lambda . M_1[-\omega_2 \tau\sqrt{1-\lambda^2}; y; z; \lambda\omega_2 \tau]\, d\lambda\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Pour $t = 0$, les deux membres de (19) ont pour commune valeur

$$\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)\alpha(0; y; z),$$

compte tenu de la première concordance (4).

CHAPITRE II.

ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS LINÉAIRES, APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DU CHAPITRE PRÉCÉDENT.

1. Considérons la classe linéaire des fonctions $f(y, z, t)$ analytiques par rapport aux variables y et z, holomorphes au voisinage de $y = z = 0$, intégrables en t, pour les valeurs positives suffisamment petites de cette variable, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à y et z. Soit L cette classe. Dans la suite, la notation $\Delta_1 f$ désignera le laplacien

$$\Delta_1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et $\Delta_i f$ sera la suite des laplaciens successifs f, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, tous pris par rapport aux variables y et z.

Nous envisagerons les opérateurs linéaires suivants :

$$\text{(1)} \qquad V_0[f] = f; \qquad V_i[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i-1}}{(2i-1)!} \Delta_i[f(y;\, z;\, \tau)]\, d\tau;$$

ils sont évidemment définis dans la classe L. Explicitons l'opérateur produit $V_i V_j$; on trouve successivement

$$V_i[f] = g(y;\, z;\, t),$$

$$\Delta_j[g(y;\, z;\, \tau)] = \int_0^\tau \frac{(\tau - \theta)^{2i-1}}{(2i-1)!} \Delta_{i+j}[f(y;\, z;\, \theta)]\, d\theta,$$

et, par une transformation classique,

$$V_i V_j[f] = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{2j-1}(\tau-\theta)^{2i-1}}{(2i-1)!\,(2j-1)!} d\tau \right] \Delta_{i+j}[f(y;\, z;\, \theta)]\, d\theta;$$

l'intégrale entre crochets s'évalue aisément par le changement de variable $\tau = \theta + u(t-\theta)$; elle a pour valeur

$$(t-\theta)^{2i+2j-1} \frac{B(2i;\, 2j)}{(2i-1)!\,(2j-1)!} = \frac{(t-\theta)^{2i+2j-1}}{(2i+2j-1)!}.$$

Il vient donc finalement

$$\text{(2)} \qquad V_i V_j[f] = V_j V_i[f] = V_{i+j}[f].$$

Considérons maintenant une suite dénombrable de coefficients numériques

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_i, \quad \ldots,$$

définissant un élément de fonction analytique

$$\Phi(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Z^i.$$

L'opérateur linéaire, défini par la série

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{V}[f] = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i V_i[f],$$

a un sens dans la classe L comme on le voit sans peine en se fondant sur les inégalités de Cauchy auxquelles satisfont les α_i; la série (3) converge uniformément dans toute région d'holomorphie de f par rapport à y et z, pourvu que t soit assez petit.

$\Phi(Z)$ sera appelée l'indicatrice de l'opérateur $\mathfrak{V}$. Nous désignerons par $(\mathfrak{V})$ l'ensemble de tous ces opérateurs; certains d'entre eux peuvent éventuellement être étendus à des classes fonctionnelles plus vastes que la classe L. Ils sont deux à deux permutables; si $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ ont pour indicatrices respectivement $\Phi(Z)$ et $\Psi(Z)$, l'opérateur produit $\mathfrak{V}\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\mathfrak{V}$ a pour indicatrice la fonction $\Phi\Psi$ comme le prouve la relation (2).

2. Soit $\mathcal{O}[f]$ l'opérateur déjà considéré dans le précédent chapitre

$$(4)\quad \mathcal{O}[f] = \frac{1}{\omega}\left[f(y;z;t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left\{ \iiint_{\Gamma_{yz\tau}} \frac{1}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta \right\} d\tau\right],$$

le volume d'intégration $\Gamma_{yz\tau}$ étant défini par les inégalités

$$(5)\qquad 0 < \theta < \tau; \qquad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - \omega^2(\theta - \tau)^2 < 0.$$

Supposons que $f(y, z, t)$ appartienne à la classe L et que t soit assez petit; évaluons l'intégrale triple étendue à $\Gamma_{yz\tau}$; prenons des coordonnées semi-polaires autour de la droite $\eta = y$; $\zeta = z$; soit

$$\eta - y = \rho\cos\varphi; \qquad \zeta - z = \rho\sin\varphi; \qquad d\eta\,d\zeta = \rho\,d\rho\,d\varphi;$$

on a, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)] = g(\eta;\zeta;\theta) = g(y;z;\theta) &+ \frac{\rho}{1\,!}[g'_y(y;z;\theta)\cos\varphi + g'_z(y;z;\theta)\sin\varphi],\\ &+ \frac{\rho^2}{2\,!}[g''_{y^2}(y;z;\theta)\cos^2\varphi\\ &\qquad + 2g''_{yz}(y;z;\theta)\cos\varphi\sin\varphi + g''_{z^2}(y;z;\theta)\sin^2\varphi] + \ldots,\end{aligned}$$

l'intégration en φ, à ρ et θ constants, donne par un calcul facile

$$2\pi\left[g(y;z;\theta) + \frac{\rho^2}{(2\,!)^2}\Delta_1[g(y;z;\theta)] + \ldots + \frac{1}{(i\,!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}\Delta_i[g(y;z;\theta)] + \ldots\right];$$

multipliant par $\frac{\rho\, d\rho}{2\pi}$ et intégrant en ρ de o à $\omega(\tau-\theta)$, on trouve

$$\frac{\omega^2}{2} g(y;z;\theta)(\tau-\theta)^2+\frac{\omega^4}{16}\Delta_1[g(y;z;\theta)](\tau-\theta)^4+\dots$$
$$+\frac{2(i+1)}{[(i+1)!]^2}\Delta_i[g(y;z;\theta)]\left[\frac{\omega(\tau-\theta)}{2}\right]^{2i+2}+\dots.$$

On passe ensuite à l'intégrale triple en divisant par $\omega(\tau-\theta)^2$ et en intégrant en θ de o à τ, ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi\omega}\iiint_{\Gamma_{yz\tau}}\frac{1}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i!)^2}\frac{\omega^{2i-1}}{2^{2i-1}}\int_0^{\tau}(\tau-\theta)^{2i-2}\Delta_i[f(y;z;\theta)]\,d\theta.$$

Finalement nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^t\left\{\iiint_{\Gamma_{yz\tau}}\frac{1}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\right\}d\tau$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i!)^2}\frac{\omega^{2i-1}}{2^{2i-1}}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{2i-1}}{2i-1}\Delta_i[f(y;z;\tau)]\,d\tau,$$

puis

$$\mathcal{O}[f]=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i \mathrm{V}_i[f]$$

avec

$$\alpha_0=\frac{1}{\omega};\qquad \alpha_i=-\frac{i(2i-2)!}{(i!)^2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2i-1}=-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1.3.5\dots(2i-3)}{2.4.6\dots(2i-2)}\cdot\frac{\omega^{2i}}{2i}.$$

L'opérateur $\mathcal{O}[f]$ fait donc partie de l'ensemble $(\mathcal{V})$ et il a pour indicatrice

$$\Phi(Z)=\frac{1}{\omega}\left[1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2i-3)}{2.4.6\dots(2i-2)}\cdot\frac{\omega^{2i}}{2i}Z^i\right]=\frac{1}{\omega}\sqrt{1-\omega^2 Z}. \tag{6}$$

L'expression (4) de cet opérateur, où l'on transforme à nouveau l'intégrale quadruple en intégrale double par application de la formule de Green, montre de plus qu'il est défini dans la classe $\mathcal{L}$ des fonctions $f(y;z;t)$ possédant des dérivées du premier ordre en y et z, ces dérivées ainsi que la fonction elle-même étant intégrables en t, pour toute valeur positive de cette variable.

3. Reprenons maintenant l'équation (19) du chapitre précédent

$$\mathcal{O}_1[\gamma] + \mathcal{O}_2[\gamma] = A(y;\, z;\, t), \tag{7}$$

le second membre est connu, le premier membre est un opérateur de l'ensemble ($\mathcal{V}$) ayant pour indicatrice

$$\frac{1}{\omega_1}\sqrt{1-\omega_1^2 Z} + \frac{1}{\omega_2}\sqrt{1-\omega_2^2 Z}.$$

Si la fonction inconnue $\gamma(y;\, z;\, t)$ appartient à la classe L, les opérateurs $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont permutables

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2[\gamma] = \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1[\gamma], \tag{8}$$

de plus les opérateurs itérés $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2$ ont respectivement pour indicatrices

$$\frac{1}{\omega_1^2} - Z, \qquad \frac{1}{\omega_2^2} - Z,$$

de sorte que

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_1[\gamma] = \frac{1}{\omega_1^2}\gamma(y;\, z;\, t) - \int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1[\gamma(y;\, z;\, \tau)]\,d\tau, \tag{9}$$

$$\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2[\gamma] = \frac{1}{\omega_2^2}\gamma(y;\, z;\, t) - \int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1[\gamma(y;\, z;\, \tau)]\,d\tau. \tag{10}$$

Appliquons maintenant aux deux membres de (7) l'opérateur $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2$; tenant compte de (8), (9), (10), on trouve

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_1[\gamma] - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_2[\gamma] = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\gamma(y;\, z;\, t) = \mathcal{O}_1[A] - \mathcal{O}_2[A],$$

d'où résulte

$$\gamma(y;\, z;\, t) = \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\{\mathcal{O}_1[A] - \mathcal{O}_2[A]\}, \tag{11}$$

qui est une formule de résolution de l'équation intégrale (7).

Il nous reste à étendre ce procédé aux fonctions γ n'appartenant plus à la classe L; il suffira pour cela de prouver la légitimité des formules (8), (9), (10) lorsque γ est seulement telle que ces relations aient un sens.

4. Nous allons d'abord transformer l'intégrale quadruple qui se trouve dans $\mathcal{D}_1$ en effectuant en premier lieu l'intégration par rapport à τ; fixons le point $(\eta; \zeta; \theta)$ en P dans $\Gamma^1_{y,z,t}$; soient M le point (y, z, t), M' le point (y, z, τ), M_1 le point de la droite MM' qui se trouve sur la nappe du cône $\Gamma^1_{\eta\zeta\theta}$ ouverte vers les $t > 0$; M' est compris entre M_1 et M, on a

$$\int_{M_1}^{M} \frac{d\tau}{(\tau-\theta)^2} = \frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta},$$

ρ désignant la distance du point P à la droite $M_1 M$; moyennant cette transformation, l'intégrale quadruple devient

$$\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \left[\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta}\right] \Delta_1[\gamma(\eta;\zeta;\theta)]\, d\eta\, d\zeta\, d\theta$$

avec

$$\rho^2 = (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Le coefficient différentiel devient infini tout le long de la droite

$$\eta = y; \qquad \zeta = z,$$

mais il n'y a de ce chef aucune difficulté car $d\eta\, d\zeta = \rho\, d\rho\, d\varphi$; il n'y en a pas non plus au voisinage du sommet de Γ^1_{yzt}.

On peut pousser plus loin cette transformation; partons de la relation

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \left[\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta}\right] \frac{\partial}{\partial\theta} f(\eta;\zeta;\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta \\
&= \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta}\right] f(\eta;\zeta;\theta)\right\} d\eta\, d\zeta\, d\theta \\
&\quad + \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2} f(\eta;\zeta;\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta,
\end{aligned}$$

effectuons l'intégration en θ dans le premier terme en remarquant que $\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta}$ est nul sur la portion de surface conique qui limite partiellement le domaine Γ^1_{yzt}, on trouve, en désignant par C_{yz} l'aire du cercle qui achève de borner ce volume,

$$-\iint_{C_{yz}} \left[\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t}\right] f(\eta;\zeta;0)\, d\eta\, d\zeta + \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2} f(\eta;\zeta;\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta.$$

Posons maintenant

$$f(y;\ z;\ t)=\int_0^t \gamma(y;\ z;\ \tau)\,d\tau, \tag{12}$$

alors $\Delta_1[f(y;\ z;\ t)]$ est nul pour $t=0$, sa dérivée par rapport à t étant $\Delta_1[\gamma(y;\ z;\ t)]$; la formule précédente donne en conséquence

$$\begin{aligned} g(y;\ z;\ t) &= \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \left[\frac{\omega_1}{\rho} - \frac{1}{t-\theta}\right] \Delta_1[\gamma(\eta;\ \zeta;\ \theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta \\ &= \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2} \Delta_1[f(\eta;\ \zeta;\ \theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta. \end{aligned}$$

C'est cette dernière forme de l'intégrale quadruple que nous adopterons.

Calculons maintenant $\Delta_1[g(y;\ z;\ t)]$; il est nécessaire de supposer ici que γ possède des dérivées quatrièmes en y et z, ces dérivées étant intégrables en t.

Si l'on revient à l'expression de $g(y,\ z,\ t)$ sous forme d'intégrale quadruple, on voit que

$$\Delta_1[g(y;\ z;\ t)] = \int_0^t \Delta_1[G(y;\ z;\ \tau)]\,d\tau,$$

un raisonnement classique donne d'ailleurs

$$\Delta_1[G(y;\ z;\ \tau)] = \iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} \frac{1}{(\tau-\theta)^2} \Delta_2[\gamma(\eta;\ \zeta;\ \theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

puis, faisant de nouveau la transformation qui a permis de mettre g sous forme d'intégrale triple

$$\Delta_1[g(y;\ z;\ t)] = \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2} \Delta_2[f(\eta;\ \zeta;\ \theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

car $\Delta_2[f(\eta;\ \zeta;\ \theta)]$ est nul pour $\theta=0$ et l'on a

$$\Delta_2[\gamma(\eta;\ \zeta;\ \theta)] = \frac{\partial}{\partial\theta} \Delta_2[f(\eta;\ \zeta;\ \theta)].$$

Soit alors, en prenant ω_1 et ω_2 positifs,

$$f_1(y;z;t) = \varpi_1[\gamma] = \frac{1}{\omega_1}\gamma(y;z;t) - \frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta.$$

Nous avons

$$\Delta_1[f_1(y;z;t)] = \frac{1}{\omega_1}\Delta_1[\gamma(y;z;t)] - \frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_2[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

puis

$$\varpi_2\varpi_1[\gamma] = \varpi_2[f_1] = \frac{1}{\omega_2}f_1(y;z;t) - \frac{1}{2\pi\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[F_1(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(y;z;t) &= \int_0^t f_1(y;z;\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_1}f(y;z;t) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega_1}\int_0^t \left\{\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\right\} d\tau, \end{aligned}$$

ou, en transformant encore l'intégrale quadruple en intégrale triple,

$$F_1(y;z;t) = \frac{1}{\omega_1}f(y;z;t) - \frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

en posant

$$(13) \qquad F(y;z;t) = \int_0^t f(y;z;\tau)\,d\tau.$$

De la même manière

$$\Delta_1[F_1(y;z;t)] = \frac{1}{\omega_1}\Delta_1[f(y;z;t)] - \frac{1}{2\pi\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

et finalement

$$(14)\quad \varpi_2\varpi_1[\gamma]=\frac{1}{\omega_1\omega_2}\gamma(y;z;t)-\frac{1}{2\pi\omega_1\omega_2}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$-\frac{1}{2\pi\omega_1\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$+\frac{1}{4\pi^2\omega_1\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}$$
$$\times\left\{\iiint_{\Gamma^1_{\eta\zeta\theta}}\frac{1}{(\theta-w)^2}\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw\right\}d\eta\,d\zeta\,d\theta.$$

Démontrer la relation (8) revient maintenant à prouver que l'expression précédente est symétrique en ω_1 et ω_2; c'est le cas pour les trois premiers termes de cette quantité, il suffira donc de montrer que l'intégrale sextuple qui en forme le quatrième terme possède elle aussi cette propriété. C'est ce qui fera l'objet du paragraphe suivant.

5. Le coefficient différentiel qui figure dans cette intégrale sextuple dépend explicitement, et d'une manière indépendante de γ, des variables η, ζ, τ; il est donc indiqué de commencer l'intégration par celles-ci. Quand le point Q de coordonnées η, ζ, τ décrit le domaine Γ^2_{yzt}, les points P, de coordonnées u, v, w restent intérieurs à une région de l'espace qui est Γ^1_{yzt} pour $\omega_2<\omega_1$, et Γ^2_{yzt} pour $\omega_2>\omega_1$. Soit en tout cas Γ^{12}_{yzt} cette région; fixons-y le point P; Q doit alors se trouver dans un domaine $\mathcal{R}$ qui est la partie de Γ^2_{yzt} intérieure à la nappe conique prolongeant la surface latérale de Γ^1_{uvw} du côté des t positifs.

Il faut calculer

$$(15)\qquad \iiint_{\mathcal{R}}\frac{d\eta\,d\zeta\,d\theta}{(t-\theta)^2(\theta-w)^2}.$$

Pour faciliter le langage nous conviendrons que le plan $t=0$ est horizontal; soit M le point de coordonnées y, z, t; soient m et p les projections horizontales de M et P; dans tous les cas on a $t\geqq w$; on posera $t-w=h$ et l'on désignera par δ la distance des points m et p, enfin ρ_1 et ρ_2 seront les coordonnées bipolaires d'un point du plan $t=0$ par rapport aux points p et m respectivement; si θ est la cote d'un point de l'espace, la surface latérale de Γ^1_{uvw} a pour équation $\rho_1 = \omega_1(w - \theta)$, tandis que la surface latérale de Γ^2_{yzt} a pour équation $\rho_2 = \omega_2(t - \theta)$. Dans tous les cas de figure, le domaine $\mathcal{R}$ se projette horizontalement suivant l'intérieur d'une ove dont le contour, projection horizontale de l'intersection de la nappe de Γ^2_{yzt} dirigée vers les t négatifs avec la nappe de Γ^1_{uvw} dirigée vers les t positifs, a pour équation

$$\frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = h.$$

Comme il est bien connu, ce contour est une portion d'ovale de Descartes.

Nous poserons dans la suite

$$\frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = r, \qquad \frac{\rho_1}{\omega_1} - \frac{\rho_2}{\omega_2} = s.$$

Sur une parallèle à l'axe des t rencontrant le domaine $\mathcal{R}$ et dont les distances aux axes de Γ^1_{uvw} et Γ^2_{yzt} sont respectivement ρ_1 et ρ_2, la coordonnée θ varie de $w + \frac{\rho_1}{\omega_1}$, (sur Γ^1_{uvw}), à $t - \frac{\rho_2}{\omega_2}$, (sur Γ^2_{yzt}); on a toujours $t - \frac{\rho_2}{\omega_2} \geqq w + \frac{\rho_1}{\omega_1}$, c'est-à-dire $h \geqq r$. Un calcul élémentaire donne, pour valeur de l'intégrale

$$\int \frac{d\theta}{(t-\theta)^2(\theta - w)^2}$$

entre ces limites, l'expression suivante :

$$(16) \quad \frac{2}{h^2}\left[2\frac{h-r-s}{(r+s)(2h-r-s)} + 2\frac{h-r+s}{(r-s)(2h-r+s)} + \frac{1}{h}\operatorname{Log}\frac{(2h-r-s)(2h-r+s)}{r^2-s^2}\right].$$

D'autre part, l'élément d'aire $d\eta\, d\zeta$ du plan $t = 0$ a pour valeur en coordonnées bipolaires

$$d\eta\, d\zeta = \frac{2\rho_1\rho_2\, d\rho_1\, d\rho_2}{\sqrt{[(\rho_1+\rho_2)^2 - \delta^2][\delta^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2]}},$$

ou encore, en passant aux variables r et s,

$$(17)\quad d\eta\, d\zeta = \frac{\omega_1^2\,\omega_2^2\,(r^2-s^2)\,dr\,ds}{\sqrt{[(\omega_1+\omega_2)\,r+(\omega_1-\omega_2)\,s]^2-4\,\delta^2}\cdot\sqrt{4\,\delta^2-[(\omega_1-\omega_2)\,r+(\omega_1+\omega_2)\,s]^2}}.$$

L'intégrale (15) s'écrit donc maintenant sous forme d'intégrale double

$$(18)\qquad \iint_{\mathcal{R}_0} \mathrm{K}(\omega_1\,;\,\omega_2\,;\,r\,;\,s)\,dr\,ds,$$

où la fonction $\mathrm{K}(\omega_1\,;\,\omega_2\,;r;s)$ est le produit des quantités (16) et (17); le point important est que

$$(19)\qquad \mathrm{K}(\omega_2\,;\,\omega_1\,;\,r\,;\,-s) = \mathrm{K}(\omega_1\,;\,\omega_2\,;\,r\,;\,s).$$

Il faut maintenant préciser à quel domaine du plan (r, s) est étendue l'intégrale (18); ceci ne peut se faire qu'en examinant les différents cas de figure. Ils sont au nombre de quatre, distingués par les inégalités suivantes :

(a) $\qquad \omega_1 > \omega_2\,;\qquad \delta < \omega_2 h\,;$

(b) $\qquad \omega_1 > \omega_2\,;\qquad \omega_2 h < \delta < \omega_1 h\,;$

(c) $\qquad \omega_1 < \omega_2\,;\qquad \delta < \omega_1 h\,;$

(d) $\qquad \omega_1 < \omega_2\,;\qquad \omega_1 h < \delta < \omega_2 h\,;$

et qui correspondent aux graphiques désignés par les mêmes lettres. Pour ces graphiques on a pris comme plan de figure, et aussi comme plan vertical de projection, le plan des axes des cônes Γ^1_{uvw} et Γ^2_{yzt}; dans les cas a et c, le contour apparent du domaine $\mathcal{R}$ est un quadrilatère, dans les b et d, c'est un triangle. Plaçons-nous par exemple dans l'hypothèse a et examinons la configuration du domaine plan $\mathcal{R}_0$. Pour cela reprenons l'ove qui est la projection horizontale du domaine $\mathcal{R}$ et traçons à l'intérieur de celle-ci les courbes sur lesquelles r reste constant; ces courbes peuvent être regardées comme les projections horizontales des intersections de la surface latérale de Γ^2_{yzt} avec les nappes coniques déduites par translations verticales de celle qui prolonge du côté des t positifs la surface latérale de Γ^1_{uvw}, la translation étant elle-même orientée vers les t positifs. On constate ainsi que les oves sur lesquelles r reste constant se répartissent en deux catégories suivant que cette valeur constante est comprise entre h et $r_1 = \frac{\delta}{\omega_2}$, ou bien entre r_1 et $r_2 = \frac{\delta}{\omega_1}$; le point p est intérieur aux oves de la première catégorie et extérieur à celles de la seconde; pour $r = r_1$ on a une ove qui est la boucle intérieure d'un limaçon de Pascal dont le point double est en p, pour $r = r_2$ on a une ove réduite au point double isolé d'un autre limaçon de Pascal.

Remarquons maintenant que les courbes $s =$ const. du plan $t = 0$ peuvent être regardées comme les projections horizontales des courbes d'intersection de la surface latérale de Γ^2_{yzt} avec les nappes coniques déduites par translations verticales (de signe quelconque), de celle qui limite latéralement Γ^1_{uvw}; ceci permet de s'assurer que, sur une ove, $r =$ const. de première catégorie, les points se répartissent en couples (symétriques par rapport au plan de figure), pour lesquels s varie de façon monotone entre les valeurs définies par les deux systèmes

$$\frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = r, \qquad \frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = r,$$
$$\rho_2 - \rho_1 = \delta, \qquad \rho_1 - \rho_2 = \delta$$

ou encore par les deux équations

$$(\omega_2 - \omega_1) r + (\omega_1 + \omega_2) s = 2\delta, \tag{20}$$
$$(\omega_1 - \omega_2) r + (\omega_1 + \omega_2) s = 2\delta. \tag{21}$$

De la même manière, pour les oves de seconde catégorie, les limites de s sont définies par les deux systèmes

$$\frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = r, \qquad \frac{\rho_1}{\omega_1} + \frac{\rho_2}{\omega_2} = r,$$
$$\rho_1 + \rho_2 = \delta, \qquad \rho_1 - \rho_2 = \delta$$

ou encore par les équations (21) et

$$(\omega_1 + \omega_2) r + (\omega_1 - \omega_2) s = 2\delta. \tag{22}$$

Il résulte de là que le domaine $\mathcal{R}_0$ a une forme trapézoïdale, il est limité par les quatre droites (20), (21), (22) et $r = h$; les coefficients angulaires de (20) et (21) sont égaux, négatifs, supérieurs à -1; celui de (22) est aussi négatif, mais inférieur à -1. Les deux points d'inter-

Fig. a

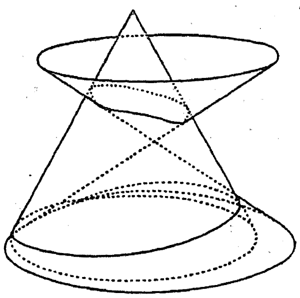


Fig. a_1

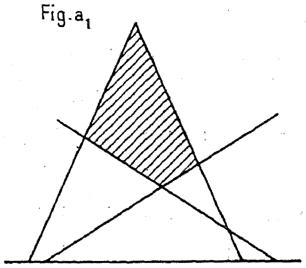


Fig. a_2

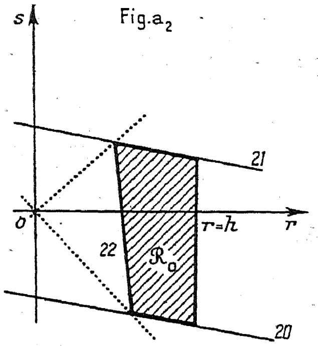


Fig. b

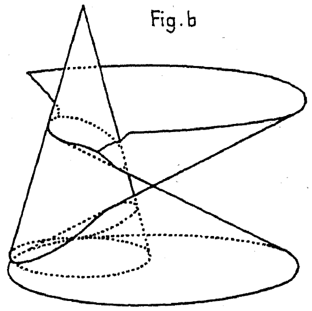


Fig. b_1

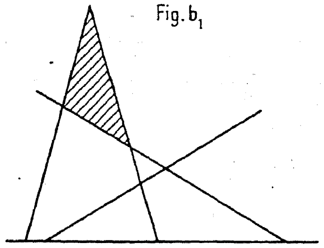


Fig. b_2

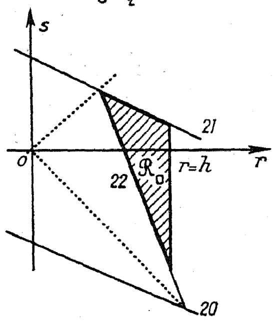


Fig. c

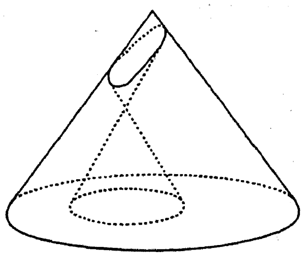


Fig. c_1

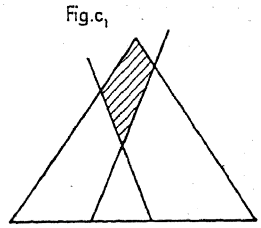


Fig. c_2

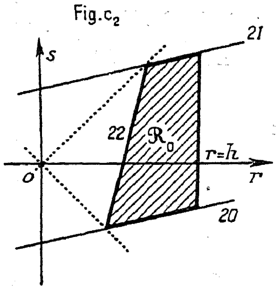


Fig. d

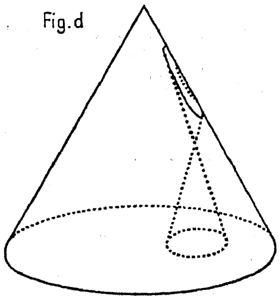


Fig. d_1

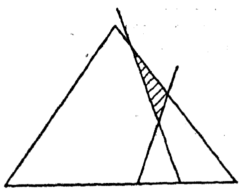
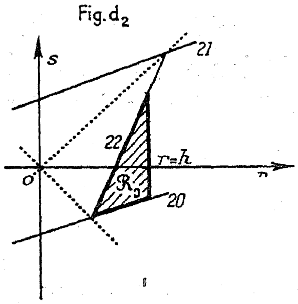


Fig. d_2



section de (20) et (21) avec (22) sont respectivement sur les deux bissectrices des axes. La figure a_2 représente ce domaine.

On a des conclusions analogues dans les autres cas (*fig.* b_2, c_2, d_2); $\mathcal{R}_0$ est encore trapézoïdal et limité par les mêmes droites dans le cas c; il est triangulaire et limité par les droites $r=h$; (21) et (22) dans le cas b, triangulaire et limité par $r=h$; (20) et (22) dans le cas d. Enfin les coefficients angulaires de (20), (21), (22) sont négatifs dans les cas a et b, positifs dans les cas c et d.

Le point à noter est le suivant : Si l'on échange ω_1 et ω_2, les cas a et c d'une part, b et d de l'autre se permutent et les domaines $\mathcal{R}_0$ correspondants se déduisent l'un de l'autre par symétrie par rapport à l'axe des r, c'est-à-dire par changement de s en $-s$.

Ceci étant bien vu, l'intégrale (18) est une fonction de ω_1; ω_2; δ et h dont l'expression varie suivant les cas de figure; on la notera

$$A(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h),\qquad B(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h),\qquad C(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h),\qquad D(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h)$$

dans les cas a, b, c, d respectivement.

Les remarques précédentes combinées avec l'équation (19) permettent d'écrire immédiatement les relations que voici :

$$(23)\quad a.\qquad A(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h)=C(\omega_2;\,\omega_1;\,\delta;\,h),$$

$$(24)\quad b.\qquad B(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h)=D(\omega_2;\,\omega_1;\,\delta;\,h),$$

$$(25)\quad c.\qquad C(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h)=A(\omega_2;\,\omega_1;\,\delta;\,h),$$

$$(26)\quad d.\qquad D(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h)=B(\omega_2;\,\omega_1;\,\delta;\,h).$$

Arrivons-en maintenant au calcul de l'intégrale sextuple; nous désignerons par Δ^{12}_{yzt} la différence des domaines Γ^1_{yzt} et Γ^2_{yzt}; une fois effectuée l'intégration en η, ζ, θ, l'intégrale sextuple s'écrira

$$\frac{1}{4\pi^2\omega_1\omega_2}\left[\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} A(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h).\Delta_2[F(u;\,v;\,w)]\,du\,dv\,dw\right.$$
$$\left.+\iiint_{\Delta^{12}_{yzt}} B(\omega_1;\,\omega_2;\,\delta;\,h).\Delta_2[F(u;\,v;\,w)]\,du\,dv\,dw\right]$$

pour $\omega_1 > \omega_2$, et

$$\frac{1}{4\pi^2\omega_1\omega_2}\left[\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} C(\omega_1;\omega_2;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw + \iiint_{\Delta^{12}_{yzt}} D(\omega_1;\omega_2;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw\right]$$

pour $\omega_1 < \omega_2$.

Supposons enfin qu'au lieu de $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma]$ on calcule $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma]$; rien ne sera changé aux trois premiers termes du second membre de la formule (14); dans le quatrième terme on devra permuter ω_1 et ω_2. On traitera cette nouvelle intégrale sextuple comme la précédente, on effectuera d'abord l'intégration en η, ζ, θ; la seule modification qui se produit est celle-ci : Lorsque les transformations que nous venons de faire donnent les cas de figure *a*, *b*, *c*, *d*, on se trouve en présence, dans le nouveau calcul, des cas de figure *c*, *d*, *a*, *b*, respectivement; dans ces conditions ce quatrième terme se met sous forme d'intégrale triple de la manière suivante :

$$\frac{1}{4\pi^2\omega_1\omega_2}\left[\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} C(\omega_2;\omega_1;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw + \iiint_{\Delta^{12}_{yzt}} D(\omega_2;\omega_1;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw\right]$$

pour $\omega_1 > \omega_2$, et

$$\frac{1}{4\pi^2\omega_1\omega_2}\left[\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} A(\omega_2;\omega_1;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw + \iiint_{\Delta^{12}_{yzt}} B(\omega_2;\omega_1;\partial;h).\Delta_2[F(u;v;w)]\,du\,dv\,dw\right]$$

pour $\omega_1 < \omega_2$. Il suffit de se reporter aux relations (23), (24), (25), (26) pour se convaincre que les deux intégrales sextuples figurant dans $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma]$ et $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma]$ sont identiques. L'identité (8) est ainsi établie, pourvu que γ ait des dérivées quatrièmes intégrables en t; on pourrait sans doute s'affranchir de cette condition en conservant, dans l'expression des opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ l'intégrale double portant sur la fonction N, mais sous cette forme, le calcul et les transformations ultérieures de $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1$ deviennent assez complexes.

6. Il nous reste maintenant à démontrer les identités (9) et (10), c'est-à-dire à expliciter les itérés $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2$; il suffit pour cela de terminer les calculs du précédent paragraphe en supposant $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Achevons d'abord la transformation de l'intégrale sextuple en intégrale triple; le volume Δ_{yzt}^{12} disparaît, et il reste seulement

$$\frac{1}{4\pi^2\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}} a(\omega;\, h;\, \delta).\Delta_2[F(u;\, v;\, w)]\, du\, dv\, dw,$$

$a(\omega;\, h;\, \delta)$ désignant l'expression commune des fonctions A et C qui sont alors identiques; le calcul direct de cette expression, par la formule (18) serait un peu compliqué, il est plus rapide de revenir à l'expression initiale de $a(\omega;\, h;\, \delta)$ sous forme d'intégrale triple,

$$a(\omega;\, h;\, \delta) = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{d\eta\, d\zeta\, d\theta}{(t-\theta)^2(\theta - w)^2}.$$

Le domaine $\mathcal{R}$ est maintenant le volume compris entre deux surfaces coniques de révolution, égales et d'axes parallèles, à savoir Γ_{yzt} et le prolongement vers les t positifs de Γ_{uvw}; il se projette horizontalement suivant l'intérieur d'une ellipse E d'équation

$$\rho_1 + \rho_2 = \omega h.$$

Nous calculerons $a(\omega;\, h;\, \delta)$ en intégrant d'abord à θ constant; la section du domaine $\mathcal{R}$ par le plan horizontal de cote θ peut avoir trois formes différentes :

a. $w < \theta < \frac{1}{2}(t+w) - \frac{\delta}{2\omega}$; c'est un cercle dont le centre se projette en p et dont l'aire vaut $\pi\omega^2(\theta - w)^2$;

b. $\frac{1}{2}(t+w) + \frac{\delta}{2\omega} < \theta < t$; c'est un cercle dont le centre se projette en m et dont l'aire vaut $\pi\omega^2(t-\theta)^2$;

c. $\frac{1}{2}(t+w) - \frac{\delta}{2\omega} < \theta < \frac{1}{2}(t+w) + \frac{\delta}{2\omega}$; la section est la partie commune aux deux cercles

$$(Y-u)^2 + (Z-v)^2 = \omega^2(\theta - w)^2, \qquad (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = \omega^2(t-\theta)^2$$

et l'aire de cette section vaut

$$\begin{aligned}&\omega^2(t-\theta)^2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{\delta^2+\omega^2 h(t+w-2\theta)}{2\omega h\delta}\\&\quad+\omega^2(\theta-w)^2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{\delta^2-\omega^2 h(t+w-2\theta)}{2\omega h\delta}\\&\quad-\frac{1}{2}\sqrt{[\omega^2 h^2-\delta^2][\delta^2-\omega^2(t+w-2\theta)^2]}.\end{aligned}$$

Passons maintenant à l'intégration en θ; les intervalles a et b donnent immédiatement les contributions égales

$$\frac{\pi\omega^2}{h}\frac{\omega h-\delta}{\omega h+\delta}$$

pour évaluer la contribution de l'intervalle c, il est commode de poser

$$\theta=\frac{1}{2}(t+w)+\frac{1}{2}h\lambda; \qquad \delta=\frac{1}{2}kh,$$

la quantité sous le signe somme devient alors

$$\begin{aligned}\frac{8}{h^3(1-\lambda^2)^2}\Bigg[&\frac{1}{4}\omega^2 h^2(1-\lambda)^2 \operatorname{Arc\,cos}\frac{k^2-4\lambda\omega^2}{2\omega k(1-\lambda)}\\&+\frac{1}{4}\omega^2 h^2(1+\lambda)^2 \operatorname{Arc\,cos}\frac{k^2+4\lambda\omega^2}{2\omega k(1+\lambda)}\\&-\frac{h^2}{8}\sqrt{(4\omega^2-k^2)(k^2-4\omega^2\lambda^2)}\Bigg]d\lambda\end{aligned}$$

et λ y varie de $\frac{-k}{2\omega}$ à $\frac{+k}{2\omega}$: une intégration par partie fait disparaître les arc cos; finalement il reste

$$a(\omega;\,h;\,\delta)=\frac{\pi}{h}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{k}{2\omega}}^{+\frac{k}{2\omega}}\frac{(4\omega^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\,d\lambda}{(1-\lambda^2)^2\sqrt{k^2-4\omega^2\lambda^2}}-2\omega^2\right]$$

puis, par une intégration élémentaire,

$$a(\omega;\,h;\,\delta)=\frac{2\pi}{h^3}(\omega^2 h^2-\delta^2),$$

moyennant quoi l'intégrale sextuple s'écrit

$$\frac{1}{2\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^3}[\omega^2(t-\theta)^2-(\zeta-z)^2-(\eta-y)^2]\,\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta.$$

Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté au sujet de l'élément infini qui se présente au sommet du cône.

La formule (14) donne ensuite

$$\begin{aligned}\varpi\varpi[\gamma]=\frac{1}{\omega^2}\gamma(y;z;t)&-\frac{1}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\\&+\frac{1}{2\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^3}[\omega^2(t-\theta)^2\\&-(\eta-y)^2-(\zeta-z^2)]\,\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta.\end{aligned}$$

Nous allons transformer cette expression afin d'aboutir aux identités (9) et (10). On désignera dans la suite par $\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}$ le domaine Γ_{yzt} échancré par le plan $\theta=t-\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$, S^{ε}_{yzt} sera la surface latérale du tronc de cône ainsi obtenu, C^{ε}_{yzt} sera la surface de la petite base de ce tronc. On a d'abord la relation suivante :

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\frac{1}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\\&=\frac{1}{\pi\omega^2}\iint_{S^{\varepsilon}_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\\&+\frac{1}{\pi\omega^2\varepsilon^2}\iint_{C^{\varepsilon}_{yzt}}\Delta_1[F(\eta;\zeta;t-\varepsilon)]\,d\eta\,d\zeta\\&-\frac{2}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}}\frac{1}{(t-\theta)^3}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\end{aligned}$$

qui résulte de l'intégration de $\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\right\}$ dans $\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}$, compte tenu de la nullité de $F(\eta;\zeta;\theta)$ pour $t=0$.

Considérons maintenant le troisième terme de l'expression précédente; en lui appliquant la formule de Green dans les plans $\theta=$ const., on le met sous la forme

$$(28)\quad \frac{1}{2\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^3}[\omega^2(t-\theta)^2 - (\eta-y)^2-(\zeta-z)^2]\,\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi\omega^2}\iint_{S^{\varepsilon}_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta - \frac{2}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^3}\Delta_1[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

car $\Delta_1\,\delta^2 = 4$, et de plus $\omega^2 h^2 - \delta^2$ est nul sur S^{ε}_{yzt}.

Soustrayant enfin (27) de (28) on trouve

$$\frac{1}{2\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^3}[\omega^2(t-\theta)^2-(\eta-y)^2-(\zeta-z)^2]\,\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$- \frac{1}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma^{\varepsilon}_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$= \frac{-1}{\pi\omega^2\varepsilon^2}\iint_{C^{\varepsilon}_{yzt}} \Delta_1[F(\eta;\zeta;t-\varepsilon)]\,d\eta\,d\zeta.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers zéro pour obtenir l'identité

$$\frac{1}{2\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^3}[\omega^2(t-\theta)^2-(\eta-y)^2-(\zeta-t)^2]\,\Delta_2[F(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$
$$- \frac{1}{\pi\omega^2}\iiint_{\Gamma_{yzt}} \frac{1}{(t-\theta)^2}\Delta_1[f(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta = -\Delta_1[F(y;z;t)],$$

qui s'écrit encore

$$\varpi\varpi[\gamma] = \frac{1}{\omega_2}\gamma(y;z;t) - \Delta_1[F(y;z;t)].$$

Cette relation équivaut à (9) et (10).

7. La résolution de l'équation intégrale (7) est chose faite; nous avons donc complètement traité le problème que nous posions au début du précédent chapitre; la formule de résolution (11) peut encore

s'écrire

$$(29)\quad \gamma(y;z;t)=\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}A(y;z;t)$$
$$+\frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\int_0^t\left\{\int_0^{\omega_1\tau}\frac{\partial}{\partial R}\cdot\mathfrak{M}\left[y;z;\tau-\frac{\rho}{\omega_1};\rho\right]d\rho\right.$$
$$\left.-\int_0^{\omega_2\tau}\frac{\partial}{\partial R}\cdot\mathfrak{M}\left[y;z;\tau-\frac{\rho}{\omega_2};\rho\right]d\rho\right\}d\tau;$$

en revenant à la forme initiale des opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et en introduisant la moyenne

$$\mathfrak{M}[y;z;t;\rho]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A[y+\rho\cos\varphi;z+\rho\sin\varphi;t]\,d\varphi.$$

Cette nouvelle formule de résolution suppose seulement que la fonction A possède des dérivées premières en y et z intégrables par rapport au temps. Ainsi que nous le disions plus haut, il est vraisemblable que la méthode que nous avons suivie peut s'étendre au cas où la fonction inconnue γ ne remplit que ces conditions, évidemment minimums, pour que l'équation intégrale (7) ait un sens.

CHAPITRE III.

LE CAS DE LA THÉORIE DE MAXWELL.

1. Dans ce chapitre nous reprenons l'étude de la diffraction par un plan indéfini, en substituant à l'équation des ondes sphériques le système des équations de Maxwell.

Le plan diffractant sera toujours pris pour plan yOz, il sépare l'espace en deux régions : la région 1 pour x positif et la région 2 pour x négatif. ε_1 et μ_1 seront respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu 1, ε_2 et μ_2 seront les mêmes quantités pour la région 2; ces deux milieux sont supposés non conducteurs; on a l'habitude en théorie électro-magnétique de la lumière de prendre alors égale à l'unité la perméabilité magnétique, l'erreur ainsi commise étant de l'ordre de un millionième; cependant, dans le cas présent, il y a intérêt, comme nous le faisons, à distinguer l'une de l'autre les valeurs de cette quantité pour les milieux 1 et 2.

Les vecteurs $\vec{E}$ de composantes X, Y, Z et $\vec{H}$ de composantes L, M, N seront les champs électrique et magnétique respectivement exprimés en U. E. S. C. G. S. et U. E. M. C. G. S; c sera la vitesse de la lumière dans le vide. Les équations d'éther sont alors

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Div}\vec{E} = 0,$$

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{Div}\vec{H} = 0,$$

et les conditions de passage du milieu 1 au milieu 2 pour $x = 0$ sont : continuité de Y, Z, M, N; continuité de εX, μL.

Les équations vectorielles (1) et (2) représentent chacune trois équations scalaires relatives aux axes Ox, Oy, Oz qu'on représentera respectivement par $(1)_1$, $(1)_2$, $(1)_3$, $(2)_1$, $(2)_2$, $(2)_3$.

Nous nous donnerons à l'instant initial, dans tout l'espace

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Y(x;y;z;0) = \alpha(x;y;z); & M(x;y;z;0) = \gamma(x;y;z); \\ Z(x;y;z;0) = \beta(x;y;z); & N(x;y;z;0) = \delta(x;y;z); \end{cases}$$

puis, au même instant et dans le plan $x = 0$, les limites à droite et à gauche de X et L

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} X(+0;y;z;0) = p_1(y;z); & L(+0;y;z;0) = q_1(y;z); \\ X(-0;y;z;0) = p_2(y;z); & L(-0;y;z;0) = q_2(y;z) \end{cases}$$

avec

$$\text{(7)} \qquad \varepsilon_1 p_1(y;z) - \varepsilon_2 p_2(y;z) = 0; \qquad \mu_1 q_1(y;z) - \mu_2 q_2(y;z) = 0.$$

Les équations (3) et (4) permettent ensuite de calculer à l'instant initial et dans tout l'espace les valeurs de $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial L}{\partial x}$. On en déduit, en intégrant en x à partir de $x = 0$, et en tenant compte de (6), les valeurs de X et L dans tout l'espace, pour $t = 0$. Les équations (1) et (2) déterminent enfin au même instant $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ dans tout l'espace. Nous sommes donc bien en possession des données de Cauchy complètes.

Nous prendrons comme inconnues auxiliaires

$$\text{(8)} \qquad Y(0;y;z;t) = f(y;z;t); \qquad Z(0;y;z;t) = g(y;z;t)$$

avec les concordances

$$(9)\qquad f(y;z;0)=\alpha(0;y;z);\qquad g(y;z;0)=\beta(0;y;z).$$

L'équation $(2)_1$ donne pour $x=0$, et par passage à la limite à droite et à gauche

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{L}(0;y;z;t)\right]_1=\frac{c}{\mu_1}\left[\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right];$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{L}(0;y;z;t)\right]_2=\frac{c}{\mu_2}\left[\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right].$$

Une intégration en t, à partir de $t=0$, permet d'en déduire

$$(10)\qquad \mathrm{L}(+0;y;z;t)=q_1(y;z)+\frac{c}{\mu_1}\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial y}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial}{\partial z}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau;$$

$$(11)\qquad \mathrm{L}(-0;y;z;t)=q_2(y;z)+\frac{c}{\mu_2}\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial y}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial}{\partial z}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau;$$

de sorte que la continuité de $\mu\mathrm{L}$ est assurée à tout instant.

De la même manière, les équations $(1)_2$, $(1)_3$, (3) donnent par passage à la limite à droite et à gauche, pour $x=0$,

$$(12)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}(0;y;z;t)\right]_1=\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{c}{\mu_1}\int_0^t\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau-\frac{\varepsilon_1}{c}\,\frac{\partial g}{\partial t};$$

$$(13)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{M}(0;y;z;t)\right]_2=\frac{\partial q_2}{\partial y}+\frac{c}{\mu_2}\int_0^t\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau-\frac{\varepsilon_2}{c}\,\frac{\partial g}{\partial t};$$

$$(14)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{N}(0;y;z;t)\right]_1=\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{c}{\mu_1}\int_0^t\left[\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau+\frac{\varepsilon_1}{c}\,\frac{\partial f}{\partial t};$$

$$(15)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{N}(0;y;z;t)\right]_2=\frac{\partial q_2}{\partial z}+\frac{c}{\mu_2}\int_0^t\left[\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,g(y;z;\tau)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,f(y;z;\tau)\right]d\tau+\frac{\varepsilon_2}{c}\,\frac{df}{dt};$$

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{X}(0;y;z;t)=-\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}.$$

On sait d'ailleurs que les relations (1), (2), (3), (4) ont pour conséquences les équations indéfinies

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=0;$$

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=0;$$

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=0;$$

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=0;$$

$$(21)\qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}=0;$$

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}=0.$$

Nous connaissons maintenant les valeurs de X, Y, Z, L, M, N dans tout l'espace à l'instant initial, les valeurs de L, Y, Z à tout instant dans le plan $x=0$, les limites par continuité à droite et à gauche de $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ à tout instant dans ce même plan ; la résolution d'un problème hyperbolique mixte de type Dirichlet donnera donc L, Y, Z dans tout l'espace et à tout instant, tandis que la résolution d'un problème hyperbolique mixte de type Neumann donnera dans les mêmes conditions X, M, N.

Des raisonnements de type classique montrent facilement que toutes les conditions indéfinies sont remplies; en ce qui concerne les conditions de passage, nous avons déjà constaté la continuité de μL; de la même manière εX est continue à l'instant initial d'après (7), l'équation $(1)_1$ entraînera donc la continuité de εX pour toutes les valeurs du temps, pourvu que M et N soient continues (cette continuité implique en effet celle des dérivées de M et N en y et z, à cause de l'existence de toutes les dérivées secondes), d'autre part la continuité d'Y et Z est assurée par le choix des inconnues auxiliaires, il suffit en définitive que M et N soient continues quel que soit le temps au passage du plan $x=0$. Or il en est bien ainsi à l'instant initial, d'après $(2)_2$ et $(2)_3$ cela aura lieu à tout instant si

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\quad \text{et}\quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

sont continues à la traversée de ce plan; en écrivant cette continuité par passage à la limite à droite et à gauche, on obtiendra deux équations intégrales permettant de déterminer les inconnues auxiliaires f et g.

2. Nous allons maintenant entrer dans le détail. Nous poserons

$$\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}, \qquad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}; \tag{23}$$

$\alpha_1(x; y; z)$ et $\beta_1(x; y; z)$ seront les valeurs de $\frac{\partial Y}{\partial t}$ et $\frac{\partial Z}{\partial t}$ pour $t = 0$, on a, d'après ce qui précède ($i = 1$ ou 2)

$$\alpha_1(x; y; z) = \frac{c}{\varepsilon_i}\left[\ \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\partial q_i}{\partial z} + \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}[\gamma(\xi; y; z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\delta(\xi; y; z)] \right\} d\xi \right]; \tag{24}$$

$$\beta_1(x; y; z) = \frac{c}{\varepsilon_i}\left[-\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} - \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\gamma(\xi; y; z)] + \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}[\delta(\xi; y; z)] \right\} d\xi \right]; \tag{25}$$

Y et Z sont données dans les régions 1 et 2 par des formules qui ne sont que la répétition, dans le cas présent, de la formule (5) du chapitre I. Nous emploierons toujours la notation (9) de ce chapitre, $N(y; z; t; \rho)$ et $Q(y; z; t; \rho)$ seront les moyennes de $f(y; z; t)$ et $g(y; z; t)$ sur un cercle du plan $x = 0$, de centre $(y; z)$ et de rayon ρ. $M_0(x; y; z; \rho)$, $M_1(x; y; z; \rho)$, $P_0(x; y; z; \rho)$, $P_1(x; y; z; \rho)$ seront de même les moyennes de $\alpha(x; y; z)$, $\alpha_1(x; y; z)$, $\beta(x; y; z)$, $\beta_1(x; y; z)$ sur la circonférence

$$\xi = x; \qquad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2. \tag{26}$$

Les limites, quand x tend vers zéro par valeurs positives par exemple, de $\frac{\partial Y}{\partial x}$ et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ sont données par deux expressions analogues au second membre de la formule (16′) du Chapitre I. Il est inutile de récrire ici ces expressions.

Passons maintenant à la composante X. Dans la région 1, elle satisfait à l'équation indéfinie (17), les conditions initiales sont celles de Cauchy, les conditions aux limites sur le plan $x = 0$ sont du type Neumann, on a

$$X(x; y; z; 0) = \varpi(x; y; z) = p_1(y; z) - \int_0^x \left[\frac{\partial}{\partial y}\, \alpha(\xi; y; z) + \frac{\partial}{\partial z}\, \beta(\xi; y; z)\right] d\xi; \tag{27}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\, X(x; y; z; t)\right]_{t=0} = \varpi_1(x; y; z) = \frac{c}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \delta}{\partial y}\right); \tag{28}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\, X(x; y; z; t)\right]_{x=0} = F(y; z; t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right). \tag{29}$$

La méthode des images donne ici encore la valeur de X dans toute la région 1, quel que soit le temps; on applique la formule de Kirchhoff à deux points symétriquement placés par rapport à la frontière plane et l'on additionne les résultats (au lieu de les soustraire l'un de l'autre comme on le fait dans le cas du problème mixte de type Dirichlet); la valeur inconnue de X sur la frontière s'élimine et il reste

$$\begin{aligned} X(x; y; z; t) &= -\int_{\lambda_0}^{1} \frac{x}{\lambda^2}\, S\left[y; z; t - \frac{x}{\omega_1 \lambda}; \frac{x}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &+ \frac{1}{2}\Bigg\{\int_{-1}^{\lambda_0} R_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \int_{\lambda_0}^{1} R_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + t\int_{-1}^{\lambda_0} R_1\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + t\int_{\lambda_0}^{1} R_1\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t\int_{-1}^{\lambda_0} \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\, R_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t\int_{\lambda_0}^{1} \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\, R_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t\int_{-1}^{\lambda_0} \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\, R_0\left[x - \lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\ &\quad + \omega_1 t\int_{\lambda_0}^{1} \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\, R_0\left[\lambda\omega_1 t - x; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda\Bigg\}, \end{aligned} \tag{30}$$

où les notations sont les suivantes : $R_0(x; y; z; \rho)$, $R_1(x; y; z; \rho)$ sont les moyennes des fonctions $\varpi(x; y; z)$ et $\varpi_1(x; y; z)$ sur la circonférence (26), on a repris les variables (9) du Chapitre I, enfin $S(y; z; t; \rho)$ est la moyenne de $F(y; z; t)$ sur la circonférence du plan $x = 0$ de centre $(y; z)$ et de rayon ρ.

Il reste maintenant à dériver (30) en y et z, puis à faire tendre x vers zéro; en ce qui concerne le premier terme, faisons le changement de variable

$$u = \frac{x}{\lambda};$$

après la dérivation en y, il devient

$$-\int_x^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial y} S\left[y; z; t - \frac{u}{\omega_1}; \sqrt{u^2 - x^2}\right] du,$$

dont la limite pour $x = 0$ est

$$-\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial y} S\left[y; z; t - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho.$$

La détermination des autres termes dans $\frac{\partial X}{\partial y}$ n'offre pas de difficulté, on trouve en définitive

$$\begin{aligned}
(31)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial y} X(x; y; z; t)\right]_{x=+0}
&= -\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial y} S\left[y; z; t - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_0\left[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\
&\quad + t\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_1\left[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda \\
&\quad + \omega_1 t\int_0^1 \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial\rho} R_0\left[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad & \left[\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{X}(x\,;y\,;z\,;t)\right]_{x=+0} \\
&= -\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{S}\left[y\,;z\,;t-\frac{\rho}{\omega_1}\,;\rho\right]d\rho \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{R}_0\left[\lambda\omega_1 t\,;y\,;z\,;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda \\
&\quad + t\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{R}_1\left[\lambda\omega_1 t\,;y\,;z\,;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda \\
&\quad + \omega_1 t\int_0^1 \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\rho}\,\mathrm{R}_0\left[\lambda\omega_1 t\,;y\,;z\,;\omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}\right]d\lambda.
\end{aligned}
$$

Il n'y a plus qu'à transcrire les divers résultats précédents pour obtenir les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\right)$ et de $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\right)$ dans le plan $x=0$; en égalant ces limites on trouve les équations intégro-différentielles que doivent satisfaire les fonctions f et g, à savoir

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad & \frac{1}{\mu_1}\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{S}\left[y\,;z\,;t-\frac{\rho}{\omega_1}\,;\rho\right]d\rho \\
&+ \frac{1}{\mu_2}\int_0^{\omega_2 t} \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{S}\left[y\,;z\,;t-\frac{\rho}{\omega_2}\,;\rho\right]d\rho \\
&- \left(\frac{1}{\mu_1\omega_1}+\frac{1}{\mu_2\omega_2}\right)f'_t(y\,;z\,;t) \\
&+ \frac{1}{2\pi\mu_1\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1[f(\eta\,;\zeta\,;\tau)]\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi\mu_2\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1[f(\eta\,;\zeta\,;\tau)]\,d\eta\,d\zeta\,d\tau = \mathrm{A}(y\,;z\,;t)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad & \frac{1}{\mu_1}\int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{S}\left[y\,;z\,;t-\frac{\rho}{\omega_1}\,;\rho\right]d\rho \\
&+ \frac{1}{\mu_2}\int_0^{\omega_2 t} \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{S}\left[y\,;z\,;t-\frac{\rho}{\omega_2}\,;\rho\right]d\rho \\
&- \left(\frac{1}{\mu_1\omega_1}+\frac{1}{\mu_2\omega_2}\right)g'_t(y\,;z\,;t) \\
&+ \frac{1}{2\pi\mu_1\omega_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1[g(\eta\,;\zeta\,;\tau)]\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi\mu_2\omega_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{1}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1[g(\eta\,;\zeta\,;\tau)]\,d\eta\,d\zeta\,d\tau = \mathrm{B}(y\,;z\,;t).
\end{aligned}
$$

Dans les premiers membres on a repris des notations antérieures, dans les seconds membres $A(y;z;t)$ et $B(y;z;t)$ sont des fonctions entièrement connues ne dépendant que des données de Cauchy dans tout l'espace. Voici, pour mémoire, leurs expressions, assez compliquées :

$$
\begin{aligned}
(35)\quad A(y;z;t) = & -\frac{2\omega_1 t^2}{\mu_1}\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R}\, M_1[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{2\omega_2 t^2}{\mu_2}\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R}\, M_1[-\lambda\omega_2 t; y; z; \omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{2\omega_1^2 t^2}{\mu_1}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial R}\, M_0[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& +\frac{2\omega_2^2 t^2}{\mu_2}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial R}\, M_0[-\lambda\omega_2 t; y; z; \omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& +\frac{1}{\mu_1}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\, R_0[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{1}{\mu_2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\, R_0[-\lambda\omega_2 t; y; z; \omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& +\frac{t}{\mu_1}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\, R_1[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{t}{\mu_2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\, R_1[-\lambda\omega_2 t; y; z; \omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& +\frac{\omega_1 t}{\mu_1}\int_0^1 \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial\rho}\, R_0[\lambda\omega_1 t; y; z; \omega_1 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{\omega_2 t}{\mu_2}\int_0^1 \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial\rho}\, R_0[-\lambda\omega_2 t; y; z; \omega_2 t\sqrt{1-\lambda^2}]\,d\lambda \\
& -\frac{1}{\mu_1\omega_1}\alpha_1(\omega_1 t; y; z) - \frac{1}{\mu_2\omega_2}\alpha_1(-\omega_2 t; y; z) \\
& -\frac{1}{\mu_1}\alpha'_x(\omega_1 t; y; z) + \frac{1}{\mu_2}\alpha'_x(-\omega_2 t; y; z) \\
& -\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial\rho}\, M_0[0; y; z; \omega_1 t] - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial\rho}\, M_0[0; y; z; \omega_2 t].
\end{aligned}
$$

La valeur (36) de $B(y;z;t)$ s'obtient en changeant dans (35), M_0; M_1; α; α_1; $\frac{\partial}{\partial y}$; en P_0; P_1; β; β_1; $\frac{\partial}{\partial z}$ respectivement.

Pour $t = 0$ on a les concordances

$$f(y; z; 0) = \alpha(0; y; z), \qquad g(y; z; 0) = \beta(0; y; z).$$

Nous poserons

$$(37) \qquad \mathfrak{A}(y; z; t) = -\left(\frac{1}{\mu_1 \omega_1} + \frac{1}{\mu_2 \omega_2}\right)\alpha(0; y; z) + \int_0^t A(y; z; \tau)\, d\tau,$$

$$(38) \qquad \mathfrak{B}(y; z; t) = -\left(\frac{1}{\mu_1 \omega_1} + \frac{1}{\mu_2 \omega_2}\right)\beta(0; y; z) + \int_0^t B(y; z; \tau)\, d\tau.$$

Intégrons les deux équations (33) et (34) par rapport au temps, entre o et t; introduisons les opérateurs $\mathfrak{O}_1$ et $\mathfrak{O}_2$ employés dans les chapitres précédents, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_1}\int_0^t \int_0^{\omega_1 \tau} \frac{\partial}{\partial y}\, S\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho\, d\tau \\ &+ \frac{1}{\mu_2}\int_0^t \int_0^{\omega_2 \tau} \frac{\partial}{\partial y}\, S\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_2}; \rho\right] d\rho\, d\tau - \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{O}_1[f] - \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{O}_2[f] = \mathfrak{A}(y; z; t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_1}\int_0^t \int_0^{\omega_1 t} \frac{\partial}{\partial z}\, S\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho\, d\tau \\ &+ \frac{1}{\mu_2}\int_0^t \int_0^{\omega_1 \tau} \frac{\partial}{\partial z}\, S\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_2}; \rho\right] d\rho\, d\tau - \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{O}_1[g] - \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{O}_2[g] = \mathfrak{B}(y; z; t). \end{aligned}$$

Désignons par la notation $\mathfrak{M}_f[y; z; t; \rho]$ la moyenne d'une fonction $f(y; z; t)$ calculée à l'instant t sur le cercle de centre $(y; z)$ et de rayon ρ, introduisons les opérateurs

$$(39) \qquad \mathfrak{I}_1[f] = \int_0^t \int_0^{\omega_1 \tau} \mathfrak{M}_f\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho\, d\tau,$$

$$(40) \qquad \mathfrak{I}_2[f] = \int_0^t \int_0^{\omega_2 \tau} \mathfrak{M}_f\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_2}; \rho\right] d\rho\, d\tau.$$

Dans ces conditions les équations précédentes s'écrivent

$$(41) \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{I}_1\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{I}_2\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] - \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{O}_1[f] - \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{O}_2[f] = \mathfrak{A}(y; z; t),$$

$$(42) \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{I}_1\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] + \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{I}_2\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] - \frac{1}{\mu_1}\mathfrak{O}_1[g] - \frac{1}{\mu_2}\mathfrak{O}_2[g] = \mathfrak{B}(y; z; t).$$

Calculons enfin

$$\mathcal{C}(y; z; t) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}, \tag{43}$$

en remarquant qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{I}_1[\mathrm{F}] = \mathcal{I}_1\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right], \qquad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{O}_1[g] = \mathcal{O}_1\left[\frac{\partial g}{\partial z}\right]$$

et les formules analogues, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{\mu_1} \mathcal{I}_1[\Delta_1 \mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_2} \mathcal{I}_2[\Delta_2 \mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_1} \mathcal{O}_1[\mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_2} \mathcal{O}_2[\mathrm{F}] = \mathcal{C}(y; z; t) \tag{44}$$

ou encore

$$\frac{1}{\mu_1} \mathcal{J}_1[\mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_2} \mathcal{J}_2[\mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_1} \mathcal{O}_1[\mathrm{F}] + \frac{1}{\mu_2} \mathcal{O}_2[\mathrm{F}] = \mathcal{C}(y; z; t), \tag{45}$$

en posant

$$\mathcal{J}_1[\mathrm{F}] = \mathcal{I}_1[\Delta_1 \mathrm{F}], \qquad \mathcal{J}_2[\mathrm{F}] = \mathcal{I}_2[\Delta_1 \mathrm{F}]. \tag{46}$$

Cette équation ne contient plus que la seule fonction inconnue $\mathrm{F}(y; z; t)$, le premier point est donc de l'intégrer.

3. Nous montrerons d'abord que les opérateurs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ appartiennent à l'ensemble $(\mathcal{V})$. Supposons que F fasse partie de la classe L; il en est de même de

$$f = \Delta_1 \mathrm{F}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1[f] &= \int_0^t \int_0^{\omega_1 \tau} \mathfrak{M}_f\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_1}, \rho\right] d\rho\, d\tau \\ &= \omega_1 \int_0^t \int_0^\tau \mathfrak{M}_f[y; z; \tau - \theta; \omega_1 \theta]\, d\theta\, d\tau \\ &= \omega_1 \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} \mathfrak{M}_f[y; z; \theta; \omega_1 \tau]\, d\theta\right] d\tau \\ &= \omega_1 \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} \mathfrak{M}_f[y; z; \tau; \omega_1 \theta]\, d\theta\right] d\tau. \end{aligned} \tag{47}$$

Or, d'après une formule établie au second paragraphe du Chapitre II, on a

$$\mathfrak{N}_f[y; z; \tau; \omega_1\theta] = f(y; z; \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\omega_1\theta}{2}\right)^{2n} \Delta_n[f(y; z; \tau)].$$

Intégrons en θ de o à $t-\tau$, il vient

$$\int_0^{t-\tau} \mathfrak{N}_f[y; z; \tau; \omega_1\theta]\, d\theta$$
$$= (t-\tau) f(y; z; \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_1^{2n}}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(t-\tau)^{2n+1}}{2n+1} \Delta_n[f(y; z; \tau)].$$

Enfin l'intégration en τ de o à t donne

$$\mathcal{J}_1[\mathrm{F}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_1^{2n-1}}{[(n-1)!]^2} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2n-1}}{(2n-1)!} \Delta_n[\mathrm{F}(y; z; \tau)],$$

ce qui s'écrit encore

(48) $$\mathcal{J}_1[\mathrm{F}] = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathrm{V}_n[\mathrm{F}],$$

avec

(49) $$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \omega_1^{2n-1}.$$

On voit bien que les opérateurs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ font partie de l'ensemble ($\mathcal{V}$) et qu'ils ont respectivement pour indicatrices

(50) $$\Psi_1(\mathrm{Z}) = \frac{\omega_1 \mathrm{Z}}{\sqrt{1-\omega_1^2 \mathrm{Z}}}, \qquad \Psi_2(\mathrm{Z}) = \frac{\omega_2 \mathrm{Z}}{\sqrt{1-\omega_2^2 \mathrm{Z}}}.$$

Nous connaissons d'autre part les indicatrices de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, à savoir

$$\Phi_1(\mathrm{Z}) = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{1-\omega_1^2 \mathrm{Z}}, \qquad \Phi_2(\mathrm{Z}) = \frac{1}{\omega_2}\sqrt{1-\omega_2^2 \mathrm{Z}}.$$

Il résulte de là que celles des opérateurs $\mathcal{D}_1 \mathcal{J}_1 \Phi_2(\mathrm{Z}) = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{1-\omega_2^2 \mathrm{Z}}$ et $\mathcal{D}_2 \mathcal{J}_2$ sont toutes deux égales à Z. En définitive, moyennant l'hypothèse que la fonction F appartient à la classe L, nous pouvons considérer comme établies les relations suivantes :

$$(51)\qquad \mathcal{J}_1\varpi_2=\varpi_2\mathcal{J}_1,\qquad \mathcal{J}_2\varpi_1=\varpi_1\mathcal{J}_2,$$

$$(52)\quad \varpi_1\mathcal{J}_1[\mathrm{F}]=\varpi_2\mathcal{J}_2[\mathrm{F}]=\mathcal{J}_1\varpi_1[\mathrm{F}]=\mathcal{J}_1\varpi_2[\mathrm{F}]=\int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1[\mathrm{F}(y;z;\tau)]\,d\tau.$$

Il nous reste maintenant à étendre ces résultats à des fonctions F faisant partie de classe moins restreintes, possédant par exemple des dérivées en y et z jusqu'à un certain ordre, ces dérivées étant intégrables par rapport au temps. C'est ce qu'on pourrait faire directement en employant certaines transformations d'intégrales comme dans les paragraphes 4, 5, 6 du Chapitre II; mais une remarque simple permet d'aller beaucoup plus vite. Introduisons les opérateurs

$$(53)\qquad \overline{\varpi}_1=\omega_1\varpi_1,\qquad \overline{\varpi}_2=\omega_2\varpi_2,$$

dont les indicatrices sont

$$\overline{\Phi}_1(\mathrm{Z})=\sqrt{1-\omega_1^2\mathrm{Z}},\qquad \overline{\Phi}_2(z)=\sqrt{1-\omega_2^2\mathrm{Z}}.$$

On a

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_1}{\partial\omega_1}=-\Psi_1,\qquad \frac{\partial\overline{\Phi}_2}{\partial\omega_2}=-\Psi_2.$$

Montrons que, par exemple,

$$(54)\qquad \frac{\partial}{\partial\omega_1}\cdot\overline{\varpi}_1[\mathrm{F}]=-\mathcal{J}_1[\mathrm{F}],$$

quelle que soit la fonction F, indépendante de ω_1; on a en effet

$$\overline{\varpi}_1[\mathrm{F}]=\mathrm{F}(y;z;t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left\{\iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}}\frac{1}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1[\mathrm{F}(\eta;\zeta;\theta)]\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\right\}d\tau,$$

d'où on déduit sans peine

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\,\overline{\varpi}_1[\mathrm{F}]=-\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left\{\iint_{\Gamma^1_{yz\tau}}\frac{1}{\tau-\theta}\Delta_1[\mathrm{F}(\eta;\zeta;\theta)]\,ds_0\,d\theta\right\}d\tau.$$

Dans l'accolade qui figure au second membre, l'intégrale double est étendue à la surface latérale de cône de révolution $\Gamma^1_{yz\tau}$; ds_0 désigne l'élément d'arc des sections planes de ce cône par les plans $\theta=\text{const.}$

Ce second membre s'écrit encore

$$-\omega_1 \int^t \left\{ \int_0^\tau \mathfrak{N}_{\Delta_1 F}[y; z; \theta; \omega_1(\tau-\theta)]\, d\theta \right\} d\tau$$

ou, par le changement de variable $\rho = \omega_1(\tau - \theta)$,

$$-\int_0^t \left\{ \int_0^{\omega_1 \tau} \mathfrak{N}_{\Delta_1 F}\left[y; z; \tau - \frac{\rho}{\omega_1}; \rho\right] d\rho \right\} d\tau.$$

On retrouve l'une des formes (47) de l'opérateur $\mathcal{J}_1[F]$; l'identité (54) est donc établie. Il en résulte immédiatement que la dérivée de $\overline{\varpi}_2 \overline{\varpi}_1[F]$ par rapport à ω_2 n'est autre que $-\mathcal{J}_2 \overline{\varpi}_1[F]$; de même la dérivée par rapport à ω_2 de $\overline{\varpi}_1 \overline{\varpi}_2[F]$ est $-\overline{\varpi}_1 \mathcal{J}_2[F]$, ce point se déduisant de (54) et du fait que, si F est une fonction continue d'un paramètre ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre, $\varpi_1[F]$ est aussi fonction continue du même paramètre. Or, d'après les résultats du Chapitre II, ϖ_1 et ϖ_2 sont permutables dès que F possède des dérivées en y et z jusqu'au quatrième ordre intégrables par rapport au temps. Il en résulte évidemment que $\overline{\varpi}_1$ et $\overline{\varpi}_2$ sont aussi permutables, si donc on dérive par rapport à ω_2 l'identité

$$\overline{\varpi}_1 \overline{\varpi}_2[F] = \overline{\varpi}_2 \overline{\varpi}_1[F],$$

on obtient, après division par ω_1 la nouvelle identité

$$\varpi_1 \mathcal{J}_2[F] = \mathcal{J}_2 \varpi_1[F];$$

les formules (51) sont donc établies.

Pour démontrer les formules (52) on remarque que $-\overline{\varpi}_1 \mathcal{J}_1[F]$ est la demi-dérivée, par rapport à ω_1, de $\overline{\varpi}_1 \overline{\varpi}_1[F]$; or, d'après la formule (9) du Chapitre II,

$$\overline{\varpi}_1 \overline{\varpi}_1[F] = F(y; z; t) - \omega_1^2 \int_0^t (t-\tau)\, \Delta_1[F(y; z; \tau)]\, d\tau;$$

en dérivant par rapport à ω_1, changeant les signes et multipliant par $\frac{1}{2\omega_1}$ on obtient

$$\varpi_1 \mathcal{J}_1[F] = \mathcal{J}_1 \varpi_1[F] = \int_0^t (t-\tau)\, \Delta_1[F(y; z; \tau)]\, d\tau;$$

qui est précisément l'identité à prouver.

4. Les résultats précédents permettent de résoudre aisément l'équation (45);

$$\frac{1}{\mu_1}\mathcal{J}_1[F]+\frac{1}{\mu_2}\mathcal{J}_2[F]+\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[F]+\frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[F]=\mathcal{C}(y;z;t);$$

le premier membre a pour indicatrice

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\omega_1 z}{\sqrt{1-\omega_1^2 Z}}+\frac{1}{\mu_2}\frac{\omega_2 z}{\sqrt{1-\omega_2^2 Z}}+\frac{1}{\mu_1\omega_1}\sqrt{1-\omega_1^2 Z}+\frac{1}{\mu_2\omega_2}\sqrt{1-\omega_2^2 Z}$$

ou encore

$$\frac{1}{\mu_1\omega_1\sqrt{1-\omega_1^2 Z}}+\frac{1}{\mu_2\omega_2\sqrt{1-\omega_2^2 Z}}.$$

Quand on multiplie cette expression par l'indicatrice de

$$\frac{1}{\mu_1\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2-\frac{1}{\mu_2\omega_2^2}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1$$

qui est

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2}\sqrt{(1-\omega_1^2 Z)(1-\omega_2^2 Z)}\left[\frac{1}{\mu_1\omega_1^2\omega_2}\sqrt{1-\omega_2^2 Z}-\frac{1}{\mu_2\omega_2^2\omega_1}\sqrt{1-\omega_1^2 Z}\right],$$

on trouve

$$\frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2}\left[\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2}(1-\omega_2^2 Z)-\frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}(1-\omega_1^2 Z)\right].$$

Appliquons donc ce dernier opérateur aux deux membres de (45), posons

$$\mathcal{C}_1(y;z;t)=\frac{1}{\mu_1\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2[\mathcal{C}]-\frac{1}{\mu_2\omega_2^2}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[\mathcal{C}],\tag{55}$$

le premier membre donne, en négligeant de noter F,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{J}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2+\frac{1}{\mu_1\mu_2\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{J}_2+\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\\&+\frac{1}{\mu_1\mu_2\omega_1^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2-\frac{1}{\mu_1\mu_2\omega_2^2}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{J}_1-\frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{J}_2\\&-\frac{1}{\mu_1\mu_2\omega_2^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2-\frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2.\end{aligned}$$

Or les identités (52) du présent chapitre, (9) et (10) du chapitre précédent, ont pour conséquences

$$(\mathcal{D}_1\mathcal{J}_1 + \mathcal{D}_1\mathcal{D}_1)[F] = \frac{1}{\omega_1^2}F,$$

$$(\mathcal{D}_2\mathcal{J}_2 + \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)[F] = \frac{1}{\omega_2^2}F.$$

Il en résulte quelques simplications dans le calcul de $\mathcal{C}_1(y; z; t)$, les second, quatrième, cinquième et septième termes se détruisent, les quatre autres donnent simplement

$$\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^4}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2[F] - \frac{1}{\mu_2^2\omega_2^4}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[F] = \mathcal{C}_1(y; z; t)$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\right)F(y; z; t)$$
$$- \left(\frac{\omega_2^2}{\mu_1^2\omega_1^2} - \frac{\omega_1^2}{\mu_2^2\omega_2^2}\right)\int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1[F(y; z; \tau)]\,d\tau = \omega_1^2\omega_2^2\mathcal{C}_1(y; z; t).$$

Introduisons la nouvelle inconnue

(56) $$F_1(y; z; t) = \int_0^t (t-\tau)F(y; z; \tau)\,d\tau,$$

en notant qu'elle est nulle ainsi que sa dérivée première pour $t = 0$, et que sa dérivée seconde par rapport à t se réduit à F; l'équation précédente devient, compte tenu des valeurs des ω en ε et μ,

(57) $$\frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right]$$
$$- \frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} + \omega_1^2\omega_2^2\mathcal{C}_1(y; z; t) = 0.$$

On doit en déterminer une solution $F_1(y; z; t)$ connaissant les données de Cauchy portées par le plan $t = 0$:

(58) $$F_1(y; z; 0) = 0; \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}.F_1(y; z; t)\right]_{t=0} = 0.$$

Supposons que cela soit faisable; les équations (41) et (42) donnent alors, F étant maintenant connue,

$$\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[f]+\frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[f]=\mathcal{A}_1(y;z;t),\qquad \frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[g]+\frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[g]=\mathcal{B}_1(y;z;t)$$

avec

$$(59)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_1(y;z;t)=\dfrac{1}{\mu_1}\mathcal{J}_1\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]+\dfrac{1}{\mu_2}\mathcal{J}_2\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]-\mathcal{A}(y;z;t),\\ \mathcal{B}_1(y;z;t)=\dfrac{1}{\mu_1}\mathcal{J}_1\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]+\dfrac{1}{\mu_2}\mathcal{J}_2\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]-\mathcal{B}(y;z;t). \end{cases}$$

Il est bien facile d'en tirer f et g; il suffit d'appliquer aux deux membres de chacune de ces équations l'opérateur $\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1-\frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2$; il vient ainsi, grâce aux propriétés déjà tant de fois utilisées des opérateurs $\mathcal{D}$,

$$\left(\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\right)f(y;z;t)$$
$$-\left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\int_0^t(t-\tau)\,\Delta_1[f(y;z;\tau)]\,d\tau=\mathcal{A}_2(y;z;t),$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\right)g(y;z;t)$$
$$-\left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\int_0^t(t-\tau)\,\Delta_1[g(y;z;\tau)]\,d\tau=\mathcal{B}_2(y;z;t)$$

avec

$$(60)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_2(y;z;t)=\dfrac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[\mathcal{A}_1]-\dfrac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[\mathcal{A}_1],\\ \mathcal{B}_2(y;z;t)=\dfrac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[\mathcal{B}_1]-\dfrac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[\mathcal{B}_1]. \end{cases}$$

Ici encore posons

$$(61)\qquad \begin{cases} f_1(y;z;t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)f(y;z;\tau)\,d\tau,\\ g_1(y;z;t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)g(y;z;\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire ces équations sous la forme

$$(62)\qquad \left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}+\mathcal{A}_2(y;z;t)=0,$$

$$(63)\qquad \left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}+\mathcal{B}_2(y;z;t)=0.$$

Nous rencontrons à nouveau deux problèmes de Cauchy, les fonctions f_1 et g_1 étant nulles ainsi que leur dérivée première par rapport au temps pour $t=0$; connaissant f_1 et g_1 on en déduit f et g par les formules

$$f=\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2};\qquad g=\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}.$$

Réciproquement, on montrerait sans peine que les calculs précédents donnent la solution unique du problème, quand celle-ci existe.

Tout ce ramène donc à la résolution du problème de Cauchy pour les équations (57), (62), (63), lesquelles sont identiques aux équations (a), (b), (c), de l'introduction; c'est là une question classique lorsque ces équations sont hyperboliques; il faut donc examiner le signe des quantités

$$\frac{\mu_2\varepsilon_1-\mu_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2};\qquad \frac{\mu_2\varepsilon_1-\mu_1\varepsilon_2}{\mu_2^2-\mu_1^2}.$$

Une discussion élémentaire montre qu'elles sont toutes deux positives pour

$$(64)\qquad k=(\mu_1-\mu_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)<0,$$

si au contraire k est positif, l'une au moins des équations est elliptique, (elles ne peuvent d'ailleurs pas l'être toutes les trois), si $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, l'équation (57) donne immédiatement F, (62) et (63) sont hyperboliques, si $\mu_1=\mu_2$, (57) est hyperbolique, (62) et (63) donnent directement f et g. En résumé, le problème a une solution unique et bien déterminée pour $k\leq 0$; sinon on est conduit à un problème de Cauchy pour une équation elliptique, question qui, on le sait, ne possède point de solution.