F. MARTY

Sur les groupes et hypergroupes attaches à une fraction rationnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 83-123

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__83_0>

SUR LES

GROUPES ET HYPERGROUPES

ATTACHÉS A UNE FRACTION RATIONNELLE

Par M. F. MARTY.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude de la question suivante : désignant par $R_1(z)$, $R_2(z)$, ... des fonctions rationnelles d'une variable, caractériser les fractions qui se mettent sous la forme $R_1[R_2(z)]$.

Deux réponses sont faites à la question; la décomposition de la fraction entraîne l'imprimitivité de deux groupes : son groupe de monodromie, et le groupe de Galois d'une certaine extension algébrique du corps des fractions rationnelles d'une variable. Ces deux groupes sont tous deux des groupes de substitutions sur n variables, ils apparaissent ainsi comme ayant des structures en relation étroite, mais il n'est pas possible à premier examen d'affirmer leur identité, sauf dans des cas particuliers.

Le problème ainsi traité n'est qu'un cas très particulier des problèmes suivants :

1° Étant donnée une courbe algébrique et sur elle une série linéaire à 1 dimension de groupe de k points, est-ce que cette série est un multiple d'une série linéaire de groupes de k' points?

2° Étant donnée une représentation d'une variété V sur une variété V′ qui associe un seul point de V à un point V′ (extension algébrique de la variété V), y a-t-il une variété intermédiaire V″, image de V et dont V′ serait image.

Dans un Mémoire ultérieur, je traiterai ce problème plus général en montrant comment la dualité de point de vue se précise et permet d'asseoir une « théorie de Galois » et une « théorie de Hilbert » des variétés algébriques et des corps de fonctions rationnelles sur une variété algébrique.

Le troisième chapitre de mon Mémoire est consacré au problème ci-dessus énoncé. Le premier et le deuxième, qui ont pour but de démontrer certains lemmes nécessaires, exposent des théories qui pourrait être considérées comme intéressantes en elles-mêmes; le Chapitre I est consacré à la théorie des hypergroupes (où le produit est une fonction multiforme), qui a son origine dans le fait que la composition de deux fonctions multiformes peut donner naissance à deux fonctions distinctes. Le résultat fondamental de ce chapitre est l'extension de la théorie du groupe quotient au cas des sous-groupes non invariants : il existe en ce cas un hypergroupe quotient dont les propriétés traduisent celles du groupe quotient : ses sous-hypergroupes correspondent aux sous-groupes intermédiaires du groupe de départ.

Le Chapitre II a pour but de montrer qu'étant donné un complexe de recouvrement d'un complexe donné, les autoprojections (allemand « Deckbewegungen ») constituent un hypergroupe, quotient du groupe de monodromie par son sous-groupe de primitivité (généralisation d'un résultat classique sur les recouvrements réguliers). Comme résultats annexes, je montre le rôle de la « matrice des contacts orientés » (calculable au moyen d'une matrice d'incidences), et notamment le fait qu'elle détermine le complexe si l'on en connaît un support; je montre aussi comment on peut par son moyen trouver tous les recouvrements (ramifiés sur des arêtes du réseau de simplexes) d'un complexe donné; j'indique sommairement comment on peut représenter les chemins qui interviennent dans la théorie du groupe fondamental au moyen de chaînes de simplexes accolés, le lacet dans le cas du recouvrement ramifié prenant alors une signification presque intuitive (¹).

Dans le cours de ce Mémoire, je considère comme acquis les résultats démontrés dans les deux ouvrages suivants :

VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (Berlin, Springer, 1930). SEIFERT-THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig, Teubner, 1934).

Je ne définis pas les notations que je leur emprunte, ou les termes qui sont la traduction littérale de leur vocabulaire.

Les résultats exposés ici ont été annoncés ou préparés par les Notes suivantes :

Sur les groupes finis de fonctions algébriques (*Societatis Scientiarum Fennicae Commentationes*, VII, 1934, p. 12).

Sur une généralisation de la notion de groupe (*Förhandlingar vid Åttonde skandinaviska matematiker kongressen*, août 1934).

Sur le rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 14 octobre 1935).

Le double aspect de la structure des fractions rationnelles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, novembre 1935).

Qu'il me soit permis en terminant de remercier M. E. Picard qui a bien voulu accueillir mon travail dans ce Recueil.

CHAPITRE I.

THÉORIE DE L'HYPERGROUPE QUOTIENT.

Soit G un groupe de permutations (ou de transformations) dont nous désignerons les éléments par des capitales latines, s'appliquant à un ensemble S d'éléments que nous désignerons par des minuscules latines ou par des chiffres arabes. Nous ne supposerons en principe

(¹) Une représentation anologue, mais basée sur la notion d'incidence, est développée dans : K. REIDEMEISTER, *Die Fundamentalgruppe von Komplexen* (*Math. Zeitschrift*, B. 40, H. 3, 1935, S. 406).

rien sur la puissance de S ou G en tant qu'ensemble, mais nous aurons particulièrement en vue le cas où G est le groupe de monodromie d'un recouvrement $\tilde{K}$, les éléments de S étant alors un système de simplexes superposés.

1. La notion de catégorie et les questions qui s'y rattachent. — Supposons d'abord le groupe G transitif.

Nous dirons que deux éléments *a et b sont de même catégorie par rapport à l'élément* 1 s'il existe un T tel que

$$a = T(b), \qquad 1 = T(1).$$

Cette définition est réflexive, symétrique et transitive, et définit une décomposition de S en catégories. L'élément 1 constitue à lui tout seul une catégorie que nous appellerons la *catégorie unité*.

Nous dirons qu'un groupe est *régulier* si toute catégorie comprend un seul élément.

Nous dirons qu'un groupe est *hypertransitif* s'il n'y a qu'une seule catégorie distincte de la catégorie unité.

Si a et b sont de même catégorie par rapport à c, nous écrirons $a \cong b(c)$ et nous désignerons par $S_c(a)$ la catégorie par rapport à c qui contient l'élément a.

Il est classique que les transformations T avec $1 = T(1)$ forment un sous-groupe de G, qui n'est invariant que s'il se réduit à la transformation identique. Car de $T(1) = 1$ et $T'^{-1}TT'(1) = 1$ on déduit $T[T'(1)] = T'(1)$ et d'après la transitivité $T'(1)$ est un élément arbitraire du groupe. Nous l'appellerons *sous-groupe de primitivité* de G.

Comme nous verrons que le groupe de monodromie d'un recouvrement régulier est régulier, il y a intérêt à en préciser les caractères, qui s'obtiennent d'ailleurs facilement.

THÉORÈME 1. — *Si les catégories* S_1 *sont toutes à un seul élément, les catégories* S_i *pour i quelconque sont à un seul élément, et par suite* G *est régulier.*

Supposons que 1 ne soit fixe que dans l'opération identique, et que T laisse fixe j en amenant a sur $b (b \neq a)$. Soit T_1 amenant 1 sur j

$$b \neq a, \qquad T(a) = b, \qquad T(j) = j, \qquad j = T_1(1),$$

alors soit

$$b_1 = T_1^{-1}(b), \qquad a = T_1^{-1}(a),$$

on a $a_1 \neq b_1$, d'où

$$b_1 = T_1^{-1}(b) = T_1^{-1}\,T(a) = T_1^{-1}\,TT_1(a_1),$$
$$1 = T_1^{-1}(j) = T_1^{-1}\,T(j) = T_1^{-1}\,TT_1(1),$$

d'où la contradiction.

THÉORÈME 2. — *Si l'élément* 1 *donne une division en deux catégories, tout élément j divise* S *en deux catégories et le groupe est hypertransitif.*

Soient d et e deux éléments, et T_1 tel que $j = T_1(1)$. De $a \neq b$ on tire

$$a' = T_1^{-1}(a) \neq T_1^{-1}(b) = b',$$

et il existe un T tel que $b' = T(a')$, $1 = T(1)$, on vérifie alors facilement que

$$b = T_1 TT_1^{-1}(a) \qquad \text{avec} \qquad j = T_1 TT_1^{-1}(j).$$

Ces deux théorèmes ne sont d'ailleurs que des cas particuliers du résultat plus général suivant.

THÉORÈME 3. — *Il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les catégories* C_i *et* C_j, *et dans deux catégories correspondantes une correspondance biunivoque entre les éléments.*

Soit en effet $j = T(i)$. Je dis que si $a \cong b(i)$

$$a' = T(a) \cong T(b) = b'(j),$$

si $a \cong b(i)$ il existe un T' tel que

$$T'(a) = b, \qquad T'(i) = i.$$

Alors

$$b' = T(b) = TT'(a) = TT'T^{-1}(a')$$

et

$$TT'T^{-1}(j) = TT'(i) = T(i) = j.$$

Donc à chaque catégorie C_i nous associons une C_j; et à chaque élément de la première un élément de la seconde. En répétant l'opération réciproque au moyen de T^{-1} nous obtenons bien la correspondance biunivoque annoncée; car chaque être du second type peut être ainsi obtenu au moyen d'un être du premier.

Ajoutons une dernière remarque de caractère général : si un groupe n'est pas hypertransitif, on a par exemple $C_1(2) \neq C_1(3)$, c'est-à-dire que toute transformation qui amène 2 sur 3 agit au moins sur 1, 2 et 3; donc dans un groupe non hypertransitif il y a au moins une transformation qui déplace trois éléments dont un est donné à l'avance.

THÉORÈME 4. — *La correspondance ainsi obtenue est unique, et ne dépend pas de la transformation* T *choisie pour amener i en j.*

En effet, soient T et T_1 avec $j = T(i) = T_1(i)$. Les deux associés de a seront $a' = T(a)$, $a'_1 = T_1(a)$. Or on a $T_1T^{-1}(j) = j$ et $T_1T^{-1}(a') = a'_1$. Donc $a'_1 \cong a_1(j)$ et par suite T et T_1 représentent la catégorie $C_i(a)$ sur la même catégorie C_j.

2. L'hypergroupe d'automorphie d'un groupe de transformations. Notion d'hypergroupe quotient. — Nous pouvons donner un autre aspect à la définition des catégories, qui nous permettra en même temps une légère généralisation de cette notion dans le cas où le groupe G serait par exemple un groupe intransitif.

Nous disons que $a \cong b(c)$ lorsque l'on passe de a à b par une transformation appartenant à un certain groupe G_c, le sous-groupe de G qui laisse c invariant. Remarquons maintenant que tout sous-groupe de G définit une division de S en catégories, si nous disons :

On appelle catégorie tout sous-domaine de S *qui est un domaine de transitivité pour un sous-groupe de* G.

Considérons en particulier les catégories relatives à G_1, et soit $C_1(a)$ l'une d'elles. Soit a un élément de S, et T une transformation qui amène 1 sur a, $a = T(1)$. Si $a = T'(1)$, T' est de la forme $T' = TT_1$ où T_1 est une transformation arbitraire du groupe G_1. Si b est un autre élément de la catégorie $C_1(a)$, on a $b = T'_1T(1)$. Donc si T est une transformation donnée, toute transformation de la forme T'_1TT_1 où T_1 et T'_1 sont deux éléments arbitraires de G_1 amène 1 sur les points d'une même catégorie C_1.

Nous allons maintenant établir le résultat (qui sert de base en fait à la notion de l'hypergroupe d'automorphie).

THÉORÈME 5. — *Soient deux catégories* $C_1(a_0)$ *et* $C_1(b_0)$ *composées respectivement des éléments* $a_0, \ldots, a_n, \ldots; b_0, \ldots, b_m, \ldots$; *soit c un élément de la catégorie* C_{a_0} *homologue de* $C_1(b_0)$. *Tout élément de* $C_1(c)$ *appartient à une catégorie* C_{a_n} *homologue de* $C_1(b_0)$.

k étant un élément quelconque de S, nous désignerons par T_k, T'_k, ... des transformations telles que $T_k(1)=k$, et par $T_{(k)}$, $T'_{(k)}$, ... des transformations telles que $T_{(k)}(k)=k$.

Soit $c=T_{a_0}(b_0)$, un élément c' de $C_1(c)$ est de la forme $T_1 T_{a_0}(b_0)$. Il appartient à une C_{a_n} dont nous voulons l'homologue C_1. Formons $T_{a_n}^{-1}(c')$; il faut montrer que pour un T_{a_n} convenable $T_{a_n}^{-1} T_1 T_{a_0}(b_0)$ est un b_n.

Or d'après ce qui précède nous pouvons prendre $T_{a_n}=T_1 T_{a_0}$ ce qui donne même $T_{a_n}^{-1}(c')=b_0$. Donc $C_{a_n}(c')$ est bien homologue de $C_1(b_0)$.

On peut énoncer ce résultat autrement, en disant que l'ensemble des points, appartenant à l'une au moins des catégories C_{a_n} homologues de $C_1(b_0)$ appartient à un ensemble de catégories C_1.

Dans une précédente Note [1] j'ai appelé *hypergroupe* un ensemble d'éléments possédant quatre lois de combinaisons AB, BA, $\frac{A}{B|}$ et $\frac{A}{|B}$; chacune de ces expressions étant susceptible de plusieurs déterminations, les deux premières étant associatives, et vérifiant les relations suivantes :

$$\frac{A}{B|} \supset C \rightleftharpoons BC \supset A, \qquad \frac{A}{|B} \supset C \rightleftharpoons CB \supset A.$$

Prenons comme éléments une classe de catégories homologues, et disons : si A et B ont respectivement comme représentantes $C_1(a_0)$ et $C_1(b_0)$, l'expression BA aura pour déterminations toute classe dont un représentant est une des classes $C_1(c)$ définies au théorème 12.

Avec la convention que nous venons d'énoncer les classes de catégories homologues constituent un hypergroupe.

Proposons-nous maintenant d'obtenir une définition qui ne fasse

---

(1) *Sur une généralisation de la notion de groupe* (*Comptes rendus du VIII^e Congrès des mathématiciens scandinaves*, Stockholm, 1934, p. 45).

pas apparaître directement les éléments du groupe, de manière à obtenir une généralisation à un sous-groupe quelconque et à un groupe non transitif.

Remarquons d'abord que les sous-groupes G_k des transformations T_k sont des sous-groupes conjugués du groupe G_1 dans G et que à tout point a correspond une classe $T_a G_1$ (du groupe G) qui définit les transformations T_a, le groupe des $T_{(a)}$ correspond au sous-groupe conjugué $T_a G_1 T_a^{-1}$.

Nous pourrons alors dire : une catégorie C_1 relative au groupe G_1 est constituée par l'ensemble des classes à gauche de G_1 dont les multiplicateurs appartiennent à une même classe à droite de G_1 (système de transformations que l'on peut écrire symboliquement $G_1 T_a G_1$).

D'après ce qui a été vu précédemment les transformations $G_k T^{(k)} G_k$ sont celles qui conduiront le point k sur les points d'une catégorie C_k et par suite les $G_k T^{(k)} G_k T_k G_1$ y conduiront le point 1, ce que l'on peut encore écrire, d'après $G_k = T_k G_1 T_k^{-1}$, sous la forme $T_k G_1 (T_k^{-1} T^{(k)} T_k) G_1$.

Ceci nous montre que la catégorie $C_1(T^{(1)})$ est homologue à la catégorie $C_k(T^{(k)})$ si $T^{(1)} = T_k^{-1} T^{(k)} T_k$. Nous pouvons alors poser abstraitement les définitions suivantes :

Définitions. — 1° *Étant donné un groupe* G *et un sous-groupe* G_1, *nous appellerons catégorie relative à* G_1 *contenant* $T^{(1)}$ *l'ensemble des transformations* $G_1 T^{(1)} G_1$.

Nous la désignerons par $C_{G_1}(T^{(1)})$.

2° *Étant donné un sous-groupe* G_k *conjugué de* G_1 *par* T_k : $G_k = T_k G_1 T_k^{-1}$, *la catégorie* $C_{G_k}(T_k T^{(1)} T_k^{-1})$ *sera dite conjuguée de* $C_{G_1}(T^{(1)})$.

On vérifie alors immédiatement les deux conséquences suivantes de ces définitions :

Théorème 6. — *Deux transformations sont de même catégorie par rapport à* G_1, *si et seulement si la classe à droite de l'une a un élément commun avec la classe à gauche de l'autre.*

Théorème 7. — *Si une catégorie* C_{G_k} *est conjuguée par* T_k *d'une catégorie* C_{G_1}, *ses éléments sont conjugués des éléments de* C_{G_1} *par* T_k.

Cherchons maintenant à définir une combinaison des catégories

$C_{G_1}(T^{(a)})$, $C_{G_1}(T^{(b)})$. Soit T_{a_n} une transformation de $C_{G_1}(T^{(a)})$, nous formerons $T_{a_n} G_1 T_{a_n}^{-1} = G_{a_n}$, puis $T_{a_n}[C_{G_1}(T^{(b)})]T_{a_n}^{-1}$ conjuguée de $C_{G_1}(T^{(b)})$, transformations que nous devons appliquer à la classe $T_{a_n} G_1$, ce qui nous donne des classes à gauche de G_1 dont les représentants seront $T_{a_n}[C_{G_1}(T^{(b)})]$. Comme dans cette expression il y a déjà G_1 à droite, nous avons non seulement des représentants, mais même des classes complètes, et les transformations obtenues sont finalement les transformations du système

$$[C_{G_1}(T^{(a)})]\,[C_{G_1}(T^{(b)})] = G_1 T^{(a)} G_1 T^{(b)} G_1.$$

Ceci nous montre d'abord :

Théorème 8. — *Si* $T^{(c)} = T^{(a)} T^{(b)}$, *toute transformation de la catégorie* $C_{G_1}(T^{(c)})$ *est produit d'une transformation de* $C_{G_1}(T^{(b)})$ *par une transformation de* $C_{G_1}(T^{(a)})$.

Par suite nous constituerons bien parmi les catégories un hypergroupe en posant

$$[C_{G_1}(T^{(a)})]\,[C_{G_1}(T^{(b)})] \supset C_{G_1}(T^{(c)}),$$

si l'on a

$$G_1 T^{(a)} G_1 T^{(b)} G_1 \supset G_1 T^{(c)} G_1.$$

Nous appellerons l'hypergroupe ainsi défini *hypergroupe quotient du groupe* G *par rapport au sous-groupe* G_1. Et nous poserons en outre la définition suivante :

Définition. — *Lorsque* G_1 *est le groupe qui laisse invariant l'élément* 1 *de* S, *l'hypergroupe d'automorphie est le réciproque de l'hypergroupe quotient de* G *par rapport à* G_1.

Dans ce cas particulier, nous avions vu que G était régulier lorsque G_1 se réduisait à la transformation identique, et que c'était le seul cas où G_1 était un sous-groupe invariant. Supposons maintenant que nous négligeons la représentation par des transformations de S, et étudions ce que devient notre algorithme lorsque G_1 est un sous-groupe invariant $TG_1T^{-1} = G_1$ quel que soit T.

Nous constatons d'abord que l'on a

$$G_1 T G_1 = (T G_1 T^{-1}) T G_1 = T G_1$$

et de même

$$G_1TG_1 = G_1T(T^{-1}G_1T) = G_1T.$$

Donc :

1° *La catégorie qui contient* T *est identique à la classe à droite et à la classe à gauche qui contiennent* T.

Réciproquement d'ailleurs, *si chaque catégorie est identique à une classe à gauche, le sous-groupe* G_1 *est invariant*. En effet si l'on a pour tout couple $T'_{(1)}$, $T''_{(1)}$ un $T'''_{(1)}$ tel que

$$T'_{(1)}TT''_{(1)} = T'''_{(1)}T,$$

on aura

$$T'_{(1)}TT''_{(1)}T^{-1} = T'''_{(1)},$$

puis

$$TT''_{(1)}T^{-1} = T'^{-1}_{(1)}T'''_{(1)}.$$

Ce que nous condenserons en :

Théorème 9. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* G_1 *soit un sous-groupe invariant est que la division en catégories coïncide avec la division en classes (d'un côté déterminé).*

Proposons-nous maintenant de déterminer à quelles conditions l'hypergroupe d'automorphie sera un groupe. Il faut pour cela que chaque système de catégories produit comprenne une seule catégorie, donc que pour chaque couple $T^{(a)}$, $T^{(b)}$ on ait

$$G_1T^{(a)}G_1T^{(b)}G_1 = G_1T^{(a)}T^{(b)}G_1,$$

d'où

$$T^{(a)}G_1T^{(b)} \leqq G_1T^{(a)}T^{(b)}G_1;$$

en particulier si $T^{(b)} = T^{(a)-1}$ on aura

$$T^{(a)}G_1T^{(a)-1} \leqq G_1T^{(a)}T^{(a)-1}G_1 \qquad \text{ou} \qquad T^{(a)}G_1T^{(a)-1} \leqq G^1.$$

Si nous remplaçons $T^{(a)}$ par $T^{(a)-1}$, nous aurions eu

$$T^{(a)-1}G_1T^{(a)} \leqq G_1,$$

d'où l'on tire

$$T^{(a)}T^{(a)-1}G_1T^{(a)}T^{(a)-1} \leqq T^{(a)}G_1T^{(a)-1};$$

en comparant, on en déduit $G_1 = T^{(a)}G_1T^{(a)-1}$ quelle que soit $T^{(a)}$, c'est-à-dire que G_1 est un sous-groupe invariant.

Réciproquement d'ailleurs, si G_1 est un sous-groupe invariant, la catégorie-produit et la classe-produit ont des définitions concordantes : l'hypergroupe quotient n'est autre que le groupe quotient. D'où le résultat fondamental :

THÉORÈME 10. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'hypergroupe quotient soit un groupe est que* G_1 *soit un sous-groupe invariant de* G. *En ce cas l'hypergroupe quotient se réduit au groupe quotient* $\frac{G_1}{G}$.

Les éléments de G_1 constituent une catégorie. Donc si G_1 est un sous-groupe propre il y a au moins une autre catégorie. Il peut arriver qu'il n'y en ait qu'une autre, leur nombre total est alors 2. En ce cas toute transformation de G qui n'appartient pas à G_1 est de la forme $T_1TT''_1$ où T est une transformation fixe de G en dehors de G_1 et nous dirons que le groupe G est *hypertransitif* par rapport au sous-groupe G_1. On voit immédiatement que si G est hypertransitif par rapport à G_1, *toute classe à droite a un élément dans toute classe à gauche*.

Comme chaque catégorie est la réunion de plusieurs classes d'un même côté, nous obtenons le résultat extrême suivant :

Le nombre des catégories est inférieur à celui des classes, il lui est égal seulement dans le cas où une classe à droite n'a d'éléments communs qu'avec une classe à gauche (à laquelle d'ailleurs elle est identique).

D'une manière générale, supposons G_1 d'indice fini j dans G. Il y a $j-1$ classes autres que G_1 ; s'il y a $j'-1$ catégories autres que G, il sera possible de déterminer $n-1$ classes à gauche, telles que toute classe à droite a des points dans l'une d'elles, et aucun point dans l'autre. Conclusion évidente, si l'on se rappelle que chaque catégorie est composée d'un certain nombre de classes à droite, et de classes à gauche, deux classes de même catégorie ayant un élément commun.

3. **Groupes et hypergroupes en chaîne.** — Nous dirons qu'un groupe ou un hypergroupe G_1 est sous-groupe ou sous-hypergroupe d'un hypergroupe donné H lorsque tous les éléments de G_1 sont éléments de H, la loi de multiplication coïncidant.

Considérons trois groupes $G_1 \subset G_2 \subset G_3$ dont chacun est sous-groupe du suivant. Nous allons étudier les hypergroupes quotients

$$\frac{G_2}{G_1}, \quad \frac{G_3}{G_1} \quad \text{et} \quad \frac{G_3}{G_2}.$$

Une catégorie de $\frac{G_2}{G_1}$ comprend les éléments de $G_1 T G_1$; c'est donc une catégorie de $\frac{G_3}{G_1}$ en même temps que de $\frac{G_2}{G_1}$. Donc $\frac{G_2}{G_1}$ est un sous-hypergroupe de $\frac{G_3}{G_1}$. Réciproquement soit donné un sous-hypergroupe propre de $\frac{G_3}{G_1}$; la réunion des éléments des catégories appartenant au sous-hypergroupe forme un sous-groupe, car le produit de deux d'entre eux appartient à l'une des catégories détermination du produit, qui appartient elle-même au sous-hypergroupe; donc :

THÉORÈME 11. — *A tout groupe intermédiaire entre* G_1 *et* G_3, *appartient un sous-hypergroupe de* $\frac{G_3}{G_1}$ *et réciproquement.*

En particulier en rapprochant du théorème 18, on obtient :

THÉORÈME 12. — *Les sous-groupes de l'hypergroupe* $\frac{G_3}{G_1}$ *sont tous sous-groupes de l'un d'entre eux qui est le groupe quotient du normalisateur de* G_1 *dans* G *par* G_1.

Pour étudier de plus près l'hypergroupe quotient $\frac{G_3}{G_2}$, nous devons introduire la notion d'hypergroupe quotient de deux hypergroupes. Nous ne l'introduirons que pour une catégorie particulière d'hypergroupes, qui sont d'ailleurs les seuls dont nous avons besoin ici.

DÉFINITION [1]. — *Un hypergroupe est normal, lorsqu'il contient un élément* E *et lorsque à chaque élément* A *correspond un élément* A^{-1} *avec les propriétés suivantes :*

---

(1) *Cf.* l'exposé précité du Congrès de Stockholm, où le terme normal est remplacé par le terme : complètement régulier.

Quel que soit A :

$$AE = EA = A, \qquad AA^{-1} \supset E, \quad A^{-1}A \supset E,$$
$$AB \supset E \rightleftharpoons B \supset A^{-1}, \qquad BA \supset E \rightleftharpoons B \supset A^{-1} \text{ (1)}.$$

Nous pouvons maintenant définir dans le cas des hypergroupes normaux un algorithme de catégories exactement calqué sur celui des groupes. En effet, soit un hypergroupe H, normal, et un sous-hypergroupe normal H_1. H_1 contenant E et T étant un élément quelconque de H, on voit que la catégorie H_1TH_1 contient T et que les produits des éléments de $H_1T^{(1)}H_1$ par ceux de $H_1T^{(2)}H_1$ parcourent un système de catégories $H_1T^{(2)}H_1T^{(1)}H_1$.

Soient alors la suite $G_1 \subset G_2 \subset G_3$ et les hypergroupes

$$\frac{G_3}{G_1}, \quad \frac{G_2}{G_1}, \quad \frac{G_3}{G_2}.$$

Soit $H_{ij} = \dfrac{G_i}{G_j}$; un élément de H_{31} est une catégorie G_1TG_1, où T est dans G_3. Un élément de $\dfrac{H_{31}}{H_{21}}$ ce sera une catégorie $H_{21}(G_1TG_1)H_{21}$. Or on a

$$H_{21}G_1 \equiv G_1H_{21} \equiv G_2,$$

en tant que système d'éléments de G_3. Donc un élément de $\dfrac{H_{31}}{H_{21}}$ est identique à un élément de H_{32} et nous obtenons le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 13. — *Théorème d'isomorphie généralisé :*

Si l'on a

$$G_1 \subset G_2 \subset G_3,$$

on a

$$\frac{G_3}{G_2} = \frac{\left(\dfrac{G_3}{G_1}\right)}{\left(\dfrac{G_2}{G_1}\right)}.$$

Ce théorème constitue une généralisation d'un résultat bien connu lorsque G_2 et G_1 sont sous-groupes invariants de G_3 et G_1 sous-groupe invariant de G_2. Il est d'autre part clair qu'il est valable même si les G sont des hypergroupes normaux et non des groupes.

---

(1) Ces conditions sont visiblement compatibles mais non indépendantes.

Dans ce théorème, nous admettons implicitement la définition suivante :

Deux hypergroupes H *et* $\overline{\mathrm{H}}$ *sont dits isomorphes si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments, de manière que, a et* $\bar{a}$ *se correspondant,*

$$ab \supset c \rightleftarrows \bar{a}\,\bar{b} \supset \bar{c}.$$

Nous écrirons $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{H}}$ ou parfois $\mathrm{H} \cong \overline{\mathrm{H}}$.

On peut aussi étudier des problèmes analogues aux principes d'homomorphie et de réduction de la théorie des groupes. Nous définirons :

Une correspondance qui à tout élément a de l'hypergroupe normal H *associe un élément* $\bar{a}$ *de* $\overline{\mathrm{H}}$ *est une homomorphie si* $ab \supset c$ *entraîne* $\bar{a}\,\bar{b} \supset \bar{c}$.

Une telle correspondance sera dite semi-isomorphie si en outre : tout élément de $\overline{\mathrm{H}}$ *est image d'au moins un élément de* H, *et si chaque système* $\bar{a}$, $\bar{b}$, γ *tel que* $\bar{a}\,\bar{b} \supset \gamma$ *est image d'au moins un a, b, c tel que* $ab \supset c$. *Enfin une quasi-isomorphie est une homomorphie dans laquelle seule l'unité a l'unité pour image et où tout élément de* $\overline{\mathrm{H}}$ *est image d'un élément de* H.

Nous écrirons $\mathrm{H} \sim \overline{\mathrm{H}}$ (homomorphie); $\mathrm{H} \cong \overline{\mathrm{H}}$ (semi-isomorphie); $\mathrm{H} \neq \overline{\mathrm{H}}$ ou $\mathrm{H} \# \overline{\mathrm{H}}$ (quasi-isomorphie). La semi-isomorphie entraîne l'homomorphie, mais la réciproque n'est pas exacte. On peut avoir une semi-isomorphie d'un groupe sur un hypergroupe, nous en verrons des exemples, mais non une isomorphie (bien entendu). Pour des groupes, semi-isomorphie et homomorphie se confondent, ainsi que quasi-isomorphie et isomorphie. Soit par exemple deux hypergroupes normaux H_2 et H_1 (ou deux groupes), H_1 étant un sous-hypergroupe de H_2. Si nous associons un élément à la catégorie qui le contient, nous obtenons une représentation de H_2 sur $\frac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{H}_1}$ qui vérifie toutes les propriétés de la semi-isomorphie. Donc :

THÉORÈME 14. — *Si* H_1 *est sous-hypergroupe de* H_2. $\mathrm{H}_2 \cong \frac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{H}_1}$ (*Principe d'homomorphie généralisé*, première partie).

Dans le cas où H_2 est un groupe et H_1 un sous-groupe non invariant nous obtenons bien ainsi une semi-isomorphie d'un groupe sur un hypergroupe.

Dans une représentation isomorphe de H sur $\overline{H}$ un sous-hypergroupe de H est représenté sur un sous-hypergroupe de $\overline{H}$. Dans une représentation homomorphe, il n'en est pas nécessairement ainsi. Soit H′ un sous-hypergroupe de H, les images des éléments de H′ forment un sous-système de H. Soit deux éléments de ce sous-système : l'une des déterminations au moins de leur produit est image d'un élément de H′, mais il n'en est pas nécessairement ainsi, même en cas de semi-isomorphie des autres déterminations du produit.

Dans le cas particulier où il s'agit de la semi-isomorphie $H_2 \cong \frac{H_2}{H_1}$, tous les éléments qui ont un même associé sont de la forme H_1TH_1.

Soit un deuxième sous-hypergroupe H'_1, et A et B deux éléments de H'_1. Leurs associés sont les catégories H_1AH_1 et H_1BH_1 dont le produit est le système de catégories $H_1AH_1BH_1$ comprenant en particulier H_1ABH_1. Nous voulons que chaque catégorie du système comprenne au moins un élément de la forme T_1CT_2 où T_1 et T_2 sont de H_1 et C de H'_1. Donc tout élément de la forme $T_3AT_4BT_5$ étant de la forme T_1CT_2, il faut et suffit que tout élément AT_4B soit de la forme T_1CT_2, c'est-à-dire que $H'_1H_1H'_1$ soit contenu dans $H_1H'_1H_1$.

THÉORÈME 15. — *Pour que la semi-isomorphie* $H_2 \cong \frac{H_2}{H_1}$ *donne une semi-isomorphie du sous-hypergroupe* H'_1 *de* H_2 *sur un sous-hypergroupe* $\overline{H}'_1$ *de* $\frac{H_2}{H_1}$ *il faut et suffit que l'on ait*

$$H'_1H_1H'_1 \subset H_1H'_1H_1$$

(condition de comparabilité).

Cette condition est en particulier réalisée : lorsque H_1 est sous-hypergroupe de H'_1 (ou *vice-versa*); lorsque H_1 est sous-groupe invariant du groupe H, ou lorsque H'_1 est sous-groupe invariant.

Elle peut encore s'écrire : le produit libre dans H_2, $H'_1 \circ H_1$, ensemble de tous les éléments du groupe H_2 de la forme $T_1A_1T_2A_2T_3A_3\ldots$, où les T et les A appartiennent respectivement à H_1 et H'_1, qui est un sous-hypergroupe de H_2, le plus petit contenant à la fois H'_1 et H_1, est compris dans le produit simple $H_1 H'_1 H_1$; tout élément de $H_1 H'_1 H_1$, appartient d'ailleurs au produit libre. D'où l'autre forme de la condition de comparabilité

$$H'_1 \circ H_1 = H_1 H'_1 H_1.$$

Dans la semi-isomorphie $H_2 \cong \frac{H_2}{H_1}$, l'unité de $\frac{H_2}{H_1}$ est l'image des seuls éléments de H_2 qui appartiennent à H_1. Soit maintenant une homomorphie de H sur $\overline{H}$. Les éléments qui sont représentés sur l'unité de $\overline{H}$ constituent un hypergroupe H'; et les éléments T et H'TH' ont pour image le même élément de H. Nous définissons donc ainsi une homomorphie de $\frac{H}{H'}$ sur $\overline{H}$; si en outre la première homomorphie était une semi-isomorphie, la seconde est une quasi-isomorphie. D'où

Théorème 16. — *H' étant l'hypergroupe des éléments représentés sur l'unité de* $\overline{H}$, *on a*

$$H \sim \overline{H} \rightarrow \frac{H}{H'} \sim \overline{H}, \qquad H \cong \overline{H} \rightarrow \frac{H}{H'} \# \overline{H}.$$

(*Principe d'homomorphie généralisé*, deuxième partie).

Soient maintenant deux hypergroupes normaux H_1 et H_2, sous-hypergroupes d'un même hypergroupe H, et formons les deux hypergroupes quotients

$$Q = \frac{H_1}{(H_1 \cap H_2)} \qquad \text{et} \qquad Q^* = \frac{(H_1 \circ H_2)}{H_2}.$$

Si un élément d'une catégorie de Q appartient à une catégorie de Q^*, celle-ci contient tous les éléments de celle-là. En effet $H_1 \cap H_2$ est sous-hypergroupe de H_2. Nous obtenons ainsi une représentation de Q dans Q^*, le produit est visiblement conservé, donc il y a homomorphie.

Pour qu'il y ait quasi-isomorphie; il faut : 1° que les unités se correspondent biunivoquement : or la catégorie unité de Q^* est H_2; dans H_1 elle détermine seulement $H_1 \cap H_2$ donc rien que l'unité de Q. Il faut ensuite : 2° que toute catégorie de Q contienne un élément de H_1. Donc pour tout T de $H_1 \circ H_2$ on a un T_2, un T'_2 de H_2 et un T_1 de H_1 tels que $T_2 T T'_2 \supset T_1$. Dans le cas où nous avons affaire non à des hypergroupes mais à des groupes, cette condition est équivalente à la condition de comparabilité. Et nous énoncerons :

THÉORÈME 17. — H_1 *et* H_2 *étant deux sous-hypergroupes normaux d'un hypergroupe normal* H, *on a*

$$\frac{H_1}{(H_1 \cap H_2)} \sim \frac{(H_1 \circ H_2)}{H_2}$$

avec correspondance des unités.

Si H, H_1 *et* H_2 *sont des groupes et si*

$$H_1 \circ H_2 = H_2 H_1 H_2,$$

on a

$$\frac{H_1}{(H_1 \cap H_2)} \neq \frac{(H_1 \circ H_2.}{H_2}.$$

Résultat qui constitue le principe de réduction généralisé.

Enfin énoncer qu'il y a isomorphie revient à affirmer la relation suivante :

$$T \subset H_1(H_2 T H_2) \cap H_1 = (H_2 \cap H_1)\, T\, (H_2 \cap H_1),$$

qui semble plus stricte encore que la condition de comparabilité.

REMARQUE FINALE. — Dans tout le cours de ce Chapitre nous avons défini l'hypergroupe quotient au moyen de catégories (d'abord systèmes de points conjugués entre eux, puis catégories d'éléments du groupe). Il importe de remarquer que les classes au sens usuel du mot constituent aussi un hypergroupe. Car le produit du système TG par $T_1 G$ c'est

$$TGT_1G = (TGT_1)G.$$

En remarquant que chaque classe appartient à une catégorie, on trouve une représentation quasi isomorphe de l'hypergroupe des classes sur l'hypergroupe quotient; bien plus les images des déterminations d'un produit contiennent toutes les déterminations du produit des images. Et cependant si le sous-groupe n'est pas invariant les deux hypergroupes sont distincts : on voit donc la différence entre les groupes et les hypergroupes, puisque pour les premiers la correspondance biunivoque des éléments un (hypothèse plus faible que la quasi-isomorphie) suffit à caractériser les isomorphies parmi les homomorphies; et par cela même se trouve justifiée l'introduction des divers degrés d'homomorphie que nous avons précédemment introduits.

CHAPITRE II.

L'HYPERGROUPE DES AUTOPROJECTIONS D'UN RECOUVREMENT RAMIFIÉ.

4. **Définitions générales.** — Soit K un complexe simplicial à n dimensions. Nous désignerons par la notation S_i^k un simplexe à k dimensions de la décomposition simpliciale; toutefois, à cause du rôle particulièrement important qu'ils joueront, nous désignerons par S_i les simplexes d'ordre n ainsi que par P_i les simplexes d'ordre O (sommets du système).

Nous rappelons que deux simplexes S_i^k, $S_j^{k^*}$ (avec $k^* < k$) sont *incidents* lorsque tous les sommets de $S_j^{k^*}$ appartiennent à S_i^k.

Plus généralement nous dirons que deux simplexes sont *voisins d'ordre u* lorsqu'ils ont u sommets communs. L'ordre du voisinage est égal ou inférieur au nombre de dimensions augmenté de 1 du simplexe qui a le plus petit nombre de dimensions.

L'incidence est un cas particulier du voisinage.

Nous appellerons *articulation* de deux simplexes voisins le simplexe de la plus grande dimension qui soit incident à tous deux (c'est un simplexe S_j^{u-1}).

Le cas particulier du voisinage de deux simplexes de dimension n, S_i et S_j est spécialement important. Nous introduirons la définition suivante :

Deux simplexes de même nombre de dimensions sont *accolés* lorsqu'ils sont voisins d'ordre k, c'est-à-dire ont tous leurs sommets communs sauf 1.

Nous nous proposons d'étudier les recouvrements du complexe K en nous bornant au cas particulier où K vérifie les conditions suivantes :

1° Condition de *pureté* : tout simplexe d'ordre $k (k < n)$ est incident à au moins un simplexe d'ordre $k+1$.

2° Condition de *connexion* : étant donnés deux simplexes quelconques S_i et S_j à n dimensions, il existe au moins une suite de simplexes à n dimensions joignant S_i à S_j, telle que chaque simplexe intermédiaire soit accolé au précédent et au suivant. Une telle suite s'appellera un *chemin simplicial de* S_i à S_j.

3° Condition de *non repliement* : un simplexe d'ordre $n-1$ est incident à au plus deux simplexes d'ordre n.

En outre nous aurons parfois à utiliser la condition de *non étranglement* qui s'énonce ainsi : étant donnés deux simplexes S_i et S_j voisins d'ordre $u\,(u < n)$ ayant pour articulation le simplexe S_{ij}^{u-1}, il existe au moins un chemin simplicial allant de S_i à S_j, et tel que deux simplexes S_k et S_l quelconques du chemin soient voisins d'ordre u au moins, leur articulation S_{kl}^{u+h} étant incidente à S_{ij}^{u-1}.

Nous dirons qu'un complexe $\tilde{K}$ est un *complexe de recouvrement* du complexe K, ou que K est un *support* de $\tilde{K}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° $\tilde{K}$ est pur, connexe et non replié.

2° A chaque simplexe $\tilde{S}_j^r$ de $\tilde{K}$ correspond un complexe S_j^r au même nombre de dimensions que nous appellerons trace de $\tilde{S}_j^r$.

3° Deux simplexes incidents de $\tilde{K}$ ont pour trace deux simplexes incidents de K.

4° Si S_i et S_j sont deux simplexes accolés de K, et s'il existe un $\tilde{S}_i$ ayant S_i pour trace, il existe un $\tilde{S}_j$ ayant S_j pour trace et tel que $\tilde{S}_i$ et $\tilde{S}_j$ soient accolés.

L'abandon de la condition 4° conduit à l'introduction des complexes de recouvrement à frontière relative, qui s'introduisent notamment dans les questions d'approximation de complexes de recouvrement à une infinité de feuillets.

5. **Propriétés fondamentales.** — Soit S_0 un simplexe à n dimensions de K et ${}_1\tilde{S}_0$, ${}_2\tilde{S}_0$, ... les simplexes ayant S_0 pour trace. Déterminons un chemin simplicial Γ joignant S_0 à S_1 (S_1 étant un simplexe quelconque de K). Choisissons un ${}_i\tilde{S}_0$ déterminé. *Il existe sur* $\tilde{K}$ *un chemin simplicial* $\tilde{\Gamma}$ *unique, tel que chacun de ses simplexes ait pour trace un simplexe de* Γ, *et partant de* ${}_i\tilde{S}_0$.

En effet, nous connaissons le premier simplexe du chemin $\tilde{\Gamma}$ à déterminer. D'après 4°, connaissant le $n^{\text{ième}}$, on peut trouver un $(n+1)^{\text{ième}}$ et d'après la condition de non repliement ce $(n+1)^{\text{ième}}$ est déterminé d'une manière unique.

D'où résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème 18. — *A chaque simplexe* S_i *à n dimensions de* K *correspond le même nombre (éventuellement infini) de simplexes* $\tilde{S}_i$ *de* $\tilde{K}$ *ayant* S_i *pour trace.*

Soit maintenant ${}_1\tilde{S}_0$ un simplexe fixe de $\tilde{K}$ et ${}_i\tilde{S}_0$ un quelconque des simplexes ayant même trace. A tout chemin simplicial $\tilde{\Gamma}_1$ partant de ${}_1S_0$ correspond un chemin simplicial bien déterminé $\tilde{\Gamma}_i$ partant de ${}_iS_0$. Nous dirons désormais que $\tilde{\Gamma}_i$ est une *projection interne* de Γ_1, et nous appellerons *trace* le chemin Γ de K correspondant.

Les chemins fermés Γ de K issus de S_0 forment un groupe, le produit $\Gamma'\Gamma$ étant défini comme d'habitude par l'exécution du chemin Γ, puis du chemin Γ'.

Nous appellerons *lacet* un chemin fermé formé de simplexes tous différents, sauf le premier et le dernier, tel que deux quelconques des simplexes du chemin soient voisins d'ordre $n-1$. Soit $S_0 S_1 \ldots S_k S_{k+1} S_{k+2} S_{k+3} \ldots$ un lacet. Soient $P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, \ldots, P_n^{(k)}$ les sommets de S_k, le simplexe accolé S_{k+1} a pour sommets, avec une numérotation convenable les points $P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, \ldots, P_{n-1}^{(k)} P_{n+1}^{(k)}$; le simplexe S_{k+2} contient n sommets de S_{k+1}, mais ne peut pas contenir les n points $P_0^{(k)}, \ldots, P_{n-1}^{(k)}$ à cause de la condition de non repliement, donc il en contient $n-1$ et en outre il contient $P_{n+1}^{(k)}$. Nous avons donc les deux possibilités suivantes :

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{l} (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_{n-1}^{(k)}\, P_n^{(k)}, \\ (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_{n-1}^{(k)}\, P_{n+1}^{(k)}, \\ (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_{n-1}^{(k)}\, P_{n+2}^{(k)}; \end{array}\right.$$

$$(b) \qquad \left\{\begin{array}{l} (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_{n-1}^{(k)}\, P_n^{(k)}, \\ (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_{n-1}^{(k)}\, P_{n+1}^{(k)}, \\ (P_0^{(k)} P_1^{(k)} \ldots P_{n-2}^{(k)})\, P_n^{(k)} P_{n+1}^{(k)}. \end{array}\right.$$

Cherchons maintenant quelles conditions doit réaliser S_{k+3} dans le cas a et dans le cas b.

Dans le cas (a), S_{k+3} contient au moins n sommets de S_{k+2}, donc l'une des combinaisons suivantes : $(P_0^{(k)}P_1^{(k)}\ldots P_{n-3}^{(k)})P_{n+1}^{(k)}P_{n+2}^{(k)}$, ou $(P_0^{(k)}P_1^{(k)}\ldots P_{n-2}^{(k)})P_{n+1}^{(k)}$, ou $(P_0^{(k)}P_1^{(k)}\ldots P_{n-2}^{(k)})P_{n+2}^{(k)})$. Il contient au moins $n-1$ sommets de S_{k+1} ; cette condition est réalisée pour les deux dernières, mais impose pour la première combinaison l'emprunt de $P_{n-1}^{(k)}$ ou P_n^k. Enfin la deuxième combinaison est interdite par la condition de non repliement. Nous avons donc, comme types possibles de prolongement du chemin a :

$$(a_1)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n+1}P_{n+2}, & P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n+1}P_{n+2}\,; \end{cases}$$

$$(a_2)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-3}P_{n-2}P_{n+1}P_{n+2}, & P_0P_1\ldots P_n\quad P_{n+1}P_{n+2}\,; \end{cases}$$

$$(a_3)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-2}P_n\quad P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n+1}P_{n+2}, & P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n+2}P_{n-1}\,; \end{cases}$$

$$(a_4)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-2}P_n\quad P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n+1}P_{n+2}, & P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n+2}P_{n+3}. \end{cases}$$

Cherchons maintenant à ajouter un quatrième simplexe au chemin b. Devant être accolé au simplexe S_{k+2}, S_{k+3} contient une face de l'un des types suivants : $(P_0P_1\ldots P_{n-3})P_nP_{n+1}$, $P_0P_1\ldots$, $P_{n-2}P_n$, $P_0P_1, \ldots, P_{n-2}P_{n+1}$. Les deux derniers de ces types sont exclus par la condition de non repliement. La condition de voisinage avec S_{k+1} est réalisée par le premier; quant à la condition de voisinage avec S_k, elle est aussi réalisée automatiquement. Nous pouvons alors compléter le simplexe, soit par P_{n-1}, soit par un nouveau point P_{n+2}, d'où les deux types :

$$(b_1)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-2}\quad P_{n-1}P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-2}P_n\quad P_{n+1}, & P_0P_1\ldots P_{n-3}P_nP_{n+1}P_{n+2}\,; \end{cases}$$

$$(b_2)\quad \begin{cases} P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n-1}P_n, & P_0P_1\ldots P_{n-2}\quad P_{n-1}P_{n+1}, \\ P_0P_1\ldots P_{n-2}P_n\quad P_{n+1}, & P_0P_1\ldots P_{n-3}P_nP_{n+1}P_{n-1}. \end{cases}$$

Parmi ces diverses combinaisons les types b, a_3, b_2 constituent des lacets fermés à 3, 4 et 4 simplexes respectivement. *Il n'est pas possible de représenter topologiquement le lacet a_3 sur le lacet b_2 avec correspondance des simplexes, les quatre simplexes ayant en commun $n-1$ sommets dans a_3 et $n-2$ sommets dans b_2.*

Nous appellerons *lacet pur* un lacet dont tous les simplexes S_i ont en commun un même simplexe à $n-2$ dimensions. A cause de la condition de non étranglement, tout simplexe à $n-2$ dimensions qui n'appartient pas à la frontière du complexe K définit un lacet pur ou plus exactement un groupe abélien cyclique d'ordre nul de lacets (dont la signification intuitive serait le groupe des rotations autour de ce simplexe).

L'intérêt de la notion de lacet réside dans la définition combinatoire du groupe fondamental du complexe K et dans sa combinaison avec le complexe $\tilde{K}$. Nous dirons que deux chemins simpliciaux se déduisent l'un de l'autre par une *déformation élémentaire*, si les deux chemins

$$C: S_1 S_2 \ldots S_n, \qquad C': S'_1 \ldots S'_n$$

ont entre eux les relations suivantes :

1° Ils ont même simplexe initial et même simplexe final ;

2° Les deux chemins comportent un même nombre de sections se correspondant respectivement

$$\begin{array}{lllll} S_1 \ldots S_i, & S_i \ldots S_j, & S_j \ldots S_k, & S_k \ldots S_e, & \ldots, \\ S'_1 \ldots S'_{i'}, & S'_{i'} \ldots S'_{j'}, & S'_{j'} \ldots S'_{k'}, & S'_{k'} \ldots S'_{e'}, & \ldots, \end{array}$$

telles que : (a) S_i et $S'_{i'}$, S_j et $S'_{j'}$, S_k et $S'_{k'}$ soient ou identiques, ou accolés ; (b) si deux sections correspondantes ne sont pas identiques, les chemins définis par $S_j \ldots S_k S'_{k'} \ldots S'_{j'} S_j, \ldots$ soient des lacets purs (si S_k est identique à $S'_{k'}$ ou S_j à $S'_{j'}$ on n'écrit qu'une seule fois le simplexe correspondant).

Il est facile de démontrer, et nous ne nous étendrons pas sur ce résultat, que :

1° A chaque chemin topologique peut être associé par une déformation homotope un chemin topologique n'ayant que des points isolés sur lui-même communs avec les simplexes de dimension $< n$ de K.

2° Un chemin topologique peut toujours par une déformation homotope ne plus contenir de points des simplexes de dimension $< n-1$ (nous dirons qu'il est alors devenu normal).

3° A chaque chemin normal nous pouvons associer la suite des simplexes S_i que l'on rencontre en parcourant le chemin normal : cette suite est un chemin simplicial.

4° *Deux chemins normaux associés au même chemin simplicial sont homotopes entre eux;* car le point de passage d'un simplexe au suivant se trouvant dans la même face, on peut d'abord amener par homotopie ces points de passage les uns sur les autres; ensuite à l'intérieur d'un même simplexe deux segments de chemin qui joignent les deux mêmes points sont homotopes entre eux.

5° Considérons deux chemins normaux homotopes quelconques. Nous pouvons toujours faire la déformation de manière à ne pas passer par les points des simplexes d'ordre $< n-2$, et en outre de manière à ne couper à la fois qu'un seul simplexe d'ordre $n-2$.

Ceci revient à exprimer que les chemins simpliciaux associés à nos deux chemins normaux se déduisent l'un de l'autre par des déformations élémentaires au sens plus haut introduit.

Comme la réciproque est plus évidente encore, nous obtenons finalement le résultat suivant, en groupant en une même classe les chemins simpliciaux qui se déduisent l'un de l'autre par une suite de déformations élémentaires :

Théorème 19. — *Le groupe fondamental du complexe* K *n'est autre que le groupe des classes de chemins simpliciaux fermés contenant un simplexe* S_0 *donné.*

6. **Relations entre les groupes fondamentaux $\tilde{K}$ et K.** — Étant données les conditions du recouvrement, nous avons vu que, à tout chemin fermé de $\tilde{K}$, correspond un chemin fermé de K. De même à une déformation élémentaire dans $\tilde{K}$ correspond une déformation élémentaire dans K.

Mais réciproquement soit un chemin fermé dans K, il ne lui correspond pas nécessairement un chemin fermé dans $\tilde{K}$. Prenons alors deux chemins fermés $\tilde{C}$ et C de $\tilde{K}$ et K respectivement, qui se correspondent. Faisons subir à C les diverses séries de déformations élémentaires dans K. Certaines de ces séries pourront se traduire dans $\tilde{K}$, et $\tilde{C}$ restera un chemin fermé. Mais il y en aura d'autres qui ne pourront pas se traduire dans $\tilde{K}$. De sorte que si à deux chemins homotopes dans $\tilde{K}$ correspondent deux chemins homotopes dans K, le phénomène inverse peut se produire.

Appelant déformation tolérée une déformation élémentaire de K qui se traduit par une déformation élémentaire dans tous les feuillets de $\tilde{K}$, nous arrivons au résultat suivant :

En considérant comme équivalents deux chemins se déduisant l'un de l'autre dans K par une déformation tolérée, nous définissons dans les chemins fermés de K passant par un simplexe donné des classes de chemins formant un groupe, que nous appellerons le *groupe auxiliaire* du recouvrement K. Et par suite : *le groupe fondamental de* K *est obtenu par le groupement en classes des éléments du groupe auxiliaire du recouvrement* $\tilde{K}$. On a ainsi une homomorphie du groupe auxiliaire sur le groupe fondamental.

Le groupe auxiliaire comprend un élément unité, c'est la classe de tous les chemins se réduisant à O par déformation tolérée.

Nous appellerons éléments ramifiants les chemins homotopes de O et n'appartenant pas à la classe unité du groupe auxiliaire. Il est d'abord clair que les éléments ramifiants, si on leur adjoint la classe unité, forment un groupe. Nous constatons aussi que dans le groupe auxiliaire le sous-groupe des éléments ramifiants est invariant. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 20. — *Le groupe fondamental de* K *est le groupe facteur du groupe auxiliaire du recouvrement par rapport au groupe des éléments ramifiants.*

Nous pouvons maintenant chercher à obtenir une représentation du groupe auxiliaire comme groupe fondamental d'un complexe K_1 convenable. Nous y parviendrons par l'opération classique de *perforation.* Nous avons vu que, à chaque déformation élémentaire correspondait un cycle de simplexes S_i ayant tous en commun un simplexe S^{n-2} de dimension $n-2$.

Pour donner une définition précise de la perforation le long d'un système de simplexes S^{n-2} on peut par exemple opérer de la manière suivante : faisons la représentation de chaque simplexe du système sur le simplexe analytique correspondant, en s'astreignant à ce que les représentations des simplexes voisins soient cohérentes, c'est-à-dire que les coordonnées barycentriques non nulles de l'image d'un point de leur simplexe d'articulation soient les mêmes dans les deux représentations topologiques. Dans ces conditions un point du simplexe S^{n-2} a une image dont deux coordonnées sont nulles. Nous enlèverons du simplexe S^{n-2} les points dont ces deux coordonnées sont inférieures à $\varepsilon < 1$ et, dans ces conditions, on constatera facilement que : dans le complexe K_1 obtenu par la perforation ε de K toute déformation homotope est une déformation permise du groupe auxiliaire et réciproquement. De sorte que nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 21. — *Le groupe auxiliaire de* K *n'est autre que le groupe fondamental d'une perforation* K_1 *de* K.

Il est alors clair que nous pouvons traiter le complexe de recouvrement de K comme un complexe relativement non ramifié sur K_1. Mais ici une difficulté se pose : est-ce qu'il y aura pour tout type de perforation une possibilité de construire une surface effectivement ramifiée par rapport à l'élément donné. En d'autres termes et pour donner un énoncé précis au problème on est conduit à lui faire prendre l'aspect suivant :

Soit un complexe K donné *a priori* possédant un certain groupe fondamental, et une perforation K_1 ; quels sont les simplexes de la perforation K_1 qui sont essentiels, c'est-à-dire que l'on ne pourrait supprimer sans modifier le groupe fondamental de K_1.

La réponse est facile et nous ne nous étendrons pas sur la démonstration : tout simplexe S^{n-2} qui possède un simplexe partiel $S^{n-2-k}(k > 0)$ libre (n'appartenant pas à un autre simplexe S^{n-2} de la perforation, mais appartenant à un autre simplexe S^{n-2}_β du système K) peut-être supprimé sans modifier le groupe fondamental de K_1. On montre en effet par une simple énumération que si S^{n-2-k} est libre et si, seul de tous ses incidents d'ordre $n-2$, S^{n-2}_α est perforé, une suite de déformations permises amène le lacet pur S^{n-2}_α sur S^{n-2}_β qui lui est réductible à O par une déformation permise. D'où la conclusion :

Théorème 22. — *La chaîne constituée par les simplexes de ramification* *peut toujours être considérée comme une chaîne relativement sans frontière.*

(Nous entendons par chaîne relativement sans frontière une chaîne dont la chaîne frontière fait partie de la frontière de K.)

Réciproquement d'ailleurs, si nous considérons un système relativement sans frontière de perforation il existe au moins un lacet pur qui ne peut être réduit à zéro sans traverser le système et, par conséquent, le groupe fondamental de K_1 se trouve différent du groupe fondamental de K.

Il importe d'ailleurs de noter que le fait que la perforation K_1 donne lieu à un groupe différent de celui de K ne signifie pas que ces deux groupes ne peuvent pas être représentés l'un sur l'autre par une isomorphie. Il signifie simplement que l'homomorphie que nous avons mise plus haut en évidence n'est pas une isomorphie. Enfin il faut remarquer aussi que, sauf dans le cas de deux dimensions (surfaces et recouvrements riemanniens) le groupe des éléments ramifiants n'est pas nécessairement engendré par des éléments générateurs libres (par exemple si nous perforons l'intérieur d'une sphère dans l'espace à trois dimensions par un cercle intérieur et plusieurs cordes de ce cercle ne se coupant pas). Dans le cas des recouvrements riemanniens les éléments de ramification étant des points isolés, le groupe des éléments ramifiants est toujours représentable au moyen d'éléments générateurs libres.

L'étude du groupe de ramification est donc ramenée à l'étude des nœuds, tresses et structures topologiques analogues. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point, mais avant de passer au problème des autoprojections des complexes de recouvrement, nous allons indiquer un moyen au moins théorique de construire tous les recouvrements d'un complexe donné.

7. **La définition de $\tilde{K}$ par la matrice des contacts.** — On sait que l'on peut se donner le complexe K par son schéma de simplexes, c'est-à-dire par la donnée de tous ses simplexes d'ordre O (sommets) et des différentes manières d'associer les sommets en simplexes. On peut aussi pour déterminer K se donner les matrices d'incidences.

Le problème que nous nous poserons actuellement est le suivant : étant donné un complexe K, déterminer tous les complexes K recouvrements ramifiés ou non ramifiés de K. On sait que pour les complexes non ramifiés, le problème est résolu d'une manière au moins théorique par la recherche du groupe fondamental et de ses sous-groupes. On pourrait évidemment s'en tenir là et donner à notre problème la solution suivante : énumérons toutes les chaînes fermées de simplexes S^{n-2}, d'où nous déduirons toutes les perforations K_1, puis tous les recouvrements possibles de K_1.

Nous pouvons aussi procéder de la manière suivante : adjoignons aux matrices des incidences une matrice supplémentaire, la *matrice des contacts*, construite de la manière suivante : à chaque simplexe d'ordre n de K correspondra une ligne et une colonne. Au croisement d'une ligne et d'une colonne de numéros différents nous inscrirons 1 ou 0, suivant que les deux simplexes envisagés seront accolés ou non (ce que nous pouvons déduire immédiatement de la première matrice d'incidences : on sait que les colonnes y sont les simplexes d'ordre n, les lignes des simplexes d'ordre $n-1$, et qu'on inscrit 0, 1 ou -1 suivant qu'il y a non incidence, incidence à orientation concordante, incidence à orientation non concordante : il y a accolement lorsque sur une même ligne se trouvent dans les deux colonnes considérées deux éléments de module 1).

Nous pouvons aussi considérer la *matrice des contacts orientés :* chaque simplexe étant pourvu d'une orientation il y aura accolement avec orientation concordante ou discordante suivant que les orientations induites dans le simplexe d'articulation seront discordantes ou concordantes, ce que nous traduirons par $+1$ ou -1 respectivement.

Soient alors S_i et S_j deux simplexes de dimension n, et $\varepsilon^n_{\mu i}$, $\varepsilon^n_{\mu j}$ respectivement les termes relatifs aux simplexes S^{n-1}_μ dans leur colonne de la matrice E^{n-1} des incidences des simplexes de dimension n sur les simplexes de dimensions $n-1$. On constate alors immédiatement que le produit scalaire $\sum_\mu \varepsilon^n_{\mu i}\varepsilon^n_{\mu j}$ est égal à 0, à -1 ou à $+1$ suivant que S_i et S_j sont non accolés, accolés avec concordance ou accolés avec discordance des orientations. Ceci n'est d'ailleurs valable que si $i \neq j$. Dans le cas où $i=j$ cette expression est égale à $n+1$. Soit alors $\bar{E}^{n-1*}$

la matrice transposée de E^{n-1}, et soit C^{n-1} la matrice $C^{n-1} = E^{n-1*}E^{n-1}$.

Si nous remarquons qu'un simplexe S_i ayant $n+1$ faces peut être considéré comme $n+1$ fois accolé à lui-même, nous sommes conduits à la définition suivante; la matrice des contacts orientés sera un tableau carré symétrique, où le terme γ_{ij} sera égal : si $i=j$ à $n+1$, si $i \neq j$ à 0, -1 ou $+1$ suivant que les simplexes $S_i S_j$ sont non accolés, accolés avec concordance, ou accolés avec discordance d'orientations, et au résultat suivant :

Théorème 23. — *La matrice des contacts orientés est égale au produit de la matrice des incidences d'ordre n par la matrice transposée.*

Si nous cherchons à construire la matrice des contacts orientés de $\tilde{K}$ nous constaterons un certain nombre de relations remarquables avec la matrice des contacts orientés de K. Nous supposerons d'abord (ce qui est naturel) que chaque simplexe $\tilde{S}_i$ de K a même orientation que sa trace. Nous constaterons alors successivement que :

1° Le damier de la matrice $\tilde{C}^{n-1}$ de $\tilde{K}$ s'obtient à partir de C^{n-1} par division de chaque ligne et de chaque colonne en un même nombre, pouvant être infini, de lignes et de colonnes, égal au nombre de feuillets du recouvrement considéré (conséquence des conditions 2 et 4 du recouvrement, d'après le théorème 18).

Nous appellerons *compartiment* une case de C^{n-1}, réservant le nom de case au tableau $\tilde{C}^{n-1}$.

2° Si une case contient -1 ou $+1$, le compartiment qui la contient contient aussi -1 ou $+1$ (conséquence de la troisième condition de recouvrement).

3° Si un compartiment contenait 0, toutes les cases de ce compartiment vont contenir aussi 0 (autre conséquence de la troisième condition).

4° Dans un compartiment qui contenait -1 ou $+1$, il y a dans chaque ligne et dans chaque colonne un élément et un seul qui est égal à -1 ou $+1$ respectivement (conséquence de la quatrième condition).

5° Les cases des compartiments de la diagonale principale contiennent 0 ou $n+1$ suivant qu'elles sont ou non sur la diagonale principale de leur compartiment.

Supposons maintenant que nous ayons construit un tel tableau à partir de la matrice des contacts orientés de K. *Est-ce que la réalisation des conditions 2° à 5° est suffisante pour qu'il existe un recouvrement* $\tilde{K}$ *de* K *répondant à ce tableau, et est-ce que ce recouvrement est déterminé d'une manière unique ?*

Il nous faut pouvoir construire le schéma de structure de K. Partant d'un simplexe $\tilde{S}_i$ de K nous pouvons d'abord construire la première matrice des incidences de $\tilde{K}$ en remarquant que, à chaque simplexe S^{n-1} de K correspondent des simplexes superposés $\tilde{S}^{n-1}$ de $\tilde{K}$ en nombre égal au nombre de feuillets. Le tableau des incidences de K par comparaison avec le tableau des contacts de $\tilde{K}$ nous permet alors de construire un tableau des incidences de $\tilde{K}$, qui au surplus vérifie évidemment la relation fondamentale entre tableau des incidences et tableau des contacts orientés.

Considérons maintenant chacun des simplexes $n-2$. Pour déterminer s'il est ou non de ramification nous n'aurons qu'à lire avec l'aide du tableau des contacts et des incidences quelles sont les chaînes qui correspondent au lacet pur dont il est l'axe dans K. Nous aurons alors la possibilité d'obtenir un tableau d'incidences d'ordre $n-1$ sur l'ordre $n-2$, en considérant que tous les simplexes qui interviennent dans une chaîne relative à un même lacet pur sont incidentes à un même simplexe d'ordre $n-2$ de $\tilde{K}$. Nous pouvons alors attribuer à ce simplexe une multiplicité égale au nombre de feuillets qu'il permute (ce qui conduit à une notion analogue à celle de ligne double d'une surface algébrique).

Passons aux incidences des simplexes d'ordre $n-3$, considérons pour un tel simplexe S_i^{n-3} tous les simplexes d'ordre $n-2$ qui lui sont incidents; partons d'un tel $S_{i,j}^{n-2}$ déterminé, et soit $S_{i,j,k}^{n-2}$ l'un des simplexes d'ordre $n-2$ qui sont dans $\tilde{K}$ projetés sur $S_{i,j}^{n-2}$. Il faut admettre que un S_{ijk}^{n-3} se projette sur $\tilde{S}_i^{n-3}$. Tout $\tilde{S}^{n-1}$ incident à ce $\tilde{S}_{ijk}^{n-2}$ doit être incident à ce $\tilde{S}_{i,j,k}^{n-3}$, puis tout $\tilde{S}^n$ incident à un tel $\tilde{S}^{n-1}$, puis dans un tel $\tilde{S}^n$ les $\tilde{S}^{n-1}$ et $\tilde{S}^{n-2}$ qui se projettent sur des S^{n-1} et S^{n-2}

incidents au S_i^{n-3} seront incidents à ce S_{ijk}. Et ainsi de suite, ce qui permettra de déterminer parmi les $\tilde{S}^{n-2}$ qui se projettent sur un S^{n-2} incident à S_i^{n-3} tous ceux qui doivent être incidents à un même $\tilde{S}_{ij}^{n-3}$. D'où par répétition un nombre fini ou infini de fois de cette opération l'énumération des $\tilde{S}^{n-3}$ à attribuer au complexe à construire et la détermination du tableau des incidences des S^{n-2} sur les S^{n-3}.

Répétons maintenant l'opération, nous aboutirons à l'énumération de S^{n-4}, S^{n-5}, S^{n-6}, etc., jusqu'à des sommets. Il reste à savoir si l'énumération ainsi obtenue peut constituer le schéma d'un complexe à n dimensions. Par référence à la projection, il ne peut pas arriver qu'un $\tilde{S}^{n-k}$ ainsi énuméré soit incident à plus de $n-k+1$ sommets. Par contre peut-il arriver que deux simplexes énumérés comme différents aient des sommets identiques? Il faudrait d'abord qu'ils aient même projection sur le complexe de base. Or, supposons que deux $\tilde{S}^{n-k}$ superposés étant énumérés comme différents, ils soient cependant à considérer comme incidents à des $\tilde{S}^{n-k-1}$ tous identiques. On constate immédiatement que d'après la condition de non étranglement et la construction donnée à l'alinéa précédent, le phénomène s'étend de proche en proche; mais le même calcul montre alors que l'on peut aboutir à vérifier toutes les relations imposées en considérant les $\tilde{S}^{n-k-1}$ étudiés comme tous non identifiés.

Nous constatons que nous avons encore une condition à vérifier : est-ce que le complexe ainsi réalisé est connexe? Il est clair que les conditions que nous nous sommes imposées ne permettent pas de l'affirmer *a priori*, et que nous pouvons ainsi obtenir plusieurs recouvrements de K non connexes entre eux. Et la conclusion de cette étude sera alors :

Théorème 24. — *Étant donnés un complexe* K *et sa matrice des contacts orientés, une matrice qui s'en déduit par une subdivision du damier, puis par un remplissage vérifiant les propriétés* 2° *à* 5°, *page* 110, *détermine d'une manière biunivoque un complexe* $\tilde{K}$ *ou un système de recouvrements de* K.

Ce résultat est intéressant parce que les paramètres qui figurent dans la nouvelle matrice sont libres; et en outre parce que la matrice des contacts orientés ne suffit pas à elle seule à déterminer un complexe (*voir* par exemple l'étude faite de la notion de lacet, pages 102 et suiv.);de même la donnée d'un complexe de base est insuffisante. Mais à partir du moment où l'on connaît un complexe de base, la matrice des contacts orientés détermine le complexe de recouvrement.

8. **Les autoprojections de $\tilde{K}$.** — Considérons deux simplexes $\tilde{S}_i$, $\tilde{S}_j$ de $\tilde{K}$ ayant la même projection sur K, et soit l'ensemble des chemins fermés C_i partant de $\tilde{S}_i$ et y revenant. A chaque C_i correspond un chemin C_j partant de $\tilde{S}_j$ et aboutissant à un simplexe $\tilde{S}_k$ superposé à $\tilde{S}_j$, distinct de $\tilde{S}_i$, mais non nécessairement identique à $\tilde{S}_j$. Soit n le le nombre des $\tilde{S}_k$ distincts ainsi obtenus.

Si nous traduisons cette opération sur des chemins topologiques au lieu de la traduire sur des chemins simpliciaux, nous voyons qu'une telle opération définit une holomorphie de $\tilde{K}$ sur lui-même, à un $\tilde{S}_i$ correspondant n simplexes S_k. Cette transformation est d'ailleurs définie sur tout autre $\tilde{S}_i$ du complexe. En effet, soit $\tilde{S}_i^*$ un autre simplexe. Joignons $\tilde{S}_i\tilde{S}_i^*$ par un chemin arbitraire C^*, traçons à partir de $\tilde{S}_j$ un chemin se projetant sur C^*, les extrémités des chemins ainsi tracés conduisent à un système de simplexes superposés à $\tilde{S}_j^*$; ces simplexes peuvent être reliés deux à deux par un chemin dont la projection est un chemin fermé passant par $\tilde{S}_i^*$ et comme on obtient encore un chemin C^* en ajoutant avant un C^* un chemin fermé de $\tilde{S}_i$ ou après C^* un chemin fermé de $\tilde{S}_i^*$, on voit que l'on a ainsi un système déduit de $\tilde{S}_i^*$ comme le système initial l'était de $\tilde{S}_i$, et ne dépendant pas du simplexe pris dans ce système initial comme point de départ.

Nous dirons que la transformation ainsi définie constitue une *autoprojection* du complexe envisagé.

Nous allons maintenant chercher comment on pourrait envisager une inverse de l'autoprojection, ce qui semble le plus normal serait de dire que tout superposé de $\tilde{S}_i$, $\tilde{S}_j$ qui donne à partir de $\tilde{S}_j$ le même système de simplexes que $\tilde{S}_i$ est le résultat de cette transformation inverse. Mais cette définition est techniquement désavantageuse et il vaut mieux dire : l'autoprojection inverse, est celle qui à $\tilde{S}_i$ associe un système de simplexes pouvant être joints à $\tilde{S}_i$ par un chemin se projetant sur un contour fermé de $\tilde{S}_j$.

On peut d'ailleurs donner de l'autoprojection une définition plus symétrique, en remarquant que l'on peut se borner dans les définitions aux contours fermés de $\tilde{K}$ passant à la fois par $\tilde{S}_i$ et $\tilde{S}_j$. Nous aurons alors la définition suivante : est associé à S_j un simplexe $\tilde{S}_k$ tel que l'un des chemins $\tilde{S}_j\tilde{S}_k$ ait pour projection un chemin $\tilde{S}_i\tilde{S}_j\tilde{S}_i$, est associé à $\tilde{S}_i$ un simplexe $\tilde{S}_i^*$ tel qu'un chemin $\tilde{S}_i\tilde{S}_i^*$ ait pour projection un chemin $\tilde{S}_j\tilde{S}_i\tilde{S}_j$.

Enfin nous pouvons songer à la définition suivante, un peu plus compliquée en apparence : traçons l'un quelconque des contours allant de $\tilde{S}_j$ à $\tilde{S}_i$. Son correspondant partant de $\tilde{S}_i$ transporte $\tilde{S}_i$ en un simplexe $\tilde{S}_k$ tel que si on lui applique l'autoprojection initiale $\tilde{S}_i\tilde{S}_j$, $\tilde{S}_i$ soit parmi les autoprojetés de $\tilde{S}_k$. Cette opération inverse définie sur S_i peut être maintenant retransportée en $\tilde{S}_j$, il suffit de refaire un quelconque chemin $\tilde{S}_j\tilde{S}_i$ et de déplacer tous les $\tilde{S}_k$ par le chemin correspondant. On voit alors que cette fois-ci la définition coïncide exactement avec celle donnée plus haut.

Par extension de la définition à tous les simplexes nous voyons que l'on arrive à la forme suivante :

Définition. — *La donnée de deux simplexes superposés* $\tilde{S}_i$ *et* $\tilde{S}_j$ *définit sur le complexe deux opérations, autoprojection directe et autoprojection inverse, associant à un simplexe quelconque* $\tilde{S}_k$ *tout simplexe superposé* $\tilde{S}_k^*$, *tel que : dans l'opération directe un chemin* $\tilde{S}_j\tilde{S}_k^*$ *et un chemin* $\tilde{S}_i\tilde{S}_k$; *dans l'inverse un chemin* $\tilde{S}_i\tilde{S}_k^*$ *et un chemin* $\tilde{S}_j\tilde{S}_k$; *aient même projection.*

Un cas particulier important, le seul qui ait été étudié de près par les travaux classiques, est celui des automorphies par recouvrement (généralement désignées par les auteurs allemands sous le nom de Deckbewegungen). C'est le cas où l'autoprojection $\tilde{S}_i\tilde{S}_j$ est une opération à une seule détermination. On sait que si cela se produit pour toutes les autoprojections, le recouvrement est appelé régulier. La suite de cette étude, notamment en ce qui concerne les surfaces de Riemann nous montrera que ceci doit être considéré au contraire comme étant le cas le plus exceptionnel; le cas normal étant celui où tous les superposés de $\tilde{S}_i$ autre que lui-même sont obtenus.

Mais le résultat fondamental de cette étude est la constatation suivante : si l'on opère sur un point $\tilde{S}_i$ l'opération homologue de $\tilde{S}_{i_1}\tilde{S}_{k_1}$, puis sur les points obtenus l'opération $\tilde{S}_{j_2}\tilde{S}_{k_2}$, le système de points obtenus se répartit en un ensemble d'autoprojections de $\tilde{S}_i$; et l'opération ainsi obtenue pouvant servir à définir un hypergroupe, nous appellerons celui-ci *hypergroupe d'automorphie du recouvrement* $\tilde{K}$. Au surplus nous pouvons énoncer de suite.

THÉORÈME 24. — *L'hypergroupe d'automorphie de* $\tilde{K}$ *est isomorphe de l'hypergroupe d'automorphie de son groupe de monodromie.*

En effet nous avons effectué pour cette construction exactement la même construction qu'au Chapitre I, paragraphe 2, page 88, si nous faisons jouer aux $\tilde{S}_i$ superposés de l'un d'entre eux le rôle des éléments permutés par le groupe de monodromie, considéré en tant que groupe abstrait de permutations.

CHAPITRE III.

LA STRUCTURE DES FRACTIONS RATIONNELLES.

9. Problèmes généraux de structure. Méthode de l'hypergroupe d'automorphie. — Rappelons ici brièvement quelques résultats concernant l'équation $R(z_2) = R(z_1)$ où R est une fraction rationnelle (1). Si l'on excepte la solution évidente $z_2 = z_1$, on aboutit à une équation de la forme

$$o = \Pi(z_1, z_2) \equiv c_{0,0} + (z_1 + z_2)c_{1,0} + (z_1^2 + z_2^2)c_{2,0} + (z_1, z_2)c_{2,1} + (z_1^3 + z_2^3)c_{3,0} + (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1)c_{3,1} + \ldots.$$

(1) *Cf.* F. MARTY : *Recherches sur les groupes finis de fonctions algébriques* (*Societas Scientarium Fennicæ Commentationes Physico Mathematicæ*, t. VII, 1934).

les fonctions algébriques $z_2(z_1)$ solutions de cette équation constituent un groupe fini par rapport à la composition des fonctions au sens fonctionnel du mot. Plus exactement ce système est un hypergroupe normal H. Il peut en effet fort bien arriver qu'une fonction de fonction, lorsque les composantes sont multiformes, représente plusieurs fonctions distinctes ; ainsi, par exemple, si $f=\sqrt{z}$ et $g=\sqrt{z}$, $f(g)$ comprend $+z$ et $-z$. Mais on constate immédiatement le résultat suivant :

L'hypergroupe H *est isomorphe à l'hypergroupe d'automorphie de la fraction rationnelle de définition.*

Inversement on établit aussi le résultat suivant :

Tout hypergroupe fini de fonctions algébriques est l'hypergroupe d'automorphie d'une fonction rationnelle.

L'étude de la structure des groupes finis de fonctions algébriques et celle de la structure des fractions rationnelles est donc ramenée à l'étude de l'hypergroupe d'automorphie de leur surface de Riemann ; toutes les propriétés de ce dernier peuvent se lire sur le groupe de monodromie, et c'est en fin de compte par l'étude méthodique du groupe de monodromie que l'on peut classer les types de fractions rationnelles.

Rappelons le problème général de structure et indiquons sa liaison avec le groupe de monodromie

PROBLÈME. — *Une fraction rationnelle* $R(z)$ *peut-elle se mettre sous la forme* $R_1[R_2(\ldots R_n)]$, *où* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *sont des fractions rationnelles non homographiques ?*

Dans une précédente Note, j'avais démontré que à chaque décomposition correspondait une chaîne de sous-hypergroupes normaux de l'hypergroupe d'automorphie. La réponse à notre problème sera donc obtenue au moyen du critère suivant :

THÉORÈME 25. — *Les différentes décompositions d'une fraction rationnelle* $R(z)$ *sous la forme* $R_1[R_2(\ldots R_n)]$ *correspondent d'une manière biunivoque aux chaînes* $G \supset \ldots \supset G_i \supset \ldots \supset G_0$ *de groupes dont chacun est sous-groupe du précédent,* G *étant le groupe de monodromie de* R *et* G_0 *étant le sous-groupe qui laisse invariant un élément donné.*

Il y a lieu bien entendu de ne pas considérer comme distinctes, le cas échéant, deux chaînes conjuguées par un élément de G_0 ; et de ne pas oublier que nous ne supposons nullement (au contraire), que les sous-groupes soient des sous-groupes invariants.

On peut préciser quels sont les degrés des fractions rationnelles de la chaîne. En effet le degré d'une fraction rationnelle est égal au nombre total des déterminations de ses fonctions d'automorphie; d'autre part ce nombre de déterminations est égal au nombre de classes (à droite par exemple) que contient la catégorie correspondante. Donc le nombre total est le nombre de classes que contient le groupe de monodromie par rapport au sous-groupe de primitivité, nombre qui n'est pas altéré quand on les remplace tous deux par des groupes isomorphes. En appliquant ici cette remarque nous obtenons immédiatement les valeurs des degrés cherchés.

THÉORÈME 26. — *Le degré de la fraction rationnelle correspondant à l'échelon* $G_i \supset G_{i+1}$ *est égal à l'indice de* G_{i+1} *dans* G_i.

Nous allons maintenant nous proposer la détermination *a priori* de tous les types de structure possible des fractions rationnelles de degré n : il nous faut pour cela, parmi tous les groupes transitifs de permutations à n variables, déterminer ceux qui peuvent être le groupe de monodromie d'une fraction rationnelle. Soit k le nombre des points de ramification. A chacun d'eux correspond une permutation P_i de n lettres, qui est un des générateurs du groupe de monodromie. Si l'on a la relation $P_1 \ldots P_k = 1$ et si ces permutations sont génératrices d'un groupe transitif, il résulte des théories générales sur la structure des recouvrements que ce groupe est bien groupe de monodromie d'un recouvrement de plan.

Pour que ce recouvrement soit simplement connexe, il faut, d'après la formule de Hurwitz, que l'indice de ramification soit égal à $2n-2$. Si chaque permutation de base est écrite sous forme de cycles, on voit immédiatement que sa contribution à l'indice de ramification est égale au nombre de lettres qu'elle déplace, diminué du nombre de

(1) Ceci si nous ne tenons pas compte des cycles constitués par une lettre immobile. Si au contraire nous en tenons compte, le poids sera égal à n moins le nombre de cycles.

cycles qu'elle constitue (¹). Si donc nous appelons *poids d'une permutation* cette constante, nous voyons que :

Théorème 27. — *Si un système de permutations de n variables vérifie les propriétés suivantes :*

1° *Leur produit dans un certain ordre est l'identité;*

2° *Leur poids total est* $2n-2$;

3° *Elles sont génératrices d'un groupe transitif.*

Le groupe qu'elles engendrent est groupe de monodromie d'une surface de Riemann de fraction rationnelle.

L'énumération de ces systèmes peut avoir lieu par exemple de la manière suivante : sur un graphique traçons n points. A chaque cycle $(abcd\ldots k)$ sur le graphique associons une ligne brisée ouverte. La condition 2 se traduit par : il y a en tout $2n-2$ segments (superposés ou non). La condition 3 se traduit par : il y a toujours un chemin joignant deux sommets quelconques du réseau. Nous serons donc finalement ramenés à ceci :

a. Construire tous les réseaux topologiquement différents à $2n-2$ côtés et n sommets;

b. Choisir parmi eux ceux qui sont transitifs;

c. Décomposer chacun en lignes brisées composées de côtés tous distincts et ne se recoupant pas, et cela de toutes les manières possibles;

d. Chaque ligne brisée de l'espèce définit un cycle P_i. Si l'on peut déterminer des ε_i égaux à ± 1 tels que $\prod_i (P_i^{\varepsilon_i}) = 1$ pour un ordre convenable des indices i, nous avons obtenu un groupe de monodromie de fraction rationnelle.

Nous avons ainsi résolu les problèmes suivants (au moins théoriquement) :

Problème I. — *Construire tous les types de structure d'une fraction rationnelle de degré n.*

Problème II. — *Donner un exemple effectif de ce type par des calculs algébriques finis.*

Cela nous fournit en effet le problème suivant : étant donné une surface de Riemann du type elliptique, la représenter sur le plan de la variable complexe, avec la restriction que nous pouvons faire subir au plan support de la surface de Riemann une déformation topologique quelconque; cela peut aussi se traiter méthodiquement de la manière suivante, qui mettra mieux en lumière le caractère d'algébricité de la solution : pour construire un représentant du groupe, il faut que les ordres des zéros de la dérivée aient des valeurs données, et que certains zéros de la dérivée donnent la même valeur à la fonction.

Par une transformation homographique, nous pouvons toujours supposer que les pôles de la fonction cherchée sont simples. La donnée des zéros et des pôles détermine la dérivée (à un facteur constant près), et l'on aura

$$R'(z) = \frac{\prod_{i=1}^{2n-2}(z-a_i)}{\prod_{k=1}^{n}(z-Z_k)},$$

mais les paramètres a_i et Z_k ne sont pas entièrement arbitraires. Il faut que pour chaque pôle de $R'(z)$ le résidu soit nul; cela s'écrit comme on le voit par un calcul facile

$$\text{(C)} \qquad \sum_i \frac{1}{Z_k - a_i} + 2\sum_{m\neq k}\frac{1}{Z_k - Z_m},$$

les n conditions C ne sont d'ailleurs pas indépendantes. En effet on sait que la somme des résidus de R' est nulle, donc si $n-1$ d'entre les conditions sont vérifiées la $n^{\text{ième}}$ condition sera vérifiée. On montre d'ailleurs facilement que, pour des a_i arbitraires, les équations C sont effectivement compatibles.

Pour écrire une coïncidence de valeurs en a_m et a_n on sera amené à supposer que la fonction a des pôles de l'ordre voulu en a_i et a_j (après transformation homographique), c'est-à-dire que l'on aura compatibilité entre les équations (C) et des équations exprimant pour la fraction

$$R'(z) = \frac{\prod_{i\neq m,n}(z-a_i)}{(z-a_m)^{2+h}(z-a_n)^{2+k}\prod(z-Z_{k'})^2};$$

tous les résidus relatifs, tant à a_m, a_n qu'aux Z_k, sont nuls. Les équations par rapport à Z_k ne sont compatibles que sous certaines conditions algébriques entre les a_m et a_n. Nous avons en effet deux équations de plus que de Z_k, et l'on vérifie comme plus haut qu'il n'y a qu'une seule relation entre les équations écrites (1) (celle qui exprime que les résidus sont nuls).

Notre problème est ainsi ramené à des calculs algébriques; et nous voyons en outre que la solution peut être exprimée avec des coefficients algébriques de degré borné en fonction de n, ce qui n'était pas évident *a priori* au moyen de la démonstration d'existence par la représentation conforme, qui a un caractère transcendant.

10. **Méthode du théorème de Luroth.** — Considérons le corps $R(x)$ de toutes les fractions rationnelles de x à coefficients dans R et soit $R(\eta)$ le corps de toutes les fractions rationnelles de η. Supposons que l'on ait réalisé une homomorphie de $R(\eta)$ sur $R(x)$ en représentant η sur une fraction rationnelle $\eta(x)$ donnée. $R(\eta)$ apparaît alors comme sous-corps de R.

Le théorème de Luroth peut alors s'énoncer ainsi (2) : à toute décomposition de η de la forme $\eta = \eta_n\{\eta_{n-1}[\ldots(\eta_1(x)\ldots)]\}$ correspond une chaîne de corps

$$R(\eta) \subset R\{\eta_{n-1}[\ldots(\eta_1(x)\ldots]\} \subset \ldots \subset R(\eta_1) \subset R(x)$$

et réciproquement à toute chaîne de tels corps correspond une décomposition de η.

On sait ainsi que $R(x)$ doit être considéré comme une extension algébrique de $R(\eta)$, et la solution apparaîtra alors $\left(\text{en posant } \eta = \dfrac{h(x)}{g(x)} \text{ sous forme irréductible}\right)$.

a. Trouver le corps de décomposition de l'équation irréductible $f(x) = 0$ que x vérifie dans $R(\eta)$. Soit $\mathcal{R}$ ce corps.

b. Trouver à quel sous-groupe G du groupe de Galois correspond $R(x)$.

---

(1) Les démonstrations ainsi que des généralisations paraîtront dans un autre recueil.

(2) *Cf.* Van der Waerden, *Moderne Algebra* (1, § 36), Springer, Berlin, 1930.

Une fois ce problème résolu, le problème de structure doit être considéré comme résolu par le résultat suivant :

THÉORÈME 28. — *A toute décomposition d'une fraction rationnelle* $\eta(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ *à coefficients dans* R *en fractions rationnelles à coefficients dans* R *correspond biunivoquement une chaîne de groupes, chacun sous-groupe du précédent, le premier étant le groupe de Galois de l'équation* $h(x) - \eta g(x) = 0$ *sur* R(η) *extension transcendante de* R, *le dernier étant le sous-groupe du groupe de Galois qui laisse invariant un des éléments dans la représentation comme groupe de permutation des racines.*

Seule la dernière affirmation a besoin d'une démonstration ; les isomorphies du groupe laissent invariants tous les éléments de R(η) si elles laissent invariants ceux de R(x); elles laissent en particulier x lui-même invariant; et réciproquement chaque élément de R(x) s'exprimant en fonction rationnelle de x est invariant par une telle isomorphie; nous obtenons bien ainsi le sous-groupe relatif à R(x)

Le problème que nous résolvons ainsi est une extension du problème résolu au paragraphe 9; nous y supposions en effet comme corps de coefficients le corps des nombres complexes ordinaires ou le corps des nombres algébriques ordinaires. Mais il importe surtout de remarquer que si le théorème 28 présente le même aspect que le théorème 25 (le groupe de Galois dans l'un est remplacé par le groupe de monodromie dans l'autre), la différence fondamentale est que le théorème 28 ne fait pas appel à la notion de valeur de la fonction rationnelle, tandis que le théorème 25 l'utilise et utilise la notion de continuité d'une fonction algébrique.

Dans ce cas particulier, nous obtenons donc le résultat suivant :

THÉORÈME 29. — *Soit* K *le corps de tous les nombres complexes (ou celui de tous les nombres algébriques complexes),* K(η) *une extension transcendante simple,* $\frac{h(x)}{g(x)}$ *une fraction rationnelle irréductible à coefficients dans* K.

Le groupe de monodromie de la fraction et le groupe de Galois de l'équation $h(x) - \eta g(x) = 0$ *dans* K(η) *ont la même structure par rapport à leur sous-groupe de primitivité, en ce sens que : à toute chaîne de* *groupes intermédiaires pour l'un correspond une chaîne de même longueur pour l'autre, les indices pour chaque échelon étant égaux.*

Nous n'avons pas rappelé explicitement dans le théorème 28 quelle était la valeur des indices; mais cela résulte immédiatement des indications du théorème de Lüroth tel qu'il est reproduit dans l'ouvrage précité de Van der Waerden. En effet, il y est démontré que le degré des extensions qui interviennent est égal au degré des fractions rationnelles correspondantes; d'autre part, la théorie classique de Galois permet d'évaluer le degré des corps d'après les indices des sous-groupes de Galois. Ce qui conduit sans difficulté au résultat annoncé.

11. **Quelques types particuliers de décomposition.** — L'hypergroupe d'automorphie peut-il être un groupe? En ce cas nous savons d'après le théorème 10 que le sous-groupe de primitivité du groupe de monodromie doit être sous-groupe invariant, donc d'après la remarque initiale du paragraphe 1 qu'il se réduit à l'identité. Et les fonctions d'automorphie de la fraction rationnelle sont des fonctions algébriques uniformes et univalentes, c'est-à-dire des fonctions linéaires. Son groupe de monodromie étant régulier, la fraction rationnelle sera régulière. Ce type comprend (à une transformation homographique sur la fonction et la variable près) les fonctions t^a, $t^a + \frac{1}{t^a}$ (a entier); et un nombre fini de fonctions dont les groupes d'automorphies sont les groupes des polyèdres réguliers sur la sphère de Riemann.

D'autre part on relève dans l'ouvrage cité de Van der Waerden (exercice final du § 36) que les fonctions en question sont les seules pour lesquelles le groupe de Galois est régulier, et qu'il coïncide alors avec le groupe d'automorphie. Par conséquent :

Théorème 30. — *Le groupe de monodromie et le groupe de Galois, lorsque* K *est le corps de tous les nombres algébriques, ne sont réguliers qu'en même temps; en ce cas ils sont isomorphes, et le groupe d'automorphie de la fraction est constitué de fonctions linéaires.*

Il n'est par contre pas possible de donner un critère simple d'hypertransitivité du groupe de monodromie. Mais nous pouvons toutefois indiquer un cas d'hypertransitivité qui doit être considéré comme le cas général (¹) :

THÉORÈME 31. — *Si les permutations génératrices du théorème 27 comprennent chacune un seul cycle de deux lettres, le groupe correspondant est hypertransitif.*

Reprenons en effet le schéma par un réseau utilisé dans la démonstration du thèorème 27. L'hypothèse du nouvel énoncé se traduit par le fait que toutes les lignes brisées représentant les génératrices sont à un seul côté. La transitivité exprime que le réseau est connexe. Affirmer l'hypertransitivité revient, d'après le théorème 2, à affirmer qu'il existe un sommet du réseau tel que, si on le supprime avec tous les côtés qui y aboutissent, il reste un réseau connexe. Or supposons que cela ne soit pas réalisé. Soient P_1 un point, R_1 un réseau connexe isolé par la suppression de P_1, P_2 un point autre que P_1 et qui n'est pas sommet de R_1. La suppression de P_2 isole en particulier un réseau connexe R_2 qui contient R_1 tout entier, et en outre P_1 (puisque les côtés partant de P_1 sont rétablis, sauf le cas échéant P_1P_2 et qu'il y en a forcément un joignant P_1 à un point de R_1). En recommençant avec P_2, R_2, on définit P_3 et R_3, etc., chaque réseau connexe ayant au moins un sommet de plus que le précédent. Mais on sera forcément arrêté, parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets. Au moment de la dernière opération, le réseau R initial reste donc connexe par la suppression d'un point et de tous les côtés qui aboutissent en ce point.

(¹) *Cf.* le Mémoire précité de la *Soc. Scient. Fennicæ* où le présent théorème est donné sous une forme un peu différente au début du paragraphe 3.