GEORGES GIRAUD

Équations à intégrales principales d'ordre quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ÉQUATIONS
A
INTÉGRALES PRINCIPALES
D'ORDRE QUELCONQUE

PAR M. GEORGES GIRAUD.

INTRODUCTION.

Un certain type d'intégrales principales d'ordre quelconque a été étudié dans un travail antérieur (1), où l'on établissait que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm sont valables pour certaines équations où figurent des intégrales principales simples ou doubles, pourvu que le paramètre λ qui figure devant l'intégrale ne prenne pas de valeurs purement imaginaires dont la valeur absolue ne serait pas inférieure au minimum d'une certaine fonction positive. On verra ici (Chap. III) que ce résultat subsiste pour les équations analogues où figurent des intégrales d'ordre quelconque.

(1) *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 51, 1934, p. 251 à 372). Dans les citations, cet article sera désigné par la lettre *i*.

Dans le premier article, le résultat avait été appliqué à la solution d'un problème relatif aux équations aux dérivées partielles, du type elliptique, à deux et à trois variables. Cette solution est étendue ici (Chap. IV) aux problèmes analogues, relatifs à tout nombre de variables. On indique aussi quelques généralisations, qui permettent notamment de traiter certains problèmes mixtes, déjà mentionnés dans un autre article. Dans un autre travail sera développée une généralisation plus étendue, qui concerne aussi d'autres sortes de problèmes ([1]).

Le Chapitre I complète (§ 9 et § 10) un résultat antérieur, qui est fondamental pour notre objet. La méthode suivie pour ce complément m'a été inspirée par un Mémoire publié en 1927 par M. Francesco Tricomi ([2]), et dont j'ai eu connaissance, grâce à MM. Jacques Hadamard et Ernest Vessiot, pendant l'impression du travail qui a précédé celui-ci. On pourra comparer le lemme dont se sert M. F. Tricomi ([3]), avec celui qui est démontré plus loin (Chap. I, § 5), et qui permet des raisonnements analogues.

Le Chapitre II résout, pour les fonctions harmoniques de m variables ($m \geqq 3$), un problème que M. Georges Bouligand avait d'abord traité dans le cas de trois variables ([4]). Cette solution m'avait été annoncée par lettre, et les sagaces commentaires de son auteur m'ont fait découvrir le moyen ici employé pour édifier la théorie des équations à intégrales principales d'ordre quelconque. Cette méthode est plus brève que celle qui m'avait d'abord conduit au but; en outre elle permet d'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires l'importante fonction nommée ici $\omega(\varphi)$ (Chap. II, § 7), au lieu que ma première

---

([1]) *Sur une nouvelle généralisation des questions relatives aux équations du type elliptique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 885 à 887).

([2]) Francesco Tricomi, *Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 27, 1927, p. 87 à 133).

([3]) F. Tricomi, *op. cit.*, paragraphe 2, formule (32) et explications qui la suivent. M. Tricomi n'avait pas énoncé le résultat correspondant au Chapitre I, paragraphe 7 du présent travail, mais ses raisonnements supposent ce résultat, qui pourrait s'obtenir à l'aide de la formule citée, dans le cas de deux variables.

([4]) Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (1 vol. de 78 pages, Paris, 1935). Cet ouvrage expose, dans sa première partie, le raisonnement et les idées de M. G. Bouligand.

méthode donnait $\omega(\varphi)$ sous forme de série; c'est seulement pour les intégrales doubles et quadruples que j'avais d'abord exprimé la somme de ces séries à l'aide des fonctions élémentaires [1].

Les notations employées ici sont, pour la plupart, celles du premier article, dont celui-ci suppose connus les Chapitres I, III et IV.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES SUPERPOSÉES.

1. Intégrale principale d'une fonction positivement homogène. — Soit $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ou, par abréviation, $G(X)$ une fonction *positivement homogène* et d'ordre $-m$, c'est-à-dire qu'on a

$$G(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^{-m} G(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

quand *t est positif*, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ou X n'étant pas en O.

Supposons que cette fonction est sommable sur une hypersphère (variété à $m-1$ dimensions) dont le centre est O et dont le rayon est *un*. Elle est alors sommable sur toute hypersphère concentrique, ainsi que dans toute région bornée fermée qui ne contient pas O.

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux ensembles ouverts bornés, qui tous deux contiennent O. Soit $\mathcal{E}_\eta$ le transformé de $\mathcal{E}$ par une homothétie de centre O et de rapport $\eta > 0$; si η est assez petit, $\mathcal{E}_\eta$ appartient à $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{D} - \mathcal{E}_\eta$ (partie du premier ensemble, qui n'est pas dans le second). Par définition, l'*intégrale principale de* G dans $\mathcal{D}$ est

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G\, dV = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{D}_\eta}^{(m)} G\, dV \qquad (dV = \text{élément de champ}),$$

pourvu que la limite existe. Cette limite dépend du choix de $\mathcal{E}$, qui doit toujours être indiqué. Les ensembles $\mathcal{E}_\eta$ se nomment *les ensembles d'exclusion*.

Si la limite existe pour un choix de $\mathcal{E}$, elle existe pour tout autre choix. En effet soit $\mathcal{E}^\star$ un autre ensemble borné ouvert qui contient O,

[1] *Équations à intégrales principales* (*Société math. France, Comptes rendus des séances de l'année* 1933, p. 45 à 51). Une première rédaction du présent article exposait ma première méthode.

et soient $\mathcal{E}_\eta^\star$ et $\mathcal{D}_\eta^\star$ les ensembles analogues à $\mathcal{E}_\eta$ et à $\mathcal{D}_\eta$. Si η est assez petit pour que $\mathcal{E}_\eta$ et $\mathcal{E}_\eta^\star$ appartiennent tous deux à $\mathcal{D}$, il est visible que les ensembles $\mathcal{D}_\eta - \mathcal{D}_\eta^\star$ se déduisent les uns des autres par des homothéties de centre O; on peut en dire autant pour les ensembles $\mathcal{D}_\eta^\star - \mathcal{D}_\eta$. On en déduit que

$$\int_{\mathcal{D}_\eta}^{(m)} \mathrm{G}\, d\mathrm{V} - \int_{\mathcal{D}_\eta^\star}^{(m)} \mathrm{G}\, d\mathrm{V}$$

ne dépend pas de η, dès que η est assez petit. L'existence d'une limite pour un terme entraîne donc que l'autre terme a aussi une limite. C. Q. F. D.

2. Condition pour que l'intégrale principale existe. — En particulier prenons pour $\mathcal{E}$ une hypersphère (domaine à m dimensions) de centre O et de rayon *un*. Désignons par r la distance de X à O, et prenons $x_\alpha = r\xi_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$. L'intégrale étendue à la région $\eta < r < \mathrm{R}$, où η et R sont deux constantes positives données, est

$$\int_\eta^{\mathrm{R}} r^{m-1} \int^{(m-1)} \mathrm{G}(r\xi_1, \ldots, r\xi_m)\, d\mathrm{S}\, dr = \log\frac{\mathrm{R}}{\eta} \times \int^{(m-1)} \mathrm{G}(\xi_1, \ldots, \xi_m)\, d\mathrm{S},$$

$d\mathrm{S}$ étant l'élément de l'hypersphère de rayon *un*. La condition nécessaire et suffisante pour que ce résultat ait une limite quand η tend vers zéro est

$$\int^{(m-1)} \mathrm{G}\, d\mathrm{S} = 0, \tag{1}$$

où l'intégrale est étendue à une hypersphère quelconque de centre O. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 1, (1) *est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale principale existe*, quel que soit l'ensemble $\mathcal{E}$ choisi.

3. Théorème. — *Soit*, pour un instant, $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *une fonction positivement homogène et d'ordre* $1 - m$, *continue et continûment dérivable par rapport à* x_1 *quand* X *n'est pas en* O. *Alors l'intégrale principale* $\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\, d\mathrm{V}$, *prise au sens du paragraphe* 1, *existe* (quel que soit $\mathcal{E}$).

Il est évident que $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ est positivement homogène d'ordre $-m$. Si nous intégrons dans la région $\eta < r < R$ (même notation qu'au paragraphe 2), nous trouvons

$$\int^{(m)} \frac{\partial F}{\partial x_1} dV = \int_{\mathfrak{S}_R}^{(m-1)} F \varpi_1 \, dS - \int_{\mathfrak{S}_\eta}^{(m-1)} F \varpi_1 \, dS,$$

$\mathfrak{S}_R$ et $\mathfrak{S}_\eta$ étant les hypersphères de rayons R et η, et ϖ_1 étant le cosinus de l'angle entre Ox_1 et la demi-droite issue de O. Or les deux intégrales du second membre sont évidemment égales; il y a donc une limite nulle quand η tend vers zéro, ce qui prouve l'énoncé.

4. **Dérivation.** — F désignant la même fonction qu'au paragraphe précédent, soit $\mathcal{D}$ un ensemble borné ouvert qui contient X. Soit d'autre part $\sigma(A)$ une fonction qui remplit dans $\mathcal{D}$ une condition de Hölder (¹), c'est-à-dire qu'on a, quels que soient X et A,

$$|\sigma(X) - \sigma(A)| < ML^h(X, A) \qquad (M > 0, \ 0 < h \leqq 1 ; \ L = \text{distance}).$$

Considérons la fonction

$$u(X) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\sigma(A) \, dV_A, \tag{2}$$

qui est continue en tout point de $\mathcal{D}$. Nous allons démontrer qu'*elle admet par rapport à x_1 une dérivée continue.*

Soit $\mathcal{E}_\eta$ une hypersphère (m dimensions) de centre X et de rayon η; soit $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{D} - \mathcal{E}_\eta$. Si η est assez petit pour que $\mathcal{E}_\eta$ appartienne à $\mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathcal{D}_\eta}^{(m)} F(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\sigma(A) \, dV_A \\ &= \int_{\mathcal{D}_\eta}^{(m)} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\sigma(A) \, dV_A \\ &\quad - \int_{\mathfrak{S}_\eta}^{(m-1)} F(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\sigma(A)\varpi_1(A) \, dS_A, \end{aligned}$$

(¹) R. Lipschitz a considéré ces conditions, même pour $h < 1$, dans l'article : *De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrarium... disquisitio* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 63, 1864, p. 296 à 308), spécialement théorème II, p. 301. Postérieur est le travail d'Otto Hölder, *Beiträge zur Potentialtheorie* (*Inauguraldissertation*, Tübingen, 1882, 71 pages), spécialement p. 10.

$\mathcal{S}_\eta$ étant la frontière de $\mathcal{E}_\eta$, et $\varpi_1(\mathrm{A})$ étant le cosinus de l'angle entre $\mathrm{O}x_1$ et la demi-droite XA. Quand η tend vers zéro, l'intégrale d'ordre m tend vers une intégrale principale étendue à $\mathcal{D}$, car la définition des intégrales principales peut s'appliquer à des fonctions non positivement homogènes (i, I, § 7). Nous écrirons l'autre intégrale

$$\int_{\mathcal{S}_\eta}^{(m-1)} \mathrm{F}(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)[\sigma(\mathrm{A})-\sigma(\mathrm{X})]\,\varpi_1(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$+\sigma(\mathrm{X})\int_{\mathcal{S}_\eta}^{(m-1)} \mathrm{F}(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)\,\varpi_1(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A};$$

quand η tend vers zéro, le premier terme tend vers zéro, et l'autre ne dépend pas de η. Comme les limites sont atteintes uniformément quand X varie dans un ensemble fermé compris dans $\mathcal{D}$, on a

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}=\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$
$$-\sigma(\mathrm{X})\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{F}(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)\,\varpi_1(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

où l'intégrale d'ordre m se prend en valeur principale, en excluant des hypersphères infiniment petites de centre X; $\mathcal{S}$ est la frontière d'une telle hypersphère, et dS est son élément.

5. **Théorème.** — *Si m est $\geqq 2$ et si* G *est continu, la condition* (1) *est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction* F *positivement homogène et d'ordre $2-m$, telle que l'on ait*

$$(4)\qquad \Delta\mathrm{F}=\mathrm{G}\qquad (\Delta=\text{laplacien});$$

F *est entièrement déterminé si l'on ajoute la condition*

$$(5)\qquad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{F}\,d\mathrm{S}=0,$$

où $\mathcal{S}$ est une hypersphère de centre O.

Dans cet énoncé, le laplacien est pris au sens généralisé de M. Zaremba [1]. Si les dérivées secondes d'une fonction $u(\mathrm{X})$ existent

[1] Stanislas Zaremba, *Contribution à l'étude d'une équation fonctionnelle de la Physique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 19, 1905, p. 140 à 150).

et sont continues, on a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mathcal{F} u}{r^2} \qquad (r = \text{distance de X à O}),$$

où $\mathcal{F} u$ est l'invariant différentiel du second ordre, de Beltrami, de u regardé comme fonction d'un point de l'hypersphère $r=1$. Remplaçons u par F, et supposons seulement que le laplacien généralisé existe; on a

$$\Delta F = r^{-2}\mathcal{F} F,$$

l'opération F étant prise aussi au sens généralisé [1], qui est forcément applicable à F. En faisant $r = 1$, nous voyons qu'on doit avoir

$$\mathcal{F} F = G.$$

Or l'équation $\mathcal{F} u = 0$ est identique à son adjointe, et sa solution générale est une constante arbitraire. Donc la condition (1) est bien nécessaire et suffisante pour l'existence de F sur cette hypersphère $r=1$ [2]; l'homogénéité positive permet d'achever la formation de F.

Cette démonstration prouve que l'équation (4) détermine F à un terme additif près, du type $ar^{2-m}(a = \text{const.})$. La condition (5) détermine a, ce qui achève la démonstration.

6. **Remarque.** — On peut remplacer le laplacien par n'importe quelle opération $\Sigma_{\alpha.\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$, pourvu qu'elle soit du type elliptique et à coefficients constants, cette opération étant au besoin prise au sens généralisé ; car on ramène ce cas à celui du laplacien en changeant de variables d'une façon linéaire et homogène.

7. **Théorème.** — Soit encore $m \geqq 2$. *Soient* G *et* H *deux fonctions*

---

(1) *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique* (*Bull. Sciences math.*, t. 56, 1932, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352, et errata p. 384), spécialement Chap. I, § 2 et § 13. Pour démontrer l'affirmation du texte, on particularisera la décomposition en carrés introduite au § 2.

(2) Ce passage s'appuie sur une théorie générale pour laquelle on peut consulter un article cité au Chapitre IV, § 5 du présent travail. Mais le cas actuel a été traité d'abord par M. Émile Picard qui l'a reproduit dans l'ouvrage : *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles* (VIII+271 pages, Paris, 1930), spécialement Chap. X, § 2.

positivement homogènes et d'ordre $-m$, *remplissant toutes deux la condition* (1). *Nous supposons que, sur l'hypersphère de centre* O *et de rayon un, ces fonctions remplissent des conditions de Hölder. Alors l'intégrale principale, étendue à tout l'espace,*

$$(6)\qquad K(X) = \int^{(m)} G(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\, H(a_1, \ldots, a_m)\, dV_A,$$

où l'on exclut des hypersphères infiniment petites de centres O *et* X, *existe quand* X *n'est pas en* O, *et elle représente une fonction positivement homogène et d'ordre* $-m$, *qui satisfait aux mêmes hypothèses que* G.

L'homogénéité positive de K, avec l'ordre $-m$, résulte du travail antérieur cité (i, I, § 11).

Pour établir la condition de Hölder, remarquons d'abord qu'on a, quelles que soient les distances L(O, X) et L(O, Y),

$$G(X) - G(Y) = O[L^h(X, Y)\, l^{-m-h}(X, Y, O)] \qquad (0 < h \leqq 1),$$

$l(X, Y, O)$ désignant la distance de O au segment de droite XY. Supposons qu'on ait $L(O, X) = L(O, Y) = 1$ et $4L(X, Y) < 1$; évaluons $K(X) - K(Y)$. Nous évaluons d'abord la partie de cette différence qui provient du domaine $2L(X, A) < 1$, partie que nous décomposons en plusieurs termes. En premier lieu les intégrales

$$\int^{(m)}_{L(X,A)<2L(X,Y)} G(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)[H(A) - H(X)]\, dV_A,$$

$$\int^{(m)}_{L(X,A)<2L(X,Y)} G(y_1 - a_1, \ldots, y_m - a_m)[H(Y) - H(A)]\, dV_A,$$

valent évidemment $O[L^h(X, Y)]$. En second lieu les intégrales

$$\int^{(m)} [G(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m) - G(y_1 - a_1, \ldots, y_m - a_m)][H(A) - H(X)]\, dV_A,$$

$$\int^{(m)} G(y_1 - a_1, \ldots, y_m - a_m)\, [H(Y) - H(X)]\, dV_A,$$

étendues à la région $4L(X, Y) < 2L(X, A) < 1$, valent

$$O\left[L^h(X, Y) \log \frac{1}{4L(X, Y)}\right].$$

En troisième lieu on démontre, comme dans l'article antérieur (i, Chap. I, § 8), qu'on a

$$\int_{2L(X,A)<1}^{(m)} [G(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)-G(y_1-a_1, \ldots, y_m-a_m)]\,dV_A = O[L(X, Y)],$$

d'où résulte la limitation

$$\int_{2L(X,A)<1}^{(m)} [G(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)\,H(X) - G(y_1-a_1, \ldots, y_m-a_m)\,H(Y)]\,dV_A = O[L^h(X, Y)].$$

En ajoutant ces limitations, on voit bien que la partie de $K(X)-K(Y)$ qui provient de la région $2L(X, A)<1$, vaut $O[L^k(X, Y)]$, en entendant par k un nombre positif donné, inférieur à $h(0<k<h)$. La partie de $K(X)-K(Y)$ qui provient du domaine $L(O, A)<L(X, Y)$ s'écrit évidemment

$$\int^{(m)} [G(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m) - G(y_1-a_1, \ldots, y_m-a_m) - G(X)+G(Y)]\,H(A)\,dV_A,$$

et l'on voit ainsi qu'elle vaut $O[L^h(X, Y)]$. La partie qui provient du domaine $2L(X, Y)<2L(O, A)<1$ vaut $O\left[L^h(X, Y)\log\frac{1}{2L(X, Y)}\right]$. Enfin la partie de $K(X)-K(Y)$ qui provient du champ

$$2L(O, A)>1, \qquad 2L(X, A)>1 \qquad \text{(inégalités simultanées)},$$

peut s'écrire

$$O[L^h(X, Y)]\int^{(m)} L^{-2m-h}(O, A)\,dV_A = O[L^h(X, Y)].$$

La condition de Hölder est donc établie.

Pour établir que K satisfait à la condition (1), introduisons la fonction F définie par (4) et (5); puisque G remplit une condition de Hölder, F est deux fois continûment dérivable, sauf en O. La fonction

$$\int_{\text{espace}}^{(m)} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1-a_1, \ldots, x_m-a_m)\,H(a_1, \ldots, a_m)\,dV_A$$

est positivement homogène et d'ordre $1-m$; sa dérivée par rapport à x_1 est (§ 4, complété pour tenir compte du champ infini et de l'allure de H en O)

$$\int_{\text{espace}}^{(m)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m) H(a_1, \ldots, a_m)\, dV_A$$
$$- H(x_1, \ldots, x_m) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m)\, \varpi_1(A)\, dS_A,$$

où $\mathcal{S}$ est une hypersphère du centre X; on doit remarquer que l'intégrale étendue à $\mathcal{S}$ ne dépend pas de X. Faisons la même chose avec $x_2, \ldots, x_m$, et ajoutons les résultats; nous trouvons que K se réduit à une somme de fonctions qui, d'après le paragraphe 3, remplissent la condition (1), cette somme étant augmentée du produit de H par une constante. Notre théorème est ainsi démontré.

8. **Corollaire.** — Au lieu d'exclure des hypersphères infiniment petites, excluons du champ de l'intégrale, au second membre de (6), deux ellipsoïdes infiniment petits, dont les centres sont les points X et O; ces ellipsoïdes tendent vers zéro en restant homothétiques d'un ellipsoïde fixe, qui est le même pour les deux ellipsoïdes variables. *La nouvelle fonction* K(X) *ainsi obtenue, remplit aussi la condition* (1), car un changement linéaire et homogène de variables nous ramène au cas du théorème précédent.

9. **Corollaire.** — Soit $\mathcal{V}$ une variété close, conforme aux hypothèses indiquées dans l'article déjà publié (*i*, Chap. I, § 6), et soient G et H deux noyaux d'intégrales principales, conformes aux hypothèses du même article (*i*, Chap. I, § 11); nous n'excluons pas le cas où l'un au moins de ces noyaux se réduirait à un noyau sommable. Alors *le noyau*

$$\int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A \qquad (dV = \text{élément de } \mathcal{V}),$$

est aussi un noyau d'intégrale principale. Car, dans l'article cité, on a prouvé que la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ est du type de la fonction K du paragraphe précédent, et, après avoir introduit comme une hypothèse nouvelle la conclusion, alors non démontrée, de ce paragraphe, on en a déduit ce que nous venons d'annoncer.

On peut même démontrer que la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ dépend de $v_1, \ldots, v_p$ comme il a été supposé pour G et pour H (i, Chap. I, § 7).

10. **Intégrales superposées.** — En conservant la même notation, et en introduisant une fonction $\rho(X)$ qui remplit sur $\mathcal{V}$ une condition de Hölder, il résulte de ce qui précède qu'on a, d'après l'article cité (i, Chap. I, § 11 et 12),

$$\int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)\rho(\Xi)\, dV_{\Xi}\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \rho(\Xi) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_{\Xi} - \Phi(X)\rho(X),$$

Φ étant une fonction indépendante de ρ, et dont on a vu des expressions dans l'article cité. Si l'une des fonctions $G(X, A)$ et $H(X, A)$ est sommable par rapport à A pour un point X donné, $\Phi(X)$ est nul en ce point.

CHAPITRE II.

PROBLÈME PRÉPARATOIRE.

1. **Énoncé du problème.** — *Dans l'espace euclidien à m dimensions* ($m \geqq 3$), *soit* $f(X)$ *une fonction continue donnée; on suppose que la fonction* $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)\, f(X)$ *est bornée* (hypothèse qui pourrait être élargie). *On demande les fonctions* $u\,(X)$, *harmoniques dans le domaine* $x_m > 0$, *continues pour* $x_m \geqq 0$, *nulles à l'infini, et qui possèdent, en tout point* Y *situé sur la frontière* $x_m = 0$, *une dérivée suivant la direction fixe donnée* $(\sin\theta, 0, \ldots, 0, -\cos\theta)\left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, *cette dérivée étant égale à* $f(Y)\cos\theta$.

2. **Il y a au plus une solution.** — Si la fonction u existe, elle est certainement unique. En effet soit v une solution quelconque. La fonction $u - v$ est nulle à l'infini; donc elle atteint un maximum ou un minimum en un point situé à distance finie dans la région $x_m \geqq 0$.

Si le point où l'extremum est atteint se trouve dans le domaine $x_m > 0$, la fonction $u - v$ est constante, car elle est harmonique. Si ce point est sur la frontière $x_m = 0$, la fonction $u - v$ est encore constante, d'après une propriété déjà rencontrée (i, Chap. IV, § 5). Étant nulle à l'infini, cette fonction est donc identiquement nulle, c'est-à-dire que la solution est unique.

3. **Formation d'une solution.** — Considérons l'équation en v

$$(1) \quad -\frac{\partial v}{\partial x_m} + \operatorname{tang}\theta \frac{\partial v}{\partial x_1} = \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{x_m f(\mathrm{A})}{\mathrm{L}^m(\mathrm{X}, \mathrm{A})} d\mathrm{S}_\mathrm{A} \qquad (x_m > 0),$$

où l'intégrale existe, d'après la limitation de f. Nous allons d'abord établir qu'elle admet, dans la région $x_m > 0$, une solution continue qui s'annule à l'infini.

Posons, en effet

$$x_1 = \xi_1 \cos\theta - \xi_m \sin\theta, \qquad x_m = \xi_1 \sin\theta + \xi_m \cos\theta, \qquad x_\alpha = \xi_\alpha \qquad (1 < \alpha < m);$$

soient $b_1, b_2, \ldots, b_m$ les nouvelles coordonnées que la même transformation confère au point A. Nous trouvons, en désignant par Ξ et B les points X et A dans le nouveau système de coordonnées,

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_m} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \cos\theta \int_{b_1 \sin\theta + b_m \cos\theta = 0}^{(m-1)} \frac{(\xi_1 - b_1)\sin\theta + (\xi_m - b_m)\cos\theta}{\mathrm{L}^m(\Xi, \mathrm{B})} f(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{B}.$$

Je dis que la fonction v cherchée est

$$(3) \quad v(\mathrm{X}) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \cos^2\theta \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{f(\mathrm{A})}{\mathrm{L}^{m-2}(\mathrm{X}, \mathrm{A})} d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \sin\theta \cos\theta \int_{a_m=0}^{(m-1)} f(\mathrm{A}) \int_{\xi_m}^{+\infty} \frac{\xi_1 - b_1}{\mathrm{L}^m(\Xi, \mathrm{B})} d\xi_m\, d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

à condition de revenir au premier système de coordonnées après les opérations indiquées.

D'abord les intégrations indiquées au second membre donnent des fonctions continues de X : c'est évident pour la première, eu égard à la limitation de f; cela va être démontré pour la seconde. Posons

$$L(X, A) = r, \quad a_1 - x_1 = r \sin\psi \cos\varphi, \quad a_m - x_m = -r\cos\psi \quad (0 \leqq \psi \leqq \pi);$$

puisque a_m est nul et que x_m n'est pas négatif, ψ est au plus égal à $\frac{\pi}{2}$. Nous en tirons

$$\xi_m - b_m = r(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\cos\varphi) = r\cos\Theta \quad (0 \leqq \Theta \leqq \pi).$$

On a évidemment $\cos\Theta \geqq \cos(\theta + \psi)$; comme Θ et $\theta + \psi$ appartiennent à l'intervalle $(0, \pi)$, il en résulte qu'on a

$$\Theta \leqq \theta + \psi \leqq \theta + \frac{\pi}{2} < \pi. \tag{4}$$

Considérons l'intégrale

$$I_m = \int_{\cos\Theta}^{+\infty} (\sin^2\Theta + t^2)^{-\frac{m}{2}} dt \quad (m \geqq 2); \tag{5}$$

je dis qu'elle est une fonction continue de Θ tant qu'on a $0 \leqq \Theta < \pi$. Distinguons trois cas, suivant la position de Θ par rapport à $\frac{\pi}{3}$ et à $\frac{\pi}{2}$. Si Θ est $\leqq \frac{\pi}{3}$, $\cos\Theta$ est $\geqq \frac{1}{2}$; la fonction intégrée est donc continue relativement à Θ et à t; d'autre part l'intégrale étendue au champ infini est uniformément convergente; elle est donc bien une fonction continue de Θ. Si l'on a $\frac{\pi}{3} \leqq \Theta \leqq \frac{\pi}{2}$, on a $\sin^2\Theta \geqq \frac{3}{4}$; la fonction intégrée est encore continue, et, comme l'intégrale est uniformément convergente, elle est encore une fonction continue de Θ. Si enfin l'on a $\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq \gamma < \pi$, où γ est donné, ou a $\sin^2\Theta > \sin^2\gamma$, et le raisonnement est toujours le même. Ainsi I_m est bien une fonction continue de Θ tant qu'on a $0 \leqq \Theta < \pi$. Or nous avons

$$\int_{\xi_m}^{+\infty} \frac{\xi_1 - b_1}{L^m(\Xi, B)} d\xi_m = r^{2-m}(\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi)\, I_m(\Theta);$$

le second membre est le produit de r^{2-m} par une fonction continue de θ, de φ et de ψ, d'après (4). Si l'on multiplie cela par $f(A)\, dS_A$, on voit que l'intégrale étendue au champ $a_m = 0$ est uniformément convergente dans tout champ borné; elle représente donc une fonction continue, comme nous l'avions annoncé.

Si l'on dérive le second membre de (3) par rapport à ξ_m sous les signes $\int^{(m-1)}$, on obtient le second membre de (2), qui est le produit du second membre de (1) par $\cos\theta$; ce résultat converge uniformément dans tout champ borné où x_m reste supérieur à un nombre positif donné; si φ est défini par (3), la formule (1) est donc établie pour $x_m > 0$. Pour $x_m = 0$, la formule (1) ne serait plus vraie; mais le second membre tend vers la limite $f(Y)$ si X tend vers le point Y de la frontière, sans cesser d'appartenir au domaine $x_m > 0$. Si en particulier on pose $x_1 = y_1 + t\sin\theta$, $x_m = y_m - t\cos\theta$ et $x_\alpha = y_\alpha$ pour $1 < \alpha < m$, on voit que $f(X)$ est une fonction de t, dont la dérivée existe quand t est négatif, et cette dérivée tend vers $f(Y)\cos\theta$ quand t tend vers zéro; d'après le théorème des accroissements finis, la dérivée existe donc même pour $t = 0$, et elle est égale à $f(Y)\cos\theta$.

Je dis maintenant que cette fonction $\varphi(X)$ tend vers zéro quand $L(O, X)$ augmente indéfiniment. En effet nous venons d'établir qu'on a

$$\varphi(X) = \int_{a_m=0}^{(m-1)} F(X, A) f(A)\, dS_A, \tag{6}$$

où a fonction $F(X, A)$, dont l'expression résulte de la formule (3), vaut $O[L^{2-m}(X, A)]$. Dans le champ $2L(X, A) < L(O, X)$, la fonction intégrée vaut $O[L^{-2}(O, X) L^{2-m}(X, A)]$, et par suite la partie correspondante de l'intégrale vaut $O[L^{-1}(O, X)]$. Dans le champ $2L(O, A) < L(O, X)$, la fonction intégrée vaut $O[L^{-2}(O, A) L^{2-m}(O, X)]$; si donc m est $\geqq 4$, la partie correspondante de l'intégrale vaut encore $O[L^{-1}(O, X)$; si m est égal à 3, nous remarquerons que f est borné, et que par suite l'intégrale correspondant au champ commun à $2L(O, A) < L(O, X)$ et à $L(O, A) < 1$ vaut $O[L^{-1}(O, X)]$; la partie restante du champ $2L(O, A) < L(O, X)$ (si cette partie existe) donne une intégrale qui vaut $O[L^{-1}(O, X)\log L(O, X)]$. Dans la région où l'on a simultanément

$$2L(O, A) > L(O, X) \qquad \text{et} \qquad 2L(X, A) > L(O, X),$$

la fonction intégrée vaut $O[L^{-m}(O, A)]$; l'intégrale correspondante vaut donc $O[L^{-1}(O, X)]$. Ainsi notre fonction v vaut $O[L^{-1}(O, X)]$ si m est $\geqq 4$, et $O[L^{-1}(O, X) \log L(O, X)]$ pour $m = 3$; elle tend donc bien vers zéro quand X s'éloigne indéfiniment.

La formule (3) définit donc la fonction dont nous avions affirmé l'existence au début du paragraphe. Nous allons prouver maintenant que *cette fonction est harmonique* dans le champ $x_m > 0$. Les dérivées premières et secondes de la fonction F par rapport aux coordonnées de X valent évidemment $O[L^{1-m}(X, A)]$ et $O[L^{-m}(X, A)]$. Par suite les dérivées secondes de v se calculent par double dérivation sous le signe $\int$, pourvu que x_m soit positif. Notre démonstration se ramène donc à prouver que F(X, A) est harmonique par rapport à X. Or si nous passons aux variables ξ_α, on constate que $\frac{\partial F}{\partial \xi_m}$ est le produit de $L^{2-m}(X, A)$ par une constante; c'est donc une fonction harmonique. Donc le laplacien de F ne dépend pas de ξ_m. Mais ce laplacien, qui vaut $O[L^{-m}(X, A)]$, tend vers zéro quand ξ_m tend vers l'infini; donc il est identiquement nul, ce qui achève la preuve annoncée.

Cette fonction v est donc une solution du problème posé au paragraphe 1. D'après le paragraphe 2, ce problème a donc toujours une et une seule solution.

4. **Expression de la fonction F.** — Un calcul élémentaire prouve qu'on a

$$(m-2)\, I_m \sin^2\Theta = (m-3)\, I_{m-2} - \cos\Theta \qquad (m \geqq 4),$$

ce qui permet de calculer I_m de proche en proche, sachant qu'on a

$$I_2 = \frac{\Theta}{\sin\Theta}, \qquad I_3 = \frac{1}{1+\cos\Theta}.$$

On trouve ainsi

$$I_4 = \frac{\Theta - \sin\Theta\cos\Theta}{2\sin^3\Theta},$$

$$I_5 = \frac{2+\cos\Theta}{3(1+\cos\Theta)^2},$$

$$I_6 = \frac{3(\Theta - \sin\Theta\cos\Theta) - 2\cos\Theta\sin^3\Theta}{8\sin^5\Theta},$$

et ainsi de suite. L'expression de la fonction F qui figure dans la formule (6) est alors

$$\text{(7)}\qquad F(X, A) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} L^{2-m}(X, A)\, \varpi(\psi, \varphi),$$

avec

$$\text{(8)}\qquad \varpi(\psi, \varphi) = \cos^2\theta + (m-2)\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi)\, I_m(\Theta);$$

ces formules sont valables pour $m \geqq 3$.

La fonction F étant continue tant que les points sont distincts, et situés : le premier X dans le domaine $x_m > 0$, le second A sur $a_m = 0$, il est évident que $\varpi(0, \varphi) = \varpi_0$ ne peut dépendre de φ; nous le vérifions sur la formule (8), qui donne

$$\varpi(0, \varphi) = \varpi_0 = \cos^2\theta + (m-2)\sin^2\theta\cos\theta\, I_m(\theta) = J_m(\theta);$$

pour $m > 3$, cela s'écrit aussi

$$\varpi_0 = (m-3)\cos\theta\, I_{m-2}(\theta) \qquad (m > 3).$$

On trouve ainsi

$$J_3(\theta) = \cos\theta, \qquad J_4(\theta) = \frac{\theta}{\operatorname{tang}\theta},$$
$$J_5(\theta) = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}, \qquad J_6(\theta) = 3\,\frac{\theta\cos\theta - \sin\theta\cos^2\theta}{2\sin^3\theta},$$

et ainsi de suite. On voit que ϖ_0 est toujours positif pour $m = 3$; l'expression où figure I_{m-2}, rapprochée de la formule (5), nous permet d'affirmer que ϖ_0 est toujours positif, quel que soit $m \geqq 3$ [on verra même au Chapitre IV, paragraphe 4, que $\varpi(\psi, \varphi)$ est toujours positif et non nul].

Si le point X sort de la région $x_m \geqq 0$, la fonction I_m reste continue, à moins que Θ ne devienne égal à π : cela résulte du paragraphe 3. Si Θ dépasse $\frac{\pi}{2}$, il est évident que I_m reste compris entre

$$\int_0^{+\infty} (\sin^2\Theta + t^2)^{-\frac{m}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \sin^{1-m}\Theta$$

et le double de cette quantité; I_m augmente donc indéfiniment quand Θ

tend vers π. Or Θ n'est égal à π que si l'on a $\varphi = \pi$ et $\psi = \pi - \theta$. La fonction $F(X, A)$ reste donc continue et harmonique par rapport à X, sauf si ce point vient sur la demi-droite issue de A et parallèle à la direction $(\sin\theta, 0, \ldots, 0, -\cos\theta)$ (le point X est alors en A ou dans la région $x_m < 0$).

5. **Étude de la fonction** w. — Exprimons les coordonnées $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ d'un point variable sur l'hypersphère $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2 = 1$ en fonctions de $m - 1$ paramètres, dont deux peuvent être des angles ψ et φ tels qu'on ait

$$\eta_m = \cos\psi, \qquad \eta_1 = -\sin\psi\cos\varphi.$$

Si nous posons $x_\alpha - a_\alpha = r\eta_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ r \geqq 0)$, on peut regarder r et les $m - 1$ paramètres des η_α comme un système de coordonnées polaires du point X. En désignant par Δ le laplacien, on trouve, pour toute fonction v,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + r^{-2}\mathcal{F}v,$$

où $\mathcal{F}v$ est l'invariant différentiel du second ordre, de Beltrami, calculé en regardant r comme constant.

Appliquons cela à la fonction harmonique $F(X, A)$; la formule (7) nous donne

$$\mathcal{F}w = 0,$$

c'est-à-dire que w *est une fonction harmonique du point* $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, sauf au point $(\sin\theta, 0, \ldots, -\cos\theta)$.

D'après nos calculs, l'expression $\frac{\partial F}{\partial x_m} - \operatorname{tang}\theta\frac{\partial F}{\partial x_1}$ est le produit d'une constante par $x_m L^{-m}(X, A)$, ce qui fait *zéro* quand x_m s'annule. Cela se traduit par une condition relative à w. En effet, pour $x_m = 0$, on a $\psi = \frac{\pi}{2}$. Pour cette valeur de ψ, nous trouvons

$$\frac{\partial F}{\partial x_m} - \operatorname{tang}\theta\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-1}}\left[\frac{\partial w}{\partial\psi} + \operatorname{tang}\theta\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial\varphi} + (m-2)\operatorname{tang}\theta\cos\varphi . w\right];$$

nous avons donc

$$(9)\qquad \frac{\partial w}{\partial \psi}+\left[\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial \varphi}+(m-2)\cos\varphi.w\right]\tang\theta=0\qquad \text{pour}\quad \psi=\frac{\pi}{2}.$$

L'invariant de Beltrami donne lieu à la formule de réciprocité

$$\int^{(m-1)}(v\mathcal{F}u-u\mathcal{F}v)\,dS=\int^{(m-2)}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)d\sigma,$$

où l'intégrale du premier membre est étendue à une région donnée, dont l'élément est dS; l'intégrale du second membre est étendue à la frontière de cette région dont l'élément est $d\sigma$, et n est la normale (supposée existante et continûment variable), dirigée vers l'extérieur; la formule a lieu dans le cas où les dérivées secondes de u et de v existent et sont continues, et ce cas nous suffit. Appliquons la formule aux fonctions w et un dans la région $\psi<\psi_1\leqq\frac{\pi}{2}$; nous trouvons, en supprimant l'indice de ψ,

$$(10)\qquad \int_0^{\pi}\frac{\partial w}{\partial \psi}(\psi,\varphi)\sin^{m-3}\varphi\,d\varphi=0\qquad \left(\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Appliquons la même formule aux fonctions w et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\sin^{2-m}t\,dt$ dans la région $\psi_0<\psi<\psi_1$, en supposant $0<\psi_0<\psi_1\leqq\frac{\pi}{2}$; on vérifie que les deux fonctions sont harmoniques dans cette région; en faisant tendre ψ_0 vers zéro et en supprimant l'indice de ψ, nous obtenons

$$(11)\qquad \int^{(m-2)}w(\psi,\varphi)\,d\sigma=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin^{m-2}\psi\,w_0\qquad\left(\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

résultat qui s'écrit aussi

$$\int_0^{\pi}w(\psi,\varphi)\sin^{m-3}\varphi\,d\varphi=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}w_0\qquad\left(\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right);$$

autrement dit, la valeur moyenne de w sur la variété $\psi=$ constante, est w_0.

6. **Dérivées de** u. — Supposons que f remplit une condition de Hölder; nous pouvons alors affirmer que les dérivées de u existent et remplissent des conditions de Hölder dans la région $x_m \geqq 0$. Dans ce paragraphe, nous démontrerons la continuité de la dérivée relative à x_m; pour le reste, il suffira de se reporter d'une part à l'expression qui sera obtenue pour u dans le paragraphe suivant, d'autre part à des propositions connues, relatives au potentiel de simple couche.

Pour $x_m > 0$, les formules (6) et (7) entraînent

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = -\frac{\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{a_m=0}^{(m-1)} \left[(m-2)w\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial \psi}\sin\psi\right] \frac{f(A)}{r^{m-1}}\, dS_A,$$

car l'intégrale converge uniformément quand x_m a une borne inférieure positive. Soit X′ la projection de X sur $x_m = 0$, et soit R un nombre positif donné. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_m} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \Bigg\{ &\int_{L(X',A)<R}^{(m-1)} \left[(m-2)w\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial \psi}\sin\psi\right] \frac{f(A)-f(X')}{r^{m-1}}\, dS_A \\ &+ f(X') \int_{L(X',A)<R}^{(m-1)} \left[(m-2)w\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial \psi}\sin\psi\right] \frac{dS_A}{r^{m-1}} \\ &+ \int_{L(X',A)>R}^{(m-1)} \left[(m-2)w\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial \psi}\sin\psi\right] \frac{f(A)}{r^{m-1}}\, dS_A \Bigg\}.\end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme de l'accolade sont continus dans la région $x_m \geqq 0$. En posant $L(X', A) = \rho$, le second terme, multiplié par le facteur placé devant l'accolade, devient

$$\begin{aligned}&-\frac{f(X')}{\pi} \int_0^R \rho^{m-2}(\rho^2 + x_m^2)^{\frac{1-m}{2}} \\ &\qquad \times \int_0^\pi \left[(m-2)w\cos\psi + \frac{\partial w}{\partial \psi}\sin\psi\right] \sin^{m-3}\varphi\, d\varphi\, d\rho \\ &= -\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} w_0 f(X') \int_0^R \rho^{m-2}(\rho^2 + x_m^2)^{\frac{1-m}{2}} \cos\psi\, d\rho \\ &= -\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} w_0 x_m f(X') \int_0^R \rho^{m-2}(\rho^2 + x_m^2)^{-\frac{m}{2}}\, d\rho;\end{aligned}$$

si nous introduisons la variable d'intégration $t = \frac{\rho^2}{\rho^2 + x^2_m}$, nous trouvons que, si x_m tend vers zéro, ce terme a la même limite que $-\varpi_0 f(X')$. Donc $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ est continu dans la région $x_m \geqq 0$, ainsi qu'il avait été annoncé.

Nous allons transformer l'expression de la valeur prise par cette dérivée en un point X situé sur $x_m = 0$. Cette valeur est, d'après ce qu'on vient de voir,

$$-\varpi_0 f(X) - \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\left[\int_{r<R}^{(m-1)} \frac{\partial \varpi}{\partial \psi} \frac{f(A) - f(X)}{r^{m-1}} dS_A \right.$$
$$\left. + \int_{r>R}^{(m-1)} \frac{\partial \varpi}{\partial \psi} \frac{f(A)}{r^{m-1}} dS_A\right].$$

En faisant tendre R vers zéro, cela devient

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = -\varpi_0 f(X) - \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}$$
$$\times \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{\partial \varpi}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \frac{f(A)}{r^{m-1}} dS_A \qquad (x_m = 0), \tag{12}$$

l'intégrale du second membre étant prise en valeur principale, en excluant les domaines infiniment petits $r < R$.

7. **Potentiel de simple couche.** — Ce résultat nous permet de mettre u sous la forme d'un potentiel de simple couche

$$u(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{r^{m-2}} dS_A. \tag{13}$$

En effet, si x_m tend vers zéro par valeurs positives, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = -\sigma(X) \qquad (x_m = 0); \tag{14}$$

on a donc nécessairement

$$(15) \qquad \sigma(X) = w_0 f(X) + \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{\partial w}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \frac{f(A)}{r^{m-1}} dS_A.$$

Toutefois il n'est pas encore démontré que le potentiel ainsi trouvé est identique à u. Mais ce potentiel s'annule à l'infini [même démonstration que pour la fonction v représentée par (6), car $\sigma(X)$ vaut

$$O[L^{-1-k}(O, X)] \qquad (0 < k < 1)$$

quand $L(O, X)$ tend vers l'infini]; donc la différence entre u et ce potentiel s'annule à l'infini, et sa dérivée par rapport à x_m s'annule pour $x_m = 0$; comme cette différence est harmonique pour $x_m > 0$, et qu'elle atteint nécessairement ses extrema en des points situés à distance finie dans la région $x_m \geqq 0$, nous voyons qu'elle est constante (¹); étant nulle à l'infini, elle est nulle partout, ce que nous voulions établir.

Observons que la fonction σ représentée par (15) remplit une condition de Hölder. En effet, si R est un nombre positif donné, et si l'on étend l'intégrale à l'extérieur d'une hypersphère S_2 de rayon $2R$, la fonction représentée par l'intégrale dans l'hypersphère concentrique S_1 de rayon R admet des dérivées continues; d'autre part l'intégrale principale étendue à l'intérieur de S_2 remplit dans S_1 une condition de Hölder (*i*, Chap. I, § 8); nous sommes donc déjà certains que σ remplit une condition de Hölder dans toute région bornée. On peut maintenant démontrer, comme pour la fonction v représentée par (6), que les dérivées de l'intégrale étendue à l'extérieur de S_2 tendent uniformément vers zéro quand le centre Y de S_1 et de S_2 s'éloigne indéfiniment. Donc σ remplit, dans tout domaine S_1, une condition de Hölder dont le coefficient est indépendant de Y. Comme en outre σ est borné, il en résulte bien que $\sigma(X)$ *remplit une condition de Hölder dans toute la variété* $x_m = 0$.

(¹) *Problèmes de valeurs à la frontière, relatifs à certaines données discontinues* (*Bull. Société math.*, t. 61, 1933, p. 1 à 54), spécialement Chap. IV, § 3.

On peut en déduire que les dérivées de u remplissent des conditions de Hölder dans toute la région $x_m > 0$ (1).

Le fait que la fonction u, représentée par (13), où σ remplit une condition de Hölder, remplit notre condition à la frontière, se traduit par l'identité

$$\sigma(X) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \operatorname{tang}\theta \int_{a_m=0}^{(m-1)} \frac{x_1 - a_1}{r^m} \sigma(A)\, dS_A = f(X), \tag{16}$$

où l'intégrale doit se prendre en valeur principale, en excluant des hypersphères infiniment petites dont le centre est X(i, Chap. IV, § 1). La formule (15) représente la seule fonction σ, valant

$$O[L^{-1-k}(O, X)] \qquad (0 < k < 1)$$

quand X s'éloigne indéfiniment, qui satisfait à cette équation (16). Nous posons, pour $x_m = a_m = 0$,

$$G(X, A) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \frac{x_1 - a_1}{r^m} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \frac{\cos\varphi}{r^{m-1}}, \tag{17}$$

$$H(X, A) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-1} w_0 \operatorname{tang}\theta} \frac{\partial w}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \frac{\omega(\varphi)}{r^{m-1}}; \tag{18}$$

on a vu (§ 4) que w_0 n'est pas nul. Les formules (16) et (15) s'écrivent alors

$$\sigma(X) - \operatorname{tang}\theta \int^{(m-1)} G(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = f(X), \tag{19}$$

$$\sigma(X) = w_0 \left[f(X) + \operatorname{tang}\theta \int^{(m-1)} H(X, A) f(A)\, dS_A \right]. \tag{20}$$

G et H sont des noyaux d'intégrales principales; ces noyaux sont positivement homogènes par rapport à toutes les différences $x_\alpha - a_\alpha$. En désignant par $\Phi(X, \theta)$ une certaine fonction indépendante de f, et en remplaçant σ dans (19) par son expression (20), nous voyons qu'on a, d'après le Chapitre I, paragraphe 10 (le champ infini ne causant pas

(1) *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann, et sur certains problèmes non linéaires mixtes* (*Ann. scient. École norm. sup.*, t. 49, 1932, p. 1 à 104 et 245 à 308), spécialement Chapitres VII et XI. Le raisonnement peut se simplifier pour l'objet actuel,

de difficulté),

$$\varpi_0 f(X)[1 + \Phi(X, \theta)\,\mathrm{tang}^2\theta]$$
$$+\varpi_0\,\mathrm{tang}\,\theta \int^{(m-1)} \Big[H(X, Y) - G(X, Y)$$
$$- \mathrm{tang}\,\theta \int^{(m-1)} G(X, A)\,H(A, Y)\,dS_A\Big] f(Y)\,dS_Y = f(X),$$

quelle que soit la fonction $f(X)$, qui doit seulement remplir une condition de Hölder. On peut raisonner comme en calcul des variations, et conclure de là les identités

$$1 + \Phi(X, \theta)\,\mathrm{tang}^2\theta = \varpi_0^{-1}, \tag{21}$$

$$H(X, Y) - G(X, Y) - \mathrm{tang}\,\theta \int^{(m-1)} G(X, A)\,H(A, Y)\,dS_A = 0. \tag{22}$$

Si maintenant nous remplaçons f dans (20) par le premier membre de (19), on doit obtenir une identité valable quelle que soit la fonction σ, assujettie à une condition de Hölder; cela donne

$$H(X, Y) - G(X, Y) - \mathrm{tang}\,\theta \int^{(m-1)} H(X, A)\,G(A, Y)\,dS_A = 0. \tag{23}$$

En définissant H, nous avons implicitement supposé que θ n'est pas nul. Si pourtant θ tend vers zéro, H tend vers G, et $\Phi(X, \theta)$ tend vers $\frac{1}{m-1}\cdot$ Si σ satisfait à l'équation (19), les formules (20) à (23) subsistent quand on remplace toutes les grandeurs par leurs limites pour $\theta = 0$.

8. **Domaine complexe.** — Faisons varier θ continûment dans le champ complexe, sans toutefois lui donner des valeurs telles que $\varpi\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$ ne soit pas holomorphe pour tout angle φ réel. D'après la formule (8) et d'après la relation de récurrence (§ 4) qui permet de calculer I_m, $\varpi(\psi, \varphi)$ est holomorphe tant que $\sin\Theta$ ne s'annule pas; si Θ est un multiple de 2π, la formule (5) montre que I_m, et par suite ϖ, sont encore holomorphes; donc $\varpi(\psi, \varphi)$ ne cesse d'être holomorphe que si l'on a $1 + \cos\Theta = 0$; pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, cela s'écrit

$$1 + \sin\theta\cos\varphi = 0.$$

Cette équation en φ n'a de racine réelle que si $\sin\theta$ est réel et de valeur absolue au moins égale à *un*, c'est-à-dire si $\mathcal{R}\theta$, partie réelle de θ, est égal à $\frac{\pi}{2}$ plus un multiple de π. Nous ferons donc varier θ dans le champ

$$-\frac{\pi}{2} < \mathcal{R}\theta < \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

La fonction $w(\psi, \varphi)$ dépend aussi de θ et nous voyons même que $w\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$ et $\frac{\partial w}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$ sont des fonctions holomorphes de θ et de φ. Le premier membre de (10) est donc holomorphe par rapport à θ dans le champ (24); comme cette fonction est nulle aux points réels positifs du champ, elle est nulle dans tout le champ (24). Donc la fonction H définie par la formule (18) est un noyau d'intégrale principale, quel que soit θ dans le champ (24).

Montrons que w_0 *ne peut s'annuler dans le champ* (24). C'est évident pour $m=3$, puisque alors w_0 est $\cos\theta$. Pour $m \geqq 4$, il nous suffit de prouver que $I_{m-2}(\theta)$ ne peut s'annuler. Considérons l'expression (5), établie pour θ réel, et remplaçons-y Θ par θ et m par $m-2$. On peut regarder la fonction intégrée comme une fonction rationnelle de $\sqrt{\sin^2\theta + t^2}$, qui varie de *un* à $+\infty$. Prenons ce radical

$$x = \sqrt{\sin^2\theta + t^2}$$

comme nouvelle variable d'intégration; si θ appartient à la partie réelle du champ (24), x est une fonction croissante de t dans tout le champ d'intégration, et nous trouvons

$$I_{m-2}(\theta) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{x^2 - \sin^2\theta}}, \tag{25}$$

expression où le radical est positif. Si maintenant θ prend une valeur imaginaire du champ (24), considérons encore l'intégrale du second membre de (25), le chemin d'intégration étant réel, et le radical ayant pour $x=1$ la détermination $\cos\theta$. Nous remarquons que, dans tout le champ (24), $\cos^2\theta$ n'est ni nul ni négatif; donc le point $x^2 - \sin^2\theta$, qui décrit une demi-droite parallèle au demi-axe réel positif, ayant pour origine le point $\cos^2\theta$, ne vient jamais à l'origine. Imposons au radical de varier continûment : la détermination $\cos\theta$ que nous lui imposons pour $x = 1$, suffit donc à le définir pour x réel et $\geqq 1$. L'intégrale ainsi définie représente évidemment une fonction holomorphe dans le champ (24) : la formule (25) a donc lieu dans tout ce champ. Or l'argument de $x^2 - \sin^2\theta$ varie toujours dans le même sens, depuis une valeur comprise entre $-\pi$ et π jusqu'à zéro; cet argument n'est jamais égal à $-\pi$ ni à π. L'argument de $\sqrt{x^2 - \sin^2\theta}$ varie donc, toujours dans le même sens, depuis une valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à zéro. La partie réelle de la fonction intégrée est donc toujours positive, et par suite la partie réelle de l'intégrale est positive. Nous avons donc bien prouvé que cette intégrale n'est pas nulle.

La fonction $f(X)$ étant donnée, on va voir que la fonction σ qui en résulte par la formule (20), est holomorphe par rapport à θ dans le champ (24). En effet, si l'on étend l'intégrale au champ

$$\eta^{-1} > L(X, A) > \eta \qquad (0 < \eta < 1),$$

le résultat est holomorphe. Si maintenant η tend vers zéro, la convergence est uniforme pour tout ensemble fermé et borné situé dans (24). Donc la limite est holomorphe dans (24), et il en est de même de σ.

On verra facilement en outre que, pour une fonction $f(X)$ donnée, et pour un ensemble borné et fermé, donné dans (24), $\sigma(X)$ remplit une condition de Hölder indépendante de θ.

En substituant cette fonction σ dans le premier membre de (19), le même raisonnement que pour la formule (20) prouvera que le résultat est holomorphe par rapport à θ dans le champ (24) : *ce résultat est donc toujours* $f(X)$.

Comme dans l'hypothèse du paragraphe 7, on en déduit les formules (21) et (22). La formule (23) se prouve d'une façon semblable.

Ainsi *les résultats du paragraphe* 7 *sont valables quel que soit* θ *dans le champ* (24).

Au lieu de θ, il nous sera avantageux d'introduire dans la suite la variable $\mu = \operatorname{tang}\theta$. Alors *les résultats sont valables pourvu que* μ *ne soit pas à la fois purement imaginaire et au moins égal à un en valeur absolue*. On doit se souvenir que $\mathcal{R}\cos\theta$ est toujours positif.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS A INTÉGRALES PRINCIPALES.

1. **Formation d'un noyau auxiliaire.** — Nous reprenons les équations à intégrales principales d'ordre m étudiées dans le premier article (i, Chap. III), dont nous conservons les notations. Nous supposons cette fois qu'on a $m \geqq 2$. Nous nous proposons de former un noyau auxiliaire $H(X, \Xi; \lambda)$ qui jouisse des propriétés déjà indiquées (i, Chap. III, § 3). Soit X un point donné sur la variété $\mathcal{V}$ à laquelle l'équation se rapporte. Nous changeons linéairement de paramètres, de façon que tous les paramètres de ce point X deviennent nuls, et de façon que, pour ce point X, maintenant nommé O, la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ du noyau G devienne (i, Chap. II, § 3)

$$-\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, c_\alpha c_\beta}\, a_1 L^{-m-1}(O, A);$$

les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ et c_α sont toutes prises au point donné. L'élément de $\mathcal{V}$ devient, avec les paramètres actuels, $\Omega\sqrt{D}\, d(a_1, \ldots, a_m)$. En prenant Ω et D au point donné, nous posons encore

$$(1) \qquad \mu = \frac{\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \lambda \Omega \sqrt{D\, \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, c_\alpha c_\beta},$$

où λ est le paramètre qui figure dans l'équation. Nous posons

$$(2) \qquad G^*(X, A) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} a_1 L^{-m-1}(X, A),$$

de sorte que $\mu G^*(O, A)$ est la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ de $\lambda G(O, A)\Omega\sqrt{D}$. Soit de même

$$(3) \qquad H^*(X, A; \mu) = \omega L^{-m}(X, A),$$

où ω désigne une fonction de la direction XA, telle que $\mu H^*(O, A; \mu)$

soit la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ de

$$\lambda H(O, A; \lambda)\Omega\sqrt{D}.$$

La condition imposée à H (i, Chap. III, § 3) se traduit (i, Chap. I, § 11) par

$$(4)\quad H^*(X, Y; \mu) - G^*(X, Y) - \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} H^*(X, A; \mu)\, G^*(A, Y)\, d(a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

Mais G^* n'est autre que la fonction G du Chapitre II, § 7, formule (17), sauf le remplacement de m par $m+1$. Donc l'équation (4) n'est autre que l'équation (23) du Chapitre II, § 7, où l'on a remplacé m par $m+1$ et $\operatorname{tang}\theta$ par μ. Nous pouvons donc prendre H^* égal à la fonction H du Chapitre précédent, après ces remplacements.

La partie positivement homogène et d'ordre $-m$ de H étant ainsi déterminée en chaque point X de $\mathcal{V}$, on peut construire un noyau H par le même procédé que dans l'article cité (i, Chap. III, § 4).

La fonction ω dépend seulement de μ et de l'angle φ tel qu'on ait

$$a_1 - x_1 = L(X, A)\cos\varphi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

On peut déduire cette fonction du Chapitre précédent, ainsi que la fonction w_0 qui représente l'inverse du facteur $1 + \lambda^2\Phi(X; \lambda)$ (i, Chap. III, § 3).

Nos calculs s'appliquent pourvu qu'en aucun point X la fonction μ ne soit à la fois purement imaginaire et de valeur absolue au moins égale à *un*. Nous excluons ainsi de nos considérations un système C de deux coupures situées sur l'axe purement imaginaire, dans le plan de la variable complexe λ; ces coupures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine, et elles s'étendent jusqu'à l'infini. On peut faire en sorte que, hors des coupures C, le noyau auxiliaire $H(X, A; \lambda)$ soit holomorphe par rapport à λ, pourvu que X et A soient distincts (i, Chap. III, § 4).

2. **Solution et discussion de l'équation à intégrale principale.** — Comme le facteur $1 + \lambda^2\Phi$, qui est égal à w_0^{-1}, n'est jamais nul, tous les raisonnements développés dans l'article qui a précédé celui-ci, Chapitre III, paragraphes 6 à 8, s'appliquent aussi dans le cas général actuel, c'est-à-dire quel que soit l'ordre m de l'intégrale. Nous savons

donc résoudre et discuter l'équation intégrale donnée. La discussion est résumée en trois propositions, semblables aux théorèmes de Fredholm, qui sont énoncées dans l'article cité (i, Chap. III, § 6 et 8). Si λ vient sur les coupures C, et dans ce cas seulement, ces propositions n'indiquent rien; cela n'arrive jamais quand toutes les données sont réelles.

Pour certains noyaux d'intégrales simples ($m = 1$), nous avons vu que les coupures C ne s'étendent pas jusqu'à l'infini; nous avons vu aussi (i, Chap. III, § 9) que, pour les mêmes noyaux, les équations de première espèce se traitent comme des équations de Fredholm. Nos raisonnements ne nous permettent de rien affirmer de tel quand m est $\geqq 2$: les coupures C que nous définissons alors s'étendent toujours jusqu'à l'infini.

3. **Exemple.** — Quoique nous ayons considéré ici le cas des intégrales multiples, il n'est pas inutile d'indiquer un exemple d'équation à intégrale principale *simple*, sur lequel on peut vérifier facilement les conclusions générales.

Prenons comme variété $\mathcal{V}$ une circonférence de rayon *un*, et comme paramètre l'abscisse curviligne d'un point de $\mathcal{V}$. En désignant par $f(x)$ une fonction donnée d'un point de $\mathcal{V}$, cette fonction remplissant une condition de Hölder (c'est aussi une fonction périodique de x, avec la période 2π), nous considérons l'équation

$$\rho(x) - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\,\rho(y)\,dy = f(x), \tag{5}$$

où l'intégrale doit se prendre en valeur principale, au sens de Cauchy. Ici C n'est plus une véritable coupure, mais se réduit au système des deux points $\lambda = \pm i$. On vérifiera que, pour toute autre valeur de λ, il y a une et une seule solution

$$\rho(x) = \frac{f(x)}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda}{2\pi(1+\lambda^2)}\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2} + \lambda\right) f(y)\,dy. \tag{6}$$

L'équation de première espèce

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\,\rho(y)\,dy = f(x) \tag{7}$$

n'est soluble que si l'on a

$$(8) \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0;$$

si cette condition est satisfaite, on a

$$(9) \qquad \rho(x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cot\mathrm{g}\, \frac{x-y}{2} f(y)\, dy + k,$$

où k est une constante arbitraire.

Enfin si λ reçoit la valeur i, l'équation homogène admet comme solutions toutes les fonctions e^{-nix}, où n est un entier positif quelconque. Cela fait une infinité de solutions linéairement indépendantes, ce qui ne saurait arriver quand λ n'est pas sur C.

4. **Noyau symétrique gauche.** — Si le noyau d'intégrale principale $G(X, A)$, relatif à une variété d'ordre $m \geqq 1$, est symétrique gauche, c'est-à-dire si l'on a

$$G(A, X) = -G(X, A),$$

on démontre, comme pour les équations de Fredholm [1], que le noyau résolvant ne peut avoir de pôles que sur l'axe purement imaginaire; nous n'affirmons pas qu'il existe effectivement des pôles, mais, s'il y en a, ce sont des pôles simples.

CHAPITRE IV.

APPLICATION A CERTAINS PROBLÈMES DE VALEURS-FRONTIÈRE.

1. **Équations du type elliptique à m variables.** — Dans le travail qui a précédé celui-ci (i, Chap. IV), un problème relatif aux équations du type elliptique a été posé d'une façon générale, pour un nombre quelconque de variables, et résolu seulement dans les cas de deux et trois variables. Ce qui précède nous permet d'affirmer que les résultats

---

(1) TRAJAN LALESCO, *Introduction à la théorie des équations intégrales* (un vol. VIII + 152 pages, Paris, 1912), III, n° 11.

obtenus sont valables pour tout nombre m de variables. Il est d'ailleurs inutile de reprendre les démonstrations, qui sont indépendantes de m.

Cependant il est intéressant de généraliser ces résultats. Nous généraliserons d'abord l'équation du type elliptique, puis la condition à la frontière.

2. **Généralisation de l'équation du type elliptique.** — Soit $\mathcal{M}$ une variété close, à $m-1$ dimensions, située dans l'espace à m dimensions. On peut, par hypothèse, définir un nombre fini de régions telles que chaque point de $\mathcal{M}$ soit intérieur à l'une d'elles, et telles que, dans chacune d'elles, les coordonnées x_α d'un point de $\mathcal{M}$ soient fonctions de $m-1$ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$, dont le champ de variation est borné; on suppose que les dérivées des fonctions x_α existent et remplissent des conditions de Hölder, et que les jacobiens d'ordre $m-1$ ne s'annulent simultanément nulle part. On ne suppose pas que $\mathcal{M}$ est d'un seul tenant.

On ne change rien aux hypothèses qui concernent la frontière $\mathcal{S}$ du domaine borné $\mathcal{D}$ (i, Chap. IV, § 2).

On suppose que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent des conditions de Hölder dans $\mathcal{D}$, et que les b_α, c et f sont continus en tout point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\mathcal{M}$. Soit $r(\mathrm{X})$ la distance d'un point X à $\mathcal{M}$; on suppose que, dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\mathcal{M}$, les fonctions b_α, c et f valent $\mathrm{O}(r^{k-1})$ $(0<k\leqq 1)$. Nous continuons à supposer que les fonctions données sur $\mathcal{S}$ remplissent des conditions de Hölder.

L'inconnue u doit être dans $\mathcal{D}$ une solution régulière de l'équation $\mathcal{F}u=f$, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire à l'équation en tout point de $\mathcal{D}-\mathcal{M}$, et que ses dérivées doivent être continues en tout point de $\mathcal{D}$ (1). *De plus u doit satisfaire sur $\mathcal{S}$ à la condition $\Theta u=\varphi$, définie comme précédemment* (i, Chap. IV, § 2).

Ce problème se traite comme le cas précédemment considéré. Il suffit pour le faire voir, d'établir que la solution élémentaire principale G d'une opération $\mathcal{F}$ du type actuel (2) possède les propriétés

(1) *Bull. de la Société math.*, t. 61, 1933, p. 1 à 54. Cet article sera désigné par la lettre h.

(2) h, III, p. 34 et suiv.

utilisées dans le cas déjà traité (i, Chap. IV, § 3). La démonstration de ce dernier point résulte aussitôt des deux lemmes qui suivent.

Soit E *un ensemble donné, borné et fermé, qui contient au moins un point de la variété* $x_m = 0$. *Soit* $l(X, Y, \Xi)$ *la distance d'un point* Ξ *à un segment de droite* XY. *Soit* $G(X, \Xi)$ *une fonction continue quand* X *et* Ξ *appartiennent à* E *et sont distincts; on suppose qu'on a*

$$G(X, \Xi) = O[L^{\lambda-m}(X, \Xi)] \qquad (0 < \lambda < m),$$
$$G(X, \Xi) - G(Y, \Xi) = L^h(X, Y)O[l^{\lambda-h-m}(X, Y, \Xi)] \qquad (0 < h \leqq 1,\ h \leqq \lambda).$$

Soit enfin $\rho(X)$ *une fonction mesurable dans* E, *et qui vaut*

$$O(|x_m|^{k-1}) \qquad (0 < k \leqq 1 < k + \lambda \leqq h + 1).$$

On forme la fonction

$$\Phi(X) = \int_E^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A;$$

je dis qu'on a

$$\Phi(X) - \Phi(Y) = \begin{cases} O[L^{\lambda+k-1}(X, Y)] & (\lambda + k < h + 1), \\ O\left[L^h(X, Y)\log\dfrac{L_0}{L(X, Y)}\right] & (\lambda + k = h + 1), \end{cases}$$

L_0 *étant une constante supérieure au maximum de* $L(X, Y)$.

En effet les parties de $\Phi(X)$ et de $\Phi(Y)$ qui proviennent de la région $L(X, A) \leqq 2L(X, Y)$ valent $O[L^{\lambda+k-1}(X, Y)]$ [1]. La partie de $\Phi(X) - \Phi(Y)$ qui provient de la région $|a_m| \geqq L(X, A) > 2L(X, Y)$ a une limitation $O[L^h(X, Y)]\int^{(m)} L^{\lambda+k-h-1-m}(X, A)\,dV_A$, ce qui entraîne les limitations de l'énoncé. Enfin la région

$$|a_m| < L(X, A), \quad L(X, A) > 2L(X, Y)$$

donne une contribution

$$O[L^h(X, Y)]\int^{(m)} L^{\lambda-h-m}(X, A)\,|a_m|^{k-1}\,dV_A,$$

---

(1) h, II, § 5 et 6.

ce qui revient encore aux limitations de l'énoncé [1]. Notre énoncé est établi.

E, G, ρ *et* L_0 *ayant les mêmes significations que ci-dessus, soit* $H(X, \Xi)$ *une fonction mesurable par rapport à* X, *valant*

$$O[L^{\mu-m}(X, \Xi)] \qquad (1-k<\mu<m).$$

On forme la fonction

$$F(X, \Xi)=\int_E^{(m)} G(X, A)\rho(A)H(A, \Xi)\,dV_A.$$

Je dis qu'on a

$$F(X,\Xi)-F(Y,\Xi)=\begin{cases} O\left[L^{\lambda+k-1}(X, Y)\,l^{\mu-m}(X, Y, \Xi)\right] & (\lambda+k<1+h),\\ O\left[L^{h}(X, Y)\log\dfrac{L_0}{L(X, Y)l}\,l^{\mu-m}(X,Y,\Xi)\right] & (\lambda+k=1+h).\end{cases}$$

Soit d'abord $L(X, \Xi)\geqq 4L(X, Y)$. La région $2L(X, A)<L(X, \Xi)$ donne une limitation du type de l'énoncé, d'après ce qui vient d'être dit pour Φ. La région $2L(\Xi, A)<L(X, \Xi)$ donne

$$O[L^{h}(X, Y)L^{\lambda+\mu+k-h-1-m}(X, \Xi)] \text{ [2]},$$

ce qui entraîne une limitation du type de l'énoncé. Enfin la région restante nous conduit à une limitation

$$O[L^{h}(X, Y)]\int^{(m)} L^{\lambda+\mu-h-2m}(X, A)\,|a_m|^{k-1}\,dV_A,$$

d'un type déjà rencontré, et qui entraîne encore les limitations de l'énoncé.

Soit maintenant $L(X, \Xi)<4L(X, Y)$. Nous supposons aussi $L(Y, \Xi)<4L(X, Y)$, sans quoi les raisonnements précédents s'appliqueraient *mutatis mutandis*. En outre nous supposons

$$\lambda+\mu+k\geqq m+1,$$

sans quoi l'on aurait $F(X, \Xi)=O[L^{\lambda+\mu+k-1-m}(X, \Xi)]$, ce qui redonnerait le résultat annoncé. Montrons d'abord que les parties de $F(X, \Xi)$ et de $F(Y, \Xi)$, qui proviennent de la région $L(\Xi, A)<8L(X, Y)$,

---

(1) h, I, § 2, intégrale I_6.

(2) h, I, § 2.

sont du type de l'énoncé; il suffit de le montrer pour $F(X, \Xi)$; il il suffit même de montrer qu'on a, pour cette partie de $F(X, \Xi)$, une limitation $O[L^{\lambda+\mu+k-1-m}(X, \Xi)]$. Or c'est ce que donnent d'abord la région $2L(X, A) < L(X, \Xi)$, puis la région $2L(\Xi, A) < L(X, \Xi)$. Dans la région définie par les inégalités simultanées $2L(X, A) > L(X, \Xi)$ et $L(X, \Xi) < 2L(\Xi, A) < 16L(X, Y)$, on a à limiter

$$O\left[\int^{(m)} L^{\lambda+\mu-2m}(\Xi, A)\,|a_m|^{k-1}\,dV_A\right],$$

ce qui, si $\lambda+\mu$ est $> m$, nous donne encore la limitation annoncée; si l'on a $\lambda+\mu = m$, ce qui est le minimum compatible avec nos hypothèses, et l'on a alors $k = 1$ et $\lambda = h$, nous trouvons $O\left[\log\frac{16L(X, Y)}{L(X, \Xi)}\right]$, ce qui est aussi $O[L^h(X, Y)L^{\mu-m}(X, \Xi)]$, et la limitation de l'énoncé en découle. Nous en avons donc fini avec la région $L(\Xi, A) < 8L(X, Y)$. La région $L(\Xi, A) > 8L(X, Y)$ donne pour $F(X, \Xi) - F(Y, \Xi)$ une part $O[L^h(X, Y)]\int^{(m)} L^{\lambda+\mu-h-2m}(\Xi, A)\,|a_m|^{k-1}\,dV_A$, ce qui entraîne encore la limitation de l'énoncé, car les inégalités $\lambda + k \leqq h + 1$ et $\mu < m$ entraînent $\lambda+\mu+k < m+h+1$. Notre nouvelle proposition est établie.

En se reportant aux travaux déjà cités, on verra que ces lemmes entraînent les propriétés dont il s'agit pour la solution élémentaire principale. Notre théorie est donc étendue aux problèmes visés dans le présent paragraphe.

3. **Généralisation de la condition à la frontière.** — Nous ne changeons plus rien maintenant aux hypothèses relatives à l'équation $\mathcal{F}u = f$, ni à celles qui regardent la frontière $\mathcal{S}$ du domaine $\mathcal{D}$. Mais nous généralisons la *définition de l'opération* Θ. Soient

$$T_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

les composantes contravariantes d'un tenseur donné sur $\mathcal{S}$; ces composantes sont relatives aux paramètres t_ν. Nous désignons par Y un point donné sur $\mathcal{S}$, et par Y_t un point dont les m coordonnées sont de la forme

$$y_\alpha - t\left(\Sigma_\beta\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\beta + \Sigma_\nu\, T_\nu \frac{\partial y_\alpha}{\partial t_\nu}\right) + O(t^{1+k}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ 0 < k < 1);$$

les ϖ_α sont les cosinus directeurs de la normale extérieure, et nous supposons que le paramètre t est positif et assez petit pour que Y_t appartienne certainement à $\mathcal{D}$. Soit encore ψ une fonction donnée sur $\mathcal{S}$. *Nous posons*

$$(1) \qquad \Theta u(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{u(Y) - u(Y_t)}{t} + \psi(Y) u(Y),$$

la limite devant être indépendante des termes $O(t^{1+k})$. Dans le cas où les dérivées de u existent et sont continues en Y, cette définition coïncide avec la définition antérieure (*i*, Chap. IV, § 2), sauf un changement dans la notation du tenseur donné sur $\mathcal{S}$.

Supposons que les T_ν remplissent des conditions de Hölder, et que les fonctions données ψ et φ soient continues sur $\mathcal{S}$. Nous voulons *trouver une fonction u, solution régulière dans $\mathcal{D}$ de l'équation $\mathcal{F} u = f$* (au sens du paragraphe précédent), *continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et remplissant sur $\mathcal{S}$ la condition $\Theta u = \varphi$.*

Si c est négatif ou nul en tout point de $\mathcal{D} - \mathcal{M}$, et si ψ est positif ou nul en tout point de $\mathcal{S}$, on voit, comme dans le cas déjà traité ([1]), que les conditions homogènes $\mathcal{F} u = 0$ et $\Theta u = 0$ n'ont que des solutions constantes. Si c ou ψ ne sont pas presque partout nuls, il n'y a donc que la solution zéro.

Plaçons-nous donc dans ce cas particulier, ψ devant en outre remplir une condition de Hölder. D'après le paragraphe précédent, nous pouvons former une fonction de Green $F(X, \Xi)$, correspondant aux opérations $\mathcal{F}$ et Θ ([2]). Considérons la fonction

$$(2) \qquad u(X) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, B)\varphi(B)\, dS_B,$$

([1]) *Voir i*, IV, § 5, qui renvoie à *h*, IV, § 3.

([2]) Dans le cas où les problèmes homogènes ont des solutions non identiquement nulles, on peut, de différentes façons, introduire des *fonctions de Green au sens élargi*. Voir Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel*, spécialement Deuxième Partie, IV, § 4.

où φ est une fonction continue donnée. *Nous allons démontrer qu'on a* $\Theta u = \varphi$.

Soit $y_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ un changement de variables, biunivoque et de jacobien non nul dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; on suppose que les $\mathcal{F} y_\alpha$ existent et sont continus quand X n'appartient pas à $\mathcal{M}$, et que ces fonctions valent $O(r^{k-1})$, où r est la distance de X à $\mathcal{S} + \mathcal{M}$. Il est alors évident, à cause des termes $O(t^{1+k})$ qui figurent dans les coordonnées de Y_t, que notre problème se change en un problème du même type, relatif aux nouvelles variables, car les dérivées de y_α remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant k (1). Nous en profitons pour nous ramener au cas où un point donné Y de $\mathcal{S}$ est intérieur à une région commune à $\mathcal{S}$ et à la variété $x_m = 0$, et où, dans cette région de $\mathcal{S}$, on a identiquement $a_{m,\alpha} = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1)$ (2); nous ne diminuons pas non plus la généralité en prenant Y pour origine, et en admettant qu'on a en ce point

$$T_2 = \ldots = T_{m-1} = 0, \qquad T_1 \geqq 0, \qquad a_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \qquad a_{\alpha,\alpha} = 1$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m).$$

L'origine appartenant à $\mathcal{S}$, on a [i, Chap. IV, § 6, formule (21)]

$$(3) \qquad F(X, O) = \frac{2\,G(X, O)}{1 + \Phi(O)} + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\,N(B, O)\,dS_B,$$

quel que soit le point X dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Or nous avons

$$G(X, O) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} L^{2-m}(X, O) + O[L^{2+h-m}(X, O)] \qquad (h > 0,\ m \geqq 3);$$

pour éviter d'avoir à considérer séparément le cas de deux variables $(m = 2)$, nous remarquons qu'on peut le ramener au cas de trois variables : il suffit de faire tourner le domaine plan autour d'un axe situé dans son plan, et qui ne rencontre pas la frontière; du fait qu'il est possible de traiter ainsi le problème, on déduira que sa solution est aussi donnée par la formule (2), où F est la fonction de Green relative au domaine plan. Nous posons, en nous bornant donc au cas où

(1) h, Chap. II, § 10 et Chap. III.
(2) *Voir* h, IV, § 1.

l'on a $m \geqq 3$,

$$(4) \qquad G^*(X, \Xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} L^{2-m}(X, \Xi) \qquad (m \geqq 3).$$

Nous désignons d'autre part par $F^*(X, \Xi)$ la fonction nommée $F(X, \Xi)$ au Chapitre II, § 3, formule (6); comme dans ce passage, nous supposons ici que la dernière coordonnée ξ_m de Ξ est nulle; le paramètre tang $\theta = \mu$ qui figure dans la définition de F^*, est pris égal à T_1. En suppposant que X appartient à la région $x_m > 0$, nous appliquons aux fonctions $F^*(A, \Xi)$ et $G^*(X, A)$, toutes deux harmoniques par rapport à A, la formule de Green dans la région définie par les inégalités simultanées

$$a_m > 0, \qquad L(O, A) < R, \qquad L(X, A) > \eta, \qquad L(\Xi, A) > \eta;$$

en faisant tendre R vers l'infini et η vers zéro, nous trouvons

$$(5) \quad F^*(X, \Xi) = w_0 G^*(X, \Xi) - \int_{a_m=0}^{(m-1)} \left[G^*(X, A) \frac{\partial F^*(A, \Xi)}{\partial a_m} - F^*(A, \Xi) \frac{\partial G^*(X, A)}{\partial a_m} \right] dS_A,$$

w_0 étant la grandeur définie au Chapitre II, § 4. Appliquons maintenant la même formule, dans le même domaine, aux fonctions $F^*(A, \Xi)$ et $G^*(X', A)$, où X' est le symétrique de X par rapport à $a_m = 0$; nous trouvons

$$(6) \qquad 0 = w_0 G^*(X', \Xi) - \int_{a_m=0}^{(m-1)} \left[G^*(X', A) \frac{\partial F^*(A, \Xi)}{\partial a_m} - F^*(A, \Xi) \frac{\partial G^*(X', A)}{\partial a_m} \right] dS_A.$$

Mais, pour $\xi_m = a_m = 0$, on a évidemment

$$G^*(X, \Xi) = G^*(X', \Xi), \qquad \frac{\partial G^*(X', A)}{\partial a_m} = - \frac{\partial G^*(X, A)}{\partial a_m}.$$

En ajoutant membre à membre les formules (5) et (6), nous trouvons donc

$$(7) \qquad F^*(X, \Xi) = 2 w_0 G^*(X, \Xi) - 2 \int_{a_m=0}^{(m-1)} G^*(X, A) \frac{\partial F^*(A, \Xi)}{\partial a_m} dS_A.$$

Or, d'après ce que nous savons, on a $w_0[1+\Phi(O)]=1$. D'autre part $-\dfrac{\partial F^\star(A, O)}{\partial a_m}$ est la partie positivement homogène et d'ordre $1-m$ de la fonction $N(A, O)$ du point A. En comparant les formules (3) et (7), nous voyons donc que $F^\star(X, O)$ est la partie positivement homogène et d'ordre $2-m$ de $F(X, O)$.

Définissons maintenant les fonctions $T_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, m-1)$ et ψ, au voisinage de O, en décidant que ces fonctions sont indépendantes de x_m. Alors la fonction

$$-a_{m,m}(X)\frac{\partial F}{\partial x_m}(X, O)+\Sigma_\nu T_\nu(X)\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(X, O)+\psi(X)F(X,O)$$

est égale au produit de x_m par une fonction positivement homogène et d'ordre $-m$, ce produit étant augmenté d'une fonction

$$O[L^{j+1-m}(X, O)] \qquad (j>0);$$

le résultat est semblable quand on remplace O par un point voisin quelconque, situé sur la frontière. On en déduit, comme dans le cas où les T_ν sont tous nuls, que

$$-a_{m,m}(Y_t)\frac{\partial u}{\partial x_m}(Y_t)+\Sigma_\nu T_\nu(Y_t)\frac{\partial u}{\partial x_\nu}(Y_t)+\psi(Y_t)u(Y_t),$$

où u est défini par (2) et Y_t est le point qui figure dans la définition de Θ, tend vers la limite $\varphi(Y)$ quand t tend vers zéro; de là résulte encore, à l'aide du théorème des accroissements finis combiné avec une étude sur l'influence des termes $O(t^{1+k})$, que $\Theta u=\varphi$, *ce que nous voulions démontrer.*

Si nous revenons maintenant au problème général posé dans ce paragraphe, sans condition de signe pour c ni pour ψ, et sans condition de Hölder pour ψ, qui doit seulement être continu, sa solution va maintenant se ramener à celle d'une équation de Fredholm. Soit $c-\chi$ une fonction continue et négative en tout point de $\mathcal{D}-\mathcal{M}$, et valant $O(r^{k-1})$, et soit $\psi-\omega$ une fonction positive, qui remplit sur $\mathcal{S}$ une condition de Hölder. L'inconnue doit être dans $\mathcal{D}$ une solution régulière de l'équation

$$\mathcal{F}u-\chi u=f-\chi u;$$

u doit être continu dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et remplir la condition

$$\Theta u - \omega u = \varphi - \omega u \text{ sur } \mathcal{S}.$$

Soit $F(X, \Xi)$ la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{F}u - \chi u$ et $\Theta u - \omega u$; d'après ce qui précède, on a

$$(8) \qquad u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)\,[f(A) - \chi(A)\,u(A)]\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, B)\,[\varphi(B) - \omega(B)\,u(B)]\,dS_B.$$

Réciproquement toute solution de cette équation de Fredholm est une solution de notre problème.

On peut ainsi construire des fonctions de Green [1] sans supposer que ψ remplit une condition de Hölder.

4. **Signe d'une certaine fonction.** — Prenons pour origine un point donné O, situé sur $\mathcal{S}$. *La partie positivement homogène et d'ordre* $2-m$ *de* $F(X, O)$ *est positive et non nulle, tant que* X *est situé dans le plan tangent à* $\mathcal{S}$ *en* O, *ou du même côté de ce plan que la normale intérieure*; F signifie, dans cet énoncé, la fonction de Green d'un problème de notre type [2]. En effet cette partie de F ne dépend que des valeurs prises en O par les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ et T_ν; nous supposerons donc que c est négatif en tout point de $\mathcal{D} - \mathcal{M}$ et que ψ est positif sur tout $\mathcal{S}$. Dans ce cas, si Ξ appartient à $\mathcal{D}$, $F(X, \Xi)$ est positif quel que soit X, car il en est ainsi quand X est assez voisin de Ξ, et la fonction ne peut atteindre un minimum négatif ou nul ni dans $\mathcal{D}$ ni sur $\mathcal{S}$. Si Ξ vient en O, qui appartient à $\mathcal{S}$, la fonction $F(X, O)$ est donc positive ou nulle, quel que soit X. Donc la partie positivement homogène et d'ordre $2-m$ ne peut être nulle part négative, dans les conditions énoncées. Mais, moyennant un changement de variables, cette partie est identique à la fonction $F(X, O)$ du Chapitre II, § 3, formule (6), qui est harmonique dans la région $x_m > 0$; or cette dernière fonction, qui n'est pas identiquement nulle, ne saurait atteindre nulle part un

---

(1) Et même des fonctions de Green au sens élargi.

(2) Cela subsiste pour des fonctions de Green au sens élargi.

minimum nul; elle est donc toujours positive, ce qui démontre notre proposition.

5. **Fonctions d'un point d'une variété.** — Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions d'un point de l'espace ordinaire. Mais il n'est pas plus difficile de considérer le cas où le domaine borné $\mathcal{D}$ auquel nous avons affaire, appartient à une variété $\mathcal{V}$, sur laquelle nous ferons les mêmes hypothèses que dans un autre travail [1]. L'équation $\mathcal{F}u = f$ du type elliptique devra satisfaire aux hypothèses du travail cité, qui reviennent à celles du début de ce chapitre quand $\mathcal{V}$ se réduit à l'espace euclidien. Les hypothèses sur $\mathcal{S}$ seront les mêmes que jusqu'à présent; si Y est un point de $\mathcal{S}$, Y_t aura pour coordonnées m quantités de la forme $y_\alpha - t\left(\Sigma_\beta a^{\alpha,\beta}\varpi_\beta + \Sigma_\nu T^\nu \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial t_\nu}\right) + O(t^{1+k})$, où les T^ν sont les composantes contravariantes d'un tenseur; l'opération Θ se définit alors comme plus haut, et nous supposons que les T^ν remplissent des conditions de Hölder, et que ψ est continu, ainsi que le second membre φ de la condition $\Theta u = \varphi$. Il est inutile de reprendre les raisonnements.

On pourra aussi, grâce à l'artifice de symétrie employé dans le travail cité [2], traiter un problème mixte. On suppose que la frontière du domaine borné $\mathcal{D}$, situé sur une variété à m dimensions, se compose de deux parties ouvertes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, à $m-1$ dimensions, et de leur frontière commune $\mathcal{C}$; ces ensembles $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ doivent satisfaire aux mêmes hypothèses que dans le travail cité, et en particulier on doit avoir, le long de $\mathcal{C}$, $\Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta}\varpi_\alpha\varpi'_\beta = 0$ où les ϖ_α et les ϖ'_β sont les cosinus directeurs des normales à $\mathcal{T}+\mathcal{C}$ et à $\mathcal{S}+\mathcal{C}$ respectivement; de plus l'angle formé par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ n'est pas rentrant. On donne sur $\mathcal{S}$ soit les valeurs, continues et continûment dérivables, de u, soit une condition du type de Neumann, c'est-à-dire une condition du type actuel avec $T^\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m-1$); sur $\mathcal{T}$ on donne soit les valeurs, continues et continûment dérivables, de u, soit une condition du type

---

(1) *Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique* (*Ann. Soc. polonaise Math.*, t. 12, 1934, p. 1 à 54); nous empruntons à ce travail quelques notations.

(2) Chapitre II.

actuel, pourvu qu'on ait sur $\mathcal{C}$

$$\Sigma_{\alpha,\nu}\varpi'_\alpha \mathrm{T}^\nu \frac{\partial y_\alpha}{\partial t_\nu} = 0 \qquad (t_\nu, \text{ paramètres relatifs à } \mathfrak{C}).$$

Pour la solution, il suffit de renvoyer au travail cité. Il est en réalité inutile de rien supposer sur le raccordement des deux sortes de données le long de $\mathcal{C}$, pourvu toutefois qu'on adopte les définitions qui seront exposées dans un autre travail, où seront considérés des points de discontinuité, formant des variétés à $m-2$ dimensions [1].

---

[1] Résultats annoncés dans la Note *Sur une nouvelle généralisation des questions relatives aux équations du type elliptique* (*Comptes rendus Acad. sciences*, t. 198, 1934, p. 885 à 887).