ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GHERMANESCU

Sur le théorème de Picard-Borel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 52 (1935), p. 221-268
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__221_0>

SUR

LE THÉORÈME DE PICARD-BOREL

Par M. GHERMANESCU.

Le théorème bien connu de Picard-Borel sur les valeurs et distributions exceptionnelles des fonctions entières ou méromorphes, ainsi que les extensions données, soit aux combinaisons exceptionnelles de fonctions par M. Montel, soit aux algébroïdes par G. Remoundos et M. Varopoulos, donnent, comme on le sait, des limites supérieures du nombre des valeurs exceptionnelles que peuvent avoir les diverses fonctions considérées.

Cependant, une étude des conditions nécessaires et suffisantes pour que de telles valeurs exceptionnelles existent, lorsque la fonction est donnée, n'a pas été faite d'une manière suffisante, à notre connaissance.

M. Borel en a donné des conditions nécessaires, concernant l'ordre des fonctions considérées. Plus récemment, M. G. Calugareano a fait les premiers pas [1] (en examinant les fonctions entières et méromorphes sous ce point de vue).

Le présent Mémoire a pour but de répondre à cette question d'une façon assez étendue.

Je reprends les cas étudiés par M. Calugareano et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière soit

[1] *Bull. des Sc. math.*, t. 54, 1930, p. 17-32.

dépourvue de zéros ou en ait un nombre m, sous une forme très générale, de laquelle je déduis les résultats de M. Calugareano.

Je passe à la première extension donnée par M. Borel au théorème de M. Picard, en y remplaçant la valeur exceptionnelle par un polynome, que je nomme *exceptionnel*.

La forme principale de la condition cherchée est une relation linéaire entre un nombre fixe de coefficients du développement taylorien de la fonction considérée, nombre dépendant en premier lieu de l'ordre entier de la fonction et ensuite du nombre de zéros ou du degré du polynome exceptionnel, suivant le cas.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude des combinaisons exceptionnelles de fonctions entières. J'y fais d'abord l'application des résultats précédents. Ensuite, je donne au problème un aspect géométrique, en mettant en évidence une suite de surfaces, que je nomme *exceptionnelles*, attachées à toute combinaison exceptionnelle admise par le système de fonctions considérées.

Les combinaisons exceptionnelles de fonctions entières, définies et étudiées par M. P. Montel ([1]), sont *non-homogènes*. Je définis et étudie les combinaisons exceptionnelles *homogènes*, dont je détermine en premier lieu, le nombre maximum, pour un système donné de fonctions. C'est ainsi que je démontre que ce nombre ne peut pas dépasser le nombre des fonctions linéairement indépendantes du système et que le premier est égal au nombre des *fonctions fondamentales* y faisant partie, c'est-à-dire des fonctions de la forme Qe^P, P, Q étant des polynomes entiers en z.

Je n'ai pas pu déterminer le nombre des combinaisons exceptionnelles *distinctes dans leur ensemble* (*voir* le texte), que dans le cas particulier, mais remarquable, des fonctions algébroïdes non entières. J'y donne une limitation meilleure que celle assignée par M. Varopoulos pour les algébroïdes entières ([2]) et montre comme ce nombre dépend de celui des fonctions fondamentales, définies plus haut, qui entrent dans l'expression des coefficients de l'équation définissant l'algébroïde.

([1]) *Acta mathematica*, t. 49, 1926, p. 115 et suiv.
([2]) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 53, 1925.

Je montre que les surfaces exceptionnelles, attachées aux combinaisons exceptionnelles homogènes, ont en commun un nombre bien déterminé de multiplicités linéaires exceptionnelles passant par l'origine et que, en particulier, on peut rattacher aux fonctions méromorphes des *droites exceptionnelles*, dont le nombre est deux au plus.

Je donne une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions entières admette une combinaison exceptionnelle homogène, en y faisant intervenir certaine propriété d'invariance du *wronskien* du système.

J'étends enfin les notions de combinaison exceptionnelle pour les systèmes de fonctions ou de valeur exceptionnelle pour les algébroïdes non entières, en y remplaçant, dans le premier cas, les coefficients constants par des polynomes et, dans le deuxième, les valeurs exceptionnelles constantes aussi par des polynomes. Je définis ainsi les *combinaisons exceptionnelles à polynomes*, ainsi que les *polynomes exceptionnels* des fonctions algébroïdes et montre comment on peut leur étendre les résultats précédents.

Une première forme des résultats contenus dans ce Mémoire a été annoncée dans trois Notes des *Comptes rendus* (t. 199, 1934, p. 629 et 1568; t. 200, 1935, p. 1175).

I.

A. — Valeurs exceptionnelles de M. Picard.

1. Considérons une fonction entière ([1]), d'ordre fini et entier p, définie par le développement taylorien

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots. \tag{1}$$

Si elle admet une valeur exceptionnelle a au sens de M. Picard, on doit avoir l'égalité

$$f(z) - a = e^{P(z)}, \tag{2}$$

([1]) On peut considérer, plus généralement $f(z)$ holomorphe dans un domaine D, qui est le plan entier pour les fonctions entières : on en obtient des propositions analogues.

$P(z)$ étant un polynome de degré p; en posant

$$P'(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}, \tag{3}$$

on déduit de (2)

$$\frac{f'(z)}{f(z) - a} = P'(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}. \tag{4}$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres de la relation déduite de (4) en chassant les dénominateurs, on obtient, pour les premiers p coefficients C_i les relations

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_0 C_0 &= C_1 + a\lambda_0, \\ \lambda_0 C_1 + \lambda_1 C_0 &= 2 C_2 + a\lambda_1, \\ \lambda_0 C_2 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_0 &= 3 C_3 + a\lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_0 C_{p-1} + \lambda_1 C_{p-2} + \ldots + \lambda_{p-1} C_0 &= p C_p + a\lambda_{p-1} \end{aligned} \right.$$

et, pour les suivants,

$$\text{(B)} \quad \lambda_0 C_n + \lambda_1 C_{n-1} + \ldots + \lambda_{p-1} C_{n-p+1} = (n+1) C_{n+1} \qquad (n \geqq p).$$

Les relations (A) et (B) constituent ainsi les conditions nécessaires pour que la fonction entière $f(z)$, d'ordre entier p, admette la valeur exceptionnelle a au sens de M. Picard. Montrons qu'elles sont aussi suffisantes.

Nous allons commencer par démontrer qu'une relation, telle que (B) est *unique* pour une fonction entière, lorsqu'elle existe. En effet, en supposant que les coefficients C_n satisfassent à une deuxième

$$\lambda'_0 C_n + \lambda'_1 C_{n-1} + \ldots + \lambda'_{q-1} C_{n-q+1} = (n+1) C_{n+1},$$

dans laquelle q peut être différent de p, on en déduirait la suivante :

$$\mu_0 C_n + \mu_1 C_{n-1} + \ldots + \mu_r C_{n-r+1} = 0, \tag{5}$$

avec $\mu_k = \lambda_k - \lambda'_k$, μ_r étant λ_{p-1} ou $-\lambda'_{q-1}$ suivant que $p \gtreqless q$. Or une telle relation est impossible entre les coefficients d'une fonction entière, vu qu'elle caractérise les fractions rationnelles. En effet, en multipliant les deux membres de (1) par le polynome

$$Q_r(z) = \mu_0 z^{r-1} + \mu_1 z^{r-2} + \ldots + \mu_r,$$

on obtient, compte tenu de (5),

$$Q_r(z)f(z) = \text{polynome de degré} < r - 1.$$

On a donc $\mu_i \equiv 0$, ou bien $\lambda'_i \equiv \lambda_i$.

Cela étant, supposons que les coefficients de la fonction $f(z)$ satisfont aux relations (A) et (B), ou plutôt, à la relation (B) seulement. Nous allons montrer que $f(z)$ admet la valeur exceptionnelle a lorsque les relations (A) sont aussi satisfaites et dans ce cas seulement. A cet effet, reprenons la marche inverse, c'est-à-dire, multiplions les deux membres de (B) par z^n et ajoutons les relations obtenues en y donnant à n les valeurs successives $p, p+1, \ldots,$ etc.; nous sommes conduit à la relation

$$f'(z) = P'(z)f(z) + Q(z) - R(z), \tag{6}$$

dans laquelle

$$\left\{\begin{aligned} Q(z) &= (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_p z^p)' \quad (^1), \\ R(z) &= \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i z^i (C_0 + C_1 z + \ldots + C_{p-i-1} z^{p-i-1}). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'intégration de l'équation différentielle (6) donne

$$f(z) = e^{P(z)} \left[C + \int_0^z (Q - R) e^{-P(z)} dz \right], \tag{8}$$

C étant une constante.

La relation (8) nous donne l'expression générale des fonctions entières dont les coefficients satisfont à des relations telles que (B); ces fonctions dépendent en particulier d'un polynome du $(p-1)^{\text{ième}}$ degré ou bien de p constantes arbitraires, qu'on détermine en fixant les conditions initiales auxquelles doivent satisfaire les nombres C_i qui vérifient (B); (B) est en fait une équation homogène aux différences finies, du type de Poincaré, par rapport à la variable n et la

(1) L'accent indique la dérivation par rapport à z.

fonction $C(n) = C_n$ et son intégrale dépend de p fonctions arbitraires de n. Nous allons déterminer les premiers coefficients C_i en imposant à la fonction $f(z)$, donnée par (8), la condition d'admettre a comme valeur exceptionnelle au sens de M. Picard, en d'autres termes, de satisfaire à une relation de la forme

$$e^{P(z)}\left[C + \int_0^z (Q - R)\, e^{-P(z)}\, dz\right] - a = e^{M(z)}, \tag{9}$$

$M(z)$ étant un polynome dont le degré sera déterminé dans la suite. On peut écrire encore la relation (9)

$$C + \int_0^z (Q - R)\, e^{-P(z)}\, dz = e^{M-P} + ae^{-P}$$

ou, en dérivant,

$$Q - R = (M' - P')\, e^{M} - aP'(z). \tag{10}$$

Une telle relation ne peut avoir lieu que dans l'une des conditions suivantes :

a. M *se réduit à une constante*. — Cette hypothèse entraîne

$$Q - R = -(a + e^{M})P' \tag{a}$$

et la relation (8) devient

$$f(z) = (a + e^{M}) + (C - ae^{-P(0)} - e^{M-P(0)})\, e^{P(z)}$$

ou encore, compte tenu de (9),

$$(C - ae^{-P(0)} - e^{M-P(0)})\, e^{P(z)} = 0,$$

qui exige

$$C = ae^{-P(0)} + e^{M-P(0)},$$

$f(z)$ se réduit ainsi à une constante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b. $M(z)$ *est un polynome*. — Un théorème bien connu de M. Borel exige alors les relations

$$M'(z) - P'(z) = 0, \qquad Q(z) - R(z) = -aP'(z)$$

et la dernière conduit justement aux relations (A). La relation (8) devient

$$f(z) = a + (C - ae^{-P(0)})\, e^{P(z)},$$

à condition que l'on ait

$$C \neq ae^{-P(0)},$$

condition toujours réalisée puisque, $f(z)$ devant se réduire à C_0 pour $z = 0$, on a

$$C_0 = a + [C - ae^{-P(0)}]\, e^{P(0)};$$

donc

$$C = C_0 e^{-P(0)}$$

et l'on a toujours $C_0 \neq a$; car autrement $f(z) - a$ admet la racine $z = 0$.

De cette courte analyse nous pouvons dégager quelques remarques simples, dignes à retenir :

a. (B) définit une relation linéaire de récurrence entre $(p+1)$ coefficients consécutifs du développement taylorien de la fonction entière $f(z)$;

b. Le nombre entier p est justement *l'ordre* de la fonction $f(z)$;

c. Les constantes λ_i qui entrent dans les relations (B) sont les coefficients de la dérivée du polynome $P(z)$ qui entre dans l'expression de $f(z)$.

Le résultat obtenu peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème I. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière d'ordre fini et entier $f(z)$ admette une valeur exceptionnelle a sont les suivantes :*

a. Entre un nombre fini quelconque $p+1$ de coefficients consécutifs C_i du développement taylorien de la fonction il doit y avoir une relation linéaire de récurrence de la forme

$$\text{(B)} \quad \lambda_0 C_n + \lambda_1 C_{n-1} + \lambda_2 C_{n-2} + \ldots + \lambda_{p-1} C_{n-p+1} = (n+1)\, C_{n+1} \qquad (n \geqq p).$$

b. Les premiers $p+1$ coefficients du même développement doivent satisfaire aux relations

$$\text{(A)} \qquad \lambda_0 C_n + \lambda_1 C_{n-1} + \ldots + \lambda_n C_0 = (n+1)\, C_{n+1} + a\lambda_n \qquad (n < p),$$

a, λ_i étant des constantes. Dans ces conditions, p sera l'ordre et a la valeur exceptionnelle de $f(z)$.

2. **Applications.** — 1° Prenons $f(z) = e^z$; comme on a

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!},$$

la relation (B) devient, après simplification,

$$\lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n(n-1) + \ldots + \lambda_{p-1} n(n-1)\ldots(n-p+2) = 1,$$

qui donne $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$, donc $p = 1$; cette relation se réduit à

$$C_n = (n+1)\, C_{n+1} \qquad (n \geqq 1).$$

Quant aux relations (A), elles se réduisent ici à la première car $p = 1$ et l'on a

$$1 = 1 + a \qquad (a = 0).$$

La fonction entière e^z est donc du premier ordre et admet la valeur exceptionnelle $a = 0$.

2° Prenons

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n!)^k} \qquad (k > 1);$$

(B) devient

$$(n+1)^{k-1}[\lambda_0 + \lambda_1 n^k + \lambda_2 n^k (n-1)^k + \ldots] = 1,$$

qui donne $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots + \lambda_{p-1} = 0$ et il n'y a pas de valeur exceptionnelle.

3° Prenons $f(z) = \sin z$, avec

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

On a, si n est pair,

$$\frac{\lambda_0}{(2n+1)!} - \frac{\lambda_2}{(2n-1)!} + \frac{\lambda_4}{(2n-3)!} - \ldots = 0,$$

qui entraîne successivement $\lambda_0 = 0$, $\lambda_2 = 0$, etc. On a aussi, lorsque n

est impair,

$$\frac{\lambda_1}{(2n+1)!} - \frac{\lambda_3}{(2n-1)!} + \ldots = \frac{\pm 1}{(2n+2)!},$$

qui entraîne aussi $\lambda_1 = \lambda_3 = \ldots = 0$. Il n'y a donc pas de valeur exceptionnelle.

4° Prenons $f(z) = e^{z^2}$ avec

$$e^{z^2} = 1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{n!} + \ldots.$$

on a (B)

$$\frac{\lambda_0}{n!} + \frac{\lambda_2}{(n-1)!} + \frac{\lambda_4}{(n-2)!} + \ldots = 0$$

ou

$$\frac{\lambda_1}{n!} + \frac{\lambda_3}{(n-1)!} + \ldots = \frac{2}{n!}.$$

La première relation donne $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_4 = \ldots = 0$, tandis que de la deuxième on déduit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_5 = \ldots = 0$. On a ainsi $p = 2$ et les relations (A) se réduisent aux deux premières, dont la première est une identité, de sorte que la dernière donne

$$2 = 2 + 2a \qquad (a = 0).$$

3. L'existence d'une relation telle que (B) entre un même nombre de coefficients consécutifs du développement taylorien d'une fonction donnée peut s'établir aussi de la manière générale suivante : on donne à n dans (B) $p+1$ valeurs successives n, $n+1$, ..., $n+p$ et l'on élimine les constantes λ_i entre les relations ainsi obtenues; le résultat est le déterminant nul suivant :

$$(11) \qquad \Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} (n+1)\,C_{n+1} & C_n & C_{n-1} & \ldots & C_{n-p+1} \\ (n+2)\,C_{n+2} & C_{n+1} & C_n & \ldots & C_{n-p+2} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n+p+1)\,C_{n+p+1} & C_{n+p} & C_{n+p-1} & \ldots & C_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente à (B) car on les déduit l'une de l'autre. Pratiquement, si l'on veut utiliser les conditions (B) sous la forme (11), comme on ne suppose pas le nombre p connu *a priori*, on doit, après avoir calculé ce déterminant, déterminer la plus petite valeur de p, pour laquelle le déterminant est nul.

Par exemple, si nous reprenons la fonction e^z, le déterminant $\Delta_{n,p}$ correspondant est

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-p+1)!} \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots\cdots & \cdots & \frac{1}{(n-p+2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n+p)!} & \frac{1}{(n+p)!} & \frac{1}{(n+p-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \end{vmatrix}$$

et l'on voit facilement qu'il est nul pour $p \geqq 1$. On a donc $p = 1$ et l'on retrouve des résultats connus.

4. Si l'on élimine les constantes λ_i entre les relations (A) et l'une quelconque des relations (B), on trouve

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{vmatrix} C_0 - a & 0 & 0 & . & \cdots & \cdots & C_1 \\ C_1 & C_0 - a & 0 & . & \cdots & \cdots & 2C_2 \\ C_2 & C_1 & C_0 - a & 0 & \cdots & \cdots & 3C_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p-1} & C_{p-2} & C_{p-3} & . & \cdots & C_0 - a & pC_p \\ C_n & C_{n-1} & C_{n-2} & . & \cdots & C_{n-p+1} & (n+1)C_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque la valeur exceptionnelle a existe, elle est par suite la racine commune de l'infinité d'équations algébriques de degré p, obtenues en donnant à n dans (C) toutes les valeurs successives p, $p+1$, etc. C'est le théorème de M. G. Calugareano (*loc. cit.*)

5. **Démonstration du théorème de M. Picard.** — De la marche suivie pour la démonstration de notre théorème précédent on déduit tous les éléments permettant de donner une démonstration élémentaire et simple au théorème de M. Picard. En effet, supposons que la fonction $f(z)$ ait deux valeurs exceptionnelles a_1 et a_2. Les relations (A) devant être satisfaites, on a pour la première

$$\lambda_0 C_0 = C_1 + a_1\lambda_0, \qquad \lambda_0 C_0 = C_1 + a_2\lambda_0;$$

car les constantes λ_0, λ_1 sont uniques, d'après l'unicité de la relation (B). On en déduit immédiatement $a_1 \equiv a_2$, à moins que l'on n'ait $\lambda_0 = 0$, mais dans ce cas c'est la deuxième relation (A) qui donne le même résultat, à moins que l'on n'ait $\lambda_1 = 0$ et, en raisonnant avec les relations (A) restantes, on arrive à la conclusion antérieure parce que l'une au moins des constantes λ_i est différente de zéro, autrement la relation (B) donnerait $C_{n+1} = 0$, quel que soit $n \geqq p$, ce qui est inadmissible car alors $f(z)$ se réduirait à un polynome, auquel ne s'applique pas notre théorème.

B. — Polynomes exceptionnels de M. Borel.

6. La première extension de la notion de valeur exceptionnelle, due à M. É. Borel, consiste à remplacer la constante a par un polynome Q, d'un degré quelconque m, que nous nommerons *polynome exceptionnel* et qui est tel que l'équation

$$f(z) = Q(z)$$

n'a pas de zéro. C'est M. Borel qui a démontré le premier l'inexistence de deux polynomes exceptionnels correspondant à la même fonction entière $f(z)$. En voici une autre qui, peut-être, n'est pas nouvelle. Des relations

$$f(z) - Q_1 = e^{P_1}$$
$$f(z) - Q_2 = e^{P_2},$$

P_1, P_2, Q_1, Q_2 étant des polynomes, on déduit

$$\frac{f'(z) - Q'_1}{f(z) - Q_1} = P'_1,$$
$$\frac{f'(z) - Q'_2}{f(z) - Q_2} = P'_2$$

et l'élimination de $f'(z)$ entre ces deux relations conduit à

$$f(z) = \frac{Q'_2 - Q'_1 + P'_1 Q_1 - P'_2 Q_2}{P'_1 - P'_2},$$

relation impossible; car $f(z)$ est supposée entière et trancendante.

7. Supposons donc que la fonction $f(z)$ satisfait à la relation

unique

$$f(z) - Q(z) = e^{P(z)}. \tag{13}$$

On en déduit

$$\frac{f'(z) - Q'(z)}{f(z) - Q(z)} = P'(z) \tag{14}$$

avec

$$\begin{cases} P'(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}, \\ Q(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots + \mu_m z^m. \end{cases} \tag{15}$$

L'identification conduit aux deux séries de relations entre les coefficients de la fonction $f(z)$

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} C_1 - \mu_1 = \lambda_0 (C_0 - \mu_0), \\ 2(C_2 - \mu_2) = \lambda_0 (C_1 - \mu_1) + \lambda_1 (C_0 - \mu_0), \\ 3(C_3 - \mu_3) = \lambda_0 (C_2 - \mu_2) + \lambda_1 (C_1 - \mu_1) + \lambda_2 (C_0 - \mu_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (m+1) C_{m+1} = \lambda_0 (C_m - \mu_m) + \lambda_1 (C_{m-1} - \mu_{m-1}) + \ldots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (m+p) C_{m+p} = \lambda_0 C_{m+p-1} + \lambda_1 C_{m+p-2} + \ldots + \lambda_{p-1} (C_m - \mu_m) \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{B}') \quad (n+1) C_{n+1} = \lambda_0 C_n + \lambda_1 C_{n-1} + \ldots + \lambda_{p-1} C_{n-p+1} \qquad (n \geqq m+p).$$

On voit que (B′) n'est autre que (B), rencontrée dans le cas des valeurs exceptionnelles au sens de M. Picard, à la différence près qu'elle est valable à partir d'une valeur supérieure de n. Les relations (A′) et (B′) constituent les conditions nécessaires pour que la fonction $f(z)$ admette la valeur exceptionnelle polynomiale $Q(z)$. Elles sont aussi suffisantes, comme nous le ferons voir, tout comme dans le cas précédent. En effet, de (B′) on remonte à (8′), analogue à (8)

$$f(z) = e^{P(z)} \left[C + \int_0^z (Q - R) e^{-P(z)} dz \right], \tag{8'}$$

avec cette fois

$$\begin{cases} Q(z) = (C_0 + C_1 z + \ldots + C_{m+p} z^{m+p})', \\ R(z) = \sum^{p+1} \lambda_i z^i (C_0 + C_1 z + \ldots + C_{m+p-i-1} z^{m+p-i-1}). \end{cases} \tag{16}$$

Supposons l'existence d'une valeur exceptionnelle polynomiale $\overline{Q}(z)$, on a

$$e^{P(z)}\left[C+\int_0^z (Q-R)\,e^{-P(z)}dz\right]=\overline{Q}(z)+e^{\overline{P}(z)},$$

$\overline{P}(z)$ étant aussi un polynome. On en déduit la relation

$$Q-R=(\overline{P}'-P')\,e^{\overline{P}}+\overline{Q}'-P'\overline{Q}$$

et comme $\overline{P}$ ne se réduit pas à une constante, car alors $f(z)$ se réduirait à un polynome, le théorème, déjà utilisé, de M. Borel nous conduit aux relations

$$\overline{P}'=P', \qquad Q-R=\overline{Q}'-P'\overline{Q},$$

dont la dernière représente justement les relations (A′), en supposant, bien entendu, un développement (15) pour $\overline{Q}(z)$.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème II. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière $f(z)$, d'ordre fini et entier, admette une valeur exceptionnelle polynomiale $Q(z)$ sont les suivantes :*

a. Entre un nombre fini quelconque $p+1$ de coefficients consécutifs C_i du développement taylorien de la fonction il doit y avoir, à partir d'un certain rang $r>p$, une relation linéaire de récurrence de la forme

$$\text{(B)}\quad \lambda_0 C_n+\lambda_1 C_{n-1}+\lambda_2 C_{n-2}+\ldots+\lambda_{p-1} C_{n-p+1}=(n+1)\,C_{n+1} \qquad (n\geqq r).$$

b. Soit $m=r-p$. Les premiers $(r+1)$ coefficients du même développement doivent satisfaire aux relations

$$n(C_n-\mu_n)=\lambda_0(C_{n-1}-\mu_{n-1})+\lambda_1(C_{n-2}-\mu_{n-2})+\ldots \qquad (1\leqq n\leqq r),$$

λ_i, μ_j étant des constantes $(j\leqq m)$. Dans ce cas p sera l'ordre de $f(z)$ et m le degré du polynome exceptionnel existant.

On voit de ce qui précède que l'existence de l'une ou de l'autre sorte de valeurs exceptionnelles pour la fonction entière $f(z)$ est conditionnée en premier lieu par l'existence de la *même* relation de récurrence entre le *même* nombre de coefficients consécutifs du développement taylorien de la fonction. Une telle relation existant entre les susdits coefficients, on ne peut pas affirmer la possibilité de l'existence d'une telle valeur exceptionnelle que si l'on tient compte en premier lieu du rang à partir duquel la relation commence à être vérifiée. Si le rang n du coefficient C_n est inférieur d'une unité au nombre de termes figurant dans la relation de récurrence, on a affaire à une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard ; s'il est plus grand, on a affaire à une valeur exceptionnelle polynomiale de M. Borel et la différence donne justement le degré de cette valeur. Viennent ensuite les conditions (A) ou (A′) qui décident complètement de l'existence ou de la non existence des valeurs exceptionnelles.

8. **Nouvelle démonstration de l'unicité.** — Comme dans le cas du théorème de M. Picard, nous pouvons donner une nouvelle démonstration du théorème d'unicité de la valeur exceptionnelle polynomiale, déduite de ce qui précède.

Supposons à cet effet l'existence de deux polynomes :

$Q(z)$, $\overline{Q}(z)$ jouissant de la propriété considérée et soient respectivement μ_i, $\overline{\mu_i}$ les coefficients des mêmes puissances de z. Comme la relation (B′) est unique pour une fonction entière, les constantes λ_i sont univoquement déterminées. Les coefficients μ_i, $\overline{\mu_i}$ devant satisfaire aux relations (A′), on doit avoir, par exemple, pour la dernière [1],

$$(m+p)\,C_{m+p} = \lambda_0 C_{m+p-1} + \lambda_1 C_{m+p-2} + \ldots + \lambda_{p-2} C_{m+1} + \lambda_{p-1}(C_m - \mu_m),$$
$$(m+p)\,C_{m+p} = \lambda_0 C_{m+p-1} + \lambda_1 C_{m+p-2} + \ldots + \lambda_{p-2} C_{m+1} + \lambda_{p-1}(C_m - \overline{\mu_m})$$

et, si $\lambda_{p-1} \not\equiv 0$, on en déduit $\mu_m \equiv \overline{\mu}_m$. Si $\lambda_{p-1} = 0$, on considère l'avant dernière relation (A′) de laquelle on tire la même conclusion, à moins que l'on ait aussi $\lambda_{p-2} = 0$; dans ce cas on considère la relation suivante jusqu'à ce qu'on arrive à une $\lambda_{p-j} \not\equiv 0$. On en déduit ensuite, de proche en proche, les relations $\overline{\mu_i} \equiv \mu_i$, ce qui prouve encore une fois l'unicité du polynome exceptionnnel $Q(z)$.

---

(1) On suppose ici que $Q(z)$ et $\overline{Q}(z)$ sont du même degré, ce qui d'ailleurs est bien justifié car autrement l'une des constantes μ_m, $\overline{\mu_m}$ étant nulle, la comparaison des deux relations écrites dans le texte exige que l'autre soit aussi nulle et ainsi de suite, jusqu'à ce que les deux degrés deviennent égaux.

C. Valeurs exceptionnelles d'ordre m.

9. Appelons valeur exceptionnelle d'ordre m une quantité a telle que l'équation

$$f(z) = a$$

ait m zéros simples. En d'autres termes, on doit avoir l'égalité

$$f(z) - a = Q_m(z)\, e^{P(z)}, \tag{17}$$

$Q_m(z)$ étant un polynome du $m^{\text{ième}}$ degré en z, premier avec sa dérivée. On sait qu'une telle valeur est unique pour une fonction entière d'ordre entier p, si elle existe.

Nous nous proposons d'examiner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle valeur exceptionnelle existe. Posons, comme d'habitude,

$$\left\{\begin{aligned} Q_m(z) &= \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots + \mu_m z^m, \\ P'(z) &= \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Posons encore

$$\nu_r = (r+1)\,\mu_{r+1} + \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \mu_{r-i}. \tag{19}$$

On déduit, de la relation (17),

$$\frac{f'(z)}{f(z) - a} = \frac{Q'_m(z)}{Q_m(z)} + P'(z)$$

ou

$$Q_m(z) f'(z) = [Q'_m(z) + P'(z)\, Q_m(z)][f(z) - a]. \tag{20}$$

L'identification des coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres de cette relation nous conduit aux deux groupes d'égalités

$$(\mathrm{A}'')\quad \left\{\begin{aligned} \nu_0 C_0 &= \mu_0 C_1 + a\nu_0, \\ \nu_0 C_1 + \nu_1 C_0 &= 2\mu_0 C_2 + \mu_1 C_1 + a\nu_1, \\ \nu_0 C_2 + \nu_1 C_1 + \nu_2 C_0 &= 3\mu_0 C_3 + 2\mu_1 C_2 + \mu_2 C_1 + a\nu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nu_0 C_{m+p-1} + \nu_1 C_{m+p-2} &+ \ldots + \nu_{m+p-1} C_0 \\ = (m+p)\mu_0 C_{m+p} &+ (m+p-1)\mu_1 C_{m+p-1} + \ldots + \mu_{m+p} C_p + a\nu_{m+p-1} \end{aligned}\right.$$

et

$$\begin{aligned}\nu_0 C_n + \nu_1 C_{n-1} + \ldots + \nu_{m+p-1} C_{n-m-p+1} \\ = (n+1)\mu_0 C_{n+1} + n\mu_1 C_n + \ldots + (n-m+1)\mu_m C_{n-m+1},\end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}'') \quad & (n+1)\mu_0 C_{n+1} + (n\mu_1 - \nu_0) C_n + (\overline{n-1}\,\mu_2 - \nu_1) C_{n-1} + \ldots \\ & + (\overline{n-m+1}\,\mu_m - \nu_{m-1}) C_{n-m+1} - \nu_m C_{n-m} - \nu_{m+1} C_{n-m-1} + \ldots = 0 \\ & (n \geqq m+p).\end{aligned}$$

On voit que (B″) est une relation linéaire à coefficients linéaires par rapport au rang n entre $m+p+1$ coefficients consécutifs du développement taylorien de la fonction entière $f(z)$. Avec (A″), elles constituent les conditions nécessaires pour que la fonction $f(z)$ admette a comme valeur exceptionnelle d'ordre m. Nous allons voir si ces conditions sont aussi suffisantes.

10. Supposons donc que, à partir d'un certain rang k [1] entre $k+1$ coefficients consécutifs du développement taylorien de la fonction entière $f(z)$ il y ait une relation linéaire de récurrence, à coefficients linéaires par rapport au rang n, de la forme

$$(21) \qquad (a_0 n + b_0) C_{n+1} + (a_1 n + b_1) C_n + \ldots + (a_k n + b_k) C_{n-k+1} = 0,$$

a_i, b_i étant des constantes non toutes nulles. On peut l'écrire encore

$$\begin{aligned}& a_0(n+1) C_{n+1} + a_1 n C_n + a_2(n-1) C_{n-1} + \ldots \\ & \quad + a_k(n-k+1) C_{n-k+1} + (b_0 - a_0) C_{n+1} + b_1 C_n \\ & \quad + (b_2 + a_2) C_{n-1} + (b_3 + 2a_3) C_{n-2} + \ldots + [b_k + (k-1)a_k] C_{n-k+1} = 0.\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette relation par z^{n+1} et ajoutons les relations obtenues en y donnant à n les valeurs successives $n = k$, $k+1, \ldots$, etc.; on obtient, compte tenu des développements de $f(z)$ et $f'(z)$,

$$(22) \qquad R(z) f'(z) + S(z) f(z) = T(z) + U(z)$$

---

[1] Parce que la relation portant sur $k+1$ termes consécutifs, k d'entre eux sont arbitraires.

avec

$$(23)\qquad R(z) = a_0 z + a_1 z^2 + \ldots + a_k z^{k+1},$$

$$(24)\qquad S(z) = b_0 - a_0 + b_1 z + (b_2 + a_2) z^2 + \ldots + [b_k + (k-1) a_k] z^k,$$

$$(25)\qquad T(z) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i z^{i+1} [C_1 + 2 C_2 z + 3 C_3 z^2 + \ldots + (k-i) C_{k-i} z^{k-i-1}],$$

$$(26)\qquad U(z) = \sum_{i=0}^{k} [b_i + (i-1) a_i] z^i [C_0 + C_1 z + \ldots + C_{k-i} z^{k-i}].$$

Il est facile, tout d'abord, de faire voir que les coefficients d'une fonction entière ne peuvent pas satisfaire en même temps à deux relations telles que (21). En effet, en supposant vérifiée encore une deuxième, soit-elle

$$(21')\qquad (\bar{a}_0 n + \bar{b}_0) C_{n+1} + (\bar{a}_1 n + \bar{b}_1) C_n + \ldots + (\bar{a}_k n + \bar{b}_{k'}) C_{n-k'+1} = 0,$$

k' étant en général différent de k, on déduit de celle-ci, tout comme de (21), l'équation différentielle suivante, analogue à (22),

$$(22')\qquad \bar{R}(z) f'(z) + \bar{S}(z) f(z) = \bar{T}(z) + \bar{U}(z),$$

$\bar{R}|(z)|$, $\bar{S}|(z)|$, $\bar{T}|(z)|$, $\bar{U}|(z)$ ayant des expressions absolument analogues aux (23), (24), (25) et (26). Multiplions la relation (22') par $R(z)$ et (22) par $-\bar{R}(z)$ et ajoutons-les, membre à membre; on en obtient

$$(R\bar{S} - \bar{R}S) f(z) = (R\bar{T} - \bar{R}T) + (R\bar{U} - \bar{R}U),$$

relation qui montre que $f(z)$ est une fraction rationelle ou un polynome au plus.

11. Cela étant, l'intégrale générale de l'équation différentielle (22) est

$$(27)\qquad f(z) = e^{-\int \frac{S}{R} dz} \left[C + \int \frac{T+U}{R} e^{\int \frac{S}{R} dz} dz \right],$$

C étant une constante arbitraire. La relation (27) renferme toutes les fonctions dont les coefficients satisfont à la relation (21).

Si $f(z)$, donnée par (27), admet une valeur exceptionnelle a d'ordre m, on doit avoir

$$e^{-\int \frac{S}{R} dz}\left[C + \int \frac{T+U}{R} e^{\int \frac{S}{R} dz} dz\right] = a + Q_m e^{P(z)}$$

ou

$$C + \int \frac{T+U}{R} e^{\int \frac{S}{R} dz} dz = a e^{\int \frac{S}{R} dz} + Q_m e^{P + \int \frac{S}{R} dz},$$

P, Q_m ayant les significations déjà données (18). On en déduit par dérivation

$$T + U = aS + Q'_m R e^P + Q_m (P' R + S) e^P$$

et comme $P(z)$ ne peut pas se réduire à une constante, car alors $f(z)$ se réduit à un polynome, une telle relation ne peut avoir lieu, d'après le théorème de M. Borel, que si

$$T(z) + U(z) = aS(z), \tag{28}$$

$$Q'_m(z) R(z) + Q_m(z) [P'(z) R(z) + S(z)] = 0. \tag{29}$$

Nous allons nous occuper de la relation (29) d'abord. On a dans le premier membre un polynome de degré $m+p+k$, dont l'annulation nous fournira $m+p+k+1$ relations entre les $2k+1$ constantes [1] a_i, b_i, ce qui conduit à la valeur du nombre k

$$k = m + p, \tag{30}$$

qui montre que :

Le nombre des coefficients consécutifs figurant dans la relation de récurrence (21) *dépasse d'une unité la somme de l'ordre de la fonction entière* $f(z)$ *et de l'ordre de la valeur exceptionnelle, lorsque celle-ci existe.*

Avec cela, la relation (29) peut être écrite comme il suit :

$$P'(z) + \frac{Q'_m(z) R(z) + Q_m(z) S(z)}{Q_m(z) R(z)} = 0, \tag{29'}$$

---

(1) En réalité, il y en a $2k+2$, mais à cause de l'homogénéité de la relation (21), l'une d'elles peut être prise arbitrairement.

et sur cette forme on voit que la fraction figurant dans le premier membre doit se réduire à un polynome de degré $p-1$. Or le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, ce qui fait que la relation (29′) devient impossible. Il faut que le degré du dénominateur s'abaisse de $p-1$ unités. Comme $Q_m(z)$ est donné, cette condition doit être supportée par $R(z)$, dont le degré doit se réduire à $m+1$. On a ainsi

$$a_{m+i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots), \tag{31}$$

de sorte qu'il reste

$$R(z)=a_0 z+a_1 z^2+\ldots+a_m z^{m+1}. \tag{32}$$

En deuxième lieu, il faut que le numérateur soit divisible par le dénominateur, c'est-à-dire par le produit $Q_m(z)R(z)$.

Remarquons d'abord que $R(z)$ est divisible par z, il doit en être de même de $S(z)$, ce qui exige $a_0=b_0$, de sorte qu'il reste, après simplification de z,

$$P'(z)\,Q_m(z)\,R_1(z)+Q'_m(z)\,R_1(z)+Q_m(z)\,S_1(z)=0 \tag{29''}$$

avec

$$R_1(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_m z^m, \tag{33}$$

$$S_1(z)=\beta_1+\beta_2 z+\ldots+\beta_{m+p} z^{m+p-1}, \tag{34}$$

$$\beta_i=b_i+(i-1)\,a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{35}$$

$$\beta_{m+j}=b_{m+j} \qquad (j=1, 2, \ldots, p). \tag{36}$$

Nous n'avons pas fait l'identification exigée par la relation (29″), ce qui nous a semblé être assez pénible. Nous nous sommes contenté d'un résultat partiel, obtenu grâce à une hypothèse particulière faite sur les zéros du polynome $Q_m(z)$, qui peuvent être simples ou multiples. Nous avons choisi la première hypothèse comme nous menant rapidement à une conclusion.

12. Supposons donc que $Q_m(z)$ ait des zéros simples; la relation (29″) peut s'écrire encore

$$P'(z)\,R_1(z)+S_1(z)+\frac{Q'_m(z)\,R_1(z)}{Q_m(z)}=0$$

et comme la fraction doit se réduire à un polynome, il faut que $Q_m(z)$ divise $R_1(z)$, parce que $Q'_m(z)$ est premier avec $Q_m(z)$, ce dernier n'ayant que des zéros simples. Comme enfin $Q_m(z)$ et $R_1(z)$ sont du même degré m, ils sont identiques, à un facteur constant près, qu'on peut prendre d'ailleurs égal à l'unité.

Si $Q_m(z)$ a des zéros multiples, un tel raisonnement nous fait conclure que tout zéro de $Q_m(z)$ en est un aussi pour $R_1(z)$, sans toutefois pouvoir préciser quant à son degré de multiplicité.

Avec $a_i = \mu_i$, on trouve aisément

$$b_{i+1} = -(i+1)\mu_{i+1} - (\lambda_0\mu_i + \lambda_1\mu_{i-1} + \ldots) = -\nu_i$$

et la condition (28) conduit justement aux relations (A''). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème III. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière $f(z)$, d'ordre fini et entier, admette une valeur exceptionnelle a d'ordre m* (¹) *sont les suivantes :*

1° *Entre $m+p+1$ coefficients consécutifs du développement taylorien de $f(z)$ on doit avoir une relation linéaire de récurrence de la forme*

$$\text{(B')}\quad \begin{gathered} a_0(n+1)C_{n+1} + (a_1 n + b_1)C_n + \ldots \\ + (a_m n + b_m)C_{n-m+1} + b_{m+1}C_{n-m} + \ldots + b_{m+p}C_{n-m-p+1} = 0 \\ (n \geqq m+p) \end{gathered}$$

avec

$$b_{\nu+1} = -(\nu+1)a_{\nu+1} - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i a_{\nu-i}.$$

2° *Entre les premiers $m+p+1$ coefficients du même développement on doit avoir les relations*

$$\text{(A')}\quad \begin{gathered} ab_{\nu+1} = \sum_{i=0}^{\nu}(\nu-i+1)a_i C_{\nu-i+1} - \sum_{i=0}^{\nu} b_{i+1}C_{\nu-i} \\ (\nu = 0, 1, \ldots, m+p-1), \end{gathered}$$

(¹) Avec la restriction faite à la page 235.

les a_i, λ_i étant des constantes. Dans ces conditions, les racines de l'équation $f(z) = a$ seront les zéros du polynome

$$Q_m(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m.$$

Il est évident que ce théorème contient le théorème I comme cas particulier, auquel il se réduit d'ailleurs pour $m = 0$.

Ce théorème s'étend aussi au cas des valeurs exceptionnelles polynomiales. Il est facile de constater que les coefficients C_n devront satisfaire à la même relation (B′), mais à partir d'un rang plus élevé, égal à la somme des degrés des polynomes $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ qui entrent dans la relation de condition

$$(\alpha) \qquad f(z) - R(z) = Q(z)\, e^{P(z)}.$$

Ce sont seulement les relations entre les premiers coefficients qui sont autres que les (A′). Nous ne nous occuperons en détail de ce cas, qu'on peut traiter d'une façon tout analogue aux précédents.

II.

A. — Combinaisons exceptionnelles.

13. Considérons un système de ν fonctions entières $f_i(z)$, dont une au moins est transcendante, d'ordres finis ou non et sans zéros communs (1). Une combinaison linéaire mais non homogène de ces fonctions, de la forme

$$(1) \qquad F(z) = \mu_0 + \mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z) + \ldots + \mu_\nu f_\nu(z),$$

sera dite *exceptionnelle*, d'après M. P. Montel (2), lorsque l'on pourra assigner aux constantes μ_i des valeurs telles que $F(z)$ soit dépourvue de zéros ou qu'elle en ait un nombre fini m. Il est clair que si un système de valeurs $(\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_\nu)$ donne une combinaison exception-

---

(1) C'est-à-dire, un zéro quelconque de l'une n'appartient pas en même temps à *toutes* les autres.

(2) *Acta mathematica*, t. 49, 1926, p. 115-160.

nelle de fonctions $f_i(z)$, tout système de valeurs proportionnelles $(K\mu_0, K\mu_1, \ldots, K\mu_\nu)$ en donnera une autre qui ne sera pas considérée cependant comme distincte de la première. Mais si l'on a deux combinaisons exceptionnelles $F_1(z)$ et $F_2(z)$, telles que $F_2(z) = aF_1(z)$, a étant une constante, nous les considérerons comme *distinctes*, à moins que les constantes correspondantes μ_i^1, μ_i^2 ne soient pas proportionnelles. D'après cette remarque, on peut assigner *a priori* à l'une des constantes μ_i une valeur fixe. Si l'on suppose $\mu_0 \neq 0$, ce sera cette constante que nous supposerons être donnée et qu'on pourra désormais prendre égale à l'unité. Nous aurons ainsi affaire à des combinaisons *non homogènes*. Si au contraire μ_0 est constamment nul, nous aurons des combinaisons *homogènes*, de la forme

$$\Phi_i(z) = \mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z) + \ldots + \mu_\nu f_\nu(z) \tag{2}$$

et l'on pourra, ici encore, donner une valeur arbitraire à l'une quelconque des constantes μ_i.

Si l'on a entre ν fonctions entières $f_i(z)$ ν combinaisons exceptionnelles non homogènes

$$F_i(z) = \mu_0^i + \mu_1^i f_1(z) + \mu_2^i f_2(z) + \ldots + \mu_\nu^i f_\nu(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

elles seront distinctes, d'après M. Montel (*loc. cit.*, p. 118), lorsque le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_\nu^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_\nu^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^\nu & \mu_2^\nu & \ldots & \mu_\nu^\nu \end{vmatrix} \tag{3}$$

est *différent* de zéro. Nous garderons cette définition aussi pour les combinaisons exceptionnelles homogènes.

De même, toujours d'après M. Montel, $\nu + 1$ combinaisons exceptionnelles sont distinctes lorsque le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_0^1 & \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_\nu^1 \\ \mu_0^2 & \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_\nu^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_0^{\nu+1} & \mu_1^{\nu+1} & \mu_2^{\nu+1} & \ldots & \mu_\nu^{\nu+1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

est différent de zéro. Cette définition ne convient plus évidemment aux combinaisons exceptionnelles *homogènes* pour lesquelles Δ est toujours nul.

Nous dirons alors que $\nu+k$ combinaisons des ν fonctions sont *distinctes dans leur ensemble*, lorsqu'elles sont distinctes ν à ν, c'est-à-dire lorsque tous les δ, correspondant à ν quelconques des $\nu+k$ combinaisons, sont *différents de zéro*. Cette notion s'applique aux deux catégories de combinaisons, envisagées plus haut, à la fois.

Pour en donner un exemple, considérons le système de trois fonctions entières

$$f_1(z)=e^{-z}-e^z,\qquad f_2(z)=(c+d)e^z-(a+b)e^{-z},\qquad f_3(z)=abe^{-z}-cde^z,$$

a, b, c, d étant des constantes différentes et non nulles. Ce système admet les quatre combinaisons exceptionnelles *homogènes*

$$\begin{aligned}
F_1(z)&=a^2f_1+af_2+f_3=-(a-c)(a-d)e^z,\\
F_2(z)&=b^2f_1+bf_2+f_3=-(b-c)(b-d)e^z,\\
F_3(z)&=c^2f_1+cf_2+f_3=(c-a)(c-b)e^{-z},\\
F_4(z)&=d^2f_1+df_2+f_3=(d-a)(d-b)e^{-z},
\end{aligned}$$

qui sont *distinctes* trois à trois, puisque les δ correspondants sont des déterminants de Vandermonde de trois des quantités différentes a, b, c, d. Cependant on a les relations

$$\begin{aligned}
(b-c)(b-d)F_1(z)-(a-c)(a-d)F_2(z)&=0,\\
(d-a)(d-b)F_3(z)-(c-a)(c-b)F_4(z)&=0.
\end{aligned}$$

Les trois fonctions considérées donnent aussi la combinaison également homogène

$$F_5=[ab(c+d)-cd(a+b)]f_1+(ab-cd)f_2+(a+b-c-d)f_3=0,$$

vu que les f_i ne sont pas linéairement distinctes, mais on voit sans peine que les combinaisons F_5, F_i, F_j ne sont pas distinctes, vu que le δ correspondant est toujours nul.

Les combinaisons de fonctions comprennent le cas particulier remarquable des fonctions algébroïdes. En effet, considérons une algébroïde entière à ν branches, définie par l'équation

$$(5)\qquad u^\nu+f_1(z)u^{\nu-1}+f_2(z)u^{\nu-2}+\ldots+f_\nu(z)=0,$$

$f_i(z)$ étant des fonctions entières, dont l'une au moins ne se réduit pas à un polynome. Dire que l'algébroïde u admet la valeur exceptionnelle a revient, comme on le sait, à admettre l'existence de la relation

$$(6) \qquad a^{\nu} + a^{\nu-1} f_1(z) + a^{\nu-2} f_2(z) + \ldots + f_{\nu}(z) = \mathrm{Q} e^{\mathrm{P}},$$

P, Q étant des polynomes. On a donc affaire à une combinaison exceptionnelle non homogène, ou du *type Montel*, des fonctions entières $f_i(z)$. Par contre, pour les algébroïdes méromorphes définies par une équation de la forme

$$(7) \qquad f_1(z) u^{\nu-1} + f_2(z) u^{\nu-2} + \ldots + f_{\nu}(z) = 0,$$

$f_i(z)$ étant des fonctions entières, dont $f_1(z)$ n'est pas dépourvue de zéros [1], on est conduit à une combinaison exceptionnelle *homogène*

$$(8) \qquad a^{\nu-1} f_1(z) + a^{\nu-2} f_2(z) + \ldots + f_{\nu}(z) = \mathrm{Q} e^{\mathrm{P}}$$

des fonctions $f_i(z)$.

14. Considérons les ν fonctions entières données et cherchons la condition pour qu'elles admettent ν combinaisons exceptionnelles homogènes et distinctes. On doit avoir les relations

$$(9) \qquad \mathrm{F}_i(z) = \mu_1^i f_1(z) + \mu_2^i f_2(z) + \ldots + \mu_{\nu}^i f_{\nu}(z) = \mathrm{Q}_i e^{\mathrm{P}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

avec

$$\delta = \| \mu_1^i \quad \mu_2^i \quad \ldots \quad \mu_{\nu}^i \| \neq 0,$$

P_i, Q_i étant des polynomes et aucun des Q_i n'étant identiquement nul. On en déduit

$$(10) \qquad f_i(z) = \mathrm{A}_1^i \mathrm{Q}_1 e^{\mathrm{P}_1} + \mathrm{A}_2^i \mathrm{Q}_2 e^{\mathrm{P}_2} + \ldots + \mathrm{A}_{\nu}^i \mathrm{Q}_{\nu} e^{\mathrm{P}_{\nu}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

avec

$$\| \mathrm{A}_1^i \quad \mathrm{A}_2^i \quad \ldots \quad \mathrm{A}_{\nu} \| \neq 0$$

qui s'annule en même temps que δ. Si les fonctions $f_i(z)$ sont linéairement distinctes, deux groupes quelconques $\mathrm{Q}_j e^{\mathrm{P}_j}$, $\mathrm{Q}_k e^{\mathrm{P}_k}$ ne peuvent pas différer par un facteur constant, car alors leur élimination entre les

[1] Toute combinaison des ν fonctions $f_i(z)$ de la forme (6) ou (8), c'est-à-dire pour laquelle on a $\mu_i = \alpha^{\nu-1}$, a étant une constante non toujours nulle, sera dite *combinaison exceptionnelle algébroïde*, homogène ou non. Tel est le cas des combinaisons données dans l'exemple considéré plus haut.

relations (10) correspondantes nous conduirait à une relation linéaire entre les fonctions $f_i(z)$ et réciproquement. Cela étant, les *fonctions $f_i(z)$ n'admettent aucune autre combinaison exceptionnelle homogène en dehors des ν déjà considérées* car autrement, l'élimination des ν fonctions $f_i(z)$ entre les $\nu+1$ relations ainsi obtenues nous conduit à la relation

$$\delta_1 Q_1 e^{P_1} + \delta_2 Q_2 e^{P_2} + \ldots + \delta_{\nu+1} Q_{\nu+1} e^{P_{\nu+1}} = 0, \tag{11}$$

dans laquelle δ_i est le déterminant δ donné par (3), formé avec les constantes μ_j^k, autres que μ_j^i. D'après le théorème déjà utilisé de M. Borel, une telle relation ne saurait avoir lieu, lorsque les P_i ne diffèrent par une constante, que si $Q_i = 0$, les δ_i étant par hypothèse différents de zéro, ce qui est contraire à la supposition faite sur les Q_i. Il faut alors que les P_i soient égaux ou qu'ils diffèrent par des constantes (pas tous à la fois, mais par groupes), ce qui est encore impossible, car alors, les Q_i correspondants devant être proportionnels, ils s'ensuivrait au moins une relation linéaire et homogène entre les fonctions $f_i(z)$ (1).

(1) Quoique n'entrant pas dans notre ordre d'idées, nous pouvons démontrer encore le résultat précédent par une voie toute différente, se rattachant aux nouvelles méthodes de la théorie des fonctions.

En effet, M. H. Cartan a étendu une formule de M. R. Nevanlina aux q combinaisons de ν fonctions holomorphes (*Mathematica*, Cluj, vol. VII, p. 1-30), en établissant l'inégalité

$$(q-\nu)\,T(r) < \sum_{i=1}^{q} N_{p-1}(\nu, F_i) + S(r) \qquad (r < R),$$

dans laquelle $T(r)$, $N_{p-1}(\nu, F_i)$, $S(r)$ désignent des fonctions analogues à celles introduites par M. R. Nevanlina, F_i sont les combinaisons des ν fonctions f_i, etc. On a

$$S(r) < O[\log T(\nu)] + O(\log r).$$

Supposons $q = \nu + 1$ et que les F_i aient un nombre fini de zéros; on a alors

$$N_{p-1}(r, F_i) < A_i \log r,$$

A_i étant des constantes et l'inégalité de M. H. Cartan devient

$$T(r) < \left(\sum_{1}^{\nu+1} A_i\right) \log r + C \log T(r) + D \log r.$$

Or, on peut prendre r suffisamment grand pour avoir

$$C \log T(r) < C_1 \log r,$$

Il s'ensuit de ce court examen, que pour qu'un système de ν fonctions entières admette plus de ν combinaisons exceptionnelles homogènes et distinctes, il faut, entre autres, qu'il y ait des relations linéaires et homogènes entre les fonctions données. Il y a donc un lien étroit entre le nombre des combinaisons exceptionnelles fournies par un système de fonctions entières et celui des relations linéaires et homogènes qui peuvent exister entre les susdites fonctions, lien que nous préciserons dans ce qui suit.

15. Les fonctions de la forme $Q_i e^{P_i}$ qui entrent dans les combinaisons exceptionnelles homogènes des fonctions $f_i(z)$, seront appelées *fonctions fondamentales* du système de fonctions entières $f_i(z)$, tant qu'elles ne sont pas proportionnelles, quitte à se réduire à des polynomes distincts non identiquement nuls ($\nu - 1$ au plus), comme nous appellerons *combinaisons exceptionnelles fondamentales* celles qui conduisent aux fonctions fondamentales déjà considérées.

En dehors des combinaisons exceptionnelles fondamentales il y a les combinaisons exceptionnelles constituées par les relations linéaires et homogènes qui peuvent exister entre les ν fonctions du système $f_i(z)$, que nous appellerons *combinaisons exceptionnelles primordiales*, vu qu'elles ont lieu, lorsqu'elles existent, en dehors de tout problème concernant l'existence des combinaisons exceptionnelles. Leur nombre ne dépasse pas $\nu - 2$, car autrement toutes les fonctions $f_i(z)$ sont égales, à des facteurs constants près, cas qui ne présente aucun intérêt du point de vue des combinaisons des fonctions, vu qu'on retombe sur le cas d'une seule fonction, régi par le théorème de M. Picard.

---

de sorte que l'inégalité précédente devient

$$T(r) < A \log r.$$

Mais $T_1(r)$ croît moins vite que $\log r$ seulement dans le cas des polynomes, s'il s'agit de fonctions entières ou, dans le cas des fractions rationnelles, s'il s'agit de fonctions holomorphes. Comme toutes les F_i ne peuvent pas se réduire à des polynomes ou à des fractions rationnelles, car il arriverait la même chose pour les f_i, l'inégalité de M. H. Cartan est impossible pour $q > \nu$ avec notre hypothèse.

Une combinaison linéaire et homogène entre une combinaison exceptionnelle fondamentale et une combinaison exceptionnelle primordiale est évidemment une combinaison exceptionnelle, que nous désignerons sous le nom de *combinaison exceptionnelle ordinaire*. Il est évident aussi qu'à une combinaison exceptionnelle fondamentale correspondent λ combinaisons exceptionnelles ordinaires, λ étant le nombre des relations linéaires et homogènes entre les fonctions $f_i(z)$ qui, avec la combinaison exceptionnelle fondamentale initiale, constitueront *le groupe exceptionnel* correspondant à la fonction fondamentale considérée.

Toute autre combinaison exceptionnelle homogène fournie par le système de fonctions $f_i(z)$ ne peut être qu'une combinaison linéaire des combinaisons exceptionnelles ordinaires d'un même groupe exceptionnel. Leur ensemble fait partie aussi du groupe exceptionnel considéré, mais nous considérerons comme initiales celles dont nous venons de parler plus haut. Cela montre que toute combinaison exceptionnelle ordinaire peut être prise d'ailleurs pour fondamentale dans le groupe respectif.

Il est évident qu'en fait de combinaisons exceptionnelles ce sont les fondamentales et les primordiales qui sont les plus intéressantes, les autres s'en déduisant par des combinaisons linéaires et étant d'ailleurs en nombre infini. Nous leur donnerons le nom de combinaisons exceptionnelles *proprement dites* et dans le dénombrement des combinaisons exceptionnelles admises par un système de fonctions entières, ce sont elles que nous aurons exclusivement en vue.

Nous avons démontré que le nombre des combinaisons exceptionnelles fondamentales appartenant à un système de ν fonctions entières $f_i(z)$ ne peut pas dépasser ν, à moins qu'il n'y ait une relation linéaire et homogène au moins entre les fonctions considérées. Comme le nombre des combinaisons exceptionnelles primordiales est $\nu - 2$ au plus, nous sommes tenté d'en conclure que le nombre des combinaisons exceptionnelles proprement dites admises par le système considéré de ν fonctions entières est $2\nu - 2$ au plus. Or cela n'est pas vrai. En effet, supposons que les fonctions considérées soient liées par λ relations de la forme

$$\mathcal{F}_i = a_1^i f_1 + a_2^i f_2 + \ldots + a_\nu^i f_\nu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda), \tag{11}$$

on peut alors exprimer les fonctions $f_i(z)$ à l'aide de $\nu - \lambda$ fonctions arbitraires g_i, soit

$$f_i(z) = A_{1i}g_1(z) + A_{2i}g_2(z) + \ldots + A_{\nu-\lambda i}g_{\nu-1}(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Si elles admettent $\nu + \lambda + 1$ combinaisons exceptionnelles fondamentales distinctes on doit avoir

$$\mu_1^j f_1 + \mu_2^j f_2 + \ldots + \mu_\nu^j f_\nu = Q_j e^{P_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu - \lambda + 1),$$

les fonctions $Q_j e^{P_j}$ n'étant pas proportionnelles. Ces relations deviennent

$$\begin{gathered}(A_{11}\mu_1^j + A_{12}\mu_2^j + \ldots + A_{1\nu}\mu_\nu^j)g_1 + (A_{21}\mu_1^j + A_{22}\mu_2^j + \ldots + A_{2\nu}\mu_\nu^j)g_2 + \ldots \\ + (A_{\nu-1\,1}\mu_1^j + A_{\nu-1\,2}\mu_2^j + \ldots + A_{\nu-1\,\nu}\mu_\nu^j)g_{\nu-\lambda} = Q_j e^{P_j} \\ (j = 1, 2, \ldots, \nu - \lambda + 1).\end{gathered}$$

Les premières ou $\nu - \lambda$ quelconques de ces relations montrent que les fonctions g_i s'expriment linéairement à l'aide de $\nu - \lambda$ quelconques des fonctions fondamentales $Q_j e^{P_j}$. Nous pouvons ainsi supposer que les g_i sont elles-mêmes des fonctions fondamentales. Dès lors la dernière relation restante ne peut avoir lieu, d'après le théorème de M. Borel, que lorsque tous les coefficients sont nuls, puisque les g_i et le $Q_j e^{P_j}$ restantes sont distinctes. On a donc $Q_j \equiv 0$ et il ne reste ainsi que $\nu - \lambda$ fonctions fondamentales au plus.

Nous sommes donc en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème IV. — *Un système de ν fonctions entières, dont l'une au moins est transcendante, admet ν combinaisons exceptionnelles homogènes proprement dites au plus : s'il y a λ combinaisons exceptionnelles primordiales, il y a $\nu - \lambda$ combinaisons exceptionnelles fondamentales au plus.*

Autrement, on peut dire que :

Le nombre des combinaisons exceptionnelles homogènes fondamentales d'un système de ν fonctions entières ne peut pas dépasser celui des fonctions linéairement indépendantes.

(Énoncé suggéré par M. Montel.)

16. En dehors des combinaisons exceptionnelles dont nous venons de parler, il y en a, surtout dans le cas des variables réelles, d'autres, qui méritent aussi d'être prises en considération. Ce sont celles qui conduisent à une fonction entière de la forme

$$A g_1 + B g_2,$$

dans laquelle g_1 est une transcendante Qe^P, tandis que g_2 se réduit à un polynome, tels que la fonction ci-dessus ait un nombre fini de zéros. Une combinaison exceptionnelle de cette nature provient évidemment de la combinaison linéaire de deux combinaisons exceptionnelles fondamentales, que nous appellerons, en vertu de son mode de génération, *combinaison exceptionnelle mixte*, mais que, par la même raison, nous ne considérerons pas comme être *distincte* des combinaisons exceptionnelles génératrices. Mais nous *distinguerons* les combinaisons exceptionnelles mixtes *entre elles*, de manière qu'une telle combinaison, s'exprimant linéairement par rapport aux autres de même nature, ne sera pas distincte de celles-ci.

Supposons les fonctions $f_i(z)$ du système donné linéairement indépendantes et soient Φ_1, Φ_2, Φ_3 trois combinaisons exceptionnelles mixtes provenant des mêmes fonctions fondamentales g_1, g_2, dont l'une se réduit à un polynome. Les relations

$$\Phi_i = A_i g_1 + B_i g_2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont impossibles, car l'élimination des fonctions g_1, g_2 entre elles nous conduit à une relation linéaire et homogène entre les fonctions $f_i(z)$, relation qui n'est pas identiquement nulle, vu que cela exige

$$\begin{vmatrix} \mu_i^1 & A_1 & B_1 \\ \mu_i^2 & A_2 & B_2 \\ \mu_i^3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

ce qui montre qu'on a une relation $\Phi_3 = a\Phi_1 + b\Phi_2$, cas exclu de nos considérations. Disons que les combinaisons exceptionnelles mixtes, formées avec les mêmes fonctions fondamentales g_1, g_2, constituent une *classe*.

En supposant des relations linéaires entre les fonctions $f_i(z)$, on démontre aisément que :

Lorsqu'entre les fonctions $f_i(z)$ il y a λ relations distinctes, le nombre des combinaisons exceptionnelles mixtes, appartenant à une même classe, ne peut pas dépasser $\lambda + 2$.

17. La deuxième question qui se pose serait celle de déterminer le nombre maximum de combinaisons exceptionnelles homogènes, *distinctes dans leur ensemble*, c'est-à-dire ν à ν. Malheureusement, nous n'avons pas pu résoudre cette question d'une manière satisfaisante, sauf dans le cas particulier des fonctions algébroïdes non entières. Vu l'analogie, nous pensons que ce nombre ne doit pas dépasser $2\nu - 2$ ou peut-être $\nu + \lambda$, λ étant le nombre de relations linéaires et homogènes, existant entre les ν fonctions données $f_i(z)$, d'autant plus qu'une limitation analogue a été donnée par M. Montel (*loc. cit*) pour les combinaisons exceptionnelles non homogènes.

18. Le problème le plus simple auquel s'appliquent les considérations précédentes est constitué par le théorème de M. Picard pour les fonctions méromorphes. En effet, soit $F(z)$ une fonction méromorphe qu'on peut écrire sous la forme du quotient de deux fonctions entières sans zéros communs

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Dire que $F(z)$ admet une valeur exceptionnelle a, revient à dire que la fonction $F(z) - a$ ou

$$f_1(z) - af_2(z)$$

admet un nombre fini de zéros. Or, nous avons là manifestement une combinaison exceptionnelle homogène de deux fonctions entières et notre théorème nous apprend qu'il y en a deux au plus. Nous retrouvons ainsi le théorème de M. Picard.

19. Le cas particulier le plus remarquable des combinaisons exceptionnelles homogènes est constitué, comme nous l'avons déjà dit, par les fonctions algébroïdes méromorphes à ν branches. En vertu du théorème général IV, que nous venons d'établir, il n'y a pour de telles

algébroïdes que $\nu+1$ valeurs [1] exceptionnelles proprement dites au plus, les autres, si elles existent, ne provenant que des combinaisons exceptionnelles ordinaires correspondantes, entre les coefficients, fonctions entières, de l'équation de définition. En effet, montrons d'abord que deux valeurs exceptionnelles fondamentales ne peuvent pas donner une valeur exceptionnelle mixte. Si a, b sont les premières, on devra avoir

$$a^{\nu-i}+k_1 b^{\nu-i}=k_2 c^{\nu-i} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

k_1, k_2 étant des constantes, dont l'élimination entre trois relations consécutives nous conduit à la relation impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c_2 \end{vmatrix}=0,$$

puisque a, b, c sont supposées différentes. Au contraire, soient

$$\mathcal{F}_1=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\ldots+\alpha_{\nu+1} f_{\nu+1}=0, \tag{12}$$

une relation entre les coefficients de l'équation

$$u^\nu f_1+u^{\nu-1} f_2+\ldots+f_{\nu+1}=0 \tag{13}$$

qui définit l'algébroïde, a une valeur exceptionnelle proprement dite ou, si l'on veut, fondamentale. Les relations

$$a^{\nu-i}+k_1\alpha_{i+1}=k_2 b^{\nu-i} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu), \tag{14}$$

dans laquelle b est une nouvelle valeur exceptionnelle, conduisent à

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & 1 & 1 \\ \alpha_{i-1} & a & b \\ \alpha_{i-2} & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0, \tag{15}$$

qui montre que trois coefficients consécutifs a_i doivent être liés par une relation linéaire et homogène à coefficients constants, relation qu'on peut encore écrire

$$ab\alpha_i-(a+b)\alpha_{i-1}+\alpha_{i-2}=0 \qquad (i=3,\ 4,\ \ldots,\ \nu+1). \tag{16}$$

---

[1] Nous adoptons pour les *valeurs* exceptionnelles d'une algébroïde, la même terminologie que pour les *combinaisons* exceptionnelles.

Réciproquement, s'il y a une relation (12) entre les fonctions $f_i(z)$, dont les coefficients satisfont à la relation (14), alors a et b sont ou ne sont pas, en même temps, des valeurs exceptionnelles pour l'algébroïde u, car la relation (15) permet d'écrire

$$\alpha_i = \frac{A}{a^i} + \frac{B}{b^i}$$

A, B étant des constantes, et la relation (12) devient

$$\frac{A}{a^{\nu+1}}(a^\nu f_1 + a^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) + \frac{B}{b^{\nu+1}}(b^\nu f_1 + b^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) = 0,$$

ce qui démontre la propriété, à moins que l'une des constantes a, b ne soit nulle, mais dans ce cas (15) se réduit à

$$\alpha_{i-1} = b\alpha_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu+1),$$

les α_i forment ainsi une progression géométrique et c'est alors (12) qui fournit la deuxième combinaison exceptionnelle algébroïde à elle seule (¹).

Montrons qu'à une valeur exceptionnelle fondamentale a ne peuvent pas correspondre deux autres b et c, lorsqu'il y a une seule relation (12) entre les fonctions $f_i(z)$. En effet, on est conduit, par le même raisonnement, à une relation analogue à (16)

$$(16') \qquad ac\alpha_i - (a+c)\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2} = 0,$$

desquelles on déduit

$$a\alpha_i = \alpha_{i-1}, \qquad a\alpha_{i-1} = \alpha_{i-2};$$

les α_i doivent former ainsi une progression géométrique de raison $\frac{1}{a}$, mais dans ce cas on est conduit à $a = b = c$, contrairement à l'hypothèse.

Enfin, prenons une autre valeur exceptionnelle $c \neq a$ et montrons qu'il ne peut lui correspondre une d. Cette hypothèse nous conduit à la relation, analogue à (16),

$$cd\alpha_i - (c+d)\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2} = 0$$

(¹) Ce qui est impossible car alors (13) admet une racine $u = \alpha$ et l'algébroïde n'est plus d'ordre ν.

qui donnent ensemble

$$(17) \qquad \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{a+b-c-d}{ab-cd}, \qquad \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_{i-2}} = \frac{ab-cd}{ab(c+d)-cd(a+b)}.$$

Comme i n'est pas fixe, ces conditions exigent

$$(18) \qquad \frac{a+b-c-d}{ab-cd} = \frac{ab-cd}{ab(c+d)-cd(a+b)} = q \neq 0,$$

les α_i forment encore une progression géométrique, mais les relations (16) ou les analogues donnent

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & a & b \\ q^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est encore impossible.

Il y a un seul cas d'exception, lorsque $\nu = 2$; on peut alors considérer i fixe et la condition (18) n'est plus nécessaire, les conditions (17) suffisant. La relation (12) devient

$$[ab(c+d)-cd(a+b)]f_1 + (ab-cd)f_2 + (a+b-c-d)f_3 = 0$$

et l'algébroïde correspondante, qui admet les quatre valeurs exceptionnelles a, b, c, d, est justement celle qui correspond au système de fonctions donné comme exemple à la page 243 de ce travail.

20. Supposons maintenant que les fonctions $f_i(z)$ satisfassent à une deuxième relation, analogue à (12),

$$(19) \qquad \mathcal{F}_2 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_{\nu+1} f_{\nu+1} = 0$$

et soit a une valeur exceptionnelle fondamentale de l'algébroïde u. Pour pouvoir en déduire une deuxième b, on doit avoir les relations, analogues à (14),

$$(20) \qquad a^{\nu-i} + k_1(\alpha_{i+1} + k\beta_{i+1}) = k_2 b^{\nu-i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

qui conduisent à

$$\begin{vmatrix} k'\alpha_i + k''\beta_i & 1 & 1 \\ k'\alpha_{i-1} + k''\beta_{i-1} & a & b \\ k'\alpha_{i-2} + k''\beta_{i-2} & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(21) \quad ab(k'\alpha_i + k''\beta_i) - (a+b)(k'\alpha_{i-1} + k''\beta_{i-1}) + (k'\alpha_{i-2} + k''\beta_{i-2}) = 0,$$

les constantes k', k'' n'étant pas nulles en même temps. On ne peut pas avoir en même temps

$$ab\alpha_i - (a+b)\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2} = 0,$$
$$ab\beta_i - (a+b)\beta_{i-1} + \beta_{i-2} = 0,$$

car on en déduit

$$\alpha_i = \frac{A_1}{a^i} + \frac{B_1}{b^i}, \qquad \beta_i = \frac{A_2}{a^i} + \frac{B_2}{b^i},$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes et les relations (12) et (19) deviennent

$$\frac{A_1}{a^{\nu+1}}(a^\nu f_1 + a^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) + \frac{B_1}{b^{\nu+1}}(b^\nu f_1 + b^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) = 0,$$
$$\frac{A_2}{a^{\nu+1}}(a^\nu f_1 + a^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) + \frac{B_2}{b^{\nu+1}}(b^\nu f_1 + b^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1}) = 0,$$

qui exigent, ou bien

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

ce qui est impossible, car alors les α_i, β_i sont proportionnelles et les relations (12) et (19) se réduisent à une seule, ou bien

$$a^\nu f_1 + a^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1} = 0,$$
$$b^\nu f_1 + b^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1} = 0,$$

auxquelles doivent se réduire les susdites relations (12) et (19), car autrement, il y aurait plusieurs relations entre les fonctions $f_i(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons qu'à une valeur exceptionnelle fondamentale a correspondent deux autres b et c. On devra avoir les relations analogues

$$\begin{matrix} a^{\nu-i} + k_1\alpha_{i+1} + k_2\beta_{i+1} = k_3 b^{\nu-i} \\ a^{\nu-i} + k'_1\alpha_{i+1} + k'_2\beta_{i+1} = k'_3 c^{\nu-i} \end{matrix} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

desquelles on déduit

$$\alpha_{i+1} = A\, a^{\nu-i} + B\, b^{\nu-i} + C\, c^{\nu-i},$$
$$\beta_{i+1} = A' a^{\nu-i} + B' b^{\nu-i} + C' c^{\nu-i}$$

avec

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

qui montrent que α_i et β_i satisfont à une même relation linéaire entre *quatre* termes consécutifs

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} u_i & 1 & 1 & 1 \\ u_{i-1} & a & b & c \\ u_{i-2} & a^2 & b^2 & c^2 \\ u_{i-3} & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est bien possible si trois nombres consécutifs α_i ne coïncident pas avec trois β_i consécutifs.

Au contraire, il est impossible qu'à une valeur exceptionnelle fondamentale a correspondent *trois* autres b, c, d, car des relations auxquelles elles doivent satisfaire

$$\begin{aligned} a^{\nu-i} + k_1\alpha_{i+1} + k'_1\beta_{i+1} &= k''_1\, b^{\nu-1}, \\ a^{\nu-i} + k_2\alpha_{i+1} + k'_2\beta_{i+1} &= k''_2\, c^{\nu-1}, \\ a^{\nu-i} + k_3\alpha_{i+1} + k'_3\beta_{i+1} &= k''_3\, d^{\nu-1}, \end{aligned}$$

on déduit, en y éliminant α_{i+1}, β_{i+1}, une relation de la forme

$$a^{\nu-i} = A\, b^{\nu-i} + B c^{\nu-i} + C d^{\nu-i}$$

qui ne peut avoir lieu, quel que soit $i \leqq \nu$, que si $\nu = 2$, cas incompatible avec l'existence des deux relations (12) et (19).

Ce résultat est général. Supposons l'existence de λ relations de la forme

$$(23) \qquad \mathcal{F}_i = \alpha_1^j f_1 + \alpha_2^j f_2 + \ldots + \alpha_{\nu+1}^j f_{\nu+1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

entre les fonctions $f_i(z)$ et soit a une valeur exceptionnelle fondamentale de l'algébroïde correspondante u. De cette valeur exceptionnelle on peut déduire λ autres au plus, que nous désignerons par a_1, a_2, $\ldots$, a_λ. En effet, on devra avoir

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^{\nu-i} + k_1^1\alpha_{i+1}^1 + k_2^1\alpha_{i+1}^2 + \ldots + k_\lambda^1\alpha_{i+1}^\lambda = k_{\lambda+1}^1 a_1^{\nu-i}, \\ a^{\nu-i} + k_1^2\alpha_{i+1}^1 + k_2^2\alpha_{i+1}^2 + \ldots + k_\lambda^2\alpha_{i+1}^\lambda = k_{\lambda+1}^2 a_2^{\nu-i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\nu-i} + k_1^\lambda\alpha_{i+1}^1 + k_2^\lambda\alpha_{i+1}^2 + \ldots + k_\lambda^\lambda\alpha_{i+1}^\lambda = k_{\lambda+1}^\lambda a_\lambda^{\nu-i}. \end{array} \right.$$

En résolvant ce système linéaire par rapport aux α_{i+1}^j, on obtient des des expressions de la forme

$$\alpha_{i+1}^j = A_0^j a^{\nu-i} + A_1^j a_1^{\nu-i} + A_2^j a_2^{\nu-i} + \ldots + A_\lambda^j a_\lambda^{\nu-i},$$

qui montrent que les α_{i+1}^j (i varie) satisfont à une relation linéaire entre $\lambda + 2$ termes consécutifs, et qui y est

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+1}^j & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_{i-0}^j & a & a_1 & \ldots & a_\lambda \\ \alpha_{i-1}^j & a^2 & a_1^2 & \ldots & a_\lambda^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i-\lambda}^j & a^{\lambda+1} & a_1^{\lambda+1} & \ldots & a_\lambda^{\lambda+1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est possible, à moins que $\lambda + 1$ nombres consécutifs α_i^j ne coïncident avec une autre suite de $\lambda + 1$ nombres consécutifs α_i^k, cas auquel le nombre des relations entre les fonctions $f_i(z)$ devient moindre que λ.

On ne peut pas faire correspondre à une valeur exceptionnelle fondamentale a, plus de λ autres, $a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda+1}$, par exemple, car des relations (24) et de la suivante

$$a^{\nu-i} + k_1^{\lambda+1}\alpha_{i+1}^1 + k_2^{\lambda+1}\alpha_{i+1}^2 + \ldots + k_\lambda^{\lambda+1}\alpha_{i+1}^\lambda = k_{\lambda+1}^{\lambda+1} a_{\lambda+1}^{\nu-i},$$

on déduit, en éliminant les α_{i+1}^j, les relations

$$a^{\nu-i} = A_1 a_1^{\nu-i} + A_2 a_2^{\nu-i} + \ldots + A_{\lambda+1} a_{\lambda+1}^{\nu-i},$$

qui ne peuvent pas avoir lieu quel que soit $i \leqq \nu$ que lorsque $\nu \leqq \lambda$, ce qui est exclu, ou le nombre des relations (23).

21. La conclusion précédente est en défaut lorsque les coefficients de l'une ou plusieurs des relations (23) sont en progression géométrique, c'est-à-dire, lorsque les relations (23) correspondantes donnent elles-mêmes des valeurs exceptionnelles. Dans ce cas, le nombre des valeurs exceptionnelles, qu'on peut déduire d'une valeur exceptionnelle fondamentale a, est diminué par le nombre μ des relations (23) qui ont la forme dont il vient d'être question, car dans les relations (24) il reste seulement $\lambda - \mu$ coefficients α_{i+1}^j et le système est incompa-

tible tant que le nombre des relations reste supérieur au nombre des inconnues [1].

Il est donc malaisé de conclure, lorsqu'on a démontré par une voie quelconque qu'une algébroïde à ν branches admet un nombre quelconque μ de valeurs exceptionnelles fondamentales, que le nombre total des valeurs exceptionnelles est $\mu + \lambda$ au plus.

Il est malaisé aussi de conclure, d'après notre conclusion précédente que, chaque valeur exceptionnelle fondamentale a pouvant donner λ autres au plus, le nombre total en soit $(\nu + 1 - \lambda)(\lambda + 1)$, car nous avons déjà vu dans le cas particulier $\lambda = 2$ que cela est impossible en général. Pour déterminer une limite supérieure du nombre des valeurs exceptionnelles, admissibles pour une algébroïde non entière à ν branches, nous allons raisonner d'une manière différente, qui est d'ailleurs assez simple.

Soit u une algébroïde méromorphe à ν branches

$$u^\nu f_1 + u^{\nu-1} f_2 + \ldots + f_{\nu+1} = 0, \tag{25}$$

dans laquelle les $f_i(z)$ sont des fonctions entières, dont $f_1(z)$ possède des zéros, sans quoi l'algébroïde devient entière, et supposons que les $f_i(z)$ sont liées par λ relations distinctes de la forme (23). On peut alors les exprimer linéairement à l'aide de $\rho = \nu + 1 - \lambda$ fonctions arbitraires $g_i(z)$ et l'équation (25) devient

$$R_1 g_1 + R_2 g_2 + \ldots + R_\rho g_\rho = 0, \tag{26}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_\rho$ étant des polynomes en u, dont un au moins est du $\nu^{\text{ième}}$ degré.

Supposons d'abord, ce qui est le cas le plus avantageux, que les g_i sont des fonctions fondamentales, c'est-à-dire, de la forme $Q_i e^{P_i}$, avec P_i, Q_i polynomes entiers en z et que tous les R_i sont de degré ν.

Pour que a_1 soit une valeur exceptionnelle correspondant à la fonction fondamentale g_1, il faut que a_1 soit racine commune de tous les autres polynomes $R_2, R_3, \ldots, R_\rho$. Pour que a_2 soit une valeur exceptionnelle correspondant à la fonction fondamentale g_2, il faut que a_2 soit racine commune de tous les polynomes $R_1, R_3, \ldots, R_\rho$.

---

[1] Cette hypothèse est d'ailleurs impossible car alors l'algébroïde u n'est plus d'ordre ν.

De cette manière on conclut qu'on a ρ valeurs exceptionnelles, chacune correspondant à une g_i, lorsque tous les R_i ont, $\rho - 1$ à $\rho - 1$, une racine commune. Cela fait en tout $\rho - 1$ racines pour chaque R_i auxquelles on a mis des conditions. On aura ainsi autant de groupes de ρ valeurs exceptionnelles que $\rho - 1$ entre dans ν, le degré maximum des polynomes R_i. Posons

$$\nu = r(\rho - 1) + p,$$

le nombre total des valeurs exceptionnelles possibles pour l'algébroïde u sera $r\rho + p$, car les p racines restantes de chaque polynome R_i peuvent être communes, $\rho - 1$ à $\rho - 1$, de p manières différentes. En remplaçant p par $\nu - r(\rho - 1)$, on trouve, pour le nombre total N, l'expression

$$N = \nu + r = \nu + E\left(\frac{\nu}{\nu - \lambda}\right) \quad [1]. \tag{27}$$

Supposons maintenant que parmi les g_i il y en a qui ne sont pas des fonctions fondamentales. Il suffit de faire cette hypothèse sur une seule, le résultat étant le même. Alors, on aura autant de valeurs exceptionnelles que des racines peuvent avoir le R_i correspondant communes avec les autres polynomes. Or leur nombre est évidemment ν au plus. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème V. — *Étant donnée une algébroïde méromorphe à ν branches u, définie par une équation de la forme*

$$u^\nu f_1(z) + u^{\nu-1} f_2(z) + \ldots + f_{\nu+1}(z) = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions entières, dont la première possède des zéros :

a. Le nombre total des valeurs exceptionnelles ne peut pas dépasser

$$N = \nu + E\left(\frac{\nu}{\nu - \lambda}\right),$$

lorsque les fonctions $f_i(z)$ s'expriment linéairement à l'aide de $\nu + 1 - \lambda$ fonctions fondamentales distinctes de la forme $Q_i e^{P_i}$, P_i, Q_i étant des polynomes entiers en z_i,

---

[1] $E\left(\frac{m}{n}\right)$ désigne, comme d'habitude, le plus grand entier contenu dans $\frac{m}{n}$.

b. Le nombre total des valeurs exceptionnelles ne peut pas dépasser ν *lorsqu'il y a moins de* $\nu + 1 - \lambda$ *fonctions fondamentales.*

Pour les algébroïdes entières, données par une relation de la forme

$$u^{\nu} + u^{\nu-1} f_1 + u^{\nu-2} f_2 + \ldots + f_{\nu} = 0,$$

le nombre maximum des valeurs exceptionnelles a été déterminé par M. Th. Varopoulos ([1]), qui y a trouvé $\nu + 1 + \lambda$. Il est facile de voir que notre limitation est un peu meilleure, car de

$$\frac{\nu}{\nu - \lambda} < \lambda + 1$$

on déduit

$$\lambda(\lambda + 1 - \nu) < 0,$$

ce qui est vrai, à moins que $\lambda = 0$ ou $\lambda = \nu - 1$, c'est-à-dire les cas extrêmes possibles et où il y a coïncidence avec la limite donnée par M. Varopoulos.

La valeur maximum du nombre N correspond au cas extrême $\lambda = \nu - 1$; on a alors $N = 2\nu$, résultat qui est atteint, par exemple, pour l'algébroïde définie par l'équation

$$P_{\nu}(u) g_1 - Q_{\nu}(u) g_2 = 0,$$

dans laquelle $P_{\nu}(u)$, $Q_{\nu}(u)$ sont des polynomes du $\nu^{\text{ième}}$ degré en u, tandis que g_1 et g_2 sont des fonctions fondamentales. Les valeurs exceptionnelles sont les racines, supposées distinctes, de ces polynomes.

B. — Surfaces exceptionnelles.

22. Nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière admette une valeur exceptionnelle finie dans théorèmes I et III. Appliquons maintenant ces résultats aux systèmes

---

([1]) *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 53, 1925. Le résultat de M. Varopoulos constitue, au plus, un *maximum maximorum* du nombre de valeurs exceptionnelles. Il est dû d'ailleurs à une inadvertance dans la démonstration (cf. *Bull. Math. de l'Éc. Pol. de Bucarest*, 1935). *Voir* aussi la Notice de la page 257.

de ν fonctions entières, ce qui va nous donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles admettent une conbinaison exceptionnelle, homogène ou non.

Supposons que les fonctions données $f_i(z)$ ont des développements tayloriens de la forme

$$f_i(z) = c_{i0} + c_{i1}z + c_{i2}z^2 + \ldots + c_{in}z^n + \ldots, \tag{28}$$

et soit F une combinaison linéaire et homogène

$$F = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_\nu f_\nu \tag{29}$$

de ces fonctions. En posant

$$c_n = \mu_1 c_{1n} + \mu_2 c_{2n} + \ldots + \mu_\nu c_{\nu n}, \tag{30}$$

on a

$$F = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots.$$

Dire que les fonctions $f_i(z)$ admettent la combinaison exceptionnelle non homogène

$$\mu_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_\nu f_\nu$$

revient à dire que F admet la valeur exceptionnelle $-\mu_0 \not\equiv 0$. Nous sommes justement dans le cas de l'un des théorèmes I ou III. Il faut que les coefficients c_n, donnés par la relation (30), satisfassent aux conditions requises par les théorèmes cités. Autrement il doit exister une combinaison linéaire des coefficients des termes du même degré dans les $f_i(z)$ qui satisfassent aux susdites conditions. Nous dirons dans ce cas que les coefficients des fonctions $f_i(z)$ forment eux-mêmes *une combinaison exceptionnelle*. Avec cela, nous pouvons énoncer,

Étant donné un système de fonctions entières $f_i(z)$ elles admettent une combinaison exceptionnelle lorsque les coefficients des mêmes puissances de z, dans les développements tayloriens des fonctions données, en forment une.

Lorsque la combinaison exceptionnelle est homogène, on a $\mu_0 = 0$ et les conditions (A) (théorème I) ou (A′) (théorème III) rentrent respectivement dans (B) ou (B′) (théorèmes respectifs).

23. On peut rattacher quelques considérations géométriques aux questions précédentes. En effet, supposons que les paramètres μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_\nu$ soient les coordonnées d'un point M, de l'espace à ν dimensions. L'équation (C), obtenue par l'élimination des constantes λ_i entre les relations (A) et la première des relations (B) (page 230) et dans laquelle on a remplacé les c_n par les expressions (30) et a par $-\mu_0$, définit en général une hypersurface algébrique du $(p+1)^{\text{ième}}$ degré, que nous désignerons sous le nom de *surface exceptionnelle* du système de fonctions donné $f_i(z)$. La surface exceptionnelle, ainsi obtenue peut se décomposer en plusieurs autres, ce qui arrive, par exemple, lorsque les fonctions $f_i(z)$ sont liées par des relations linéaires à coefficients constants, en nombre bien déterminé.

Lorsqu'il s'agit de combinaisons exceptionnelles homogènes, l'équation de la surface est homogène par rapport aux coordonnées μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_\nu$. Tout point M correspondant à une combinaison exceptionnelle sera dit *point exceptionnel*. En réalité à une combinaison exceptionnelle correspond une infinité de surfaces exceptionnelles passant par les points exceptionnels, dont les équations s'obtiennent de (C) en donnant à n toutes les valeurs entières supérieures à $p-1$, p étant l'ordre entier de la combinaison exceptionnelle considérée. Nous considérerons cependant comme principale celle correspondant à $n=p$.

Lorsque le système de fonctions $f_i(z)$ admet plusieurs combinainaisons exceptionnelles d'ordres entiers différents, il y a de la sorte plusieurs suites de surfaces exceptionnelles.

Il y a là un cas particulier remarquable : c'est celui où toutes les combinaisons exceptionnelles admises par le système de fonctions donné sont du même ordre entier p. Dans ce cas il y a une *seule* surface exceptionnelle ou bien une seule suite infinie de telles surfaces. Tel est le cas, par exemple, des fonctions $\cos z$, $\sin z$.

24. Occupons-nous du cas spécial des combinaisons exceptionnelles homogènes. Les surfaces exceptionnelles passent alors par l'origine O, qui en est un point exceptionnel *absolu*.

Il y a cependant d'autres éléments des surfaces exceptionnelles qui présentent un intérêt de beaucoup plus rattaché à nos recherches. Soit M un point exceptionnel fondamental. En général, il n'y a qu'un seul point de cette espèce sur toute surface exceptionnelle. Tout point de la droite OM est évidemment exceptionnel et la droite se trouve faisant partie de l'intersection commune de la suite de surfaces exceptionnelles correspondantes. A un système de ν fonctions entières correspondent, d'après le théorème IV, ν *droites exceptionnelles* au plus, issues de l'origine, le maximum pouvant ainsi être atteint lorsque les fonctions données sont linéairement distinctes.

Supposons que les fonctions données soient liées par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants α_j^i.

Les points $P_i(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_\nu^i)$ se trouvent évidemment sur toute surface exceptionnelle, de quelque groupe [1] qu'elle fasse partie. Tout point de la multiplicité linéaire $L_{\lambda+1}^j$ [2], définie par les points O, M_j, P_i est exceptionnel, λ étant le nombre de relations existant entre les fonctions $f_i(z)$ et la multiplicité $L_{\lambda+1}^j$ se trouve à l'intersection commune des surfaces exceptionnelles correspondant à la combinaison exceptionnelle considérée. Il y a davantage, les points O, P_i déterminent une multiplicité unique L_λ, commune à toutes les $L_{\lambda+1}^j$ et, par surcroît, à toutes les surfaces exceptionnelles qu'on peut rattacher au système de fonctions considéré.

Il y a un cas particulier remarquable : c'est celui où $\lambda = \nu - 2$. Les surfaces exceptionnelles se décomposent en une $L_{\nu-1}^j$ ($\nu - 2$ – plan) et une autre hypersurface de degré p. Tel est le cas $\nu = 3$, $p = 1$. La surface du deuxième ordre se décompose en deux plans. Un exemple en est fourni par les fonctions considérées à la page 243. La quadrique exceptionnelle se décompose en deux plans, ayant les équations

$$\mu_1 - (a+b)\mu_2 + ab\,\mu_3 = 0,$$
$$\mu_1 - (c+d)\mu_2 + cd\,\mu_3 = 0,$$

dont le premier contient, entre autres, les points exceptionnels $(a^2, a, 1)$, $(b^2, b, 1)$ et le second $(c^2, c, 1)$, $(d^2, d, 1)$.

Nous pouvons énoncer, compte tenu aussi du théorème IV, le résultat suivant :

---

(1) Il s'agit du groupe exceptionnel défini à la page 247.
(2) Autrement un λ-plan, d'après la terminologie de Guichard.

THÉORÈME VI. — *A tout système des fonctions entières admettant des combinaisons exceptionnelles homogènes fondamentales correspondent au plus* $\nu - \lambda$ *multiplicités linéaires exceptionnelles* $L^i_{\lambda+1}$, *intersections communes des suites infinies de surfaces exceptionnelles attachées aux groupes exceptionnels admis par le système de fonctions données.*

Les multiplicités $L^i_{\lambda+1}$ *ont comme intersection commune une* L_λ *unique,* λ *étant le nombre des relations linéaires et homogènes existant entre les fonctions données. Lorsque* $\lambda = 0$, *les* $L^i_{\lambda+1}$ *deviennent des droites exceptionnelles, passant par l'origine* O, *à laquelle se réduit* L_λ.

25. Le cas très particulier $\nu = 2$, qui correspond, nous l'avons vu, aux fonctions méromorphes, est du tout remarquable. En effet, les surfaces exceptionnelles se réduisant à des *droites*, passant par l'origine et formant un *faisceau exceptionnel.* Le théorème de M. Picard ou le nôtre (IV) pour $\nu = 2$, nous permet d'énoncer le résultat particulier suivant :

THÉORÈME VII. — *A toute fonction méromorphe d'ordre fini correspond un faisceau exceptionnel de droites, dont deux au plus sont exceptionnelles.*

Par exemple, la fonction tang z. On a ici $p = 1$ et le faisceau exceptionnel est formé par les droites isotropes du plan

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = 0,$$

qui sont *exceptionnelles* toutes les deux.

Prenons encore l'exemple

$$f_1 = e^{z^2} + e^z, \qquad f_2 = e^{z^2} - e^z.$$

Les coefficients c_n de la combinaison

$$F = \mu_1(e^{z^2} + e^z) + \mu_2(e^{z^2} - e^z)$$

sont

$$c_{2n} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{(2n)!} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{n!}, \qquad c_{2n+1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{(2n+1)!}.$$

Comme on a ici deux combinaisons exceptionnelles fondamentales Ae^{z^2}, Be^z, on aura dans le premier cas les droites

$$(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 + \mu_1)(\mu_2 - 6\mu_1) = 0.$$

et dans le second

$$(\mu_2+\mu_1)(\mu_2-5\mu_1)=0,$$

de sorte que l'équation du faisceau exceptionnel correspondant est

$$(\mu_2^2-\mu_1^2)(\mu_2-5\mu_1)(\mu_2-6\mu_1)=0,$$

dont les bissectrices des axes

$$\mu_2-\mu_1=0, \qquad \mu_2+\mu_1=0$$

sont les droites exceptionnelles.

26. Nous pouvons donner encore une autre forme à la condition qui exprime que le système de fonctions $f_i(z)$ admet une combinaison exceptionnelle fondamentale homogène.

Considérons le *wronskien* du système de fonctions

$$W_\nu=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_\nu \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(\nu-1)} & f_2^{(\nu-1)} & \dots & f_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix}.$$

W_ν ne peut être identiquement nul que si les fonctions $f_i(z)$ sont liées par une relation linéaire et homogène, à coefficients constants au moins. En effet, si $W_\nu=0$, il s'ensuit que les f_i sont des intégrales particulières d'une même équation différentielle linéaire d'ordre $\nu-1$

$$A_1 y^{(\nu-1)}+A_2 y^{(\nu-2)}+\ldots+A_\nu y=0,$$

dans laquelle les A_i sont des fonctions de z ou même des constantes, cela n'ayant pas d'importance. On peut alors les exprimer sous la forme

$$f_i(z)=c_{i1}\varphi_1+c_{i2}\varphi_2+\ldots+c_{i\nu-1}\varphi_{\nu-1},$$

φ_i étant $\nu-1$ intégrales distinctes de l'équation précédente. L'élimination des φ_i entre les ν expressions des f_i conduit bien à une relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre les f_i comme nous l'avons déjà annoncé.

Cela étant, supposons pour le moment $W_\nu\neq 0$ et soit F une combinaison exceptionnelle homogène fondamentale des fonctions $f_i(z)$

$$F=\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\ldots+\mu_\nu f_\nu=Q e^P,$$

P, Q étant des polynomes en z. On en déduit par dérivation

$$\begin{array}{l}
\mu_1 f_1' + \mu_2 f_2' + \ldots + \mu_\nu f_\nu' = Q_1 \ e^P, \\
\mu_1 f_1'' + \mu_2 f_2'' + \ldots + \mu_\nu f_\nu'' = Q_2 \ e^P, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu_1 f_1^{(\nu-1)} + \mu_2 f_2^{(\nu-1)} + \ldots + \mu_\nu f_\nu^{(\nu-1)} = Q_{\nu-1} e^P,
\end{array}$$

les Q_i ayant des significations évidentes. Comme $W_\nu \neq 0$, on peut résoudre ces relations par rapport aux constantes μ_i, en appliquant la règle de Cramer; on trouve

$$(w_i) \qquad W_\nu^i = \mu_i W_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dans laquelle W_ν^i représente ce que devient W_ν lorsqu'on y remplace f_i par Qe^P. Les relations (w_i) montrent que W_ν reste invariable, à un facteur constant près, lorsqu'on y remplace l'une des fonctions f_i par la fonction fondamentale Qe^P.

Réciproquement, supposons que W_ν jouisse de cette propriété, tout en étant différent de zéro. La relation (w_i) devient, par exemple pour $i = 1$,

$$\begin{vmatrix}
Q \quad e^P - \mu f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_\nu \\
Q_1 \quad e^P - \mu f_1' & f_2' & f_3' & \ldots & f_\nu' \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
Q_{\nu-1} e^P - \mu f_1^{(\nu-1)} & f_2^{(\nu-1)} & f_3^{(\nu-1)} & \ldots & f_\nu^{(\nu-1)}
\end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre que le *wronskien* nul du système de fonctions

$$Qe^P - \mu f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad \ldots, \quad f_\nu.$$

D'après la remarque précédente, il s'ensuit que ces fonctions sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants

$$Qe^P = \mu f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_\nu f_\nu,$$

et exprime que les fonctions $f_i(z)$ admettent une combinaison exceptionnelle fondamentale, conduisant à la fonction fondamentale Qe^P. Nous pouvons énoncer ainsi le résultat suivant :

Théorème VIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de ν fonctions entières, linéairement indépendantes, admette une combinaison exceptionnelle fondamentale homogène, est qu'il* *existe une fonction fondamentale de la forme* Qe^P, *telle que le wronstien du système de fonctions données reste invariable si l'on y remplace l'une quelconque de ces fonctions par* Qe^P.

Lorsque les fonctions données ne sont pas linéairement indépendantes, l'énoncé devient un peu plus compliqué, mais il est facile à obtenir.

Nous avons supposé, pour rester dans les hypothèses faites dans tout ce travail, que P et Q sont des polynomes entiers par rapport à z, mais nous n'avons pas utilisé cette hypothèse dans la démonstration de ce dernier théorème.

Il s'ensuit qu'il reste valable même dans le cas le plus général où P et Q sont des fonctions entières.

En particulier, lorsque Q au moins est une fonction entière à un nombre infini de zéros, notre résultat prend une forme généralisant la généralisation donnée par M. Borel au théorème de M. Picard. En effet, il donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une combinaison linéaire de ν fonctions entières admette une distribution exceptionnelle de zéros.

Remarquons enfin que la condition exprimée par le théorème précédent est entièrement équivalente à celle-ci :

L'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y - \mu f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_\nu \\ y' - \mu f_1' & f_2' & f_3' & \dots & f_\nu' \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(\nu-1)} - \mu f_1^{(\nu-1)} & f_2^{(\nu-1)} & f_3^{(\nu-1)} & \dots & f_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix} = 0$$

doit avoir une intégrale particulière de la forme Qe^P.

Prenons par exemple $f_1 = \cos z$, $f_2 = \sin z$. L'équation correspondante est

$$y \cos z - y' \sin z = \mu,$$

avec l'intégrale générale

$$y = c \sin z + \mu \cos z,$$

et il est visible qu'elle contient $e^{\pm iz}$, à des facteurs constants près. Le système de fonctions $\cos z$, $\sin z$ admet par suite deux combinaisons exceptionnelles fondamentales.

27. En dehors des combinaisons exceptionnelles considérées dans les lignes précédentes, on peut étudier aussi les combinaisons de fonctions obtenues en remplaçant les coefficients constants par des polynomes ou même par des fonctions entières d'ordres moindres que ceux des fonctions données, telles les suivantes

$$(\alpha) \qquad R_1^i(z) f_1(z) + R_2^i(z) f_2(z) + \ldots + R_\nu^i(z) f_\nu(z) = Q_i e^{P_i},$$

dans lesquelles P_i, Q_i, R_i sont des polynomes en z. Nous les appellerons *combinaisons exceptionnelles à polynomes*.

On peut édifier, pour ces combinaisons, une théorie analogue à celle que nous avons esquissée pour les combinaisons à coefficients constants. On peut, par exemple, démontrer que, lorsque les fonctions $f_i(z)$ sont linéairement indépendantes, cette notion étant prise dans un sens plus large, c'est-à-dire, elles ne satisfont pas à une relation de la forme

$$(\beta) \qquad A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + \ldots + A_\nu f_\nu(z) = 0,$$

dans laquelle les A_i sont des polynomes en z, qu'il n'y a pas plus de ν combinaisons exceptionnelles homogènes à polynomes. C'est toujours à l'aide du théorème de M. Borel qu'on démontre cette affirmation, car, en supposant l'existence de $\nu + 1$ combinaisons exceptionnelles de la forme (α), l'élimination des ν fonctions $f_i(z)$ entre les relations correspondantes nous donne une relation de la forme

$$B_1(z) Q_1 e^{P_1} + B_2(z) Q_2 e^{P_2} + \ldots + B_{\nu+1}(z) Q_{\nu+1} e^{P_{\nu+1}} = 0,$$

qui est impossible lorsque les $Q_i e^{P_i}$ diffèrent, à moins que l'on ait $B_i \equiv 0$, pour tous les i, ce qui est aussi impossible car on en déduirait une relation linéaire entre les R_k^i (i varie dans la relation) et par suite, la même relation entre les $Q_i e^{P_i}$.

On démontre de la même manière que lorsque les fonctions $f_i(z)$ satisfont à λ relations de la forme (β), elles admettent $\nu - \lambda$ fonctions fondamentales au plus, de sorte que nous pouvons énoncer une proposition analogue à celle contenue dans le théorème IV :

THÉORÈME IX. — *Étant donné un système de ν fonctions entières $f(z)$,* *il admet ν combinaisons exceptionnelles homogènes à polynomes au plus.*

Lorsque λ en sont primordiales, le nombre des fondamentales ne peut pas dépasser $\nu - \lambda$.

Un cas particulier remarquable correspond pour $\nu = 2$. On a au plus deux combinaisons de la forme

$$R_1^1 f_1 + R_2^1 f_2 = g_1,$$
$$R_1^2 f_1 + R_2^2 f_2 = g_2.$$

Or, cela montre que :

Étant donnée une fonction méromorphe

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

il lui correspond deux fractions rationnelles au plus, $\frac{R_2^1}{R_1^1}$, $\frac{R_2^2}{R_1^2}$, telles que les équations

$$F(z) - \frac{R_2^1}{R_1^1} = 0, \qquad F(z) - \frac{R_2^2}{R_1^2} = 0,$$

admettent chacune un nombre fini de zéros.

On retrouve ainsi l'une des extensions données par M. É. Borel au théorème de M. É. Picard.

Les algébroïdes méromorphes peuvent encore admettre des valeurs exceptionnelles qui soient des polynomes. Citons comme exemple, l'algébroïde définie par l'équation

$$(u - A)(u - B)g_1 - (u - C)(u - D)g_2 = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D sont des polynomes, tandis que g_1, g_2 sont des fonctions fondamentales. L'algébroïde u, définie par cette équation admet les quatre valeurs exceptionnelles polynomiales A, B, C, D [1].

[1] Nous consacrerons un autre travail pour ces questions.