Annales scientifiques de l'É.N.S.

Georges Giraud

Équations à intégrales principales ; étude suivie d'une application

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 251-372

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__251_0>

ÉQUATIONS A INTÉGRALES PRINCIPALES

ÉTUDE SUIVIE D'UNE APPLICATION [1]

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Introduction.

La notion d'intégrale principale a été introduite par Cauchy pour les intégrales simples. Cette notion se présente d'une façon toute naturelle dans la théorie des fonctions harmoniques de deux variables : si l'on considère une telle fonction, représentée par un potentiel logarithmique de simple couche, et si l'on veut calculer la dérivée de cette fonction, en un point de la courbe-support, suivant la tangente à cette courbe, le résultat s'obtient, moyennant certaines hypothèses de régularité, en dérivant sous le signe d'intégration et en regardant l'expression obtenue comme une intégrale principale au sens de Cauchy. Ce résultat s'étend aux solutions des équations du type elliptique à deux variables.

Le problème des marées dans un bassin limité par des falaises verticales a amené l'abbé Bertrand [2], suivant une voie ouverte par

---

(1) Ce travail était à l'impression quand MM. Hadamard et Vessiot ont bien voulu me signaler des travaux de M. Tricomi, se rapportanf au même objet; mentionnons les suivants : *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto* (*Memorie della R. Accademia dei Lincei*, 5e série, t. 14, 1923, p. 133 à 247), spécialement Chap. VI, § 6, p. 220 et suivantes; *Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 27, 1927, p. 87 à 133). Une Note aux *Comptes rendus* (t. 199, 1934, p. 473 à 475) complète le présent travail.

(2) GASTON BERTRAND, *La théorie des marées et les équations intégrales*, Thèse, parue dans *Ann. sc. Ec. Norm. sup.* t. 40, 1923, p. 151 à 258, spécialement p. 201 à 247.

Poincaré, à un remarquable problème relatif aux fonctions harmoniques de deux variables : sur la frontière d'un certain domaine, dans lequel cette fonction doit être harmonique, on impose à l'inconnue de posséder une dérivée donnée suivant une direction donnée, non tangente et non forcément partout normale à cette frontière. En cherchant à représenter la fonction inconnue par un potentiel logarithmique de simple couche, on parvient à une équation qui, au premier abord, ressemble à une équation de Fredholm, mais l'inconnue y figure sous une intégrale principale de Cauchy. Complétant et rectifiant les recherches de Poincaré, l'abbé Bertrand établit que, par le procédé classique de l'itération, les équations de cette sorte se changent en de véritables équations de Fredholm, remarque qui ouvre la voie pour résoudre le problème donné. Cependant, outre que l'abbé Bertrand se bornait au cas où toutes les données sont analytiques, il n'étudiait pas les cas où l'équation de Fredholm obtenue devient impossible ou indéterminée; ces cas sont, il est vrai, exceptionnels, mais il est nécessaire de les considérer : c'est ainsi que la fonction de Green recherchée par l'abbé Bertrand est toujours inexistante, comme on peut le conclure du Chapitre IV du présent travail, en remarquant seulement que le problème homogène correspondant admet pour solution une constante quelconque. Au reste l'abbé Bertrand a lui-même remarqué cette inexistence dans un cas particulier (1), et il a indiqué un moyen de traiter le problème des marées dans ce cas particulier.

D'autre part des questions analogues se posent aussi pour un plus grand nombre de variables. En particulier les dérivées tangentielles, dans le cas d'un potentiel de simple couche correspondant à une équation générale du type elliptique à un nombre quelconque de variables, s'expriment à l'aide d'une certaine généralisation des intégrales principales simples.

Dans le premier Chapitre de ce travail, après une définition très générale des intégrales principales, on introduit des noyaux d'intégrales principales étendues à des variétés closes à un nombre quelconque de dimensions; on suppose que ces noyaux sont continus

(1) *Ibid.*, p. 234 à 239.

quand les deux points variables sont distincts : mais quand ces points viennent à se confondre, le noyau devient non borné, et il y a lieu d'introduire le passage à la limite qui caractérise les intégrales principales. On pourrait aussi, comme l'a fait M. Picard pour les intégrales simples (1), considérer des noyaux pourvus de singularités *fixes* de ce type : mais les problèmes visés, relatifs aux équations du type elliptique, introduisent des singularités *mobiles*, comme celles qui sont étudiées ici. Cette étude ne suppose pas que les différentes données sont analytiques; on suppose seulement qu'elles remplissent certaines conditions de Hölder; il serait intéressant de chercher à remplacer celles-ci par des conditions plus générales (2). On voit notamment, dans le cours de ce premier Chapitre, le caractère général d'un phénomène analytique, relatif à la composition de deux noyaux d'intégrales principales, et déjà signalé pour les intégrales simples par Poincaré et par l'abbé Bertrand.

Dans le second Chapitre, on étudie spécialement l'itération d'un noyau du type qui se présente à propos des équations du type elliptique; c'est l'occasion de retrouver le principal résultat de l'abbé Bertrand.

Dans le Chapitre III sont enfin abordées les équations à intégrales principales, pour les mêmes types de noyaux. L'idée directrice est d'appliquer à l'équation intégrale une opération analogue à l'itération, mais dépendant d'un nouveau noyau qu'il faut choisir de façon que la nouvelle équation soit du type de Fredholm ; cette opération est identique à l'itération dans le cas des intégrales simples, mais non dans les autres cas. L'étude n'est faite complètement ici que pour les intégrales simples et doubles ; on verra que, dans ces cas, les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm sont encore valables, pourvu qu'on exclue deux coupures symétriques par rapport à l'origine et tracées sur l'axe purement imaginaire du plan de la variable complexe λ, qui est en facteur devant l'intégrale de l'équation donnée (3). Ce résultat s'applique

---

(1) ÉMILE PICARD, *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (*Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 28, 1911, p. 459 à 472); dans ce mémoire, les intervalles d'exclusion sont plus généraux que ceux qui donnent les intégrales principales de Cauchy.

(2) *Comptes rendus*, t. 196, 1933, p. 595 à 597.

(3) Dans un prochain travail, on montrera que, pour les équations à intégrales princi-

aussi à certains systèmes d'équations intégrales, utiles pour les équations du type elliptique. Pour certaines équations de première espèce, avec intégrales principales simples, les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm continuent à s'appliquer; mais si l'on est dans le cas d'un pôle du noyau résolvant, ce pôle est toujours simple. Un exemple montre que les procédés ici employés peuvent ne pas réussir pour d'autres types de noyaux d'intégrales principales doubles.

Enfin dans le Chapitre IV ces résultats sont appliqués à la solution de certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique à deux et à trois variables; ces problèmes comprennent comme cas particulier celui dont il a été question plus haut. On pourrait d'ailleurs traiter directement aussi des questions analogues relatives à certaines équations intégro-différentielles à deux et à trois variables, la condition à la frontière pouvant être aussi intégro-différentielle [1]; c'est à propos d'un problème de cette sorte que l'abbé Bertrand employait le détour d'un problème auxiliaire, relatif aux fonctions harmoniques; l'étude détaillée de ces équations intégro-différentielles est renvoyée à plus tard. On démontre ici que, si les cosinus directeurs de la normale à la frontière remplissent, par rapport aux paramètres, des conditions de Hölder, et si toutes les fonctions qui figurent, comme coefficients ou comme seconds membres, dans l'équation aux dérivées partielles ou dans la condition à la frontière, remplissent des conditions de Hölder, la discussion du problème est semblable à celle d'une équation de Fredholm; en particulier si le problème homogène correspondant n'a que la solution zéro, le problème donné a toujours une solution et une seule. Les hypothèses de régularité faites dans le Chapitre IV sont même un peu plus larges, mais alors l'opération du type elliptique doit être prise dans un sens généralisé, comme dans un travail antérieur [2].

---

pales d'ordre au moins égal à trois et du type considéré ici, un noyau résolvant, méromorphe par rapport à λ dans un domaine qui contient l'axe réel, continue d'exister, de sorte que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm subsistent dans ce domaine. Les résultats du Chapitre IV du présent travail seront ainsi étendus aux équations du type elliptique avec n'importe combien de variables.

(1) *Comptes rendus*, t. 191, 1930, p. 478-480.

(2) *Bull. Sc. math.*, t. 56, 1932, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352, et Errata p. 384.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

1. Noyaux sommables et remplissant des conditions de Hölder. — Soit $G(X, \Xi)$ une fonction de deux points dans l'espace à m dimensions ($m \geqq 1$). Nous aurons souvent à envisager le cas où cette fonction possède les propriétés suivantes :

Elle est continue quand X *et* Ξ *sont distincts et appartiennent à un certain ensemble borné et fermé; de plus il existe un nombre positif* λ, *au plus égal à* m, *tel qu'on ait* (¹)

$$G(X, \Xi) = O[L^{\lambda-m}(X, \Xi)] \qquad (0 < \lambda \leqq m;\ L = \text{distance});$$

enfin il existe un nombre positif h, *au plus égal à* un *et à* λ, *tel qu'on ait*

$$G(X, \Xi) - G(Y, \Xi) = O[L^h(X, Y)\, l^{\lambda-h-m}] \qquad (0 < h \leqq 1,\ h \leqq \lambda),$$

en désignant par l, *ou par* $l(X, Y, \Xi)$, *la plus courte distance du point* Ξ *au segment de droite* XY.

Si ces hypothèses sont remplies, elles demeurent remplies quand on y remplace h par n'importe quel nombre positif inférieur k. En effet soit g un nombre déterminé, positif et inférieur à *un*. Si

$$L(X, Y) \geqq g L(X, \Xi),$$

il est évident que

$$G(X, \Xi) = O[L^k(X, Y)\, L^{\lambda-k-m}(X, \Xi)] = O[L^k(X, Y)\, l^{\lambda-k-m}],$$

car on a $l \leqq L(X, \Xi)$); la même limitation a lieu pour $G(Y, \Xi)$, et par suite l'inégalité visée est vraie dans ce cas. Si $L(X, Y) < g L(X, \Xi)$, on a

$$L(X, \Xi) \geqq l \geqq L(X, \Xi) - L(X, Y) > (1 - g)\, L(X, \Xi)];$$

(¹) On emploie le symbole de Landau : $z = O(y)$ signifie que $\frac{z}{y}$ est borné; $z = o(y)$ signifie que $\frac{z}{y}$ tend vers zéro.

donc, si $o < k < h$,

$$G(X, \Xi) - G(Y, \Xi) = O[L^h(X, Y) L^{\lambda-h-m}(X, \Xi)] = O[L^k(X, Y) L^{\lambda-k-m}(X, \Xi)]$$
$$= O[L^k(X, Y) l^{\lambda-k-m}],$$

et notre vérification est terminée [1].

Cette hypothèse est vérifiée si, par exemple, G est du type

$$[\varpi(X) - \varpi(\Xi)]\, G'(X, \Xi),$$

où G' vaut $O(L^{-m})$, pendant que les $\frac{\partial G'}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ existent et valent $O(L^{-1-m})$, et que ϖ remplit une condition de Hölder avec l'exposant λ (ici et dans la suite, les coordonnées ou les paramètres qui correspondent à un point X sont désignés par les minuscules correspondantes affectées d'un indice, x_α).

2. **Théorème.** — *Soit* $H(X, \Xi)$ *une fonction de deux points* X *et* Ξ *de l'ensemble borné et fermé* E, *dans l'espace à m dimensions* ($m \geqq 1$); *on suppose que cette fonction est mesurable par rapport à* X, *quel que soit* Ξ, *et que*

$$H(X, \Xi) = O[L^{\mu-m}(X, \Xi)] \qquad (o < \mu \leqq m).$$

Soit $G(X, \Xi)$ *une autre fonction, qui remplit dans* E *les hypothèses du paragraphe* 1; *on pose*

$$F(X, \Xi) = \int_E^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A \qquad [dV_A = d(a_1, \ldots, a_m)].$$

Je dis que, si $\lambda + \mu < m + h$, *on a*

$$F(X, \Xi) - F(Y, \Xi) = O[L^k(X, Y)\, l^{\lambda+\mu-k-m}] \qquad (\lambda + \mu < m + h),$$

k étant n'importe quel nombre positif au plus égal à h, inférieur à λ *et supérieur à* $\lambda + \mu - m$; *si* $\lambda + \mu > m$, $F(X, \Xi)$ *remplit par rapport à* X *une condition de Hölder indépendante de* Ξ, *avec n'importe quel exposant au plus égal à h et inférieur à* $\lambda + \mu - m$.

---

(1) L'hypothèse reste remplie après tout changement de variables, du type du paragraphe 6.

Considérons d'abord le cas où l'on a

$$4\,L(X, Y) \leqq L(X, \Xi).$$

Les parties de $F(X, \Xi)$ et de $F(Y, \Xi)$ qui viennent du domaine

$$L(X, A < 2\,L(X, Y)$$

valent $O[L^{\lambda}(X, Y)L^{\mu-m}(X, \Xi)]$ et *a fortiori* $O[L^{k}(X, Y)l^{\lambda+\mu-k-m}]$. Dans le domaine $2\,L(X, Y) < L(X, A) < \frac{L(X, \Xi)}{2}$, on écrit

$$G(X, A) - G(Y, A) = O[L^{h}(X, Y)L^{\lambda-h-m}(X, A)], \qquad H(A, \Xi) = O]L^{\mu-m}(X, \Xi)],$$

et l'on trouve ainsi que la partie correspondante de $F(X, \Xi) - F(Y, \Xi)$ a encore la limitation précédente (c'est ici qu'intervient l'inégalité $k < \lambda$). Dans le domaine $L(\Xi, A) < \frac{L(X, \Xi)}{2}$, on écrit

$$G(X, A) - G(Y, A) = O[L^{h}(X, Y)L^{\lambda-h-m}(X, \Xi) \qquad H(A, \Xi) = O[L^{\mu-m}(\Xi, A)],$$

et l'on a encore la même limitation. Enfin dans le reste de E on a

$$L(\Xi, A) > \frac{L(X, \Xi)}{2}, \qquad L(X, A) > \frac{L(X, \Xi)}{2},$$

et par suite

$$\frac{1}{3} < \frac{L(X, A)}{L(\Xi, A)} < 3;$$

on a donc à intégrer $O[L^{h}(X, Y)L^{\lambda+\mu-h-2m}(X, A)]$; si $\lambda + \mu < m + h$, cela donne toujours la même limitation; si $\lambda + \mu > m$, la fonction à intégrer peut aussi être écrite sous la forme

$$O[L^{k}(X, Y)L^{\lambda+\mu-k-2m}(X, A)] \qquad (k \leqq h,\ k < \lambda + \mu - m),$$

et l'on voit ainsi que

$$F(X, \Xi) - FY, \Xi) = O[L^{k}X, Y)].$$

Il faut maintenant considérer le cas où l'on a

$$4\,L(X, Y) > L(X, \Xi).$$

On peut supposer qu'on a en outre $4L(X, Y) > L(Y, \Xi)$, sinon les raisonnements précédents s'appliqueraient *mutatis mutandis*. De plus il suffit de se borner au cas où l'on a $\lambda+\mu \geqq m$, car autrement on remarquerait que

$$F(X, \Xi)=O[L^{\lambda+\mu-m}(X, \Xi)],$$

et l'on raisonnerait comme au paragraphe 1. Si $\lambda+\mu \geqq m$, la partie de $F(X, \Xi)$ qui provient de la région

$$L(X, A)<\frac{L(X, \Xi)}{2}$$

vaut

$$O[L^{\lambda+\mu-m}(X, \Xi)]=\begin{cases} O[L^k(X, Y)]^{\lambda+\mu-m-k}] & \text{si } \lambda+\mu<m+k, \\ O[L^k(X, Y)] & \text{si } \lambda+\mu \geqq m+k. \end{cases}$$

Dans la région $L(\Xi, A)<\dfrac{L(X, \Xi)}{2}$, la même limitation est valable. La partie de $F(X, \Xi)$ qui correspond à la partie restante de la région

$$L(\Xi, A)<8L(X, Y)$$

s'obtient en intégrant $O[L^{\lambda+\mu-2m}(\Xi, A)$ et elle vaut par suite

$$O[L^{\lambda+\mu-m}(X, Y)]$$

si $\lambda+\mu>m$, ou $O\left[\log\dfrac{16L(X, Y)}{L(X, \Xi)}\right]$ si $\lambda+\mu=m$; dans le premier cas on retrouve les limitations précédentes; dans le second, on remarque que, pour $x>1$, on a $\log x \leqq \frac{x^k}{ke}$, d'où le même résultat. Ainsi ces limitations sont valables pour les parties de $F(X, \Xi)$ et de $F(Y, \Xi)$ qui proviennent de la région $L(\Xi, A)<8L(X, Y)$. Dans la région

$$L(\Xi, A)>8L(X, Y),$$

on écrit

$$G(X, A)-G(Y, A)=O[L^h(X, Y)L^{\lambda-h-m}(X, A)],$$

car

$$L(X, A) \geqq L(\Xi, A)-L(X, \Xi)>4L(X, Y);$$

on peut aussi, dans cette limitation, remplacer $L(X, A)$ par $L(\Xi, A)$, car on a $L(\Xi, A)>2L(X, \Xi)$; ainsi l'on doit intégrer

$$L^k(X, Y)O[L^{\lambda+\mu-k-2m}(\Xi, A)]$$

dans la région $L_0>L(\Xi, A)>8L(X, Y)$, en désignant par L_0 une longueur supérieure au maximum de $L(\Xi, A)$ quand A et Ξ varient dans E : on achève ainsi de vérifier la limitation annoncée.

Comme cas particulier, nous voyons que *si* $\lambda + \mu$ *est inférieur à* m, *la fonction* F *satisfait aux hypothèses du paragraphe* 1, à condition de diminuer h s'il est égal à λ.

Si H est indépendant de Ξ, le théoréme s'applique en prenant $\mu = m$; F remplit donc une condition de Hölder avec l'exposant h si $h < \lambda$. Dans certains cas, où h est égal à λ, l'exposant de cette condition de Hölder peut encore être pris égal à h [1].

3. **Nouvelles hypothèses.** — Il arrivera que nous ayons besoin d'intégrer tantôt par rapport au premier point, tantôt par rapport au second. Pour ce motif, et pour un autre qu'on verra plus loin, nous serons amenés à supposer que *les hypothèses du paragraphe* 1 *sont remplies dans les deux cas par la fonction* $G(X, \Xi)$.

4. **Intégrales principales.** — Soit E un ensemble borné et fermé de l'espace à m dimensions, contenant les ensembles mesurables $E(n)$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) dont chacun est compris dans le précédent et dont les mesures tendent vers zéro. Considérons une fonction $F(A)$, non sommable sur E, mais sommable sur chacun des $E - E(n)$; s'il arrive que $\lim_{n \to \infty} \int_{E-E(n)}^{(m)} F\,dV$ existe, cette limite peut être nommée *l'intégrale principale* de E dans F et être désignée par la notation ordinaire $\int_E^{(m)} F\,dV$; mais la famille des ensembles d'exclusion $E(n)$ doit être spécifiée. Il n'est pas nécessaire d'avoir seulement un ensemble dénombrable d'ensembles d'exclusion; ceux que nous allons introduire pourront varier d'une façon continue.

Soit par exemple $F(A)$ une fonction positivement homogène [2] et d'ordre $-m$ par rapport aux coordonnées de A, l'origine des coor-

---

(1) Voir *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 49, 1932, p. 1 à 104, et 245 à 308, spécialement Chapitre I, paragraphe 1 et paragraphes 7 à 9, p. 3 et 4 et 9 à 13. *Voir* aussi EBERHARD HOPF, *Math. Annalen*, t. 34, 1931, p. 194 à 233, spécialement p. 197 à 206.

(2) C'est-à-dire que si l'on multiplie les variables par un même facteur positif t, la fonction est multipliée par t^{-m}.

données étant *intérieure* à E; on suppose que cette fonction est continue partout ailleurs qu'en O, et qu'il existe une forme quadratique définie positive $\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} a_\alpha a_\beta$ telle que l'intégrale $\int^{(m)} F\,dV$ étendue à la région

$$(1) \qquad \eta^2 < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} a_\alpha a_\beta < \zeta^2 \qquad (0 < \eta < \zeta)$$

soit nulle quels que soient η et ζ (condition remplie si la nullité a lieu pour un système particulier de valeurs de η et de ζ). Alors l'intégrale principale dans E sera, par définition, la limite de l'intégrale étendue à ce qui reste de E quand on exclut les régions

$$(2) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} a_\alpha a_\beta < \eta^2 \qquad (\eta \to +0);$$

cette définition, répétons-le, suppose que O est *intérieur* à E. La condition indiquée est évidemment nécessaire et suffisante pour que les domaines d'exclusion (2) fassent tendre l'intégrale vers une limite. Si $m = 1$, on retrouve les intégrales principales de Cauchy.

5. **Théorème.** — *Si* F *est une fonction positivement homogène et d'ordre* $-m$, *continue partout sauf en* O, *et si son intégrale étendue à la région* (1) *est nulle, on peut prendre comme régions d'exclusion*

$$(3) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} a_\alpha a_\beta < \eta^2 + \eta^2 f(A),$$

où f est une fonction de A *valant* $O[L^h(O, A)]$ $(h > 0)$; *la limite pour* $\eta = 0$ *est indépendante du choix de f.*

En effet, puisque f est borné, L(O, A) vaut O(η); d'autre part, l'intégrale $\int^{(m)} |F|\,dV$, étendue à la région

$$\eta^2 - k\eta^{2+h} < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} a_\alpha a_\beta < \eta^2 + k\eta^{2+h},$$

où k est une constante, et où η est assez petit pour que le premier membre soit positif, vaut $O\left(\log\frac{1+k\eta^h}{1-k\eta^h}\right) = O(\eta^h)$; cela démontre notre proposition.

6. **Variétés closes.** — Nous désignerons par $\mathcal{V}$ une variété close à m dimensions. Voici ce que nous entendons par là. Une certaine région

$\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ se compose de points définis par m coordonnées ou paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et le point qui a les mêmes coordonnées dans l'espace euclidien à m dimensions peut lui-même varier dans une certaine région fermée et bornée $\mathcal{R}_1$. Une autre région $\mathcal{V}_2$ de $\mathcal{V}$ se compose de même de points définis par m coordonnées $t_1, t_2, \ldots, t_m$, le point correspondant pouvant varier dans une autre région $\mathcal{R}_2$, bornée et fermée, de l'espace euclidien à m dimensions. Et ainsi de suite pour un certain nombre de régions $\mathcal{V}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, n_1)$, qui recouvrent tout $\mathcal{V}$. Mais on veut que chaque point de $\mathcal{V}$, en particulier ceux qui sont sur la frontière d'un des $\mathcal{V}_n$, c'est-à-dire ceux qui correspondent à la frontière d'un des $\mathcal{R}_n$, soit intérieur à au moins un des $\mathcal{V}_n$; cela nécessite que certains points soient intérieurs à la fois à au moins deux régions $\mathcal{V}_n$. Supposons en particulier que $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ aient une région commune; cela se traduira en indiquant la région de $\mathcal{R}_1$ et la région de $\mathcal{R}_2$ qui correspondent à cette région commune, et en indiquant aussi les fonctions x_α de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ qui définissent la correspondance entre les deux systèmes de variables; cette correspondance devra être biunivoque entre les régions considérées de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$; nous supposerons de plus que les dérivées de ces fonctions x_α des variables t_β existent et remplissent des conditions de Hölder avec un exposant h qui devra être le même pour toutes les fonctions analogues servant à établir la correspondance entre deux régions $\mathcal{V}_n$ qui ont une partie commune; les jacobiens ne devront s'annuler nulle part. Quand on aura indiqué tout cela, on aura défini la variété close $\mathcal{V}$; le mot *clos* signifie ici qu'il n'y a pas de frontière : l'ensemble $\mathcal{V}$ est à la fois fermé et ouvert, puisque tous ses points lui sont intérieurs. Cette variété $\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement d'un seul tenant; nous devrons toutefois supposer qu'aucune de ses parties n'est unilatère ([1]). En conséquence nous supposerons que tous les jacobiens des transformations par lesquelles on passe d'une région $\mathcal{V}_n$ à une autre, sont positifs.

Nous nous donnons en outre sur $\mathcal{V}$ un certain tenseur d'ordre m, covariant et symétrique gauche, dont la composante est positive quand

---

([1]) Voir *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 43, 1926, p. 1 à 128, spécialement Chap. I, paragraphe 1, p. 6; plus loin, pour la définition du sens suivant lequel une intégrale est prise, se reporter au paragraphe 2, p. 7.

les indices sont pris dans l'ordre naturel; Ω sera cette composante positive; on suppose que Ω remplit dans chaque $\mathcal{R}_n$ une condition de Hölder avec l'exposant h. Dans la région commune à $\mathcal{R}_1$ et à $\mathcal{R}_2$ on a, par définition de ce tenseur,

$$\Omega_T = \frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{d(t_1, t_2, \ldots, t_m)} \Omega_X,$$

Ω_X et Ω_T étant les expressions qui correspondent respectivement aux variables x_α et aux variables t_β. Alors

$$\Omega_X d(x_1, x_2, \ldots, x_m) = dV \tag{4}$$

sera, par définition, la mesure d'un élément de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}_1$; définition semblable dans les autres $\mathcal{V}_n$.

7. **Fonctions définies par des intégrales principales étendues à une variété close.** — Soit d'abord $\rho(A)$ une fonction d'un point A de la variété close $\mathcal{V}$. Nous supposons que cette fonction est hölderienne, c'est-à-dire que les fonctions de m variables qui la représentent dans chacune des régions $\mathcal{R}_n$, sont toutes hölderiennes. D'après les hypothèses du paragraphe précédent, l'exposant hölderien est le même pour les différentes représentations de ρ qui correspondent à une région commune à deux ou à plus de deux $\mathcal{V}_n$.

Soit maintenant $G_2(X, \Xi)$ une fonction de deux points X et Ξ de $\mathcal{V}$, remplissant les hypothèses du paragraphe 1, donc en particulier continue quand X et Ξ sont distincts, et valant $O[L^{\lambda-m}(X, \Xi)]$ $(0 < \lambda \leqq m)$ si X et Ξ sont assez voisins pour appartenir à un même $\mathcal{V}_n$, cas où la distance sera évaluée dans la région euclidienne correspondante $\mathcal{R}_n$: si X et Ξ font à la fois partie d'au moins deux $\mathcal{V}_n$ distincts, il est clair que l'hypothèse remplie avec les paramètres de l'un entraîne qu'elle est remplie aussi avec les paramètres des autres. La condition

$$G_2(X, A) - G_2(Y, A) = O[L^h(X, Y) l^{\lambda-h-m}] \qquad (0 < h \leqq 1,\ h \leqq \lambda)$$

devra avoir lieu si X, Y et A appartiennent à un même $\mathcal{V}_n$, le segment XY étant rectiligne dans $\mathcal{R}_n$; si X et A n'appartiennent pas à un même $\mathcal{V}_n$, on suppose que G_2 est, relativement à X, hölderien avec l'exposant h. Cette fonction G_2 pourra être définie et remplir ces conditions sur $\mathcal{V}$ entier ou seulement sur une région de $\mathcal{V}$. Dans certains cas, nous supposerons que G_2 remplit les hypothèses du paragraphe 3, soit sur $\mathcal{V}$ entier, soit sur région de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que les hypothèses précédentes restent remplies après échange des rôles des deux points. Quoi qu'il en soit, la fonction

$$(5) \qquad F_2(X) = \int^{(m)} G_2(X, A)\rho(A)\, dV_A,$$

où dV est défini comme à la fin du paragraphe précédent, est bien définie pourvu qu'on précise le sens de $\mathcal{V}$ suivant lequel l'intégrale est prise : ce sens sera défini par n'importe lequel des systèmes de variables tels que $x_1, x_2, \ldots, x_m$, qui sont attachés aux différentes régions $\mathcal{V}_n$ (car on suppose que les jacobiens sont tous positifs). Cette fonction F_2 est hölderienne sur la région de $\mathcal{V}$ où les hypothèses sont satisfaites et à laquelle l'intégrale est étendue (elle le serait même si ρ était supposé borné et mesurable sans plus); cette région peut comprendre la totalité de $\mathcal{V}$.

Mais nous nous proposons de définir une fonction par une intégrale principale étendue à $\mathcal{V}$. Pour cela nous devons nous donner sur $\mathcal{V}$ un tenseur double, covariant et symétrique, $A_{\alpha,\beta}$; ce n'est pas nécessairement celui par lequel nous définirons, s'il y a lieu, une métrique sur $\mathcal{V}$. Pour tout point X de $\mathcal{V}$, nous supposons que la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X) z_\alpha z_\beta$ est définie positive (nous n'employons pas ici les notations tensorielles; notamment nous n'employons pas les indices supérieurs). Si les $A_{\alpha,\beta}$ sont les composantes relatives aux paramètres x_α de la région $\mathcal{V}_1$, et si les $A'_{\alpha,\beta}$ sont les composantes relatives aux paramètres t_α de la région $\mathcal{V}_2$, on a dans la région commune, par définition des tenseurs,

$$(6) \qquad A'_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta} \frac{\partial x_\gamma}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_\delta}{dt_\beta}.$$

Nous supposons de plus que les $A_{\alpha,\beta}$ sont, chacun dans la région correspondante, des fonctions hölderiennes des paramètres correspondant à la région; l'exposant hölderien est h.

Soit maintenant $G(X, \Xi)$ une fonction de deux points X et Ξ de $\mathcal{V}$. On suppose que cette fonction ou noyau est continue dès que X et Ξ sont distincts, et qu'elle est hölderienne avec l'exposant h relativement à X si X et Ξ n'appartiennent pas à un même $\mathcal{V}_n$. Supposons maintenant que X soit intérieur à $\mathcal{V}_1$; alors si η est assez petit, la région

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)) < \eta^2 \qquad (\eta > 0) \tag{7}$$

appartient à $\mathcal{V}_1$. En vertu de nos hypothèses, on prouve aisément l'existence d'une constante positive η_0, indépendante de X variable sur $\mathcal{V}$, et telle que, pour l'une au moins des régions $\mathcal{V}_n$ qui contiennent X, la région analogue à (7) soit intérieure à cette région $\mathcal{V}_n$ dès que $\eta < \eta_0$. On suppose qu'en tout point X de $\mathcal{V}$, après avoir choisi une région $\mathcal{V}_n$ à laquelle X soit intérieur, la région $\mathcal{V}_1$ pour fixer les idées, on peut, dès que Ξ appartient aussi à $\mathcal{V}_1$, écrire

$$G(X, \Xi) = G_1(X, \Xi) + G_2(X, \Xi),$$

où G_2 remplit les hypothèses du paragraphe 1, comme il a été dit un peu plus haut; quant à G_1, il peut s'écrire

$$G_1(X, \Xi) = G_1^*[x_1 - \xi_1, \ldots, x_m - \xi_m); v_1(X), \ldots, v_p(X)];$$

les fonctions $v_q(q = 1, 2, \ldots, p)$ remplissent par hypothèse des conditions de Hölder avec l'exposant h; on suppose que les fonctions

$$G_1^*(\omega_1, \ldots, \omega_m; v_1, \ldots, v_p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_1^*}{\partial v_q}$$

existent et sont positivement homogènes d'ordre $-m$ par rapport à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$; ces fonctions sont d'ailleurs continues sauf quand tous les ω_α sont nuls; on suppose encore que les $\frac{\partial G_1^*}{\partial \omega_\alpha}$ existent et sont continus, sauf quand tous les ω_α sont nuls; ces mêmes dérivées sont par suite positivement homogènes d'ordre $-m-1$ par rapport aux ω_α. Enfin on suppose que l'intégrale

$$\int^{(m)} G_1(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

étendue à la région

$$\eta^2 < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \zeta^2 \qquad (0 < \eta < \zeta),$$

est nulle. Alors l'intégrale

$$F(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\, dV_A \tag{8}$$

peut être définie comme intégrale principale, les régions d'exclusion étant

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \eta^2 \qquad (\eta > 0);$$

on le voit en remplaçant successivement $\rho(A)$ par $\rho(X)$ et par $\rho(A) - \rho(X)$, puis en ajoutant les résultats. On peut prendre aussi comme régions d'exclusion les régions plus générales qui se déduisent immédiatement des précédentes (§ 5), et, grâce à cette généralisation, il y a accord entre les différentes façons de définir les régions d'exclusion correspondant à un point X qui appartient à la fois à plusieurs $\mathcal{V}_n$.

Dans une région commune à $\mathcal{V}_1$ et à $\mathcal{V}_2$, la fonction analogue à G_1 pour le système des variables t_β est $G_1^*\left[\Sigma_\beta(t_\beta - u_\beta)\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta};\ v_n(X)\right]$, où les u_β sont les variables qui correspondent au point A; bien entendu les $v_n(X)$ sont exprimés à l'aide des variables t_β. En effet si l'on regarde cette expression comme une fonction de X et des différences $t_\beta - u_\beta$, elle est évidemment positivement homogène et d'ordre $-m$ par rapport à ces différences. Nous allons établir maintenant que

$$G_1^*[x_\alpha - a_\alpha;\ v_n(X)] - G_1^*\left[\Sigma_\beta(t_\beta - u_\beta)\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta};\ v_n(X)\right] = O[L^{h-m}(X, A)],$$

résultat qui achèvera notre démonstration. Il suffit même d'établir ce résultat quand $L(X, A)$ est inférieur à une longueur positive donnée η; or on a

$$x_\alpha - a_\alpha - \Sigma_\beta(t_\beta - u_\beta)\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta} = O[L^{1+h}(X, A)];$$

si donc on définit les y_α par les relations

$$y_\alpha - a_\alpha = \Sigma_\beta(t_\beta - u_\beta)\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta},$$

on a

$$L(X, Y) = O[L^{1+h}(X, A)];$$

si $L(X, A)$ est inférieur à un nombre η assez petit, on en déduit

$$2L(X, Y) < L(X, A),$$

et par suite la plus courte distance l de A au segment XY, tracé rectilignement dans $\mathcal{R}_1$, est supérieure à $\frac{L(X, A)}{2}$; la différence à évaluer vaut alors

$$O[L(X, Y)l^{h-1-m}] = O[L^{h-m}(X, A)],$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons en outre que la fonction

$$K(X, A) = G_1^*[x_\alpha - a_\alpha; \rho_n(X)] - G_1^*[x_\alpha - a_\alpha; \rho_n(A)]$$

remplit les hypothèses du paragraphe 3, à condition de prendre égaux à $\frac{h}{2}$ les nombres désignés par λ et par h dans l'énoncé de ces hypothèses. En effet on a d'abord

$$K(X, A) = O[L^{h-m}(X, A)].$$

D'autre part, si l'on suppose $2L(X, Y) < L(X, A)$, on trouve en appliquant le théorème des accroissements finis séparément aux deux parties de K

$$K(X, A) - K(Y, A) = O[(L^h(X, Y)L^{-h-m}(X, A)];$$

la limitation de K donne aussi, toujours pour $2L(X, Y) < L(X, A)$,

$$K(X, A) - K(Y, A) = O[L^{h-m}(X, A)];$$

de ces deux limitations d'une même quantité, l'on conclut

$$K(X, A) - K(Y, A) = O[L^{\frac{h}{2}}(X, Y)L^{-m}(X, A)].$$

Ceci nous montre bien que la fonction $K(X, A)$ remplit, par rapport au point X, les hypothèses du paragraphe 1; on vérifie de même ces hypothèses relativement au point A, de sorte qu'on est bien dans les hypothèses du paragraphe 3.

Si donc G_2 remplit aussi les hypothèses du paragraphe 3, la fonction $G(X, A)$ satisfait aux hypothèses actuelles aussi bien par rapport au point A que par rapport au point X (avec changement éventuel de λ et de h).

8. Condition de Hölder remplie par la fonction représentée. — Nous allons prouver d'abord que, si X varie dans une région $\mathcal{V}'$ intérieure à $\mathcal{V}_1$, la fonction

$$(9) \qquad \int_{\mathcal{V}_1}^{(m)} G_1(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$

remplit une condition de Hölder d'exposant h. Soit en effet η_0 un nombre positif tel que, si X varie dans $\mathcal{V}'$, la région

$$(10) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \eta_0^2$$

ne cesse pas d'appartenir à $\mathcal{V}_1$; soit d'autre part ζ_0 un nombre positif tel que la région $L(X, A) < \zeta_0$ appartienne à la précédente, quel que soit X dans $\mathcal{V}'$. Donnons-nous deux points X et Y de $\mathcal{V}'$, et supposons $L(X, Y) < \frac{\zeta_0}{2}$. L'intégrale prise au point X ne change pas si, du champ d'intégration, nous retranchons la région (10). D'autre part l'intégrale étendue à $\mathcal{V}_1$ dont on a retranché (10), est une fonction hölderienne de Y avec l'exposant h, tant que Y reste dans la région

$$L(X, Y) < \frac{\zeta_0}{2}.$$

Il reste donc seulement à évaluer l'intégrale

$$\int^{(m)} G_1(Y, A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$

étendue à la région (10); or si l'on étend l'intégration à la région

$$(11) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(Y)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta) < \eta_0^2,$$

le résultat est zéro; il suffit donc d'intégrer dans la partie de (10) qui n'appartient pas à (11), puis dans celle de (11) qui n'appartient pas à (10), et de faire la différence. Au lieu d'exécuter directement cette opération, nous comparerons l'intégrale étendue à

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta) < \eta_0^2,$$

d'abord à l'intégrale étendue à (11), puis à l'intégrale étendue à (10). La différence avec l'intégrale étendue à (11) revient à une différence de deux intégrales, étendues chacune à une région intérieure à

$$\eta_0^2[1 - kL^h(X, Y)] < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta) < \eta_0^2[1 + kL^h(X, Y)]$$
$$(k = \text{const.}),$$

et le résultat est $O[L^h(X, Y)]$; la différence avec l'intégrale étendue à (10) donne $O[L(X, Y)]$, ce qui achève notre démonstration.

Or la fonction $F(X)$ définie par (8) peut s'écrire, si X appartient à $\mathcal{V}'$,

$$F(X) = \rho(X)\Omega(X)\int_{\mathcal{V}_1}^{(m)} G_1(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+\int_{\mathcal{V}_1}^{(m)} G_1(X, A)[\rho(A)\Omega(A) - \rho(X)\Omega(X)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+\int_{\mathcal{V}_1}^{(m)} G_2(X, A)\rho(A)\, dV_A + \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\, dV_A.$$

Si l'exposant hölderien k de ρ est inférieur ou égal à h et inférieur à λ, on voit que $F(X)$ *est hölderien avec l'exposant k*. Cela subsiste parfois pour $k = \lambda$ (§ 2) (¹).

9. **Premier cas de composition des noyaux d'intégrales principales.** — Soit $G(X, A)$ la fonction du paragraphe 7; il suffit que la fonction G_2 remplisse les hypothèses du paragraphe 1. Soit d'autre part $H(X, A)$ une fonction qui remplit les hypothèses du paragraphe 3 sur $\mathcal{V}$ entier. En nommant ρ une fonction hölderienne d'un point de $\mathcal{V}$, nous formons les fonctions

$$\varphi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\, dV_A, \tag{12}$$

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\varphi(A)\, dV_A, \tag{13}$$

où l'intégrale qui définit φ est une intégrale principale. Nous voyons que $\psi(X)$ *est une fonction hölderienne avec le même exposant k que ρ si l'on a à la fois $k \leqq h$* et $k < \lambda$, et aussi dans certains cas où $k = \lambda$.

Nous allons démontrer qu'on a

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \rho(\Xi) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi, \tag{14}$$

(¹) Pour la démonstration relative au second terme de cette expression de $F(X)$, voir *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 49, 1932, article cité, Chapitre I, paragraphes 7 et 8, p. 9 à 12 cette démonstration est ici très simple.

formule qui exprime l'ordre dans lequel les intégrations doivent être effectuées. Nous verrons de plus que *la fonction qui multiplie* $\rho(\Xi)\,dV_\Xi$ *sous le signe d'intégration, c'est-à-dire*

$$F(X,\Xi)=\int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X,A)\,G(A,\Xi)\,dV_A,$$

satisfait aux hypothèses du paragraphe 1. L'intégration relative à A doit être regardée comme une intégrale principale où les domaines d'exclusion sont

$$(15)\quad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(\xi_\alpha-a_\alpha)(\xi_\beta-a_\beta)<\eta^2+O[\eta^2 L^h(\Xi,A)] \qquad (\eta>0);$$

les distances sont évaluées dans l'une des régions euclidiennes $\mathcal{R}_n$ qui contient à la fois les images des deux points dès qu'ils sont assez voisins l'un de l'autre.

En désignant par $\mathcal{V}(\eta)$ la variété $\mathcal{V}$ dont on a retranché les points Ξ satisfaisant à (15) (en prenant nul le second terme du second membre; peu importe, si A appartient à plusieurs $\mathcal{V}_n$, le système choisi pour les paramètres), on a tout d'abord

$$\psi(X)=\int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X,A)\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}(\eta)}^{(m)} G(A,\Xi)\,\rho(\Xi)\,dV_\Xi\,dV_A,$$

ou, puisque l'intégrale étendue à $\mathcal{V}(\eta)$ tend uniformément vers sa limite,

$$\psi(X)=\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X,A)\int_{\mathcal{V}(\eta)}^{(m)} G(A,\Xi)\,\rho(\Xi)\,dV_\Xi\,dV_A.$$

Maintenant on a en réalité sous le signe de limite une intégrale d'ordre $2m$ portant sur une fonction sommable, ce qui permet d'intégrer d'abord par rapport à A. Nous nommerons donc $\mathcal{V}_1(\eta)$ la variété $\mathcal{V}$ dont on a retranché les points A satisfaisant à (15); on a alors

$$\psi(X)=\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}}^{(m)} \rho(\Xi)\int_{\mathcal{V}_1(\eta)}^{(m)} H(X,A)\,G(A,\Xi)\,dV_A\,dV_\Xi.$$

Nous devons prouver que

$$(16)\qquad \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \rho(\Xi)\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\eta)}^{(m)} H(X,A)\,G(A,\Xi)\,dV_A\,dV_\Xi$$

existe et tend vers zéro avec η; nous ferons la démonstration dans le cas où λ est égal à h, ce qui suffit évidemment. Tout d'abord l'existence de cette intégrale revient à l'existence du second membre de (14). Il est évident que la fonction F existe et est continue quand X est différent de Ξ. Pour étudier le cas où X tend vers Ξ, posons

$$(17) \qquad 4\zeta^2 = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) \qquad (\zeta > 0).$$

Nous intégrons d'abord dans la région $\mathcal{V}_1(4\zeta)$; nous supposons, sans pour cela restreindre vraiment la généralité, que Ξ est intérieur à une région $\mathcal{V}'$ intérieure à $\mathcal{V}_1$, et que $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(4\zeta)$ est intérieur à $\mathcal{V}_1$. L'intégrale étendue à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$ est alors bornée; l'intégrale étendue à $\mathcal{V}_1 - [\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(4\zeta)]$ peut s'évaluer dans la région euclidienne $\mathcal{R}_1$, où l'on doit intégrer dans la région $\mathcal{R}_1$ diminuée de

$$L(\Xi, A) = O(\zeta),$$

une fonction valant $O[L^{h-2m}(\Xi, A)]$; le résultat est $O(\zeta^{h-m})$. Passons maintenant à la région $\mathcal{V}_1(\zeta) - \mathcal{V}_1(4\zeta)$; on a dans cette région

$$G(A, \Xi) = O(\zeta^{-m});$$

d'autre part l'intégrale de la valeur absolue de H, étendue à la même région, vaut $O(\zeta^h)$ (¹); on a donc encore $O(\zeta^{h-m})$ pour cette région. Reste enfin $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta)$; on a évidemment

$$\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\zeta)}^{(m)} G(A, \Xi)\, dV_A = O(\zeta^h),$$

d'où

$$H(X, \Xi) \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\zeta)}^{(m)} G(A, \Xi)\, dV_A = O(\zeta^{2h-m}).$$

Mais, dans cette même région, on a

$$H(X, A) - H(X, \Xi) = O[L^h(A, \Xi)\, L^{-m}(X, \Xi)];$$

donc

$$\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\zeta)}^{(m)} [H(X, A) - H(X, \Xi)]\, G(A, \Xi)\, dV_A = O[L^{h-m}(X, \Xi)].$$

(¹) *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 46, 1929, p. 131 à 245, spécialement note de la page 138.

Donc la fonction F vaut $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$, et par suite elle est sommable.

Il nous reste maintenant à montrer que l'expression (16) tend vers zéro avec η. Soit $\mathcal{V}_2(\eta)$ ce qui reste de $\mathcal{V}$ quand on en retranche les points Ξ de la région

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) < \eta^2 \qquad (\eta > 0).$$

Si Ξ appartient à $\mathcal{V}_2(2\eta)$, on peut écrire encore pour les points A de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\eta)$

$$H(X, A) - H(X, \Xi) = O[L^h(A, \Xi)\, L^{-m}(X, \Xi)];$$

d'où

$$\int_{\mathcal{V}_2(2\eta)}^{(m)} \rho(\Xi) \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\eta)}^{(m)} [H(X, A) - H(X, \Xi]\, G(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi$$
$$= \int_{\mathcal{V}_2(2\eta)}^{(m)} O[\eta^h L^{-m}(X, \Xi)]\, dV_\Xi = O\left(\eta^h \log \frac{R}{\eta}\right),$$

où R est une constante; ceci tend vers zéro avec η. De même

$$\int_{\mathcal{V}_2(2\eta)}^{(m)} H(X, \Xi)\, \rho(\Xi) \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\eta)}^{(m)} G(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi = \int_{\mathcal{V}_2(2\eta)}^{(m)} O[\eta^h L^{h-m}(X, \Xi)]\, dV_\Xi,$$

qui tend vers zéro.

Si Ξ appartient à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_2(2\eta)$, nous introduisons le nombre ζ défini par (17); on a alors $\zeta < \eta$. Le domaine d'intégration de A sera alors décomposé en trois parties : 1° le domaine $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta)$; 2° la partie commune à $\mathcal{V}_1(\zeta) - \mathcal{V}_1(\eta)$ et à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_2(\zeta)$; 3° la partie commune à $\mathcal{V}_2(\zeta)$ et à $\mathcal{V}_1(\zeta) - \mathcal{V}_1(\eta)$. Si l'on remplace H(X, A) par H(X, Ξ), le résultat pour $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta)$ tend évidemment vers zéro. Dans $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta)$, on limite maintenant H(X, A) − H(X, Ξ) comme il a déjà été fait plus haut; on trouve ainsi, après la première intégration, $O(\zeta^{h-m})$, et par suite $O(\eta^h)$ après l'intégration relative à Ξ. Dans $\mathcal{V} - \mathcal{V}_2(\zeta)$, on a $G(A, \Xi) = O(\zeta^{-m})$; on a donc encore $O(\zeta^{h-m})$ après l'intégration relative à A dans le domaine commun avec $\mathcal{V}_1(\zeta) - \mathcal{V}_1(\eta)$, et par suite $O(\eta^h)$ comme résultat final. Dans la partie commune à $\mathcal{V}_2(\zeta)$ et à $\mathcal{V}_1(\zeta) - \mathcal{V}_1(\eta)$, la fonction intégrée vaut $O[L^{h-2m}(X, A)]$, car $\dfrac{L(X, A)}{L(\Xi, A)}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes; l'intégration relative à A donne donc encore $O(\zeta^{h-m})$, d'où $O(\eta^h)$ comme résultat final.

Donc l'intégrale (16) tend vers zéro avec η. La formule (14) est établie, et nous savons en outre que

$$(18) \qquad F(X, \Xi) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A = O[L^{h-m}(X, \Xi)].$$

Achevons maintenant de prouver que cette fonction remplit les conditions du paragraphe 1.

Il est tout d'abord évident que, si X et Ξ n'appartiennent pas à un même $\mathcal{V}_n$, la fonction remplit par rapport à X une condition de Hölder avec n'importe quel exposant inférieur à h.

Si X et Ξ appartiennent à un même $\mathcal{V}_n$, soit Y un point tel qu'on ait

$$4\, L(X, Y) \leqq L(X, \Xi);$$

$L(X, Y)$ doit aussi être inférieur à la moitié de la plus courte distance de Ξ à la frontière de $\mathcal{V}_n$, laquelle peut être, sans inconvénient, supposée supérieure à une borne positive fixe. Dans la région $L(X, A) < 2L(X, Y)$, les intégrales

$$\int^{(m)} H(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A \quad \text{et} \quad \int^{(m)} H(Y, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A$$

valent $O[L^h(X, Y)\, L^{-m}(X, \Xi)]$. Dans la région $L(\Xi, A) < 2L(X, Y)$, qui n'empiète pas sur la précédente, les intégrales

$$\int^{(m)} [H(X, A) - H(X, \Xi)]\, G(A, \Xi)\, dV_A$$

et

$$\int^{(m)} [H(Y, A) - H(Y, \Xi)]\, G(A, \Xi)\, dV_A$$

ont cette même limitation, ainsi que la différence

$$[H(X, \Xi) - H(Y, \Xi)] \int^{(m)} G(A, \Xi)\, dV_A,$$

car l'intégrale qui figure dans cette dernière expression, est bornée.

Dans la partie restante de $L(\Xi, A) < \frac{L(\Xi, X)}{2}$, on a

$$\int^{(m)} [H(X, A) - H(Y, A)]\, G(A, \Xi)\, dV_A = O\left[L^h(X, Y) \log \frac{L(X, \Xi)}{L(X, Y)} L^{-m}(X, \Xi)\right];$$

de même cette limitation est valable dans la partie restante de $L(X, A) < \frac{L(X, \Xi)}{2}$. Enfin si $L(X, A) > \frac{L(X, \Xi)}{2}$ et $L(\Xi, A) > \frac{L(X, \Xi)}{2}$, le rapport $\frac{L(X, A)}{L(\Xi, A)}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes, de sorte qu'on trouve $O[L^h(X, Y)\, L^{-m}(X, \Xi)]$. Comme la fonction $x^\varepsilon \log\left(\frac{L}{x}\right)$, où ε est positif, a dans l'intervalle (o, L) un maximum égal à $\frac{L^\varepsilon}{\varepsilon e}$, on voit que dans ce cas les hypothèses du paragraphe 1 se vérifient, à condition de remplacer h par n'importe quel nombre positif moindre.

Si maintenant on a

$$4L(X, Y) > L(X, \Xi),$$

le raisonnement du paragraphe 1 achève la démonstration.

10. **Deuxième cas de composition des noyaux d'intégrales principales.** — Reprenons les fonctions G et H du paragraphe précédent; il suffit pourtant ici d'admettre que H remplit les hypothèses du paragraphe 1. Nous nous donnons en outre une fonction ρ mesurable et bornée sur $\mathcal{V}$. Nous posons cette fois

$$\varphi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\, \rho(A)\, dV_A, \tag{19}$$

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, \varphi(A)\, dV_A; \tag{20}$$

la fonction ψ remplit une condition de Hölder avec n'importe quel exposant k tel qu'on ait simultanément $k \leq h$ et $k < \lambda$, et aussi dans certains cas avec l'exposant $k = \lambda$ (ceci suppose que les nombres λ et h sont les mêmes pour H et pour G_2).

En outre nous allons démontrer que

$$(21)\qquad \psi(X)=\int_{\mathcal{V}}^{(m)}\rho(\Xi)\int_{\mathcal{V}}^{(m)}G(X,A)\,H(A,\Xi)\,dV_A\,dV_\Xi,$$

formule dans laquelle l'intégrale relative à A est une intégrale principale. Il est d'ailleurs démontré par le paragraphe précédent que le résultat

$$F(X,\Xi)=\int_{\mathcal{V}}^{(m)}G(X,A)\,H(A,\Xi)\,dV_A$$

de cette intégration relative à A vaut $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ et est continu quand X est différent de Ξ; nous établirons que F *satisfait aux hypothèses du paragraphe* 1.

En supposant η assez petit pour que la région des points A tels qu'on ait

$$(22)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha-a_\alpha)(x_\beta-a_\beta)<\eta^2\qquad(\eta>0)$$

n'atteigne pas la frontière d'une des régions $\mathcal{V}_n$ qui contient X, nous nommons $\mathcal{V}(\eta)$ ce qui reste de $\mathcal{V}$ quand on en retranche cette région. On a

$$\begin{aligned}\psi(X)&=\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}(\eta)}^{(m)}G(X,A)\int_{\mathcal{V}}^{(m)}H(A,\Xi)\,\rho(\Xi)\,dV_\Xi\,dV_A\\&=\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}}^{(m)}\rho(\Xi)\int_{\mathcal{V}(\eta)}^{(m)}G(X,A)\,H(A,\Xi)\,dV_A\,dV_\Xi.\end{aligned}$$

Nous allons prouver que

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathcal{V}}^{(m)}\rho(\Xi)\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta)}^{(m)}G(X,A)\,H(A,\Xi)\,dV_A\,dV_\Xi=0,$$

ce qui entraînera la formule (21).

Pour cela on montre, comme au paragraphe précédent, que si Ξ appartient à $\mathcal{V}(2\eta)$, l'intégration relative à A donne $O[\eta^h L^{-m}(X, \Xi)]$; en multipliant par $\rho(\Xi)\,dV_\Xi$ et en intégrant dans $\mathcal{V}(2\eta)$, on a donc $O\left(\eta^h\log\frac{R}{\eta}\right)$, qui tend vers zéro avec η. Si Ξ appartient à $\mathcal{V}-\mathcal{V}(2\eta)$, l'intégration relative à A donne $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ (même démonstration qu'au paragraphe 9); le résultat de l'intégration relative à Ξ est donc $O(\eta^h)$, qui tend vers zéro avec η. La formule (21) est donc établie.

Montrons maintenant que la fonction F remplit les hypothèses du paragraphe 1, résultat en vue duquel il nous reste à établir seulement que

$$F(X, \Xi) - F(Y, \Xi) = O[L^k(X, Y) l^{h-k-m}] \qquad (0 < k < h).$$

Comme au paragraphe 9, il suffit de se borner au cas où X, Y et Ξ appartiennent à une certaine région intérieure à $\mathfrak{V}_1$, et où $L(X, \Xi)$ est inférieur à la plus courte distance de cette région à la frontière de $\mathfrak{V}_1$. Nous remarquons ensuite que la partie de F qui provient de $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_1$ remplit dans notre région une condition de Hölder avec l'exposant h. Nous sommes ramenés à considérer la partie de F qui provient de $\mathfrak{V}_1$; pour cette partie, nous remplaçons $G(X, A)$ par $G_1(X, A)$, car la différence $G_2(X, A)$ de ces fonctions remplit les hypothèses du paragraphe 1, et il suffit pour elle de s'appuyer sur le paragraphe 2. Nous avons donc à considérer

$$\begin{aligned} F_1(X, \Xi) &= \int_{\mathfrak{V}_1}^{(m)} G_1(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A \\ &= \int_{\mathfrak{V}_1}^{(m)} G_1(X, A)\, H_2(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m), \end{aligned}$$

en posant

$$H_2(X, \Xi) = \Omega(X)\, H(X, \Xi).$$

Posons

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) = 8\mu^2 \qquad (\mu > 0), \\ &\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta) = L'^2 \qquad (L' > 0), \end{aligned}$$

et plaçons-nous dans le cas où l'on a

$$0 < L' \leqq \mu.$$

Dans la région

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < 2\mu^2,$$

on a

$$G_1(X, A) - G_1(Y, A) = O[L^h(X, Y)\, L^{-h-m}(X, \Xi)],$$

de sorte que la partie correspondante de $F_1(X, \Xi) - F_1(Y, \Xi)$

vaut $O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)]$. Dans la région où l'on a simultanément

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) > 2\mu^2,$$
$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) > 2\mu^2,$$

on a

$$G_1(X, A) - G_1(Y, A) = O[L^h(X, Y) L^{-h-m}(X, A)],$$
$$H_2(A, \Xi) = O[L^{h-m}(X, A)],$$

ce qui donne encore $O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)]$. Reste la région

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < 2\mu^2,$$

que nous nommerons $\mathfrak{V}'$. Dans la partie

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < 2L'^2$$

de cette région, chacun des termes de la différence

$$\int^{(m)} G_1(X, A)[H_2(A, \Xi) - H_2(X, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$-\int^{(m)} G_1(Y, A)[H_2(A, \Xi) - H_2(Y, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$

vaut encore $O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)]$, car le second, par exemple, s'obtient en intégrant $O[L^{h-m}(Y, A) L^{-m}(X, \Xi)]$. Dans le reste de $\mathfrak{V}'$, cette différence s'écrit

$$[H_2(Y, \Xi) - H_2(X, \Xi)] \int^{(m)} G_1(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+\int^{(m)} [G_1(X, A) - G_1(Y, A)][H_2(A, \Xi) - H_2(Y, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m);$$

le premier terme est nul; le second est l'intégrale de

$$O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, A) L^{-m}(X, \Xi)],$$

et il vaut donc $O[L^k(X, Y) L^{h-k-m}(X, \Xi)]$ $(0 < k < h)$. Il reste à évaluer

$$H_2(X, \Xi) \int_{\mathfrak{V}'}^{(m)} G_1(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- H_2(Y, \Xi) \int_{\mathfrak{V}'}^{(m)} G_1(Y, A)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

expression dont le premier terme est nul. Dans le second terme, on peut retrancher du champ le plus grand domaine

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(Y)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta) < \eta^2$$

qui y soit contenu; on doit donc intégrer $O[L^{-m}(Y, A)]$ dans un domaine où $\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(Y)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta)$ varie entre deux bornes valant chacune $2\mu^2\left[1 + O\left(L'^h + \frac{L'}{\mu}\right)\right]$; en tenant compte du facteur $H_2(Y, \Xi)$ on retrouve la limitation $O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)]$.

Si maintenant L' est supérieur à μ, le raisonnement du paragraphe 1 achève la démonstration.

11. Troisième cas de composition des noyaux d'intégrales principales. — Reprenons la fonction $G = G_1 + G_2$, mais supposons maintenant que G_2 est du type du paragraphe 3; quant à la fonction G_1, elle est du type expliqué au paragraphe 7. Soit

$$H(X, \Xi) = H_1 + H_2$$

une autre fonction analogue; H_1 appartient au même type que G_1, sans être nécessairement identique à cette fonction, c'est-à-dire que

$$H_1(X, \Xi) = H_1^*[x_1 - \xi_1, \ldots, x_m - \xi_m;\ v_1(X), \ldots, v_p(X)],$$

où la fonction $H_1^*(\omega_\alpha; v_n)$ est positivement homogène d'ordre $-m$ par rapport aux ω_α; la fonction et ses dérivées sont continues sauf quand tous les ω_α sont nuls; quant à la fonction H_2, elle remplit les hypothèses du paragraphe 1.

On suppose essentiellement que, pour ces deux noyaux d'intégrales principales, les domaines d'exclusion sont définis par (7) : ce sont les mêmes domaines pour les deux noyaux. On peut ainsi définir la fonction

$$F(X, \Xi) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A, \tag{23}$$

où l'on doit exclure les deux points X et Ξ par des domaines du type (7) dont les paramètres tendent indépendamment vers zéro; cette fonction est continue tant que X et Ξ ne coïncident pas. *Nous pouvons montrer qu'elle vaut* $O[L^{-m}(X, \Xi)]$.

Pour cela nous remplaçons G et H par les fonctions G_1 et

$$H^*(X, \Xi) = H_1^*[x_1 - \xi_1, \ldots, x_m - \xi_m; v_1(\Xi), \ldots, v_p(\Xi)],$$

ce qui est légitime, car la différence des intégrales obtenues vaut $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$. Nous posons

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) = 9\mu^2 \qquad (\mu > 0),$$

et nous supposons μ assez petit pour que les deux domaines

$$(24) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < 2\mu^2,$$

$$(25) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < 2\mu^2,$$

soient extérieurs l'un à l'autre (on suppose que X et Ξ appartiennent à une région intérieure à $\mathcal{V}_1$, ce qui ne diminue pas vraiment la généralité). Alors, dans (24), on a

$$H^*(A, \Xi) - H^*(X, \Xi) = O[L(X, A) L^{-m-1}(X, \Xi)];$$

l'intégrale de $G_1(X, A)[H^*(A, \Xi) - H^*(X, \Xi)]$ dans ce domaine vaut donc $O[L^{-m}(X, \Xi)]$; quant à l'intégrale de $G_1(X, A)\, H^*(X, \Xi)$, elle vaut $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$. Même raisonnement pour le domaine (25). Ensuite, hors des domaines (24) et (25), la fonction intégrée vaut $O[L^{-2m}(X, A)]$: le résultat est donc encore $O[L^{-m}(X, \Xi)]$.

Posons maintenant

$$K(X, A, \Xi) = H_1^*[a_1 - \xi_1, \ldots, a_m - \xi_m; v_1(X), \ldots, v_p(X)],$$

et considérons l'intégrale principale, étendue à tout l'espace euclidien,

$$F_1(X, \Xi) = \Omega(X) \int^{(m)} G_1(X, A)\, K(X, A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

où les domaines d'exclusion relatifs à X sont définis par (7) (sauf le remplacement de Ξ par A), pendant que ceux qui se rapportent à Ξ sont définis par

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < \eta^2 \qquad (\eta > 0).$$

Montrons que $F_1(X, \Xi)$, *considéré comme fonction de* X *et des diffé-*

rences $x_\alpha - \xi_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ *est positivement homogène et d'ordre* $-m$ *par rapport à ces différences.*

En effet, en désignant par t un nombre positif, nous posons

$$\xi_\alpha = x_\alpha + t(\eta_\alpha - x_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

changeons en même temps de variables d'intégration en posant

$$a_\alpha = x_\alpha + t(b_\alpha - x_\alpha);$$

nous constatons aussitôt que

$$\begin{aligned} F_1(X, \Xi) = t^{-m}\Omega(X) \int^{(m)} & G_1^\star[x_1 - b_1, \ldots, x_m - b_m; v_1(X), \ldots, v_p(X)] \\ & \times H_1^\star[b_1 - \eta_1, \ldots, b_m - \eta_m; v_1(X), \ldots, v_p(X)]\, d(b_1, \ldots, b_m), \end{aligned}$$

ce qui vérifie notre affirmation.

Supposons maintenant que X et Ξ appartiennent tous deux à $\mathfrak{V}_1$ et que leurs distances à la frontière de $\mathfrak{V}_1$ restent supérieures à un certain minimum positif; nous voulons montrer que $F(X, \Xi) - F_1(X, \Xi)$ *vaut* $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ *et satisfait aux hypothèses du paragraphe* 1.

Évaluons d'abord la partie de $F - F_1$ qui provient du domaine (24), en supposant μ assez petit; nous écrivons

$$K(X, A, \Xi) - H_1(A, \Xi) = O[L^h(X, A)L^{-m}(A, \Xi)],$$

et il en résulte immédiatement que cette partie de $F - F_1$ vaut $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$.

Évaluons maintenant ce qui provient du domaine (25). Nous prenons d'abord l'intégrale de

$$G_1(X, A)[\Omega(A) - \Omega(X)]\, H_1(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m);$$

elle vaut évidemment $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ (§ 9). Passons à l'intégrale de

$$\Omega(X)[G_1(X, A) - G_1(X, \Xi)][H_1(A, \Xi) - K(X, A, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

étendue au domaine (25), où la fonction intégrée vaut

$$O[L^{h-m}(\Xi, A)\, L^{-m}(X, \Xi)]:$$

cela fait encore $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$. Il reste à évaluer l'expression

$$\Omega(X)\, G_1(X, \Xi) \left[\int^{(m)} H_1(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m) - \int^{(m)} K(X, A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m) \right],$$

où les intégrales sont encore étendues à la région (25); or nous savons déjà que la première de ces intégrales vaut $O[L^h(X, \Xi)]$; il en est de même de la seconde, car la partie du domaine (25) qui n'est pas comprise dans

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)\, (a_\alpha - \xi_\alpha)\, (a_\beta - \xi_\beta) < 2\mu^2,$$

et la partie de ce dernier domaine qui n'est pas comprise dans (25), valent toutes deux $O(\mu^{h+m})$, pendant que la fonction K vaut $O[L^{-m}(X, \Xi)]$. La partie de $F - F_1$ en provenance de (25) a donc la limitation annoncée.

Dans la région comprise dans $\mathcal{R}_1$ et extérieure à (24) et à (25), on limite $K(X, A, \Xi) - H_1(A, \Xi)$ comme il y a un instant, et l'on remarque que le rapport $\frac{L(\Xi, A)}{L(X, A)}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes; on trouve aussitôt que cette partie de $F - F_1$ a encore la limitation annoncée.

Enfin la partie de F qui provient de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$, et la partie de F_1 qui provient de la région extérieure à $\mathcal{R}_1$ dans l'espace euclidien, sont toutes deux bornées.

On a donc bien

$$F(X, \Xi) - F_1(X, \Xi) = O[L^{h-m}(X, \Xi)].$$

Nous voulons maintenant vérifier que

$$F(X, \Xi) - F_1(X, \Xi) - F(Y, \Xi) + F_1(Y, \Xi) = O[L^k(X, Y)\, l^{h-k-m}]$$
$$(0 < k < h),$$

où l a toujours la même signification. Comme aux paragraphes 9 et 10, il suffit de faire la démonstration dans le cas où $L(X, Y)$ est moindre que le produit de $L(X, \Xi)$ par une constante déterminée; donc on peut supposer que Y appartient au domaine

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)\, (x_\alpha - y_\alpha)\, (x_\beta - y_\beta) < \mu^2.$$

Les parties de $F(X, \Xi) - F_1(X, \Xi)$ et de $F(Y, \Xi) - F_1(Y, \Xi)$ qui provienment de la région

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < 2\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta)$$

valent évidemment $O[L^h(X, Y)L^{-m}(X, \Xi)]$.

Dans le domaine

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < 2\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta),$$

on a

$$G_1(X, A) - G_1(X, \Xi) = O[L(A, \Xi) L^{-m-1}(X, \Xi)],$$

de sorte que

$$\int^{(m)} [G_1(X, A) - G_1(X, \Xi)][K(X, A, \Xi) - H_1(A, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$= O[L(X, Y) L^{h-m-1}(X, \Xi)] = O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)],$$

et l'on a le même résultat en mettant Y au lieu de X au premier membre. Dans ce même domaine, il faut évaluer maintenant

$$\int^{(m)} [G_1(X, \Xi) K(X, A, \Xi) - G_1(Y, \Xi) K(Y, A, \Xi)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$

et

$$[G_1(X, \Xi) - G_1(Y, \Xi)] \int^{(m)} H_1(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m);$$

or la dernière expression est évidemment $O[L^h(X, Y)L^{-m}(X, \Xi)]$; l'intégrale de $K(X, A, \Xi)$ est nulle; celle de $K(Y, A, \Xi)$ vaut $O[L^h(X, Y)]$, comme le montrent des raisonnements déjà employés. Au total, ce nouveau domaine donne la même limitation que le précédent.

La partie de $F(X, \Xi) - F(Y, \Xi) - F_1(X, \Xi) + F_1(Y, \Xi)$ qui provient de la région non encore prise dans (24), vaut

$$O[L^k(X, Y) L^{h-k-m}(X, \Xi)] \qquad (0 < k < h),$$

car on a

$$G_1(X, A) - G_1(Y, A) = O[L^h(X, Y) L^{-m-h}(X, A)],$$
$$K(X, A, \Xi) - H_1(A, \Xi) = O[L^h(X, A) L^{-m}(X, \Xi)],$$
$$K(X, A, \Xi) - K(Y, A, \Xi) = O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, \Xi)],$$

de sorte qu'on doit intégrer $O[L^h(X, Y) L^{-m}(X, A) L^{-m}(X, \Xi)]$.

La partie de la même expression qui provient de la région

$$2\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta) < \Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < 2\mu^2$$

est de même l'intégrale de $O[L^h(X, Y)L^{-m}(\Xi, A)L^{-m}(X, \Xi)]$, et par suite elle a la même limitation que la précédente.

La partie de notre différence qui provient de la partie non encore prise de $\mathcal{V}_1$ est l'intégrale de $O[L^h(X, Y)L^{-2m}(X, A)]$, ce qui donne la limitation $O[L^h(X, Y)L^{-m}(X, \Xi)]$.

Il reste à évaluer la partie de $F(X, \Xi) - F(Y, \Xi)$ qui provient de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$, et celle de $F_1(X, \Xi) - F_1(Y, \Xi)$ qui provient de la région extérieure à $\mathcal{R}_1$ dans l'espace euclidien : elles valent $O[L^h(X, Y)]$.

Notre vérification est terminée.

Nous introduisons maintenant une *nouvelle hypothèse : nous supposons que* F *est un noyau d'intégrale principale, admettant lui aussi les domaines d'exclusion* (7) (cela ne signifie pourtant pas que F remplit les hypothèses du paragraphe 7) [1].

Cela posé, nous formons à l'aide d'une fonction ρ donnée, qui remplit sur $\mathcal{V}$ une condition de Hölder d'exposant $k \leqq h$, les fonctions

$$\varphi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\rho(A)\,dV_A, \tag{26}$$

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\varphi(A)\,dV_A. \tag{27}$$

Ici encore, *la fonction ψ remplit une condition de Hölder avec l'exposant k si l'on a simultanément $k \leqq h$ et $k < \lambda$*, et parfois aussi si $k = h = \lambda$.

Nous nous proposons d'établir qu'*il existe une fonction $\Phi(X)$, indépendante de la fonction ρ, telle qu'on ait*

$$\psi(X) = -\Phi(X)\rho(X) + \int_{\mathcal{V}}^{(m)} F(X, A)\rho(A)\,dV_A. \tag{28}$$

---

[1] Hypothèse toujours vérifiée (*Comptes rendus*, t. 199, 1934, p. 473 à 475).

Nous avons tout d'abord

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)[\rho(\Xi) - \rho(A)]\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$+ \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)[\rho(A) - \rho(X)] \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$+ \rho(X) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A.$$

Or la fonction $H(A, \Xi)[\rho(\Xi) - \rho(A)]$ remplit les conditions du paragraphe 1, en y remplaçant toutefois h par k; la fonction $G(X, A)[\rho(A) - \rho(X)]$ remplit les conditions du paragraphe 3, avec le même changement; nous pouvons donc appliquer aux deux premières intégrales les paragraphes 9 et 10, ce qui nous donne

$$\psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} [\rho(\Xi) - \rho(X)] \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi$$
$$+ \rho(X) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A;$$

si nous posons

$$\Phi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} F(X, A)\, dV_A - I(X),$$
$$I(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A,$$

cela donne aussitôt la formule (28).

12. **Autres expressions de Φ.** — Nous allons transformer cette expression de Φ. Soit $\mathcal{V}(\eta; X)$ ce qui reste de $\mathcal{V}$ quand on en a enlevé le domaine (7); on a

$$I(X) = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{V}(\eta; X)}^{(m)} G(X, A) \lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}(\zeta; A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A.$$

Or des raisonnements déjà employés montrent qu'on a

$$\int_{\mathcal{V} - \mathcal{V}(\zeta; A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi = O(\zeta^h),$$

d'où

$$\lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta;A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A = 0.$$

Donc

$$I(X) = \lim_{\eta \to 0} \lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G(X, A) \int_{(\mathcal{V}\zeta;A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A.$$

Soit maintenant $\mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$ ce qui reste de $\mathcal{V}$ quand on en retranche les points A du domaine

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A)(a_\alpha - \xi_\alpha)(a_\beta - \xi_\beta) < \zeta^2 \qquad (\zeta > 0).$$

Nous avons

$$I(X) = \lim_{\eta \to 0} \lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int_{\mathcal{V}(\eta;X)-[\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\zeta;\Xi)]}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi.$$

Nous allons prouver qu'on a aussi

$$(29) \qquad I(X) = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int_{\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi;$$

il suffit pour cela de prouver qu'en effectuant le passage à la limite relativement à ζ dans l'expression déjà obtenue, on trouve précisément celle-ci. Puisque η est à considérer comme fixe dans cette première opération, nous supposerons $4\zeta < \eta$; nous avons à prouver que l'expression

$$\int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi,$$

où l'intégration relative à A est étendue à la région commune à $\mathcal{V}(\eta; X)$ et à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$, tend vers zéro avec ζ. Or si cette région commune n'existe pas, la partie correspondante de notre expression est nulle; s'il n'en est pas ainsi, et si η est inférieur à une constante assez petite, c'est qu'on a

$$2\zeta > \eta - \sigma,$$

σ désignant le nombre défini par

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) = \sigma^2 \qquad (\sigma > 0);$$

donc σ est supérieur à $\frac{\eta}{2}$. Nous pouvons alors écrire, quand A varie dans la région commune considérée,

$$G(X, A) - G(X, \Xi) = O[L^h(A, \Xi)\, L^{-m-h}(X, \Xi)];$$

par suite

$$\int^{(m)} [G(X, A) - G(X, \Xi)]\, H(A, \Xi)\, dV_A = O[\zeta^h L^{-m-h}(X, \Xi)];$$

en intégrant ceci par rapport à Ξ dans la région complémentaire de $2\sigma < \eta$, le résultat tend vers zéro avec ζ. Il reste à prouver que, avec les mêmes champs d'intégration,

$$\lim_{\zeta \to 0} \int^{(m)} G(X, \Xi) \int^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi = 0.$$

Or si la région commune à $\mathcal{V}(\eta; X)$ et à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$ comprend la totalité de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$, l'intégration relative à A donne $O(\zeta^h)$, et le résultat final tend vers zéro avec ζ. Il nous reste à considérer les points Ξ tels que la région commune existe et ne comprenne pas la totalité de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$; si η est inférieur à une constante assez petite, on a alors

$$2\zeta > |\sigma - \eta|,$$

et l'on a pour tout point A

$$4\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) > \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta).$$

Si l'on a $2\zeta > \sigma - \eta > 0$, la partie de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$ où l'on n'intègre pas fait partie de la région

$$(\sigma - \eta)^2 < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < 4\zeta^2;$$

l'intégrale correspondante est donc $O\left(\log\frac{2\zeta}{\sigma - \eta}\right)$, et par suite l'intégrale étendue à la partie utile de $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1(\zeta; \Xi)$ vaut $O\left(\log\frac{2\zeta}{\sigma - \eta} + \zeta^h\right)$. Si l'on a $2\zeta > \eta - \sigma > 0$, le champ relatif à A est intérieur à la région ci-dessus écrite, et l'on trouve ainsi $O\left(\log\frac{2\zeta}{\eta - \sigma}\right)$. Comme $H(X, \Xi)$ est borné quand η est constant, on est donc ramené à prouver la relation

$$\lim_{\zeta \to 0} \int_{\eta - 2\zeta}^{\eta + 2\zeta} \log \frac{2\zeta}{|\sigma - \eta|} \, d\sigma = 0;$$

elle se vérifie, car l'intégrale vaut 4ζ. La formule (29) est donc établie. On a par suite

$$(30) \qquad \Phi(X) = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}(\eta; X)}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi.$$

Réciproquement, si cette limite existe, F est un noyau d'intégrale principale avec les domaines d'exclusion exigés.

Dans la formule (30), *au lieu d'intégrer par rapport à* Ξ *sur la variété* $\mathfrak{V}$ *entière, on peut intégrer dans une région fixe quelconque* $\mathfrak{V}'$, *contenant* X *à son intérieur, mais indépendante de* η. En effet, si Ξ appartient à $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}'$, on a pour les points A de $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}(\eta; X)$, dès que η est assez petit,

$$H(A, \Xi) - H(X, \Xi) = O[L^h(X, A)\, L^{-m-h}(X, \Xi)],$$

d'où, puisque $L(X, \Xi)$ a une borne inférieure positive,

$$\int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}'}^{(m)} \int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}(\eta; X)}^{(m)} G(X, A)\, [H(A, \Xi) - H(X, \Xi)]\, dV_A\, dV_\Xi = O(\eta^h),$$

on a aussi

$$\int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}'}^{(m)} H(X, \Xi) \int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}(\eta; X)}^{(m)} G(X, A)\, dV_A\, dV_\Xi = O(\eta^h),$$

ce qui démontre notre affirmation.

En particulier, si X est intérieur à $\mathfrak{V}_1$, on peut prendre $\mathfrak{V}_1$ comme domaine d'intégration pour Ξ; A appartient aussi à $\mathfrak{V}_1$ dès que η est assez petit. Alors *on peut remplacer* G *et* H *respectivement par* G_1 *et par* H_1 (§ 7),

$$(31) \qquad \Phi(X) = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathfrak{V}_1}^{(m)} \int_{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}(\eta; X)}^{(m)} G_1(X, A)\, H_1(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi;$$

en effet nos considérations s'appliquent en particulier si G_1 ou H_1 est identiquement nul, mais alors les paragraphes 9 et 10 montrent que Φ

est identiquement nul; l'expression (31) est donc bien identique à (30) dans nos hypothèses générales.

Le même raisonnement prouve qu'on peut, dans la formule (31), remplacer dV_A par $\Omega(X)\,d(a_1, \ldots, a_m)$, pendant que dV_Ξ est remplacé par $\Omega(X)\,d(\xi_1, \ldots, \xi_m)$; faisons-le. Alors, au lieu d'intégrer par rapport à Ξ dans $\mathcal{V}_1$, on peut aussi intégrer dans la région $\mathcal{V} - \mathcal{V}(\eta^k; X)$ si l'on a $0 < k < 1$; en effet, dans la partie de $\mathcal{V}_1$ ainsi supprimée, on a, dès que η est assez petit,

$$H_1(A, \Xi) - H_1(X, \Xi) = O[L^h(X, A)\,L^{-m-h}(X, \Xi)],$$

d'où

$$\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G_1(X, A)[H_1(A, \Xi) - H_1(X, \Xi)]\,d(a_1, \ldots, a_m) = O[\eta^h L^{-m-h}(X, \Xi)];$$

de plus

$$H_1(X, \Xi)\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G_1(X, A)\,d(a_1, \ldots, a_m) = 0;$$

en intégrant par rapport à Ξ dans la région commune à $\mathcal{V}(\eta^k; X)$ et à $\mathcal{V}_1$, on trouve $O[\eta^{(1-k)h}]$, qui tend vers zéro. Ainsi

$$(32)\quad \Phi(X) = \lim_{\eta\to 0}\Omega^2(X)\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta^k;X)}^{(m)} \times \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G_1(X, A)\,H_1(A, \Xi)\,d(a_1, \ldots, a_m)\,d(\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Nous allons encore transformer cette expression. Soit

$$K(A, \Xi) = H_1^*[a_1 - \xi_1, \ldots, a_m - \xi_m;\ v_1(X), \ldots, v_p(X)]$$

(il est inutile de faire figurer X dans cette notation); nous allons prouver que

$$(33)\quad \Phi(X) = \lim_{\eta\to 0}\Omega^2(X)\int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta^k;X)}^{(m)} \times \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta;X)}^{(m)} G_1(X, A)\,K(A, \Xi)\,d(a_1, \ldots, a_m)\,d(\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

moyennant la convention que, dans l'intégration relative à A, les domaines $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X(\sigma; \Xi)$ destinés à exclure Ξ sont

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(\xi_\alpha - a_\alpha)(\xi_\beta - a_\beta) < \sigma^2 \qquad (\sigma > 0);$$

on voit en effet que, dans ces conditions, $K(A, \Xi)$ est un noyau d'intégrale principale. Nous posons

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) = 4\mu^2 \qquad (0 < 2\mu < \eta^k).$$

On a toujours

$$H_1(A, \Xi) - K(A, \Xi) = O[L^h(X, A) L^{-m}(A, \Xi)].$$

Si d'abord A est situé dans $\mathcal{V} - \mathcal{V}(\mu; X)$, ce domaine donne une partie de la différence des seconds membres de (32) et de (33), à savoir l'intégrale de $O[L^{h-m}(X, A)\mu^{-m}]$, ce qui donne $O(\mu^{h-m})$ après l'intégration relative à A, et $O(\eta^{kh})$ après l'intégration relative à Ξ. Passons au domaine $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X(\mu; \Xi) - \mathcal{V}(\eta; X)$; on a alors

$$G_1(X, A) - G_1(X, \Xi) = O[L(\Xi, A)\mu^{-m-1}];$$

en multipliant par $[H_1(A, \Xi) - K(A, \Xi)]\,dV_A$ et en intégrant, on a donc encore $O(\mu^{h-m})$, d'où encore $O(\eta^{kh})$ comme résultat final. Il s'agit maintenant d'évaluer la différence

$$\int^{(m)} H_1(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m) - \int^{(m)} K(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

où les deux intégrales sont étendues à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X(\mu; \Xi) - \mathcal{V}(\eta; X)$, mais les domaines d'exclusion ne sont pas les mêmes pour les deux intégrales. Soit d'abord $2\mu < \eta$; alors la région $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X(\eta - 2\mu; \Xi)$ fait partie de $\mathcal{V} - \mathcal{V}(\eta; X)$; si donc $\eta > 3\mu$, notre champ est identique à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X(\mu; \Xi)$; dans ce champ, la seconde intégrale de notre différence est nulle, et la première est égale à l'intégrale d'une fonction $O[L^{-m}(A, \Xi)]$ dans une région

$$\mu^2(1 - g\mu^h) < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(a_\alpha - \xi_\alpha)(a_\beta - \xi_\beta) < \mu^2(1 + g\mu^h),$$

où g est une constante; cela fait donc $O(\mu^h)$; en multipliant par $G_1(X, \Xi)\,dV_\Xi$ et en intégrant dans le champ $3\mu < \eta$, on obtient $O(\eta^h)$.

Soit maintenant $\frac{\eta}{3} < \mu < \frac{\eta}{2}$; alors l'intégrale étendue à

$$\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_X(\eta - 2\mu; \Xi)$$

vaut zéro pour la fonction K et $O(\mu^h)$ encore pour la fonction H_1; après multiplication par $G_1(X, \Xi)\,dV_\Xi$ et nouvelle intégration, cela donne encore $O(\eta^h)$. Dans $\mathfrak{V}(\eta - 2\mu; \Xi) - \mathfrak{V}(\eta; X) - \mathfrak{V}_X(\mu; \Xi)$, on limite $H_1 - K$ comme il a déjà été écrit : le point Ξ ne faisant plus partie du champ ni de sa frontière, il est légitime de traiter nos intégrales comme des intégrales ordinaires; l'intégrale de cette différence est donc $O\left(\mu^h \log \frac{\mu}{\eta - 2\mu}\right)$; en multipliant par $G_1(X, \Xi)\,dV_\Xi$ et en intégrant, cela fait

$$O\left(\int_{\frac{\eta}{3}}^{\frac{\eta}{2}} \mu^{h-1} \log \frac{\mu}{\eta - 2\mu}\, d\mu\right) = \eta^{h-1} O\left(\int_{\frac{\eta}{3}}^{\frac{\eta}{2}} \log \frac{\mu}{\eta - 2\mu}\, d\mu\right);$$

mais

$$\int \log \frac{\mu}{\eta - 2\mu}\, d\mu = \mu \log \mu + \frac{\eta - 2\mu}{2} \log(\eta - 2\mu);$$

le résultat final est donc $O(\eta^h \log \eta)$. Si maintenant $\mu > \frac{\eta}{2}$, la région $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_X(2\mu - \eta; \Xi)$ n'a aucun point commun avec le champ de nos intégrales; dans la région $\mathfrak{V}_X(2\mu - \eta; \Xi) - \mathfrak{V}_X(\mu; \Xi) - \mathfrak{V}(\eta; X)$, qui n'existe que si $\mu < \eta$, on a $O\left(\mu^h \log \frac{\mu}{2\mu - \eta}\right)$, et le résultat final, après multiplication par $G_1(X, \Xi)\,dV_\Xi$ et intégration dans le champ $\frac{\eta}{2} < \mu < \eta$, est encore $O(\eta^h \log \eta)$.

Il nous reste à faire varier A dans le champ commun à $\mathfrak{V}_X(\mu; \Xi)$ et à $\mathfrak{V}(\mu; X) - \mathfrak{V}(\eta; X)$; la fonction $G_1(X, A)[H_1(A, \Xi) - K(A, \Xi)]$ vaut alors $O[L^{h-2m}(X, A)]$, car $\frac{L(X, A)}{L(\Xi, A)}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes; on obtient donc $O(\mu^{h-m})$ après la première intégration, et $O(\eta^h)$ après la seconde, car ce champ n'existe que pour $\mu < \eta$.

L'identité des seconds membres de (32) et de (33) est ainsi démontrée. Cette expression (33) peut encore être modifiée : *l'intégration* *relative à* Ξ *peut être étendue à n'importe quelle région bornée, prise dans l'espace euclidien, indépendante de* η, *contenant* X *à son intérieur;* on le voit en reprenant en sens inverse le raisonnement qui avait donné la formule (32).

13. **Autres compositions des mêmes noyaux.** — Si, laissant ζ fixe, on fait tendre η vers zéro, l'expression

$$\int_{\mathcal{V}(\eta;\,X)}^{(m)} G(X, A) \int_{\mathcal{V}(\zeta;\,A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$

tend vers une limite, uniformément par rapport à ζ; en effet

$$\Omega(A) \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta;\,A)}^{(m)} H_1(A, \Xi)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_m)$$

est identiquement nul, et par suite, en étendant l'intégrale de la même fonction à la région commune à $\mathcal{V}(\zeta, A)$ et à l'un des $\mathcal{V}_n$ dont $\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta;\, A)$ fait partie, on a un résultat qui satisfait à une condition de Hölder indépendante de ζ (§ 8); mais la différence

$$H(A, \Xi)\,\Omega(\Xi) - H_1(A, \Xi)\,\Omega(A)$$

satisfait aux hypothèses du paragraphe 1; on en conclut d'abord que son intégrale dans $\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta;\, A)$ vaut $O(\zeta^h)$; ensuite cette même intégrale remplit une condition de Hölder, indépendante de ζ, avec un exposant $k < h$: pour le vérifier, il suffit de considérer deux points A et B tels que B appartienne à $\mathcal{V}-\mathcal{V}\left(\frac{\zeta}{2};\, A\right)$; on s'appuie sur le paragraphe 2 pour évaluer l'intégrale de la différence des fonctions dans $\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta;\, A)$; puis on remarque que la partie d'un des domaines qui est extérieure à l'autre a une mesure $O[\zeta^m L^h(A, B) + \zeta^{m-1} L(A, B)]$, pendant que l'une des fonctions intégrées vaut $O(\zeta^{h-m})$: notre vérification s'achève ainsi. Ainsi l'intégrale

$$\int_{\mathcal{V}(\zeta;\,A)}^{(m)} H(A, \Xi)\, dV_\Xi$$

est uniformément bornée quand ζ varie, et elle remplit une condition de Hölder indépendante de ζ. L'uniformité de la convergence de l'expression où nous faisons tendre η vers zéro, en résulte.

Il en résulte qu'on a le droit d'écrire en intervertissant deux passages à la limite :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\mathrm{X}) &= \lim_{\zeta \to 0} \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{V}(\eta;\mathrm{X})}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A}) \int_{\mathcal{V}(\zeta,\mathrm{A})}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{A},\Xi)\, d\mathrm{V}_\Xi\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} \\ &= \lim_{\zeta \to 0} \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int_{\mathcal{V}_1(\zeta;\Xi)-[\mathcal{V}-\mathcal{V}(\eta;\mathrm{X})]}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathrm{H}(\mathrm{A},\Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{V}_\Xi. \end{aligned}$$

A partir de là, on pourra reproduire les raisonnements faits sur l'expression (29), en échangeant seulement les rôles de X et de Ξ dans la première intégration; on arrive ainsi à l'expression

$$\mathrm{I}(\mathrm{X}) = \lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int_{\mathcal{V}_1(\zeta;\Xi)}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathrm{H}(\mathrm{A},\Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{V}_\Xi,$$

qui entraîne

$$\Phi(\mathrm{X}) = \lim_{\zeta \to 0} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_1(\zeta;\Xi)}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathrm{H}(\mathrm{A},\Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{V}_\Xi, \tag{34}$$

et ceci se transforme enfin en

$$\begin{aligned} \Phi(\mathrm{X}) = \lim_{\zeta \to 0} \Omega^2(\mathrm{X}) \int^{(m)} \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}_\mathrm{X}(\zeta;\Xi)}^{(m)} & \mathrm{G}_1(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathrm{K}(\mathrm{A},\Xi) \\ & \times d(a_1,\ldots,a_m)\, d(\xi_1,\ldots,\xi_m), \end{aligned} \tag{35}$$

où l'intégrale relative à Ξ est étendue soit à $\mathcal{V}-\mathcal{V}(\zeta^k;\mathrm{X})$ $(0<k<1)$, soit à une région bornée prise dans l'espace euclidien, indépendante de ζ, contenant X à son intérieur. Avant d'effectuer l'intégration relative à A, changeons de variables d'intégration en posant

$$a_\alpha = \xi_\alpha - y_\alpha + x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

les variables y_α remplaçant maintenant les a_α; on a alors

$$\mathrm{G}_1(\mathrm{X},\mathrm{A}) = \mathrm{G}_1^*[y_\alpha - \xi_\alpha;\, \nu_n(\mathrm{X})], \qquad \mathrm{K}(\mathrm{A},\Xi) = \mathrm{H}_1^*[x_\alpha - y_\alpha;\, \nu_n(\mathrm{X})];$$

on voit ainsi qu'*en posant*

$$\varphi(\mathrm{X}) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}, \qquad \psi(\mathrm{X}) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\varphi(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

les hypothèses du paragraphe 11 *sont satisfaites pourvu que* H_2 *remplisse les hypothèses du paragraphe* 3, *et la nouvelle fonction* Φ *est égale à l'ancienne*. En posant dans (33)

$$a_\alpha = 2x_\alpha - y_\alpha, \qquad \xi_\alpha = 2x_\alpha - \eta_\alpha,$$

on voit qu'*on a la même conclusion pour*

$$\varphi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(A, X)\,\rho(A)\,dV_A, \qquad \psi(X) = \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(A, X)\,\varphi(A)\,dV_A.$$

(*A suivre.*)

ÉQUATIONS A INTÉGRALES PRINCIPALES

ÉTUDE SUIVIE D'UNE APPLICATION

PAR M. GEORGES GIRAUD

(suite).

CHAPITRE II.

ITÉRATION DE CERTAINS NOYAUX D'INTÉGRALES PRINCIPALES.

1. **Noyaux considérés dans ce Chapitre.** — Nous considérons la variété close $\mathfrak{V}$, à m dimensions, qui remplit les hypothèses déjà indiquées (I, 6); sur cette variété on donne le tenseur Ω, d'ordre m, covariant et symétrique gauche, et le tenseur $A_{\alpha,\beta}$ covariant et symétrique, indiqués au même endroit. Nous nous donnons enfin un tenseur simple et covariant c_α; nous supposons que les composantes c_α sont, dans chaque $\mathfrak{V}_n$, des fonctions hölderiennes des paramètres attachés à ce $\mathfrak{V}_n$, et nous supposons que l'exposant hölderien est h.

Les noyaux considérés ici sont les noyaux G du paragraphe 7 (Chap. I), pour lesquels on a, dans chaque $\mathfrak{V}_n$,

$$(1)\quad G_1(X, A) = \Sigma_\alpha c_\alpha(X)(x_\alpha - a_\alpha)[\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)]^{-\frac{m+1}{2}};$$

quant à G_2 on suppose qu'il est du type du paragraphe 3 (Chap. I). Toutes les hypothèses du paragraphe 7 (Chap. I) sont ainsi satisfaites : si deux points A et B sont symétriques par rapport à X, on a $G_1(X, B) = -G_1(X, A)$, ce qui suffit à entraîner que nous avons là un noyau d'intégrale principale, comportant les domaines d'exclusion considérés. A vrai dire, n'importe quelle famille de domaines, ayant X pour centre de symétrie, pourrait être prise comme famille d'exclusion pour ce type particulier de noyaux, et l'intégrale aurait la même valeur; mais en vue de la suite, nous continuerons à définir les domaines d'exclusion pour chaque point X de $\mathfrak{V}$ à l'aide du tenseur $A_{\alpha,\beta}$, et cela pour tous les noyaux d'intégrales principales qui se présenteront et où il y aura lieu d'exclure X.

Grâce à ce que c_α est un tenseur covariant, on voit que, si X appartient à deux $\mathfrak{V}_n$ différents, les deux fonctions G_1 correspondantes ne diffèrent que par une fonction du type du paragraphe 3 (Chap. I).

Nous allons reprendre, pour ces noyaux, la question du paragraphe 11 du Chapitre I, les fonctions nommées respectivement G et H dans ce paragraphe, étant toutes deux identiques à la fonction G actuelle. On verra que l'hypothèse supplémentaire introduite dans ce paragraphe est remplie d'elle-même, et l'on calculera la fonction Φ.

2. **Cas des intégrales simples.** — Le cas des intégrales simples doit être traité d'abord [1]. Dans ce cas

$$G_1(x, a) = \frac{c(x)}{x-a},$$

et $c(x)$ est un tenseur contravariant; $c(x)$ est hölderien d'exposant h. On a alors (I, 12)

$$(2)\qquad \Phi(x) = \Omega^2(x)\, c^2(x) \lim_{\lambda \to 0} \int_{-R}^{R} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{da}{(x-a)(a-\xi)}\, d\xi,$$

où R est choisi supérieur à $|x|$. On en déduit

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Omega^2(x)\, c^2(x) \lim_{\lambda \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x-\xi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a-\xi}\right) da\, d\xi \\ &= \Omega^2(x)\, c^2(x) \lim_{\lambda \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x-\xi} \log\left|\frac{x+\lambda-\xi}{x-\lambda-\xi}\right| d\xi.\end{aligned}$$

En posant $\xi = x + \lambda t$, cela devient

$$\Phi(x) = \Omega^2(x)\, c^2(x) \lim_{\lambda \to 0} \int_{\frac{-R-x}{\lambda}}^{\frac{R-x}{\lambda}} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{dt}{t} = \Omega^2(x)\, c^2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{dt}{t},$$

car, pour t infiniment grand, la fonction intégrée vaut $O(t^{-2})$. Nous

---

[1] Dans ce cas nous désignons le point par une minuscule; d'ailleurs $\mathfrak{V}$ se compose d'un nombre fini de courbes fermées, sur chacune desquelles on peut adopter un paramètre unique, défini à une période près.

savons donc déjà que l'hypothèse complémentaire du paragraphe 11 (Chap. I) est ici satisfaite, et même, puisque la fonction intégrée n'a en réalité pas de pôle pour $t = 0$, nous voyons que

$$\int_{-\frac{R-x}{\lambda}}^{\frac{R-x}{\lambda}} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{dt}{t}$$

est une fonction holomorphe de x : donc ici *le noyau itéré, c'est-à-dire la fonction nommée* F (Chap. I, 11), *vaut* $O(|x-\xi|^{h-1})$, *c'est-à-dire qu'elle est sommable* (cette particularité ne se produira pas pour $m > 1$). Quant à la fonction Φ, il suffit de calculer la constante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{dt}{t} = 2\int_{0}^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{dt}{t} = 4\int_{0}^{1} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{dt}{t},$$

la dernière expression s'obtenant par le changement de variable $t = \frac{1}{u}$. Or le développement du logarithme en série entière montre que ceci vaut

$$8\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-2} = \pi^2.$$

Par conséquent,

$$\Phi(x) = \pi^2\,\Omega^2(x)\,c^2(x). \tag{3}$$

Poincaré [1] avait établi que l'itération du noyau considéré conduit à un noyau sommable, et l'abbé Gaston Bertrand [2], reprenant cette étude, est ensuite arrivé à une formule équivalente à (3). Mais les considérations employées supposaient qu'on avait affaire à un noyau méromorphe.

3. **Cas des intégrales multiples.** — Nous opérons d'abord sur les paramètres attachés à la région $\mathcal{V}_n$ qui contient à son intérieur le point X où l'on veut calculer Φ, un changement linéaire mettant ce point à l'origine et ramenant la fonction $\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta)$ à

---

(1) Henri Poincaré, *Mécanique céleste*, t. III (*Théorie des marées*), spécialement pages 253 à 256.

(2) Gaston Bertrand, *loc. cit.*, spécialement pages 205 à 225.

être seulement $\Sigma_\alpha a_\alpha^2$ quand X est en O (pour ne pas compliquer la notation, nous donnons aux nouvelles variables les mêmes noms qu'avaient les anciennes); le jacobien des anciennes variables par rapport aux nouvelles est $\sqrt{D}$, où D^{-1} est le déterminant des $A_{\alpha,\beta}$ (nous faisons en sorte que ce jacobien soit positif). Si nous désignons par $a_{\alpha,\beta}$ le produit par D du mineur de $A_{\alpha,\beta}$ dans ce déterminant, et si nous désignons par c'_α les nouvelles composantes du tenseur qui figure dans G_1, la valeur de $\Sigma_\alpha c'^2_\alpha$ en O est égale à $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta$. On peut encore faire subir aux a_α une transformation orthogonale, de façon que tous les c'_α soient nuls en O, sauf c'_1 qui sera positif ou nul; alors G(X, A) devient, quand X est en O,

$$-\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta}\, a_1 \, L^{-m-1}(O, A) + O[L^{h-m}(O, A)],$$

pendant que dV devient $\Omega \sqrt{D}\, d(a_1, \ldots, a_m)$. Par suite au point O on a (I, 12)

$$\Phi = \Omega^2 D \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta K, \tag{4}$$

où K désigne la constante

$$K = -\lim_{\lambda \to 0} \int^{(m)} \int^{(m)} \frac{a_1(a_1 - \xi_1)}{L^{m+1}(O, A) L^{m+1}(A, \Xi)} d(a_1, \ldots, a_m) d(\xi_1, \ldots, \xi_m), \tag{5}$$

l'intégration relative aux a_α étant prise dans la région $L(O, A) < \lambda$; l'intégration relative aux ξ_α est étendue, par exemple, à la région $L(O, \Xi) < R$, où R est une constante.

Nous avons d'abord à étudier la fonction

$$F(\Xi) = -\int^{(m)} \frac{a_1(a_1 - \xi_1)}{L^{m+1}(O, A) L^{m+1}(A, \Xi)} d(a_1, \ldots, a_m), \tag{6}$$

et spécialement à voir comment elle se comporte à l'origine. Soient

$$\rho = L(O, \Xi), \qquad \xi_1 = \rho \cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

Appliquons à $a_2, \ldots, a_m$ une certaine transformation orthogonale, et la même transformation à $\xi_2, \ldots, \xi_m$, de façon que le nouveau ξ_2 soit $\rho \sin\theta$, ce qui entraîne que tous les ξ_α sont nuls pour $\alpha \geqq 3$; cela ne change pas $F(\Xi)$, et l'on voit ainsi que cette fonction ne dépend que de ρ et de θ, ainsi que du domaine d'intégration, qui est déterminé par λ; nous la désignerons donc par $f(\rho, \theta)$. Remplaçons maintenant a_1 par $a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta$ et a_2 par $a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta$, ce qui fait encore une transformation orthogonale; il vient

$$f(\rho, \theta) = -\int^{(m)} \frac{(a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta)(a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta - \rho \cos\theta)}{L^{m+1}(O, A)[a_1 - \rho)^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2]^{\frac{m+1}{2}}} d(a_1, \ldots, a_m),$$

ou

$$f(\rho, \theta) = \cos^2\theta\, \varphi(\rho) + \sin^2\theta\, \psi(\rho),$$

avec

$$(7) \quad \varphi(\rho) = -\int^{(m)} \frac{a_1(a_1 - \rho)}{L^{m+1}(O, A)[(a_1 - \rho)^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2]^{\frac{m+1}{2}}} d(a_1, \ldots, a_m),$$

$$(8) \quad \psi(\rho) = -\int^{(m)} \frac{a_2^2}{L^{m+1}(O, A)[(a_1 - \rho)^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2]^{\frac{m+1}{2}}} d(a_1, \ldots, a_m),$$

car le coefficient de $\sin\theta \cos\theta$ sous le signe d'intégration est fonction impaire de a_2, ce qui suffit à entrainer que son intégrale est nulle.

4. **Calcul de la fonction φ.** — Nous posons

$$r = L(O, A), \qquad a_1 = r \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi),$$

de sorte que

$$\varphi(\rho) = -\int^{(m)} \frac{\cos t (r \cos t - \rho)}{r^m (r^2 - 2\rho r \cos t + \rho^2)^{\frac{m+1}{2}}} d(a_1, \ldots, a_m).$$

C'est une intégrale principale à prendre dans le domaine $r < \lambda$; il y a deux points singuliers à exclure par des hypersphères infiniment petites ayant pour centres ces points, savoir l'origine $r = 0$ et le point $r = \rho$, $t = 0$, qui peut ne pas être dans le domaine. Nous intégrons donc dans la région

$$\sigma < r < \lambda, \qquad r^2 - 2\rho r \cos t + \rho^2 > \delta^2 \qquad (\sigma > 0, \delta > 0),$$

et nous faisons ensuite tendre σ et δ vers zéro, indépendamment l'un de l'autre. Or si l'on pose

$$a_\alpha = b_{\alpha-1} r \sin t \qquad (\alpha \geqq 2)$$

de sorte que

$$\sum^{m-1} b_\alpha^2 = 1,$$

et si l'on veut évaluer le jacobien de $a_1, \ldots, a_m$ par rapport à r, à t et à $m-2$ autres paramètres qui servent à fixer les b_α, on trouve

$$\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(r, t, t_1, \ldots, t_{m-2})} = r^{m-1} \sin^{m-2} t \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m-1} \left[\frac{d(b_{\alpha+1}, \ldots, b_{\alpha-1})}{d(t_1, \ldots, t_{m-2})}\right]^2},$$

où la notation se comprend d'elle-même; on voit apparaître la mesure d'un élément pris sur la frontière d'une hypersphère de rayon un, dans l'espace à $m-1$ dimensions; donc, si $\rho < \lambda$, on a

$$\varphi(\rho) = -\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$
$$\times \lim_{\sigma,\,\delta \to 0} \int_0^\pi \cos t \sin^{m-2} t \left(\int_\sigma^{r_1} + \int_{r_2}^{\lambda}\right) \frac{r\cos t - \rho}{(r^2 - 2\rho r \cos t + \rho^2)^{\frac{m+1}{2}}} \frac{dr}{r}\, dt;$$

r_1 et r_2 correspondent à l'hypersphère d'exclusion du point $r = \rho$, $t = 0$, hypersphère qu'on peut remplacer (I, 5) par

$$(r-\rho)^2 + \rho^2 t^2 < \delta^2,$$

puisque ceci s'écrit aussi

$$r^2 - 2r\rho \cos t + \rho^2 < \delta^2 + \delta^2 O\left(\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos t + \rho^2}\right).$$

Nous allons prouver que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{\frac{\delta}{\rho}} \cos t \sin^{m-2} t \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\cos t - \rho}{(r^2 - 2\rho r\cos t + \rho^2)^{\frac{m+1}{2}}} \frac{dr}{r}\, dt = 0,$$

avec

$$r_1 = \rho - \sqrt{\delta^2 - \rho^2 t^2}, \qquad r_2 = \rho + \sqrt{\delta^2 - \rho^2 t^2} \qquad \left(\text{si } t > \frac{\delta}{\rho}, \text{ on prend } r_1 = r_2 = \rho\right).$$

Il suffit de prouver que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\rho} \int_0^{\frac{\delta}{\rho}} t^{m-2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r-\rho}{[(r-\rho)^2 + \rho^2 t^2]^{\frac{m+1}{2}}}\, dr\, dt = 0,$$

car la différence des deux fonctions intégrées est d'ordre -1 par rapport à $\sqrt{(r-\rho)^2+\rho^2 t^2}$, ce qui n'offre aucune difficulté; or l'intégration relative à r donne zéro, ce qui démontre notre affirmation. Donc

$$\varphi(\rho)=-\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\lim_{\sigma\to 0}\int_0^\pi \cos t \sin^{m-2} t\int_\sigma^\lambda \frac{r\cos t-\rho}{(r^2-2r\rho\cos t+\rho^2)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{dr}{r}\,dt,$$

ou encore

$$(9).\qquad \varphi(\rho)=-\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^\pi \cos t \sin^{m-2} t$$
$$\times\int_0^\lambda \left[\frac{r\cos t-\rho}{(r^2-2r\rho\cos t+\rho^2)^{\frac{m+1}{2}}}+\rho^{-m}\right]\frac{dr}{r}\,dt.$$

En changeant t en $\pi-t$ et r en $-r$ pour les valeurs de t supérieures à $\frac{\pi}{2}$, on trouve encore

$$(10)\qquad \varphi(\rho)=-\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{m-2} t\int_{-\lambda}^\lambda \frac{r\cos t-\rho}{(r^2-2r\rho\cos t+\rho^2)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{dr}{r}\,dt,$$

l'intégrale relative à r étant une intégrale principale au sens de Cauchy.

Soit maintenant $r=\rho u$; il vient

$$(11)\qquad \varphi(\rho)=-\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\rho^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{m-2} t$$
$$\times\int_{-\frac{\lambda}{\rho}}^{\frac{\lambda}{\rho}} \frac{u\cos t-1}{(u^2-2u\cos t+1)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{du}{u}\,dt.$$

On voit que le remplacement des limites d'intégration pour u par $-\infty$ et $+\infty$ procure une fonction qui diffère de $\varphi(\rho)$ par une quantité bornée quand $\rho\to 0$; nous obtenons ainsi la partie positivement homogène et d'ordre $-m$.

Nous avons donc à calculer

$$I_m=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\cos t-1}{(u^2-2u\cos t+1)^{\frac{m+1}{2}}}\frac{du}{u}.$$

On a

$$\frac{u\cos t - 1}{u(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{-1}{u(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{m-1}{2}}}$$

$$- \frac{1}{m-1}\frac{d}{du}(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{1-m}{2}},$$

d'où

$$\mathrm{I}_m = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{m-1}{2}}} \qquad (m \geqq 2).$$

Mais, en comparant avec la première expression, cela donne

$$\mathrm{I}_{m+2} = \mathrm{I}_m - \cos t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \qquad (m \geqq 1).$$

En posant $u = \cos t + v\sin t$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2 - 2u\cos t + 1)^{\frac{m+1}{2}}} = \sin^{-m} t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2 + 1)^{\frac{m+1}{2}}};$$

en prenant comme variable $\frac{v^2}{v^2+1}$, ce qui introduit une intégrale eulérienne, on arrive à

$$\mathrm{I}_{m+2} = \mathrm{I}_m - \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\sin^{-m} t\cos t,$$

et par suite

$$\mathrm{I}_m = \begin{cases} \mathrm{I}_2 - \sqrt{\pi}\cos t \displaystyle\sum_{p=1}^{\frac{m-2}{2}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}\sin^{-2p} t & (m \text{ pair}), \\ \mathrm{I}_1 - \sqrt{\pi}\cos t \displaystyle\sum_{p=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2p-1}{2}\right)}{\Gamma(p)}\sin^{1-2p} t & (m \text{ impair}). \end{cases}$$

Mais

$$\mathrm{I}_2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 2u\cos t + 1}} = 2\log\operatorname{tang}\frac{t}{2},$$

comme on le voit en posant $u = \cos t + \sin t \operatorname{sh} v$. Ensuite

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \cos t - 1}{u(u^2 - 2u\cos t + 1)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u - \cos t}{u^2 - 2u\cos t + 1} - \frac{1}{u} \right) du = 0.$$

Il faut maintenant multiplier par $\cos t \sin^{m-2} t\, dt$ et intégrer de zéro à $\frac{\pi}{2}$:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{m-2} t \log \operatorname{tang} \frac{t}{2}\, dt$$

$$= \frac{2}{m-1}\left(\sin^{m-1} t \log \operatorname{tang} \frac{t}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} t\, dt$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Donc

$$(12)\quad \varphi(\rho) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \times \rho^{-m} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{(m-1)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{p=1}^{\frac{m-2}{2}} \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{m-2p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p-2}{2}\right)} \right\} + O(1)$$

$$(m \text{ pair}),$$

$$(13)\quad \varphi(\rho) = \frac{\pi^{\frac{m+1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \rho^{-m} \left[\sum_{p=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2}\right)}{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{m-2p+3}{2}\right)} \right] + O(1)$$

$$(m \text{ impair}).$$

Nous allons maintenant simplifier ces expressions. La fonction

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} x^p$$

est la solution holomorphe et égale à *un* à l'origine, de l'équation hypergéométrique

$$x(1-x)y''+\left(\frac{3}{2}-3x\right)y'-y=0.$$

Or cette équation a aussi une solution $y=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^{-n}$, avec $c_1=1$; en la cherchant par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve que $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est solution. Pour trouver une autre solution, on forme d'abord le wronskien, qui est $[x(1-x)]^{-\frac{3}{2}}$, à un facteur constant près; il y a donc aussi la solution

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

en posant $1+t^2=\frac{1}{x}$, $t>0$, on trouve la solution cherchée

$$y=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}x^p \qquad (0<x<1).$$

Soit maintenant $z=y\sqrt{1-x}$; on a

$$x(1-x)z''+\left(\frac{3}{2}-2x\right)z'-\frac{z}{4}=0,$$

équation dont la solution holomorphe à l'origine est

$$z=\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}x^n \qquad (0<x<1).$$

Nous connaissons d'autre part le développement de $\sqrt{1-x}$; en identifiant les termes en x^n dans les deux membres de $z=y\sqrt{1-x}$, on trouve

$$-\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(n-p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n-p+1)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

ou

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(n-p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n-p+1)} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

En remplaçant maintenant n par $\frac{m-2}{2}$ et p par $p-1$, on parvient à la formule, valable pour m pair,

$$(14) \qquad \varphi(\rho) = \pi^{\frac{m}{2}+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \rho^{-m} + O(1).$$

Si m est impair, on transforme de même la formule (13) en se servant des développements de $\sqrt{1-x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, dont le produit est *un*, et l'on parvient à *la même formule* (14), *qui s'applique donc quel que soit m au moins égal à deux.*

5. **Calcul de la fonction ψ.** — L'intégrale qui donne ψ porte sur une fonction de r, de a_1 et de a_2, à intégrer dans le domaine $r < \lambda$. En posant

$$a_1 = r\cos\theta, \qquad a_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad a_\alpha = \sin\theta\sin\varphi\,\xi_{\alpha-2} \qquad (\alpha > 2),$$
$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi,$$

on trouve, si m est au moins égal à trois,

$$\int^{(m)} f(r, a_1, a_2)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$= \frac{2\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{m-3}\varphi \int_0^\pi \sin^{m-2}\theta$$
$$\times \int_0^\lambda f(r, r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi)\, r^{m-1}\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Donc

$$\psi(\rho) = -\frac{2\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{m-3}\varphi\cos^2\varphi \int_0^\pi \sin^m\theta$$
$$\times \int_0^\lambda \frac{dr}{(r^2 - 2\rho r\cos\theta + \rho^2)^{\frac{m+1}{2}}}\, d\theta\, d\varphi,$$

car l'intégrale porte sur une fonction sommable. Cela revient à

$$\psi(\rho) = -\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\rho^{-m}\int_0^{\pi}\sin^m\theta\int_0^{\frac{\lambda}{\rho}}\frac{du}{(u^2-2u\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}d\theta,$$

ou enfin à

$$\psi(\rho) = -\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\rho^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\int_{-\frac{\lambda}{\rho}}^{\frac{\lambda}{\rho}}\frac{du}{(u^2-2u\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}d\theta.$$

Ceci entraine, quand ρ tend vers zéro,

$$(15) \qquad \psi(\rho) = -\frac{\pi^{\frac{m}{2}+1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}\rho^{-m} + O(1).$$

Le calcul suppose $m > 2$; mais si $m = 2$, le calcul direct montre que la formule (15) subsiste.

Les formules (14) et (15) nous permettent de voir que $f(\rho, \theta)$ *est un noyau d'intégrale principale*. En effet, en intégrant dans le domaine $\mu < \rho < \lambda$, l'intégrale de $f(\rho, \theta)\,dV$ se réduit à

$$\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_{\mu}^{\lambda}\rho^{m-1}\varphi(\rho)\,d\rho + \int_0^{\pi}\sin^m\theta\,d\theta\int_{\mu}^{\lambda}\rho^{m-1}\psi(\rho)\,d\rho\right]$$

$$= \frac{-\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\int_{\lambda}^{\mu}\rho^{m-1}[\varphi(\rho)+(m-1)\psi(\rho)]\,d\rho;$$

or la fonction intégrée ici vaut $O(\rho^{m-1})$; il y a donc bien convergence.

Les hypothèses du Chapitre I (§ 11) sont bien satisfaites, et *la fonction* Φ *existe*.

6. Transformation de l'expression de K. — Le calcul de Φ revient à celui de la constante K de la formule (5),

$$K = \lim_{\lambda \to 0}\int^{(m)} f(\rho, \theta)\,d(\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

cette dernière intégrale étant étendue à la région $\rho < R$. Nous avons vu comment une telle intégrale se calcule; en remplaçant $\varphi + (m-1)\psi$ par sa valeur exacte et en utilisant la formule de Legendre relativement à la fonction Γ, cela donne

$$K = \frac{-2^m \pi^{m-1}}{m\,\Gamma(m-1)} \lim_{\lambda \to 0} \int_0^R \frac{1}{\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\theta \int_{-\frac{\lambda}{\rho}}^{\frac{\lambda}{\rho}} \frac{t - \cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \frac{dt}{t}\, d\theta\, d\rho,$$

d'où, en posant $\rho = \dfrac{\lambda}{u}$,

$$(16) \qquad K = \frac{-2^m \pi^{m-1}}{m\,\Gamma(m-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\theta \int_{-u}^{u} \frac{t - \cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \frac{dt}{t}\, d\theta\, du,$$

et nous sommes déjà assurés que cette expression existe. Mais il faut maintenant la transformer.

Le résultat des deux premières intégrations peut s'écrire

$$(17) \qquad \int_0^{\pi} \sin^{m-2}\theta \int_0^{u} \left[\frac{t - \cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} + \cos\theta \right] \frac{dt}{t}\, d\theta,$$

ou encore (§ 5)

$$(18) \qquad -\int_0^{\pi} \sin^{m-2}\theta \int_u^{+\infty} \frac{t - \cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \frac{dt}{t}\, d\theta.$$

En nous servant tantôt de l'une, tantôt de l'autre de ces expressions, et en remarquant que l'ordre des intégrations peut être changé dans (17) si $u < 1$, dans (18) si $u > 1$, nous écrivons

$$K = \frac{-2^m \pi^{m-1}}{m\,\Gamma(m-1)} \left\{ \begin{aligned} &-\int_{1+k}^{+\infty} \frac{1}{u} \int_u^{+\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\pi} \frac{(t - \cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}}\, d\theta\, dt\, du \\ &+\int_0^{1-k} \frac{1}{u} \int_0^{u} \frac{1}{t} \int_0 \frac{(t - \cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}}\, d\theta\, dt\, du \\ &+\int_{1-k}^{1+k} \frac{1}{u} \int_0^{\pi} \sin^{m-2}\theta \int_0^{u} \left[\frac{t - \cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} + \cos\theta \right] \frac{dt}{t}\, d\theta\, du \end{aligned} \right\},$$

k étant positif et inférieur à un. Le premier terme de l'accolade s'écrit aussi

$$-\lim_{l\to+\infty}\int_{1+k}^{l}\frac{1}{u}\int_{u}^{l}\frac{1}{t}\int_{0}^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt\,du,$$

car, si $u\to+\infty$,

$$\int_{u}^{+\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt=\mathrm{O}(u^{-m});$$

donc en multipliant par $\frac{du}{u}$ et en intégrant de l à $+\infty$, on a $\mathrm{O}(l^{-m})$, c'est-à-dire un infiniment petit; en le retranchant, il reste

$$\int_{1+k}^{l}\frac{1}{u}\int_{u}^{+\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt\,du;$$

mais

$$\int_{1+k}^{l}\frac{1}{u}\int_{l}^{+\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt\,du=\mathrm{O}\left(l^{-m}\log\frac{l}{1+k}\right),$$

ce qui achève la vérification. Le second terme s'écrit de même

$$\lim_{h\to+0}\int_{h}^{1-k}\frac{1}{u}\int_{h}^{u}\frac{1}{t}\int_{0}^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt\,du,$$

comme on le voit en ajoutant $\sin^{m-2}\theta\cos\theta$ à la fonction qu'on intègre par rapport à θ : cela ne change pas le résultat.

Mais si x et x_0 sont positifs, et si f est continu, on a

$$\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta\,d\alpha=\int_{x_0}^{x}f(\alpha)\log\frac{x}{\alpha}\,d\alpha,$$

car les deux membres sont nuls pour $x=x_0$ et ils ont même dérivée par rapport à x. Donc

$$K = \frac{-2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \Bigg\{ -\lim_{l \to \infty} \int_{1+k}^{l} \frac{1}{t} \log \frac{t}{1+k} \int_0^\pi \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt$$
$$- \lim_{h \to +0} \int_h^{1-k} \frac{1}{t} \log \frac{t}{1-k} \int_0^\pi \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt$$
$$+ \int_{1-k}^{1+k} \frac{1}{u} \int_0^\pi \sin^{m-2}\theta$$
$$\times \int_0^u \left[\frac{t-\cos\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} + \cos\theta \right] \frac{dt}{t}\, d\theta\, du \Bigg\}.$$

D'après ce qu'on a vu dans le courant du Chapitre I (§ 12), la fonction $f(\rho, \theta)$ vaut $O(\log|\lambda - \rho|)$ quand ρ tend vers λ. En suivant les calculs, on reconnait ainsi que, dans le premier terme de l'accolade, la quantité qui est multipliée par $\log(1+k)$ vaut $O(\log k)$, et par suite son produit par $\log(1+k)$ tend vers zéro avec k. Il en est de même pour la partie où figure le facteur $\log(1-k)$ dans le second terme de l'accolade. Enfin le troisième terme tend vers zéro avec k. Nous avons donc

$$K = \frac{2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t} \int_0^\pi \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt.$$

Mais nous avons évidemment, par changement de θ en $\pi - \theta$ et de t en $-t$,

$$\int_h^{+\infty} \frac{\log t}{t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{-h} \frac{\log|t|}{t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt \qquad (h > 0).$$

Par conséquent,

$$K = \frac{2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|t|}{t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} d\theta\, dt, \tag{19}$$

l'intégrale relative à t étant maintenant une intégrale principale, où $t=0$ est à exclure par un intervalle $(-h, h)$ (ce n'est pas une intégrale principale de Cauchy).

Nous voulons maintenant remplacer dans (19) la variable d'intégration t par la variable u telle que

$$t=\cos\theta+u\sin\theta;$$

nous aboutirons à l'expression

$$(20)\qquad \mathrm{K}=\frac{2^m\pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log|\cos\theta+u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta+u\sin\theta)}\,d\theta\,du.$$

Le changement de variables est biunivoque pour $\theta>\beta>0$, et le jacobien $\sin\theta$ n'est alors pas nul. Montrons que

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|t|}{t}\int_0^{\beta}\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt=0.$$

Si, de la fonction intégrée par rapport à θ, nous retranchons $\dfrac{(t-1)\theta^{m-2}}{[(t-1)^2+\theta^2]^{\frac{m+1}{2}}}$, la différence vaut $\mathrm{O}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(t-1)^2+\theta^2}}\right]$ quand le radical est infiniment petit. Donc

$$\int_{1-k}^{1+k}\frac{\log t}{t}\int_0^{\beta}\left\{\frac{(t-\cos\theta)\sin^{m-2}\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{\frac{m+1}{2}}}-\frac{(t-1)\theta^{m-2}}{[(t-1)^2+\theta^2]^{\frac{m+1}{2}}}\right\}d\theta\,dt$$

existe, et par suite sa limite est nulle quand k tend vers zéro. Nous allons voir qu'il en est de même pour

$$\int_{1-k}^{1+k}\frac{\log t}{t}\int_0^{\beta}\frac{(t-1)\theta^{m-2}}{[(t-1)^2+\theta^2]^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta\,dt;$$

on a

$$\int_0^{\beta}\frac{(t-1)\theta^{m-2}}{[(t-1)^2+\theta^2]^{\frac{m+1}{2}}}\,d\theta=(t-1)^{-1}\int_0^{\frac{\beta}{t-1}}\frac{u^{m-2}\,du}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}=\mathrm{O}[(t-1)^{-1}],$$

ce qui entraîne notre affirmation, puisque $\log t=\mathrm{O}(t-1)$; on voit que la convergence est uniforme par rapport à β. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, nous choisissons $k (0 < k < 1)$ assez petit pour avoir

$$\left| \int_{1-k}^{1+k} \frac{\log t}{t} \int_0^\beta \frac{(t - \cos\theta) \sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \, d\theta \, dt \right| < \varepsilon,$$

quel que soit β : c'est possible d'après ce qu'on vient de voir. Puis nous nous donnons un nombre positif h, inférieur à $1 - k$, et nous prenons β assez petit pour avoir

$$\left| \int_{-h}^{h} \frac{\log |t|}{t} \int_0^\beta \frac{(t - \cos\theta) \sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \, d\theta \, dt \right| < \varepsilon,$$

ce qui est encore possible car, sans changer le premier membre, on peut ajouter $\sin^{m-2}\theta \cos\theta$ à la fonction intégrée par rapport à θ, et alors on a en réalité une intégrale double de fonction sommable. Enfin nous diminuons au besoin β, de façon à avoir

$$\left| \left(\int_{-\infty}^{-h} + \int_{h}^{1-k} + \int_{1+k}^{+\infty} \right) \frac{\log |t|}{t} \int_0^\beta \frac{(t - \cos\theta) \sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \, d\theta \, dt \right| < \varepsilon;$$

c'est possible, car on peut changer l'ordre des intégrations, et alors le résultat de l'intégration relative à t est borné quand θ varie. On voit qu'en définitive ce procédé donne un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\beta < \eta$ entraîne

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |t|}{t} \int_0^\beta \frac{(t - \cos\theta) \sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \, d\theta \, dt \right| < 3\varepsilon,$$

ce que nous voulions démontrer. On a donc bien

$$\begin{aligned} K = \frac{2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \lim_{\beta \to 0} \lim_{h \to 0} \lim_{l \to 0} \left(\int_{-l}^{-h} + \int_{h}^{l} \right) \frac{\log |t|}{t} \\ \times \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t - \cos\theta) \sin^{m-2}\theta}{(t^2 - 2t\cos\theta + 1)^{\frac{m+1}{2}}} \, d\theta \, dt, \end{aligned}$$

et le changement de variables peut être fait dans le nouveau champ. Relativement aux variables θ et u, le champ est défini par

$$\beta < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad h < |\cos\theta + u \sin\theta| < l,$$

ce qui comprend le champ

$$\beta < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad |u| < \sqrt{l^2 - 1}, \qquad |\cos\theta + u\sin\theta| > h.$$

Mais l'intégrale

$$\int \frac{|u|}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \left| \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} \right| d\theta\, du,$$

étendue au champ

$$|u| > \sqrt{l^2 - 1}, \qquad \beta < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad |\cos\theta + u\sin\theta| > h,$$

se limite aisément; on a

$$\left| \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} \right| < \frac{\log|u| - \log\left|\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{u}\right|}{h\sin\beta},$$

et l'on a

$$a > \log\left|\sin\theta + \frac{\cos\theta}{u}\right| > -a,$$

où a est un nombre quelconque supérieur à $-\log\sin\beta$; l'inégalité est valable pour l assez grand; il est donc évident que notre intégrale tend vers zéro quand l croît indéfiniment. Ainsi

$$K = \frac{2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \lim_{\beta \succ 0} \lim_{h \succ 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} d\theta\, du,$$

le champ d'intégration pour θ étant défini par

$$\beta < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad |\cos\theta + u\sin\theta| > h.$$

Montrons que

$$(21) \qquad K = \frac{2^m \pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)} \lim_{\beta \succ 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} d\theta\, du.$$

En effet, si θ appartient au champ

$$(22) \qquad \beta < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad |\cos\theta + u\sin\theta| < h < 1,$$

on a

$$|u\cos\theta - \sin\theta| > \sqrt{1 + u^2 - h^2};$$

mais

$$\frac{1}{\sin\theta} + u\cos\theta - \sin\theta = \operatorname{cotg}\theta(\cos\theta + u\sin\theta);$$

donc

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} + u\cos\theta - \sin\theta\right) d\theta\, du\right|$$
$$< -\operatorname{cotg}\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u|}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \log|\cos\theta + u\sin\theta|\, d\theta\, du,$$

le champ d'intégration étant défini par (22), de sorte que le logarithme est négatif. Mais

$$-\int \log|\cos\theta + u\sin\theta|\, d\theta < \frac{-1}{\sqrt{1-h^2}} \int \log|\cos\theta + u\sin\theta|\,(u\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta,$$

car $u\cos\theta - \sin\theta$ est négatif dans notre champ; le dernier membre est évidemment $O(h\log h)$ (cela se voit en prenant $\cos\theta + u\sin\theta$ comme variable d'intégration). Le premier membre de l'avant-dernière inégalité tend donc vers zéro avec h. Ensuite, en intégrant dans (22), on trouve

$$\int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}(u\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 0,$$

sauf si u est tel que $|\cos\theta + u\sin\theta|$ soit moindre que h en l'un des points $\theta = \beta$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$: dans l'intervalle

$$-\frac{h + \cos\beta}{\sin\beta} < u < \frac{h - \cos\beta}{\sin\beta},$$

on a, pour la même intégrale, la valeur $\dfrac{\log^2 h - \log^2|\cos\beta + u\sin\beta|}{2}$, et, dans l'intervalle $-h < u < h$, elle vaut $\dfrac{\log^2|u| - \log^2 h}{2}$. Il en résulte évidemment que

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}(u\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta\, du = 0.$$

La formule (21) *est donc établie.*

7. **Nullité d'une certaine limite.** — Pour parvenir à la formule (20), il reste à établir que

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^\beta \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\, d\theta\, du = 0.$$

Tout d'abord prouvons que

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{0}^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^\beta \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\, d\theta\, du = 0.$$

En effet on a

$$0 > \frac{\log\cos\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} > \frac{\log\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta},$$

$$0 < \frac{\log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} < \sqrt{\frac{u}{\sin\theta\cos^3\theta}},$$

la dernière inégalité résultant des deux suivantes :

$$\frac{\log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} < \frac{u}{\cos^2\theta}, \qquad \frac{\log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} < \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Comme $\log(\cos\theta + u\sin\theta) = \log\cos\theta + \log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)$, on peut décomposer l'intégrale en deux, et les inégalités précédentes montrent immédiatement que chaque partie tend vers zéro.

Prouvons maintenant que

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{-4}^{0} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^\beta \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\, d\theta\, du = 0.$$

Nous supposons qu'on a $\mathrm{tang}\,\beta < \frac{1}{8}$. Alors, d'après la formule des accroissements finis, $0 > \log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta) > 2u\,\mathrm{tang}\,\theta$; nous avons aussi $\cos\theta > \frac{8}{\sqrt{65}}$, $\cos\theta + u\sin\theta > \frac{4}{\sqrt{65}}$; par suite

$$0 > \frac{\log\cos\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} > \frac{\sqrt{65}}{4}\,\frac{\log\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad 0 > \frac{\log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} > \frac{65}{16}\,u;$$

notre démonstration est faite.

Restent les valeurs de u inférieures à -4. Nous supposons β assez petit pour que la plus petite racine positive x' de l'équation en x

$$x^3 \sin\beta - x\cos\beta + 1 = 0$$

soit inférieure à deux : c'est possible, car $\lim\limits_{\beta \to 0} x' = 1$; l'autre racine positive x'' équivaut à $\beta^{-\frac{1}{2}}$. Supposons u assez grand en valeur absolue pour que nous ayons

$$\cos\beta + u \sin\beta < \frac{1}{\sqrt{-u}};$$

il faut et il suffit pour cela qu'on ait $-u < x'^2$ ou $-u > x''^2$, mais le premier cas est impossible puisque $-u > 4$; donc cela revient à supposer $-u > x''^2 = \frac{1 + O(\sqrt{\beta})}{\beta}$. Si l'on a en même temps

$$\cos\beta + u\sin\beta > -\frac{1}{\sqrt{-u}},$$

c'est qu'on a $-u < x'''^2 = \frac{1 + O(\sqrt{\beta})}{\beta}$, où x''' est la racine positive de l'équation

$$x^3 \sin\beta - x\cos\beta - 1 = 0;$$

il est évident qu'on a $x''' = x' + x'' > x''$. Supposons donc

$$x''^2 < -u < x'''^2,$$

et intégrons par rapport à θ dans l'intervalle où l'on a

$$|\cos\theta + u\sin\theta| < \frac{1}{\sqrt{-u}};$$

une extrémité de cet intervalle est le point β, et à l'autre extrémité on a

$$\cos\theta + u\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{-u}};$$

dans cet intervalle on a

$$-\sqrt{1 + u^2 + \frac{1}{u}} > u\cos\theta - \sin\theta > -\sqrt{1 + u^2}$$

et

$$\sin\theta > -\frac{\cos\theta}{u} - (-u)^{-\frac{3}{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\sin\theta} = O(u),$$

d'autre part

$$\frac{1}{\sin\theta} + u\cos\theta - \sin\theta = \frac{\cos\theta(u\sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta},$$

d'où

$$\frac{1}{\sin\theta} = (u\cos\theta - \sin\theta)[-1 - \cos\theta(u\sin\theta + \cos\theta)] + \frac{\cos^2\theta(u\sin\theta + \cos\theta)^2}{\sin\theta};$$

en intégrant dans notre intervalle, il vient

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta \\
&\quad = \frac{1}{2}\log^2|\cos\beta + u\sin\beta| - \frac{1}{8}\log^2(-u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &< \int \cos\theta \log|\cos\theta + u\sin\theta|\,(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta \\
&< \int \log|\cos\theta + u\sin\theta|\,(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta \\
&= (\cos\beta + u\sin\beta)\log|\cos\beta + u\sin\beta| \\
&\quad - \cos\beta - u\sin\beta + \frac{1}{2\sqrt{-u}}\log(-u) + \frac{1}{\sqrt{-u}};
\end{aligned}$$

enfin

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}(\cos\theta + u\sin\theta)\log|\cos\theta + u\sin\theta| = O\left[\sqrt{-u}\log(-u)\right],$$

de sorte que l'intégrale de ce dernier terme est aussi $O\left[\sqrt{-u}\log(-u)\right]$; en multipliant toutes ces quantités par $u(u^2+1)^{\frac{-(m+1)}{2}}du$, et en intégrant de $-x'''^2$ à $-x''^2$, on trouve des infiniment petits, notamment

$$\frac{u\log^2|\cos\beta + u\sin\beta|}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} = O[\beta^m \log^2|\cos\beta + u\sin\beta|],$$

et l'intégrale dans un intervalle d'amplitude $O\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$, contenant le point $u = -\operatorname{cotg}\beta$, est évidemment infiniment petite. Supposons maintenant $-u > x'''^2$; alors les valeurs de θ pour lesquelles

$$|\cos\theta + u\sin\theta| < \frac{1}{\sqrt{-u}}$$

forment un intervalle intérieur à l'intervalle $(0, \beta)$, et, en intégrant dans cet intervalle, on a

$$\int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0,$$

$$0 < \int \cos\theta \log|\cos\theta + u\sin\theta|(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$$

$$< \int \log|\cos\theta + u\sin\theta|(u\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-u}}\log(-u) - \frac{2}{\sqrt{-u}},$$

et enfin la fonction qui reste à intégrer, et son intégrale elle-même, valent $O[\sqrt{-u}\log(-u)]$; en multipliant par $u(u^2+1)^{\frac{-(m+1)}{2}}du$, et en intégrant de $-\infty$ à $-x'''^2 < -A\beta^{-1}$ (A constant), on trouve des infiniment petits.

Il reste la partie de l'intervalle $(0, \beta)$ où l'on a

$$|\cos\theta + u\sin\theta| > \frac{1}{\sqrt{-u}};$$

nous écrivons alors

$$\frac{1}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{u}{\cos\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}.$$

Nous limiterons d'abord

$$\int_{-\infty}^{-4} \frac{u^2}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\,d\theta\,du.$$

Nous remarquons que, pour $u < -4$, le rapport $\dfrac{u}{u\cos\theta - \sin\theta}$ est positif et borné, ainsi que le facteur $\dfrac{1}{\cos\theta}$. Nous avons donc à limiter

$$\int_{-\infty}^{-4} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \int O\left[\frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\cos\theta + u\sin\theta}(u\cos\theta - \sin\theta)\right] d\theta\,du.$$

Si $-u < x''^2$, l'intégration relative à θ donne

$$O[\log^2(\cos\beta + u\sin\beta)],$$

car, dans tout (o, β), $\cos\theta + u\sin\theta$ est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{-u}}$; nous remplacerons cela par $O(\beta)$ si $-u < \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, et par $O[\log^2(-u)]$ si $\frac{1}{\sqrt{\beta}} < -u < x''^2$; si $x''^2 < -u < x'''^2$, la limitation est encore $O[\log^2(-u)]$; si $-u > x'''^2$, il faut faire attention au changement de signe pour $\cos\theta + u\sin\theta$, et l'on trouve ainsi $O[\log^2(-u) + \log^2|\cos\beta + u\sin\beta|]$, qu'on peut remplacer simplement par $O[\log^2(-u)]$. Dans tous les cas, l'intégration relative à u donne un infiniment petit.

Il reste à limiter l'intégrale

$$\int \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta\cos\theta}\, d\theta,$$

étendue à la partie de (o, β) où l'on a

$$|\cos\theta + u\sin\theta| > \frac{1}{\sqrt{-u}}.$$

Il y a d'abord l'intervalle où l'on a $\cos\theta + u\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{-u}}$: cet intervalle commence à $\theta = o$, et comprend tout l'intervalle (o, β) si $-u < x''^2$; on a alors, d'après le théorème des accroissements finis

$$o > \log(\cos\theta + u\sin\theta) > -2\sqrt{-u}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - u\cos\frac{\theta}{2}\right);$$

on a donc à intégrer une fonction $\left(\sin\frac{\theta}{2} - u\cos\frac{\theta}{2}\right)O(\sqrt{-u})$; l'intégrale indéfinie du premier facteur est $-2\left(\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}\right)$, et son intégrale définie vaut donc $O(\beta^2 - \beta u)$; on a donc à calculer

$$\int_{-x''^2}^{-1} \frac{(\beta^2 - \beta u)(-u)^{\frac{3}{2}}}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}\, du = \begin{cases} O(\beta) & (m > 2), \\ O(\sqrt{\beta}) & (m = 2), \end{cases}$$

ce qui tend toujours vers zéro. Si $-u > x''^2$, nous écrivons l'intégrale indéfinie $-\dfrac{\cos\theta + u\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} - \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$, d'où l'intégrale définie

$$-\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{-u}} + O(1);$$

après l'intégration relative à u, de $-\infty$ à $-x''^2$, on obtient encore un infiniment petit. Il nous reste seulement l'intervalle où l'on a

$$\cos\theta + u\sin\theta < \frac{-1}{\sqrt{-u}},$$

intervalle qui existe seulement si $-u > x'''^2$; alors on a

$$\sin\theta > \frac{\cos\theta}{-u} + (-u)^{\frac{3}{2}} > \frac{\cos\beta}{-u};$$

donc

$$\frac{\log(-\cos\theta - u\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} = O\left[\sqrt{\frac{-u}{\theta}}\log(-u)\right];$$

l'intégrale relative à θ vaut donc $O[\sqrt{-\beta u}\log(-u)]$, et l'intégrale relative à u, de $-\infty$ à $-x'''^2$, est infiniment petite.

La formule (20) est donc établie.

8. **Fin du calcul de K et de Φ.** — Supposons que u soit positif, et posons

$$u = \cot g\varphi, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Nous voulons calculer l'intégrale

$$\int_0^\varphi \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}$$
$$= \int_0^\varphi [\log\cos\theta + \log(1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta)]\left(\frac{1}{\mathrm{tang}\,\theta} - \frac{u}{1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Mais

$$\int_0^\varphi \log\cos\theta\left(\frac{1}{\mathrm{tang}\,\theta} - \frac{u}{1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \log\cos\varphi\,\log\frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{1 + u\,\mathrm{tang}\,\varphi} + \int_0^\varphi \mathrm{tang}\,\theta\,\log\frac{\mathrm{tang}\,\theta}{1 + u\,\mathrm{tang}\,\theta}\,d\theta;$$

en posant $u \operatorname{tang}\theta = t$, cela donne

$$\int_0^{\varphi} \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\,d\theta = \log(2u)\log\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}$$

$$+\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt$$

$$+\int_0^1 \log\frac{t}{u(1+t)}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2}$$

$$= \log 2 \log\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2$$

$$+\int_0^1 \log\frac{t}{1+t}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2}.$$

Passons maintenant à

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}$$

$$= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\log(u\sin\theta) + \log\left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{u} + 1\right)\right] \frac{u}{\operatorname{cotg}\theta + u}\,\frac{d\theta}{u\sin^2\theta};$$

on trouve

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \log(u\sin\theta)\,\frac{u}{\operatorname{cotg}\theta + u}\,\frac{d\theta}{u\sin^2\theta}$$

$$= \log(u\sin\varphi)\log\left(\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{u} + 1\right) + \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{u} + 1\right)\operatorname{cotg}\theta\,d\theta,$$

d'où en posant encore $u \operatorname{tang}\theta = t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}$$

$$= \log 2 \log\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{1}{2}\log^2 2 - \int_1^{+\infty} \log\frac{t}{1+t}\,\frac{u^2\,dt}{t(t^2+u^2)}.$$

Ajoutons les résultats obtenus; nous trouvons, pour u positif,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos\theta + u\sin\theta)\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} &= \frac{\pi^2}{12} + \int_0^{+\infty} \log\frac{t}{1+t}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2} - \int_1^{+\infty} \log\frac{t}{1+t}\,\frac{dt}{t} \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t}\,dt + \int_0^{+\infty} \log\frac{t}{1+t}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{+\infty} \log\frac{t}{1+t}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2} \qquad (u > 0).\end{aligned}$$

Passons au cas où u est négatif; posons alors

$$u = -\operatorname{cotg}\varphi, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Nous écrivons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log|\cos\theta + u\sin\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\theta + \log|1 + u\operatorname{tang}\theta|}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)}\,d\theta.$$

En posant, dans le courant du calcul, $t = -u\operatorname{tang}\theta$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\theta}{\operatorname{cotg}\theta + u}\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta} \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}\theta \log\left|\frac{\operatorname{cotg}\theta}{u} + 1\right| d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \log\frac{t}{|1-t|}\,\frac{t\,dt}{t^2+u^2}.\end{aligned}$$

En intégrant de zéro à un arc γ compris entre φ et $\frac{\pi}{2}$, nous avons ensuite

$$\begin{aligned}&\int_0^{\gamma} \frac{\log|1 + u\operatorname{tang}\theta|\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta + u\sin\theta)} \\ &= \int_0^{\gamma} \log|1 + u\operatorname{tang}\theta| \left(\frac{1}{\operatorname{tang}\theta} - \frac{u}{1 + u\operatorname{tang}\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= -\frac{1}{2}\log^2|1 + u\operatorname{tang}\gamma| + \int_0^{\gamma} \frac{\log|1 + u\operatorname{tang}\theta|}{\operatorname{tang}\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= -\frac{1}{2}\log^2|1 + u\operatorname{tang}\gamma| + \int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\,dt + \int_{\varphi}^{\gamma} \frac{\log|1 + u\operatorname{tang}\theta|}{\operatorname{tang}\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta};\end{aligned}$$

dans la dernière intégrale, nous posons $\cot\theta = -ut$, d'où

$$\int_0^{\gamma} \frac{\log(-1-u\tan\theta)}{\tan\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{-\frac{\cot\gamma}{u}}^{1} \log\frac{1-t}{t}\,\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{1}{2}\log^2(-u\tan\gamma) - \int_{-\frac{\cot\gamma}{u}}^{1} \frac{\log(1-t)}{t}\,dt;$$

ainsi

$$\int_0^{\gamma} \frac{\log|1+u\tan\theta|\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta+u\sin\theta)}$$
$$= \frac{1}{2}\log^2(-u\tan\gamma) - \frac{1}{2}\log^2(-1-u\tan\gamma) - \frac{\pi^2}{3} - \int_0^{-\frac{\cot\gamma}{u}} \frac{\log(1-t)}{t}\,dt;$$

si γ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on parvient à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log|1+u\tan\theta|\,d\theta}{\sin\theta(\cos\theta+u\sin\theta)} = -\frac{\pi^2}{3} \qquad (u<0).$$

La formule (20) entraîne donc, en effectuant l'intégrale d'une fonction de u,

$$K = \frac{2^m\pi^{m-1}}{m\Gamma(m-1)}\left[\frac{\pi^2}{2(m-1)} + \int_0^{+\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}} \times \int_0^{+\infty} \log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \frac{t\,dt}{t^2+u^2}\,du\right]. \tag{23}$$

Dans le plan de la variable complexe $z = x+iy$, considérons la partie du demi-plan $y>0$ qui est intérieure à un cercle infiniment grand de centre O, et extérieure à deux cercles infiniment petits dont les centres sont 1 et -1. Dans cette région, la fonction

$$\log\frac{z+1}{z-1}\,\frac{z}{z^2+u^2}$$

est uniforme et n'a comme singularité que le pôle $z = iu$. Nous donnons au logarithme la valeur $-i\pi$ pour $z = 0$, de sorte que, sur la demi-circonférence infiniment grande, ce logarithme est infiniment petit. On constate alors que l'intégrale

$$\int \log\frac{z+1}{z-1}\,\frac{z\,dz}{z^2+u^2},$$

étendue à l'une quelconque des trois demi-circonférences, est infiniment petite. Étendue au contour total, dans le sens direct, elle vaut

$$\pi i\log\frac{iu+1}{iu-1}=\pi^2+\pi i\log\frac{1+iu}{1-iu}=\pi^2-2\pi\,\mathrm{arc\,tang}\,u.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{t\,dt}{t^2+u^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{t\,dt}{t^2+u^2}=\frac{\pi^2}{2}-\pi\,\mathrm{arc\,tang}\,u.$$

Ainsi, d'après la formule (23),

$$K=\frac{2^m\pi^m}{m\Gamma(m-1)}\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{arc\,tang}\,u\,du}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{arc\,tang}\,u\,du}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}=\frac{1}{m-1}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2(m-1)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

On a donc finalement

$$K=\frac{\pi^{m+1}}{m\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \tag{24}$$

$$\Phi(X)=\frac{\pi^{m+1}}{m\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}D\Omega^2\Sigma_{\alpha,\beta}\,a_{\alpha,\beta}\,c_\alpha c_\beta. \tag{25}$$

Ce résultat nous montre en particulier que Φ *est partout positif ou nul*, fait important pour la suite.

Bien que le calcul actuel suppose $m\geqq 2$, la comparaison avec le paragraphe 2 montre que *la formule* (25) *est encore valable pour* $m=1$.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS A INTÉGRALES PRINCIPALES.

1. **Équations qui vont être étudiées.** — Reprenons la variété close $\mathcal{V}$ à m dimensions (Chap. I, 6), et sur cette variété le tenseur Ω qui sert à définir la mesure $d\mathrm{V}$ d'un élément de $\mathcal{V}$, et le tenseur $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}$ qui sert à définir les domaines d'exclusion relativement aux intégrales formées à l'aide du noyau $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$ (Chap. I, 7); celui-ci est du type étudié au Chapitre précédent (II, 1); on suppose que la fonction $\mathrm{G}_2(\mathrm{X}, \Xi)$ satisfait aux hypothèses du Chapitre I (§ 3); toutefois les nombres désignés dans le Chapitre I par λ et par h, seront pris égaux, et leur valeur commune sera nommée h. On se donne une fonction $f(\mathrm{X})$, höldérienne sur $\mathcal{V}$. On se propose de trouver, pour chaque valeur du paramètre λ, une fonction $\rho(\mathrm{X})$ telle que l'on ait

$$(1) \qquad \rho(\mathrm{X}) - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = f(\mathrm{X}).$$

Puisque l'intégrale est une intégrale principale, la fonction ρ doit remplir d'autres conditions que la continuité : effectivement les solutions qu'on trouvera rempliront des conditions de Hölder. C'est seulement dans les cas de $m=1$ et de $m=2$ qu'on résoudra ici l'équation.

2. **Cas d'une intégrale simple.** — Si $m=1$, nous considérons donc l'équation

$$(2) \qquad \rho(x) - \lambda \int_{\mathcal{V}} \mathrm{G}(x, a)\rho(a)\Omega(a)\, da = f(x).$$

Nous appliquons le procédé bien connu de l'itération, qui donne la conséquence suivante de l'équation proposée (Chap. II, 2) :

$$(3) \qquad [1+\lambda^2\Phi(x)]\rho(x) - \lambda^2 \int_{\mathcal{V}} \rho(\xi)\Omega(\xi) \int_{\mathcal{V}} \mathrm{G}(x, a)\mathrm{G}(a, \xi)\Omega(a)\, da\, d\xi$$
$$= f(x) + \lambda \int_{\mathcal{V}} \mathrm{G}(x, a) f(a)\Omega(a)\, da.$$

Puisque $\Phi(x) = \pi^2\Omega^2(x)c^2(x)$, on voit que le coefficient de $\rho(x)$ ne s'annule nulle part si λ est réel (on voit l'importance du fait que Φ est positif ou nul). D'autre part (Chap. II, 2),

$$\int_{\mathcal{V}} G(x,a)G(a,\xi)\Omega(a)\,da = O(|x-\xi|^{h-1}) \qquad (h>0).$$

L'équation (3) est donc une équation ordinaire de Fredholm, et l'on sait la résoudre. Remarquons toutefois qu'il n'est pas démontré que toute solution de (3) [même dans le cas où (3) a une et une seule solution] soit solution de (2). Nous verrons plus loin (§ 6 à 8) comment on peut parvenir à résoudre et à discuter complètement l'équation (2).

3. **Cas des intégrales multiples.** — Si l'on essaye d'appliquer le même procédé pour $m \geqq 2$, on échoue, parce que le noyau itéré est encore un noyau à intégrale principale (II, 5), contenant effectivement une partie positivement homogène et d'ordre $-m$. On déduira même facilement du paragraphe suivant que, si $m=2$, l'itération poursuivie aussi loin qu'on veut ne permet jamais de faire disparaître la partie positivement homogène et d'ordre -2.

Mais soit $H(X, \Xi; \lambda)$ un nouveau noyau d'intégrale principale, du type décrit au Chapitre I (§ 7), et dépendant de λ; on suppose en outre que, dans sa composition avec $G(X, \Xi)$, l'hypothèse supplémentaire du paragraphe 11 (Chap. I) est satisfaite, de sorte qu'il existe une fonction Φ; nous noterons celle-ci $\Phi(X; \lambda)$, car elle dépend de λ. Nous avons alors

$$(4)\quad \begin{aligned}&[1+\lambda^2\Phi(X;\lambda)]\rho(X)\\ &\quad +\lambda\int_{\mathcal{V}}^{(m)}\left\{H(X,\Xi;\lambda)-G(X,\Xi)-\lambda\int_{\mathcal{V}}^{(m)}H(X,A;\lambda)G(A,\Xi)\,dV_A\right\}\\ &\quad\times\rho(\Xi)\,dV_\Xi = f(X)+\lambda\int_{\mathcal{V}}^{(m)}H(X,A;\lambda)f(A)\,dV_A.\end{aligned}$$

Laissant d'abord de côté le coefficient de $\rho(X)$, nous allons chercher le noyau $H(X, \Xi; \lambda)$ de façon que, k étant un certain nombre positif, on ait

$$(5)\qquad \begin{aligned}&H(X,\Xi;\lambda)-G(X,\Xi)-\lambda\int_{\mathcal{V}}^{(m)}H(X,A;\lambda)G(A,\Xi)\,dV_A\\ &\quad = O[L^{k-m}(X,\Xi)] \qquad (k>0);\end{aligned}$$

de cette façon la théorie classique de Fredholm permettra, pour chaque valeur de λ, de trouver la ou les solutions de l'équation (4), si celle-ci est soluble, en supposant toutefois que le coefficient de ρ ne s'annule nulle part sur $\mathcal{V}$.

D'après ce qu'on a vu (I, 11), si la condition (5) est remplie, elle l'est encore pour toute fonction H qui diffère de la première seulement de $O[L^{k-m}(X, \Xi)]\,(k > 0)$. Nous avons donc à nous occuper seulement de la partie positivement homogène et d'ordre $-m$. C'est ce qui sera fait bientôt pour $m = 2$.

Observons dès maintenant que la condition (5) suffit pour vérifier l'hypothèse formulée au paragraphe 11 du Chapitre I; par suite cette condition entraîne l'existence de la fonction Φ.

En posant dans (5)

$$x_\alpha = 2\xi_\alpha - y_\alpha, \qquad a_\alpha = 2\xi_\alpha - b_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

on voit que cette condition entraîne

$$(5\,bis) \qquad H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A \\ = O[L^{k-m}(X, \Xi)].$$

4. **Cas des intégrales doubles : recherche de H.** — Nous nous donnons un point X; dans le domaine $\mathcal{V}_n$ auquel il appartient, nous changeons linéairement de paramètres (II, 3), de façon que le point donné soit à l'origine et que la fonction G(X, A) se réduise pour lui à

$$-\Psi(X)\, a_1 L^{-3}(O, A) + O[L^{k-2}(O, A)],$$

avec

$$\Psi(X) = \sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha.\beta}\, c_\alpha c_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Soient $L(O, A) = r$, $a_1 = r\cos\theta$, $a_2 = r\sin\theta$; nous dirons que $-\Psi(X) r^{-2}\cos\theta$ est la *partie principale* de G(X, A) pour le point X qui coïncide avec O. Pour le même point, nous chercherons la partie principale de la fonction H(X, A; λ); soit $\omega(\theta) r^{-2}$ cette partie principale : la fonction ω est l'inconnue de cette recherche, et elle doit être continûment dérivable et satisfaire à la condition

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} \omega(\theta)\, d\theta = 0,$$

pour que H soit un noyau d'intégrale principale du type désiré. Nous allons donc considérer X comme fixé en O; nous posons $\lambda\Psi\Omega\sqrt{D} = \mu$; la fonction ω dépendra de μ.

D'après ce que nous savons (I, 12), la condition (5) s'écrit ([1]) :

$$\frac{\omega(\varphi)}{\rho^2} + \frac{\Psi\cos\varphi}{\rho^2} - \mu\int'' \frac{\omega(\theta)(a_1-\xi_1)}{r[(a_1-\xi_1)^2+(a_2-\xi_2)^2]^{\frac{3}{2}}}\,d(r,\theta) = O(\rho^{k-2}),$$

et l'intégrale est étendue à la région $r<1$; on pose

$$\xi_1^2+\xi_2^2=\rho^2\,(\rho>0),\qquad \xi_1=\rho\cos\varphi,\qquad \xi_2=\rho\sin\varphi;$$

cela donne

$$\omega(\varphi)+\Psi\cos\varphi - \mu\lim_{\rho\to 0}\rho^2\int'' \frac{\omega(\theta)(r\cos\theta-\rho\cos\varphi)}{r[r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}\,d(r,\theta)=0.$$

Dans l'intégrale qui figure ici, remplaçons θ par $\varphi+u$; on démontre alors comme plus haut (II, 4, 5) qu'on peut intégrer d'abord par rapport à r de zéro à *un*, à condition d'ajouter $\frac{\omega(\theta)\cos\varphi}{r\rho^2}$ à la fonction intégrée, puis par rapport à u; en posant $r=\rho t$, et en revenant à la variable θ au lieu de u, on obtient ainsi l'équation

$$(7)\quad \begin{aligned}\omega(\varphi)&-\mu\int_0^{2\pi}\omega(\theta)\int_0^1\left\{\frac{t\cos\theta-\cos\varphi}{[t^2-2t\cos(\theta-\varphi)+1]^{\frac{3}{2}}}+\cos\varphi\right\}\frac{dt}{t}\,d\theta\\ &-\mu\int_0^{2\pi}\omega(\theta)\int_1^{+\infty}\frac{t\cos\theta-\cos\varphi}{[t^2-2t\cos(\theta-\varphi)+1]^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dt}{t}\,d\theta=-\Psi\cos\varphi.\end{aligned}$$

Nous avons à calculer la fonction

$$\begin{aligned}f(\theta,\varphi)=&\int_0^1\left\{\frac{t\cos\theta-\cos\varphi}{[t^2-2t\cos(\theta-\varphi)+1]^{\frac{3}{2}}}+\cos\varphi\right\}\frac{dt}{t}\\ &+\int_1^{+\infty}\frac{t\cos\theta-\cos\varphi}{[t^2-2t\cos(\theta-\varphi)+1]^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dt}{t};\end{aligned}$$

([1]) Les deux accents à la suite du signe $\int$ signifient que l'intégrale est double.

il est inutile de donner les détails de ce calcul, dont le résultat est

$$f(\theta, \varphi) = \cos\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin\varphi \operatorname{cotg} \frac{\theta - \varphi}{2} + \cos\varphi.$$

En tenant compte de la condition (6), nous parvenons à l'équation

$$(8) \quad \omega(\varphi) - \mu \int_0^{2\pi} \omega(\theta) \left(\cos\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin\varphi \operatorname{cotg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right) d\theta = -\Psi \cos\varphi.$$

C'est une équation à intégrale principale. Nous allons en obtenir explicitement la solution, qui existe et est unique pour toute valeur réelle de μ.

D'abord *toute solution de cette équation remplit la condition* (6). En effet

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta) \left(\cos\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin\varphi \operatorname{cotg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right) d\theta \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \omega(\theta) \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin\varphi \operatorname{cotg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right) d\varphi \, d\theta,$$

car la légitimité de ce changement dans l'ordre des intégrations a été démontrée (I, 9). Mais la fonction intégrée par rapport à φ, au second membre, est la dérivée de $\sin\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}$; le résultat est donc nul. Alors il suffit de multiplier les deux membres de (8) par $d\varphi$ et d'intégrer de o à 2π, pour obtenir la relation (6).

Considérons maintenant la fonction

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[\rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi) + 1]\,\omega(\theta)\, d\theta,$$

qui est harmonique par rapport à $\xi_1 = \rho\cos\varphi$ et à $\xi_2 = \rho\sin\varphi$ dans le cercle de centre O et de rayon *un*. Sur la circonférence, en tenant compte de la relation (6), on a

$$u(1, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}\, \omega(\theta)\, d\theta;$$

d'ailleurs u est nul pour $\rho = 0$. De plus

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) = \omega(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta)\, d\theta = \omega(\varphi).$$

L'équation (8) équivaut donc (*voir* le chapitre suivant, § 3) à

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(1, \varphi) + 2\pi\mu \frac{\partial}{\partial \varphi}[\sin\varphi\, u(1, \varphi)] = -\Psi \cos\varphi. \tag{9}$$

Nous allons chercher la fonction u, qui peut s'écrire

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

où les a_n et les b_n sont des constantes, car cette fonction est harmonique et nulle à l'origine. Supposons que cette série puisse être dérivée terme à terme même pour $\rho = 1$. On a

$$\begin{aligned} 2\sin\varphi[a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)] = {} & a_n \sin[(n+1)\varphi] - a_n \sin[(n-1)\varphi] \\ & - b_n \cos[(n+1)\varphi] + b_n \cos[(n-1)\varphi]. \end{aligned}$$

L'équation (9) se traduit donc par

$$a_1 - \pi\mu a_2 = -\Psi, \qquad b_1 - \pi\mu b_2 = 0,$$
$$\left.\begin{aligned} a_n + \pi\mu(a_{n-1} - a_{n+1}) = 0 \\ b_n + \pi\mu(b_{n-1} - b_{n+1}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (n > 1).$$

Or la relation de récurrence

$$v_n + \pi\mu(v_{n-1} - v_{n+1}) = 0$$

a comme solution générale

$$v_n = a g^n + b l^n,$$

où a et b sont des constantes arbitraires, et où

$$g = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\pi^2\mu^2}}{2\pi\mu}, \qquad l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\pi^2\mu^2}}{2\pi\mu}. \tag{10}$$

Ici la constante b est nulle pour les a_n comme pour les b_n, à cause de la convergence de la série $\Sigma_n(a_n^2 + b_n^2)$. On en déduit que tous les b_n sont nuls. Nous avons nécessairement ensuite $a_2 = g a_1$, d'où

$$a_1(1 - \pi\mu g) = -\Psi;$$

en tenant compte de l'équation $g(1 - \pi\mu g) = -\pi\mu$, on voit que

$$a_1 = \frac{g\Psi}{\pi\mu} = \frac{g}{\pi\lambda\Omega\sqrt{D}}, \qquad a_n = \frac{g^n}{\pi\lambda\Omega\sqrt{D}}.$$

Donc

$$\pi\lambda\Omega\sqrt{\mathrm{D}}\,u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{+\infty}(g\rho)^n\cos(n\varphi)=-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-g\rho e^{i\varphi}}+\frac{1}{1-g\rho e^{-i\varphi}}\right)$$
$$=-1+\frac{1-g\rho\cos\varphi}{1-2g\rho\cos\varphi+g^2\rho^2}.$$

La dérivée relative à ρ, pour $\rho=1$, nous donne enfin la solution cherchée

$$(11)\qquad \omega(\varphi)=\frac{g}{\pi\lambda\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}\,\frac{(1+g^2)\cos\varphi-2g}{(2g\cos\varphi-1-g^2)^2},$$

la grandeur g étant donnée par (10); quand μ est réel, $|g|$ est toujours inférieur à *un*, sans égalité possible. Relativement à μ, on voit que ω est une fonction holomorphe pour toute valeur réelle de μ; il en est donc de même par rapport à λ. Si λ tend vers zéro, ω tend vers $-\Psi\cos\varphi$.

Si le paramètre λ prend des valeurs complexes, la fonction ω est holomorphe par rapport à λ tant que g est holomorphe et qu'en outre $1+g^2-2g\cos\varphi$ ne s'annule pour aucun angle réel φ. L'équation (8) continue d'être vérifiée tant qu'on peut ainsi poursuivre le prolongement analytique, et par suite la condition (5) est remplie. Or g est holomorphe sauf pour $\lambda=\dfrac{\pm i}{2\pi\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}$. Si $1+g^2-2g\cos\varphi$ s'annule pour une valeur réelle de φ, on a $g=e^{\pm i\varphi}$; il suffit de prendre la valeur $e^{i\varphi}$, pour laquelle on a $l=e^{i(\pi-\varphi)}$, d'où $g+l=2i\sin\varphi$, d'où enfin $\lambda=\dfrac{-i}{2\pi\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}\sin\varphi}$. Soit M le minimum de $\dfrac{1}{2\pi\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}$; traçons sur l'axe purement imaginaire deux coupures allant des points $\pm i\mathrm{M}$ jusqu'à l'infini : *la fonction ω est holomorphe dans la région plane qui reste quand on exclut ces coupures.*

En revenant aux paramètres qui étaient attachés à la région $\mathcal{V}_n$ dans la définition de $\mathcal{V}$, $\rho^{-2}\omega(\varphi)$ devient un noyau d'intégrale principale du type défini au Chapitre I (§ 7); c'est en même temps une fonction holomorphe de λ quand λ est dans la région ci-dessus indiquée, pourvu que les deux points variables ne coïncident pas. Mais, dans les régions communes à au moins deux régions $\mathcal{V}_n$, les fonctions trouvées ne coïncident qu'à une fonction $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X},\Xi)$ près; il s'agit maintenant de définir la fonction $H(X, \Xi; \lambda)$ quand X et Ξ varient sur $\mathcal{V}$, λ restant réel ou situé dans la région indiquée.

On y arrive facilement de la façon suivante. Ayant attaché à chaque région $\mathcal{V}_n$ une et une seule représentation paramétrique qui convient pour tous les points de cette région, nous remarquons que tout ensemble fermé intérieur à l'image $\mathcal{R}_n$ de $\mathcal{V}_n$ (Chap. I, 6) peut être recouvert par un nombre fini de cercles; par suite, en modifiant les régions $\mathcal{V}_n$, nous ferons en sorte que l'image $\mathcal{R}_n$ de chacune d'elles soit un cercle. Soit δ une longueur telle que le cercle de rayon 2δ, qui a pour centre l'une au moins des images de tout point X, soit entièrement intérieur à la région $\mathcal{R}_n$ correspondante. A chaque point de $\mathcal{V}_n$ nous attribuons un *poids* : par définition ce poids est *un* quand la distance l de l'image de X à la frontière est supérieure ou égale à 2δ; si l'on a $\delta \leqq l < 2\delta$, le poids est $\frac{l}{\delta} - 1$; enfin, pour $l < \delta$, le poids est nul (on pourrait aussi s'arranger pour que les dérivées du poids, jusqu'à un certain ordre, existent et soient continues). Revenons à la partie principale de $H(X, \Xi; \lambda)$, donnée dans $\mathcal{V}_n$ par le calcul précédent; nous la multiplions d'abord par $1 - \delta^{-2} L^2(X, \Xi)$ tant que $L(X, \Xi)$ est inférieur à δ, et nous la remplaçons par zéro dès que $L(X, \Xi) \geqq \delta$ ou que Ξ sort de $\mathcal{V}_n$; nous avons ainsi défini dans $\mathcal{V}_n$ une fonction qui satisfait aux hypothèses du Chapitre I (§ 7), et qui a la partie principale déjà formée. Pour les points X d'une région commune à au moins deux $\mathcal{V}_n$, nous remplaçons les diverses fonctions qui correspondent à un même point X, par une combinaison linéaire dont les coefficients, fonctions de X seul, sont proportionnels aux poids qu'a ce point dans les différents $\mathcal{V}_n$, et la somme de ces coefficients est égale à *un : notre fonction* $H(X, \Xi; \lambda)$ *est ainsi définie pour tous les systèmes de points* X *et* Ξ *distincts sur* $\mathcal{V}$; *elle possède toutes les propriétés désirées et, relativement à* λ, *c'est une fonction holomorphe tant que* λ *est réel ou situé dans la région complexe indiquée.*

5. **Intégrales doubles : calcul de la fonction** $\Phi(X; \lambda)$. — Le point X étant fixé, nous changeons de paramètres de façon que la partie principale de $G(X, \Xi)$ soit $-\Psi\rho^{-2}\cos\varphi$, et que celle de $H(X, \Xi; \lambda)$ soi $\rho^{-2}\omega(\varphi)$, où ω est donné par (11). Alors (I, 12) la fonction $\Phi(X; \lambda)$

a pour valeur

$$\Phi(X;\lambda) = \Psi\Omega^2 D \lim_{\sigma\to 0} \int_0^R \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi)$$
$$\times \int_0^\sigma \left[\frac{r\cos(\theta+\varphi) - \rho\cos\varphi}{(r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2} \right] \frac{dr}{r}\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

Nous allons transformer l'expression

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi) \int_0^\sigma \left[\frac{r\cos(\theta+\varphi) - \rho\cos\varphi}{(r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2} \right] \frac{dr}{r}\, d\theta\, d\varphi.$$

On remarquera que l'intégrale

$$\int_{\rho-\delta}^{\rho+\delta} (r-\rho) \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} \frac{d\theta}{[(r-\rho)^2 + \rho^2\theta^2]^{\frac{3}{2}}}\, dr,$$

dans laquelle $\rho\theta(r) = \sqrt{\delta^2 - (r-\rho)^2}$ tend vers zéro avec δ : en effet le résultat de la première intégration est une fonction paire de $r-\rho$. De même l'intégrale

$$\int_{\rho-\delta}^{\rho+\delta} \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} \frac{\theta\, d\theta}{[(r-\rho)^2 + \rho^2\theta^2]^{\frac{3}{2}}}\, dr$$

tend vers zéro avec δ, car cette fois le résultat de la première intégration est nul. D'après un raisonnement déjà employé (II, 4), on peut donc permuter les intégrations relatives à r et à θ, ce qui transforme notre expression en

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\sigma \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi) \frac{r\cos(\theta+\varphi) - \rho\cos\varphi}{(r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta\, dr\, d\varphi,$$

car le terme $\rho^{-2}\cos\varphi$ donne un résultat nul après la première intégration. Montrons qu'on peut maintenant permuter les intégrations relatives à r et à φ : il suffit de raisonner comme ci-dessus, en isolant la partie principale $\frac{f(\varphi)}{r-\rho}$ de la fonction de r qui résulte de la première intégration; il n'est pas nécessaire de connaître $f(\varphi)$ pour voir que, en intégrant de 0 à 2π relativement à φ, et dans un intervalle de centre ρ relativement à r, ce terme donne zéro quel que soit l'ordre des intégrations. Donc notre expression est

$$\int_0^\sigma \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi)\frac{r\cos(\theta+\varphi)-\rho\cos\varphi}{(r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Enfin nous pouvons permuter les intégrations relatives à θ et à φ, car la fonction intégrée est continue (sauf pour $r=\rho$, mais cette discontinuité est évidemment sans influence ici). Mais

$$\int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi)\frac{r\cos(\theta+\varphi)-\rho\cos\varphi}{(r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi$$

se calcule tout de suite; en effet,

$$\int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi)\cos(\theta+\varphi)\,d\varphi=\frac{g}{\lambda\Omega\sqrt{\mathrm{D}}},\qquad \int_0^{2\pi} \omega(\theta+\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\frac{g\cos\theta}{\lambda\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}.$$

Donc

$$\Phi(\mathrm{X};\,\lambda)=\frac{g\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}{\lambda}\lim_{\sigma\to 0}\int_0^{\mathrm{R}}\rho\int_0^\sigma\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{r-\rho\cos\theta}{(r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta\,dr\,d\rho.$$

Mais les mêmes raisonnements qu'il y a un instant permettent d'écrire

$$\Phi(\mathrm{X};\lambda)=\frac{g\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}{\lambda}\lim_{\sigma\to 0}\int_0^{\mathrm{R}}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^\sigma\left[\frac{r-\rho\cos\theta}{(r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\cos\theta}{\rho^2}\right]\frac{dr}{r}\,d\theta\,d\rho.$$

En comparant à la première expression de la constante K (Chap. II, 6) qui, pour $m=2$, vaut $2\pi^2$, on voit que

$$\Phi(\mathrm{X};\,\lambda)=-\frac{2\pi g\Psi\Omega\sqrt{\mathrm{D}}}{\lambda}=\frac{\sqrt{1+4\pi^2\mu^2}-1}{\lambda^2}, \tag{12}$$

fonction toujours positive pour λ réel. On a donc

$$1+\lambda^2\Phi(\mathrm{X};\,\lambda)=\sqrt{1+4\pi^2\lambda^2\Omega^2\mathrm{D}\Sigma_{\alpha,\beta}\,a_{\alpha,\beta}c_\alpha c_\beta}, \tag{13}$$

et *cette fonction est holomorphe et différente de zéro dans la région complexe déjà indiquée, qui comprend tout l'axe réel. La théorie classique de Fredholm s'applique donc à l'équation* (4).

6. **Intégrales simples et doubles : noyau résolvant.** — Cette équa-

tion (4) concerne aussi le cas où $m = 1$: dans ce cas la fonction H peut être prise identique à G, indépendante de λ par conséquent, et la fonction Φ est pareillement indépendante de λ. Le noyau

$$\frac{G(X;\Xi) - H(X,\Xi;\lambda) + \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X,A;\lambda)\, G(A,\Xi)\, dV_A}{1 + \lambda^2 \Phi(X;\lambda)} \qquad (m = 1 \text{ ou } 2)$$

de cette équation (4) satisfait aux hypothèses du Chapitre I (§ 3), et comme le second membre de l'équation remplit une condition de Hölder, il en est de même de ρ [puisque l'intégrale en remplit une aussi (I, 2)]; donc cette fonction ρ, si elle existe, peut être substituée dans l'équation (1). Mais, si cette équation ne peut avoir de solution autre que la ou les fonctions ρ données par (4), nous ne pouvons affirmer qu'elle admet toutes ces solutions. L'étude qui suit nous montrera que les trois théorèmes classiques de Fredholm s'appliquent cependant à l'équation (1) dans les cas où m est égal à *un* ou à *deux*.

Appliquer la méthode de Fredholm à l'équation (4), cela consiste d'abord à l'itérer un nombre de fois suffisant pour que son noyau devienne continu, puis à former deux séries, absolument et uniformément convergentes tant que λ reste réel et borné, et dont l'une, la *fonction déterminante* de Fredholm, ne dépend que de λ; l'autre dépend en outre de X et de Ξ. La convergence uniforme et absolue a lieu aussi dans tout ensemble complexe fermé et borné de valeurs de λ où les termes sont fonctions holomorphes de λ : ceci a lieu dans le domaine obtenu en retranchant du plan complexe deux coupures symétriques par rapport à O et tracées sur l'axe purement imaginaire; si $m = 1$, et si c ne s'annule nulle part sur $\mathcal{V}$, ces coupures sont bornées : en désignant par M et par M′ le minimum et le maximum de $\frac{1}{|\pi\Omega c|}$, l'une d'elles va du point iM au point iM′; si, m étant égal à *un*, c s'annule en au moins un point de $\mathcal{V}$, l'une des coupures va de iM à $+\infty i$; si $m = 2$, les coupures fournies par nos raisonnements (§ 4) vont toujours jusqu'à l'infini. Par conséquent, quoique nos séries de Fredholm ne soient pas immédiatement ordonnées suivant les puissances croissantes de λ, *elles représentent des fonctions holomorphes dans ce* *domaine complexe, holomorphes en particulier pour toute valeur réelle de* λ (*voir* une note du paragraphe 8 ci-après).

Puisque, dans l'équation (4), l'intégrale, dont le noyau est une fonction holomorphe de λ, est précédée du facteur λ, il est évident que la *fonction déterminante* de Fredholm (relative à un noyau itéré) est aussi voisine qu'on veut de *un* pourvu que la valeur absolue de λ soit assez petite. Donc, dans toute la région où cette fonction est holomorphe, et en particulier sur l'axe réel, elle ne s'annule qu'en des points isolés.

Pour toute valeur de λ n'annulant pas cette fonction déterminante, on peut faire de celle-ci le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est l'autre série dont il a été parlé, et l'on résout alors, conformément à la découverte de Fredholm, l'équation (4). Cette solution se présente visiblement sous la forme

$$(14) \qquad \rho(X) = \frac{f(X)}{1+\lambda^2\Phi(X;\lambda)} + \lambda\int_{\mathfrak{S}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A,$$

en désignant par $N_1(X, \Xi; \lambda)$ un certain *noyau d'intégrale principale*, qui jouit des propriétés suivantes :

1° Toutes les fois que X est distinct de Ξ, c'est une fonction méromorphe de λ dans le domaine déjà indiqué, qui contient l'axe réel, et ses pôles sont indépendants de X et de Ξ.

2° On a

$$(15) \qquad N_1(X, \Xi; \lambda) = \frac{H(X, \Xi; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(X;\lambda)} + O[L^{h-m}(X, \Xi)],$$

et le terme $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ qui termine cette expression satisfait aux hypothèses du Chapitre I (§ 3).

Quand λ que, sans toujours le répéter, nous supposerons réel ou intérieur au domaine où N_1 est méromorphe, n'annule pas la fonction déterminante, il est certain que l'équation donnée (1) n'a pas d'autre solution que la fonction exprimée par la formule (14), mais nous ne savons pas encore si cette fonction est solution. Nous démontrerons qu'il en est bien ainsi, et que $\rho(X)$ est encore l'unique solution toutes les fois que λ n'est pas un pôle de N_1 (il se peut que certains zéros de la fonction déterminante ne soient pas des pôles de N_1); ce sera l'extension du premier théorème de Fredholm.

D'après la façon dont N_1 a été formé, si nous remplaçons f par le premier membre de (1) dans le second membre de (14), en laissant ρ indéterminé, nous trouvons ρ comme résultat, c'est-à-dire que

$$(16)\quad N_1(X, \Xi; \lambda) - \frac{G(X, \Xi)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda)\, G(A, \Xi)\, dV_A = 0,$$

et ce résultat, qui a lieu toutes les fois que λ n'annule pas notre fonction déterminante, a lieu par suite aussi toutes les fois que λ n'est pas un pôle de N_1 : cela nous prouve que, quand λ n'est pas un pôle de N_1, (1) n'a pas d'autre solution que (14).

Il s'agit de voir maintenant que (14) est une solution. Changeons d'inconnue dans (1) en posant

$$(17)\qquad \rho(X) = \sigma(X) + \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\sigma(A)\, dV_A;$$

nous parvenons à l'équation intégrale (Chap. I, 13)

$$(18)\quad [1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)]\sigma(X) + \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \sigma(\Xi)\Big[H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A\Big]\, dV_\Xi = f(X),$$

dont le noyau est encore $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ d'après le raisonnement qui donne la relation (5 *bis*). La méthode de Fredholm peut être appliquée à l'équation (18) et, en portant dans (17) la valeur de $\sigma(X)$, on trouve

$$(19)\qquad \rho(X) = \frac{f(X)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} + \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N_2(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A,$$

formule valable toutes les fois que λ n'annule pas une certaine fonction déterminante qui est fonction holomorphe de λ dans le domaine déjà indiqué. La fonction N_2 est du type

$$N_2(X, \Xi; \lambda) = \frac{H(X, \Xi; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(\Xi; \lambda)} + O[L^{h-m}(X, \Xi)].$$

ce qui revient à dire qu'elle est aussi de la forme indiquée pour N_1, formule (15), car

$$H(X, \Xi; \lambda)\left[\frac{1}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} - \frac{1}{1+\lambda^2\Phi(\Xi; \lambda)}\right] = O[L^{h-m}(X, \Xi)],$$

et l'hypothèse du Chapitre I (§ 3) se vérifie pour cette différence; le terme complémentaire $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ de la formule (15) satisfait à cette même hypothèse aussi bien pour N_2 que pour N_1. D'autre part N_2 est, comme N_1, une fonction méromorphe de λ dans le domaine déjà indiqué, et ses pôles ne dépendent ni de X ni de Ξ. D'après la façon dont N_2 a été formé, la fonction ρ donnée par (19) est certainement solution de (1) quand λ n'annule pas la nouvelle fonction déterminante, c'est-à-dire qu'on a

$$(20)\quad N_2(X, \Xi; \lambda) - \frac{G(X, \Xi)}{1+\lambda^2\Phi(\Xi; \lambda)} - \lambda\int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, N_2(A, \Xi; \lambda)\, dV_A = 0,$$

et cette identité subsiste toutes les fois que λ n'est pas un pôle de N_2.

Sauf pour des valeurs isolées de λ, l'équation (1) a donc la solution (19); mais, sauf pour des valeurs isolées de λ, elle a au plus une solution, donnée par la formule (14) si elle existe effectivement : donc, sauf pour des valeurs isolées de λ, l'équation (1) a une et une seule solution, donnée à la fois par les formules (14) et (19), qui sont donc identiques. Comme la fonction hölderienne f est arbitraire, on a identiquement, par rapport à X et à Ξ,

$$(21)\qquad N_1(X, \Xi; \lambda) = N_2(X, \Xi; \lambda),$$

sauf peut-être pour des valeurs isolées de λ; comme les deux membres sont des fonctions méromorphes de λ, celles-ci ont les mêmes pôles et l'identité a lieu toutes les fois que λ n'est pas un de ces pôles.

Ainsi nous avons appris à former un *noyau résolvant* $N(X, \Xi; \lambda)$, identique à N_1 et à N_2; *toutes les fois que λ n'est pas un pôle de ce noyau résolvant, l'équation* (1) *a une solution et une seule, et celle-ci est donnée par la formule* (14); c'est l'extension du *premier théorème de Fredholm*.

D'après les identités (16) et (20), le noyau résolvant relatif au noyau $G(\Xi, X)$, c'est-à-dire à l'équation *associée* à l'équation (1), est $N(\Xi, X; \lambda)$; *les pôles sont donc les mêmes que pour l'équation* (1), comme pour les équations de Fredholm.

On remarquera que le noyau résolvant n'est pas modifié si l'on ajoute à H un noyau quelconque, soumis aux hypothèses du Chapitre I (§ 3).

7. **Équation fonctionnelle du noyau résolvant.** — Les identités (16) et (20), satisfaites par N, vont être remplacées par une identité unique.

Dans l'identité (16), remplaçons Ξ par un point B, puis multiplions les deux membres par $\mu N(B, \Xi; \mu)\, dV_B$ et intégrons sur $\mathcal{V}$:

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad & \mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, N(A, \Xi; \mu)\, dV_A \\
& - \frac{\mu}{1+\lambda^2 \Phi(X; \lambda)} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, N(A, \Xi; \mu)\, dV_A \\
& - \lambda\mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(B, \Xi; \mu) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, G(A, B)\, dV_A\, dV_B = 0.
\end{aligned}
$$

Dans l'identité (20), remplaçons X par un point A et λ par μ, puis multiplions les deux membres par $\lambda N(X, A; \lambda)\, dV_A$ et intégrons sur $\mathcal{V}$:

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, N(A, \Xi; \mu)\, dV_A \\
& - \frac{\lambda}{1+\mu^2 \Phi(\Xi; \mu)} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, G(A, \Xi)\, dV_A \\
& - \lambda\mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(A, B)\, N(B, \Xi; \mu)\, dV_B\, dV_A = 0.
\end{aligned}
$$

Évaluons maintenant la différence

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(A, B)\, N(B, \Xi; \mu)\, dV_B\, dV_A \\
& - \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(B, \Xi; \mu) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, G(A, B)\, dV_A\, dV_B,
\end{aligned}
$$

ce qui est une question de changement dans l'ordre des intégrations. Bien entendu l'on suppose X différent de Ξ; pour des positions données de ces points, soit $\mathcal{V}_X$ une région de $\mathcal{V}$ telle que X soit intérieur à $\mathcal{V}_X$ et Ξ intérieur à $\mathcal{V} - \mathcal{V}_X = \mathcal{V}_\Xi$. Si l'on intègre dans $\mathcal{V}_\Xi$ relativement à A, et dans $\mathcal{V}_X$ relativement à B, la partie correspondante de notre différence est nulle, car $N(X, A; \lambda)$ et $N(B, \Xi; \mu)$ sont continus. Si l'on intègre dans $\mathcal{V}_X$ relativement à A, et dans $\mathcal{V}_\Xi$ relativement à B, la différence est encore nulle, car $G(A, B)$ est continu (sauf si les deux points viennent coïncider à la frontière commune de $\mathcal{V}_X$ et de $\mathcal{V}_\Xi$, mais celle-ci ne contient ni X ni Ξ, et il est visible que la partie de la différence qui s'obtient en faisant varier A et B dans une même région contenant cette frontière, et ne contenant, à son intérieur ou sur sa frontière, ni X ni Ξ, est nulle). Si A et B varient tous deux dans $\mathcal{V}_X$, $N(B, \Xi; \mu)$ est une fonction continue, et l'on trouve (I, 11)

$$-\frac{\Phi(X; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} N(X, \Xi; \mu);$$

de même, si A et B varient dans $\mathcal{V}_\Xi$, on trouve

$$\frac{\Phi(\Xi; \mu)}{1+\mu^2\Phi(\Xi; \mu)} N(X, \Xi; \lambda).$$

Retranchons alors membre à membre les identités (22) et (23), en tenant compte de (16) et de (20); il vient

$$(24)\quad (\lambda-\mu)\int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, N(A, \Xi; \mu)\, dV_A + \frac{1+\lambda\mu\Phi(X; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} N(X, \Xi; \mu) - \frac{1+\lambda\mu\Phi(\Xi; \mu)}{1+\mu^2\Phi(\Xi; \mu)} N(X, \Xi; \lambda) = 0.$$

C'est l'identité annoncée; en y faisant $\mu = 0$, on retrouve l'identité (16), et (20) s'obtient, à la notation près, en annulant λ : d'après (16), $G(X, \Xi)$ est en effet identique à $N(X, \Xi; 0)$.

8. **Pôles du noyau résolvant.** — Soit λ_0 un pôle de $N(X, \Xi; \lambda)$; on suppose que ce pôle n'est pas situé sur une des coupures déjà définies. Pour λ assez voisin de λ_0, nous posons

$$(25)\qquad N(X, \Xi; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(X, \Xi)(\lambda-\lambda_0)^{-\alpha} + \sum_{\beta=0}^{+\infty} A_\beta(X, \Xi)(\lambda-\lambda_0)^{\beta};$$

p est essentiellement supposé positif, et B_p n'est pas identiquement nul. Tout comme dans le cas classique où G vaut $O(L^{h-m})$, les B_α sont des fonctions continues de X et de Ξ : en effet, dans l'équation à noyau continu qu'on déduit de (4) par un nombre suffisant d'itérations, la fonction f figure au second membre sous une intégrale principale dont le noyau est fonction *holomorphe* de λ pour toute valeur qui n'appartient pas à nos coupures, et la résolution de cette équation conduit à faire entrer ce second membre sous une intégrale dont le noyau est fonction *méromorphe* de λ dans le même domaine, mais ce noyau est continu par rapport à X et à Ξ quand λ n'est pas un pôle.

En portant le développement (25) dans les identités (16) et (20), et en identifiant les coefficients de $(\lambda - \lambda_0)^{-p}$ dans les deux membres, on trouve [1]

$$(26)\quad B_p(X, \Xi) = \lambda_0 \int_{\mathcal{V}}^{(m)} B_p(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A = \lambda_0 \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\, B_p(A, \Xi)\, dV_A.$$

Donc l'équation homogène qui correspond à (1), et l'équation homogène associée ont chacune au moins une solution non nulle pour $\lambda = \lambda_0$. Mais ces solutions appartiennent en même temps à des équations homogènes ordinaires de Fredholm [par exemple l'équation (4) avec $f = 0$, s'il s'agit de l'équation correspondant à (1)]; donc ces équations homogènes n'ont qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, et par suite B_p est la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est le produit d'une fonction de X par une fonction de Ξ.

L'identité (24) peut s'écrire

$$(27)\quad \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, N(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \frac{N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} + \frac{\mu \Phi(\Xi; \mu)}{1 + \mu^2 \Phi(\Xi; \mu)} N(X, \Xi; \lambda) + \frac{\lambda \Phi(X; \lambda)}{1 + \lambda^2 \Phi(X; \lambda)} N(X, \Xi; \mu).$$

Posons $\lambda - \lambda_0 = u$, $\mu - \lambda_0 = v$ et

$$\gamma(X, \Xi; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(X, \Xi)\, (\lambda - \lambda_0)^{-\alpha}.$$

---

[1] On peut intégrer terme à terme. En effet, si X est intérieur à $\mathcal{V}_1$ (Chap. I, 6), on peut intégrer terme à terme dans la région $\eta^2 < \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \zeta^2$ $(0 < \eta < \zeta)$; on voit ainsi que le coefficient de chaque puissance de $\lambda - \lambda_0$ engendre une intégrale principale, car l'intégrale de sa partie positivement homogène d'ordre $-m$ est nulle dans cette région; cette nullité rend facile le passage à la limite.

Il suffit d'examiner un instant notre identité (27) pour reconnaître que, dans les deux membres, les termes où les exposants de u et de v sont tous deux négatifs, sont les mêmes que si tous les A_3 étaient nuls. L'identification de ces termes se résume en écrivant

$$(28)\quad (\lambda-\mu)\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \gamma(X, A; \lambda)\gamma(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \gamma(X, \Xi; \lambda) - \gamma(X, \Xi; \mu);$$

c'est exactement la même identité que dans le cas où $G = O(L^{h-m})$, et l'on en tire les mêmes conséquences, puisque γ est fonction continue de X et de Ξ ([1]).

Posons maintenant

$$H_1(X, \Xi; \lambda) = N(X, \Xi; \lambda) - \gamma(X, \Xi; \lambda).$$

Si l'on remplace N, dans l'identité (27), par le développement (25), les termes des deux membres où les exposants de u et de v sont tous deux positifs ou nuls fournissent l'identité

$$(29)\quad \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} H_1(X, A; \lambda)\, H_1(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \frac{H_1(X, \Xi; \lambda) - H_1(X, \Xi; \mu)}{\lambda-\mu} + \frac{\mu\Phi(\Xi; \mu)}{1+\mu^2\Phi(\Xi; \mu)} H_1(X, \Xi; \lambda) + \frac{\lambda\Phi(X; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} H_1(X, \Xi; \mu);$$

cela prouve que $H_1(X, \Xi; \lambda)$ est le noyau résolvant de $H_1(X, \Xi; 0)$, fonction qui diffère de G seulement par une fonction continue de X et de Ξ.

Les termes des deux membres de (27) où l'exposant de u est positif ou nul, et celui de v, négatif, conduisent à l'identité

$$\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} H_1(X, A; \lambda)\gamma(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \frac{\lambda\Phi(X; \lambda)}{1+\lambda^2\Phi(X; \lambda)} \gamma(X, \Xi; \mu),$$

et enfin les termes restants donnent

$$\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \gamma(X, A; \lambda)\, H_1(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \frac{\mu\Phi(\Xi; \mu)}{1+\mu^2\Phi(\Xi; \mu)} \gamma(X, \Xi; \lambda).$$

([1]) *Voir* Édouard Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, 2e édition, Chap. XXXI, section II, p. 391 à 435; s'y reporter aussi pour la suite de l'étude entreprise ici.

Faisons $\mu = 0$ dans cette dernière identité et $\lambda = 0$ dans la précédente; il vient

$$(30)\quad \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\gamma(\mathrm{A}, \Xi; \lambda)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} = \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \gamma(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \lambda)\, \mathrm{H}_1(\mathrm{A}, \Xi; 0)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} = 0;$$

le noyau $\gamma(\mathrm{X}, \Xi; \lambda)$ est donc *orthogonal* à $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \Xi; 0)$.

Nous avons ainsi tous les éléments qui permettent de démontrer le second et le troisième théorème de Fredholm dans le cas des noyaux $\mathrm{O}(\mathrm{L}^{h-m})$; les mêmes raisonnements réussissent encore ici et nous permettent d'énoncer les mêmes théorèmes relativement à l'équation (1), si *m* est égal à *un* ou à *deux :*

Si λ est un pôle λ_0 du noyau résolvant, l'équation homogène correspondant à (1) *a un nombre fini positif de solutions linéairement indépendantes; l'équation homogène associée a le même nombre de solutions linéairement indépendantes que la précédente.*

Pour que l'équation (1) *soit soluble quand λ est un pôle du noyau résolvant, il faut et il suffit que f soit orthogonal à toutes les solutions de l'équation homogène associée.*

La solution s'obtient dans ce dernier cas en résolvant l'équation à intégrale principale

$$\rho_1(\mathrm{X}) - \lambda_0 \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\rho_1(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} = f(\mathrm{X}),$$

dont le noyau résolvant $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \lambda)$ est holomorphe pour $\lambda = \lambda_0$, puis l'équation intégrale ordinaire

$$\rho_2(\mathrm{X}) - \lambda_0 \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} \gamma(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\rho_2(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} = f(\mathrm{X}),$$

dont le noyau est continu, et dont les conditions énoncées dans le théorème assurent la solubilité; on a alors $\rho = \rho_1 + \rho_2 - f$, et il faut remarquer que ρ_2 est défini à une solution près de l'équation homogène.

9. **Équations de première espèce avec intégrale simple principale. —**

Reprenons le noyau $G(x, \xi)$ du paragraphe 2,

$$G(x, \xi) = \frac{c(x)}{x-\xi} + O(|x-\xi|^{h-1}),$$

et supposons que le tenseur contravariant $c(x)$ ne s'annule nulle part. Alors l'équation de première espèce

$$(31) \qquad \int_{\mathcal{V}} G(x, a)\rho(a)\Omega(a)\,da = f(x),$$

où f est une fonction hölderienne donnée, et où ρ est l'inconnue, entraîne l'équation

$$(32) \qquad \begin{aligned} -\Phi(x)\rho(x) + \int_{\mathcal{V}} \rho(\xi)\Omega(\xi)\int_{\mathcal{V}} G(x, a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da\,d\xi \\ = \int_{\mathcal{V}} G(x, a)f(a)\Omega(a)\,da; \end{aligned}$$

c'est une équation de Fredholm, car la fonction

$$\Phi(x) = \pi^2\Omega^2(x)c^2(x)$$

ne s'annule nulle part, et son minimum est par suite positif. Une autre équation de Fredholm peut s'obtenir en posant

$$\rho(x) = \int_{\mathcal{V}} G(x, a)\sigma(a)\Omega(a)\,da,$$

ce qui conduit à

$$(33) \qquad -\Phi(x)\sigma(x) + \int_{\mathcal{V}} \sigma(\xi)\Omega(\xi)\int_{\mathcal{V}} G(x, a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da\,d\xi = f(x).$$

Nous allons voir que trois théorèmes analogues à ceux de Fredholm résument la discussion de l'équation (31).

Le noyau

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2\Phi(x)}\int_{\mathcal{V}} G(x, a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da$$

de l'équation (3) est, dans le cas considéré ici, une fonction holomorphe de λ^{-1} même pour λ infini, et le même fait a lieu pour les équations déduites de (3) par itération. Itérons suffisamment pour avoir un noyau continu : alors nous trouvons que la fonction déterminante de Fredholm est holomorphe par rapport à λ^{-1} même pour λ infini. Il en est de même pour la série qui, conformément à la découverte de Fredholm, forme le numérateur du noyau résolvant de cette équation (3). Finalement *le noyau résolvant de l'équation* (3) *est une fonction méromorphe de* λ *même pour* λ *infini*.

Après division par le coefficient de $\rho(x)$, le second membre de l'équation (3) devient

$$\frac{f(x)+\lambda\int_{\mathcal{V}} G(x, a)f(a)\Omega(a)\,da}{1+\lambda^2\Phi(x)};$$

si donc on pose, quand λ est assez grand en valeur absolue,

$$N(x, \xi; \lambda)=\sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(x, \xi)\lambda^{\alpha-2}+\sum_{\beta=0}^{+\infty} A_\beta(x, \xi)\lambda^{-\beta-2},$$

on constate, en examinant aussi les équations déduites de (3) par itération, que les B_α sont continus, et que

$$\Phi(x)A_0(x, \xi)-G(x, \xi)=O(|x-\xi|^{h-1}).$$

Si la fonction déterminante, relative à une équation itérée dont le noyau est continu, n'est pas nulle, tous les B_α sont nuls, ou plutôt, comme nous supposons toujours que B_p n'est pas identiquement nul, c'est p qui est nul dans ce cas.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $p=0$, c'est-à-dire le cas où N n'a pas de pôle à l'infini. Les termes en λ^{-1}, dans les identités (16) et (20), donnent alors

$$(34)\qquad \int_{\mathcal{V}} A_0(x, a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da=\int_{\mathcal{V}} G(x, a)A_0(a, \xi)\Omega(a)\,da=0.$$

Nous déduisons alors de (31) qu'on a

$$(35)\qquad \rho(x)=-\int_{\mathcal{V}} A_0(x, a)f(a)\Omega(a)\,da,$$

et réciproquement cette fonction est solution de l'équation (31). Donc :

Si $\lambda=\infty$ *n'est pas un pôle du noyau résolvant, l'équation* (31) *a une solution et une seule.*

Ajoutons que l'*équation associée*

$$(36) \qquad \int_{\mathcal{V}} G(a, x)\rho(a)\,da = \text{fonction donnée}$$

a également alors une solution et une seule (on suppose, bien entendu, que le second membre remplit une condition de Hölder).

Le premier théorème de Fredholm est donc étendu à l'équation (31).

Supposons maintenant que $\lambda = \infty$ soit un pôle, c'est-à-dire que p soit *positif*. Dans les développements des deux membres de (27), prenons les termes où les exposants de λ et de μ sont tous deux supérieurs à -2; en posant

$$\gamma(x, \xi; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(x, \xi)\lambda^{\alpha-2},$$

nous trouvons

$$\int_{\mathcal{V}} \gamma(x, a; \lambda)\gamma(a, \xi; \mu)\Omega(a)\,da = \frac{\gamma(x, \xi; \lambda) - \gamma(x, \xi; \mu)}{\lambda - \mu} + 2\frac{B_1(x, \xi)}{\lambda\mu}.$$

En particulier, les termes en μ^{-1} donnent

$$\int_{\mathcal{V}} \gamma(x, a; \lambda)B_1(a, \xi)\Omega(a)\,da = \frac{B_1(x, \xi)}{\lambda},$$

d'où encore

$$(37) \qquad \int_{\mathcal{V}} B_1(x, a)B_1(a, \xi)\Omega(a)\,da = B_1(x, \xi);$$

par conséquent,

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\gamma(x, a; \lambda) - \frac{B_1(x, a)}{\lambda}\right] B_1(a, \xi)\Omega(a)\,da = 0.$$

Mais revenons à (27), et prenons les termes où l'exposant de λ est supérieur à -2, et celui de μ au plus égal à -2; en posant

$$H_1(x, \xi; \lambda) = N(x, \xi; \lambda) - \gamma(x, \xi; \lambda),$$

nous obtenons ainsi, après simplification,

$$\int_{\mathcal{V}} \gamma(x, a; \lambda)H_1(a, \xi; \mu)\Omega(a)\,da = \left[\frac{\mu\Phi(\xi)}{1 + \mu^2\Phi(\xi)} - \frac{1}{\mu}\right]\gamma(x, \xi; \lambda),$$

et par suite

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\gamma(x, a;\lambda)-\frac{B_1(x, a)}{\lambda}\right]H_1(a, \xi;\mu)\Omega(a)\,da$$
$$=\left[\frac{\mu\Phi(\xi)}{1+\mu^2\Phi(\xi)}-\frac{1}{\mu}\right]\left[\gamma(x, \xi;\lambda)-\frac{B_1(x, \xi)}{\lambda}\right],$$

d'où enfin

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\gamma(x, a;\lambda)-\frac{B_1(x, a)}{\lambda}\right]\left[H_1(a, \xi;\mu)+\frac{B_1(a, \xi)}{\mu}\right]\Omega(a)\,da$$
$$=\left[\frac{\mu\Phi(\xi)}{1+\mu^2\Phi(\xi)}-\frac{1}{\mu}\right]\left[\gamma(x, \xi;\lambda)-\frac{B_1(x, \xi)}{\lambda}\right].$$

Or le premier membre est une fonction méromorphe de μ dans le domaine dont il a été question, et il se réduit pour $\mu=0$ à

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\gamma(x, a;\lambda)-\frac{B_1(x, a)}{\lambda}\right][G(a, \xi)-B_2(a, \xi)]\Omega(a)\,da;$$

donc le second membre ne devient pas infini pour $\mu=0$, c'est-à-dire qu'on a l'identité

$$\gamma(x, \xi;\lambda)=\frac{B_1(x, \xi)}{\lambda};$$

le pôle ne peut donc être que du premier ordre : $p=1$.

Les identités (16) et (20) donnent alors

$$\int_{\mathcal{V}}B_1(x, a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da=\int_{\mathcal{V}}G(x, a)B_1(a, \xi)\Omega(a)\,da=0, \tag{38}$$

et puisque, d'après le début de ce paragraphe, l'équation homogène ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, on a

$$B_1(x, \xi)=\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha(x)\psi_\alpha(\xi),$$

les φ_α étant linéairement indépendants, ainsi que les ψ_α, et l'on a

$$\int_{\mathcal{V}}\psi_\alpha(a)G(a, \xi)\Omega(a)\,da=\int_{\mathcal{V}}G(x, a)\varphi_\alpha(a)\Omega(a)\,da=0. \tag{39}$$

D'autre part les identités (16) et (20) donnent encore

$$(40)\qquad \int_{\mathcal{V}} A_0(x, a) G(a, \xi) \Omega(a)\, da = \int_{\mathcal{V}} G(x, a) A_0(a, \xi) \Omega(a)\, da = B_1(x, \xi).$$

L'équation (31) entraîne alors

$$\int_{\mathcal{V}} A_0(x, a) f(a) \Omega(a)\, da = \int_{\mathcal{V}} A_0(x, a) \Omega(a) \int_{\mathcal{V}} G(a, \xi) \rho(\xi) \Omega(\xi)\, d\xi\, da$$
$$= -\rho(x) + \int_{\mathcal{V}} B_1(x, a) \rho(a) \Omega(a)\, da;$$

cette équation n'a donc pas d'autre solution que

$$(41)\qquad \rho(x) = -\int_{\mathcal{V}} A_0(x, a) f(a) \Omega(a)\, da + \sum_{\alpha=1}^{q} C_\alpha \varphi_\alpha(x),$$

où les C_α sont des constantes. Pour discerner les solutions effectives, nous portons cette valeur de ρ dans l'équation (31), qui se réduit alors à

$$\int_{\mathcal{V}} B_1(x, a) f(a) \Omega(a)\, da = 0.$$

Ceci est donc la condition nécessaire et suffisante de solubilité; elle s'écrit aussi

$$(42)\qquad \int_{\mathcal{V}} \psi_\alpha(a) f(a) \Omega(a)\, da = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q),$$

et alors toutes les fonctions (41) sont solutions. En résumé :

Si $\lambda = \infty$ est un pôle du noyau résolvant, ce pôle est du premier ordre, et alors les équations homogènes qui correspondent à (31) *et à l'équation associée ont un même nombre positif de solutions linéairement indépendantes.*

Pour que l'équation (31) *soit soluble quand $\lambda = \infty$ est un pôle du noyau résolvant, il faut et il suffit que f soit orthogonal à toutes les solutions de l'équation homogène associée.*

Ce sont les analogues du second et du troisième théorème de Fredholm.

10. Systèmes d'équations. — Dans l'espace euclidien à m dimensions ($m \geqq 2$), soit $\mathcal{D}$ un domaine borné. On suppose que sa frontière $\mathcal{S}$ remplit toutes les hypothèses faites jusqu'ici sur les variétés closes $\mathcal{V}$ à $m-1$ dimensions; on suppose que les coordonnées cartésiennes des points de $\mathcal{S}$ s'expriment à l'aide des paramètres qui servent à repérer les points de chaque région de $\mathcal{S}$, par des fonctions dont les dérivées existent et remplissent des conditions de Hölder; de plus on suppose qu'aucun point de $\mathcal{S}$ n'est singulier. Soit dS la mesure euclidienne de l'élément de $\mathcal{S}$.

Soient maintenant $G_1(X, A)$, $G_2(X, B)$, $G_3(Y, A)$, $G_4(Y, B)$ des fonctions de deux points : X et A sont des points variables de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, Y et B sont des points variables de $\mathcal{S}$. On suppose que G_1, G_2, G_3 sont continus par rapport à l'ensemble des deux points, et en outre que la fonction $G_3(Y, A)$ remplit par rapport à Y une condition de Hölder indépendante de A, et que $G_2(X, B)$ remplit par rapport à B une condition de Hölder indépendante de X. Quant à la fonction G_4, on suppose qu'elle est du type qui nous a occupés depuis le début de ce chapitre. Soient en outre $f(X)$ et $\varphi(Y)$ des fonctions données, la première continue dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, la seconde hölderienne sur $\mathcal{S}$. Considérons le système d'équations

$$(43) \quad \rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G_1(X, A)\rho(A)\,dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_2(X, B)\sigma(B)\,dS_B = f(X),$$

$$(44) \quad \sigma(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G_3(Y, A)\rho(A)\,dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_4(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y),$$

où les inconnues sont ρ et σ; la fonction ρ doit être continue dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, et la fonction σ doit remplir une condition de Hölder sur $\mathcal{S}$; l'intégrale portant sur G_4 est une intégrale principale. Ici encore, λ désigne un paramètre.

Je dis que *si m est égal à deux ou à trois et si λ appartient au domaine complexe déjà indiqué* (§ 6) *qui est déterminé par le noyau* G_4, *les trois théorèmes de Fredholm s'appliquent au système* [(43), (44)].

En effet soit $H(Y, \Xi; \lambda)$ un noyau d'intégrale principale étendue à $\mathcal{S}$, ce noyau étant tel qu'on ait

$$H(Y, \Xi; \lambda) - G_4(Y, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, B; \lambda) G_4(B, \Xi)\, dS_B$$
$$= O[L^{h-m}(Y, \Xi)] \qquad (h > 0)$$

(la distance qui figure au second membre peut être la distance euclidienne dans l'espace à m dimensions); nous avons appris à former ce noyau H. L'équation (44) entraîne, en introduisant comme plus haut la fonction Φ,

$$(45) \qquad \begin{aligned} &[1 + \lambda^2 \Phi(Y; \lambda)] \sigma(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [G_3(Y, A) \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, B; \lambda) G_3(B, A)\, dS_B] \rho(A)\, dV_A \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [H(Y, B; \lambda) - G_4(Y, B) \\ &\quad - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, C; \lambda) G_4(C, B)\, dS_C] \sigma(B)\, dS_B \\ &\quad = \varphi(Y) + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, B; \lambda) \varphi(B)\, dS_B; \end{aligned}$$

il est en effet à peu près immédiat que, dans la superposition des noyaux H et G_3, les intégrations peuvent s'effectuer dans un ordre indifférent (*voir* Chap. I, 10). Mais le système des équations (43) et (45) peut être résolu par la méthode de Fredholm [1]; on trouve ainsi des fonctions $N_1(X, A; \lambda)$, $N_2(X, B; \lambda)$, $N_3(Y, A; \lambda)$, $N_4(Y, B; \lambda)$, méromorphes par rapport à λ dans la région indiquée par notre énoncé, avec des pôles indépendants de X, de Y, de A et de B, et telles qu'on ait, sauf pour des valeurs isolées de λ,

$$(46) \qquad \begin{aligned} \rho(X) = f(X) &+ \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A \\ &+ \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N_2(X, B; \lambda) \varphi(B)\, dS_B, \end{aligned}$$

$$(47) \qquad \begin{aligned} \sigma(Y) = \frac{\varphi(Y)}{1 + \lambda^2 \Phi(Y; \lambda)} &+ \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} N_3(Y, A; \lambda) f(A)\, dV_A \\ &+ \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N_4(Y, B; \lambda) \varphi(B)\, dS_B; \end{aligned}$$

---

[1] *Journal de Mathématiques*, t. 11, 1932, p. 389 à 416, spécialement le Chapitre I.

l'intégrale qui porte sur N_4 est une intégrale principale, les autres intégrales portent sur des fonctions continues. Sauf pour des valeurs isolées de λ (dans notre région), le système [(43), (44)] n'a pas d'autre solution que celle qui est donnée par ces formules, mais il n'est pas encore certain que les fonctions ρ et σ ainsi trouvées constituent effectivement une solution.

Mais le changement d'inconnue

$$\sigma(Y) = \tau(Y) + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, B; \lambda) \tau(B)\, dS_B$$

ramène aussi le système [(43), (44)] à un autre auquel la méthode de Fredholm s'applique immédiatement. On arrive ainsi à des formules analogues à (46) et à (47), et les fonctions ρ et σ ainsi trouvées sont certainement des solutions, sauf pour des valeurs isolées de λ.

Comme aux paragraphes 6 à 8, on en conclut que les deux systèmes de formules sont identiques, et que les trois théorèmes de Fredholm s'appliquent.

11. Deux circonstances où la méthode de ce Chapitre échoue. — Examinons si nous pouvons traiter les équations de première espèce avec intégrales principales doubles,

$$\int_{\mathcal{V}}'' G(X, A) \rho(A)\, dV_A = f(X),$$

par la méthode qui a réussi pour les questions précédentes de ce chapitre. Nous voulons trouver un noyau $H(X, \Xi)$ d'intégrale principale et une fonction $J(X)$, tels qu'on ait

$$J(X) G(X, \Xi) + \int_{\mathcal{V}}'' H(X, A) G(A, \Xi)\, dV_A = O[L^{k-2}(X, \Xi)] \qquad (k > 0).$$

D'après le paragraphe 4, cela revient à trouver une fonction $\omega(\varphi)$ continue, continûment dérivable, admettant la période 2π, ayant une valeur moyenne nulle et satisfaisant à l'équation

$$-\int_0^{2\pi} \omega(\theta) \left(\cos\varphi \log \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin\varphi \operatorname{cotg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right) d\theta = g \cos\varphi,$$

où g est une constante. Si nous posons

$$u(\rho, \varphi) = -\int_0^{2\pi} \log[\rho^2 - 2\rho\cos(\theta-\varphi)+1]\,\omega(\theta)\,d\theta \qquad (\rho \leqq 1),$$

notre équation devient, en tenant compte de ce que la valeur moyenne de ω est nulle,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[\sin\varphi\, u(1, \varphi)] = g\cos\varphi,$$

d'où, en introduisant une constante l,

$$\sin\varphi\, u(1, \varphi) = g\sin\varphi + l.$$

Mais u doit être continu, puisque ω doit l'être; donc l est nul. Par suite,

$$u(1, \varphi) = g.$$

La fonction $u(\rho, \varphi)$ est donc constante; comme elle est nulle pour $\rho = 0$, elle est partout nulle, ainsi que g. La fonction ω qui lui correspond est donc constante; sa valeur moyenne étant nulle, ω est identiquement nul. Les fonctions H et J sont donc identiquement nulles; il est clair que la méthode échoue.

Considérons maintenant une équation de deuxième espèce

$$\rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{V}}'' G'(X, A)\,\rho(A)\,dV_A = f(X),$$

dans laquelle G' est un noyau d'intégrale principale, faisant partie de ceux qui ont été introduits au Chapitre I (§ 7). Mais on suppose qu'en changeant de variables de manière à donner aux composantes $A_{\alpha,\beta}$, en un point X arbitrairement choisi, les valeurs

$$A_{1,1} = A_{2,2} = 1, \qquad A_{1,2} = 0,$$

la partie positivement homogène et d'ordre -2 de la fonction $G'(X, \Xi)$ peut être rendue égale à

$$\Psi'(X)\,L^{-2}(X, \Xi)\cos(2\varphi),$$

l'angle φ étant défini comme au paragraphe 4 et la fonction Ψ' n'étant pas identiquement nulle. Je dis alors qu'*il n'existe pas de fonction*

$H(X, \Xi; \lambda)$ *qui remplisse la condition* (5), *où* G *serait remplacé par* G'. En effet, s'il en existait, comme l'équation de première espèce, considérée il y a un instant, entraîne

$$\int_{\mathcal{V}}^{\prime\prime} G(X, A) \int_{\mathcal{V}_\Xi}^{\prime\prime} G(A, \Xi)\, \rho(\Xi)\, dV_\Xi\, dV_A = \int_{\mathcal{V}}^{\prime\prime} G(X, A) f(A)\, dV_A,$$

équation qui, si Ψ ne s'annule pas, est du type considéré ici (II, 5), nous aurions une contradiction.

CHAPITRE IV.

APPLICATION A CERTAINS PROBLÈMES DE VALEURS A LA FRONTIÈRE.

1. **Lemme.** — Dans l'espace à m dimensions ($m \geqq 2$), soit $\sigma(A)$ une fonction d'un point de la variété $a_m = 0$; on suppose que cette fonction remplit une condition de Hölder dans une région bornée $\mathcal{R}$ de cette variété. Soient d'autre part

$$A_{\alpha,\beta}(A) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

des fonctions qui remplissent une condition de Hölder dans une région à m dimensions, contenant à son intérieur tous les points de $\mathcal{R}$; on suppose que la forme quadratique

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A) z_\alpha z_\beta,$$

relative aux variables z_α, est définie positive quel que soit A. On pose

$$H(X, A) = [\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta)]^{(2-m)/2} \qquad (m > 2),$$
$$H(X, A) = -\log \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) \qquad (m = 2),$$

et l'on considère l'intégrale

$$F(X) = \int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} H(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A \qquad [dS_A = d(a_1, \ldots, a_{m-1})].$$

Je dis que *les dérivées partielles, relatives à* $x_1, \ldots, x_{m-1}$, *de la fonction* F(X), *existent et sont continues dans tout ensemble fermé sans* *point commun avec la frontière de $\mathcal{R}$; en tout point intérieur à $\mathcal{R}$, ces dérivées s'expriment par des intégrales principales.*

Tant que x_m n'est pas nul, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \frac{\partial H}{\partial x_1}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A \\ &= \int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \left[\frac{\partial H}{\partial x_1}(X, A)\,\sigma(A) + \frac{\partial H(A, X)}{\partial a_1}\sigma(X)\right] dS_A - \sigma(X)\int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \frac{\partial H(A, X)}{\partial a_1}\,dS_A.\end{aligned}$$

Or la première intégrale porte sur une fonction qui vaut

$$O\,[L^{h+1-m}(X, A)],$$

h étant l'exposant des conditions de Hölder remplies par les $A_{\alpha,\beta}$ et par σ; la première intégrale, dans la dernière expression de notre dérivée, représente donc une fonction partout continue.

Il reste à étudier

$$-\int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \frac{\partial H(A, X)}{\partial a_1}\,dS_A = c_m \int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \frac{\Sigma_\alpha A_{1,\alpha}(X)\,(x_\alpha - a_\alpha)}{[\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)\,(x_\alpha - a_\alpha)\,(x_\beta - a_\beta)]^{m/2}}\,dS_A,$$

la constante c_m étant égale à $2 - m$ pour $m > 2$, et à -2 pour $m = 2$. Changeons de variables d'intégration en posant

$$a'_\alpha = 2\left[x_\alpha - \frac{a_{m,\alpha}(X)}{a_{m,m}(X)}x_m\right] - a_\alpha \qquad (\alpha < m);$$

les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ sont définies par les identités

$$\Sigma_\gamma A_{\alpha,\gamma}\,a_{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \beta \neq \alpha, \\ 1 & \text{pour} \quad \beta = \alpha; \end{cases}$$

dans notre intégrale, a_m est nul et l'on prend de même $a'_m = 0$. On constate alors que

$$\frac{\Sigma_\alpha A_{1,\alpha}(X)\,(x_\alpha - a_\alpha)}{[\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)\,(x_\alpha - a_\alpha)\,(x_\beta - a_\beta)]^{m/2}} = -\frac{\Sigma_\alpha A_{1,\alpha}(X)\,(x_\alpha - a'_\alpha)}{[\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)\,(x_\alpha - a'_\alpha)\,(x_\beta - a'_\beta)]^{m/2}}.$$

Donc on ne change pas la valeur de notre intégrale quand on retranche du champ d'intégration un domaine quelconque, intérieur à $\mathcal{R}$, et qui a un centre de symétrie au point X' dont les coordonnées sont les $x_\alpha - \frac{a_{m,\alpha}}{a_{m,m}}x_m$. Si X tend vers un point Y intérieur à $\mathcal{R}$, X' tend aussi vers Y et finit donc par être intérieur à $\mathcal{R}$. Le domaine

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \eta^2, \qquad a_m = 0 \qquad (\eta > 0),$$

qui admet X′ comme centre de symétrie, finit aussi par appartenir entièrement à $\mathcal{R}$ si η est constant mais assez petit, le point limite Y appartenant à un ensemble donné, fermé et intérieur à $\mathcal{R}$. Si l'on retranche ce domaine du champ d'intégration, il est donc évident que notre intégrale représente une fonction continue, et l'on voit du même coup que sa limite, pour $x_m = 0$, s'obtient en faisant $x_m = 0$ sous le signe d'intégration et en considérant le résultat comme une intégrale principale avec les domaines d'exclusion

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \eta^2.$$

Cela revient à écrire, pour $x_m = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_{\mathcal{R}}^{(m-1)} \frac{\partial H}{\partial x_1}(X, A)\sigma(A)\, dS_A,$$

l'intégrale étant une intégrale principale avec les domaines d'exclusion ci-dessus écrits. Remarquons que le noyau de cette intégrale est du type qui nous a occupés aux Chapitres II et III.

Le raisonnement fait pour x_1 peut être répété pour tous les x_α dont l'indice α est plus petit que m.

Remarque. — Comme il a déjà été démontré [1] que

$$\Sigma_\alpha\, a_{m,\alpha}(X) \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$$

a une limite quand x_m tend vers zéro *en gardant un signe constant*, il en résulte que $\dfrac{\partial F}{\partial x_m}$ a une limite dans les mêmes conditions.

Il a été démontré dans le travail cité que toutes ces dérivées (pourvu que x_m ne change pas de signe) remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant h si h est inférieur à *un*.

---

[1] *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, t. 49, 1932, p. 1 à 104 et 245 à 308, spécialement Chapitre VII, p. 79 à 89.

2. **Énoncé d'un problème.** — Dans l'espace euclidien à m dimensions ($m \geqq 2$), soit $\mathcal{D}$ un domaine borné donné. Soit $\mathcal{S}$ sa frontière; on suppose que tout point de $\mathcal{S}$ est intérieur à une région où les coordonnées des points de $\mathcal{S}$ sont fonctions de $m - 1$ paramètres, ces fonctions étant pourvues de dérivées qui remplissent des conditions de Hölder; un nombre fini de telles régions doit suffire pour avoir la totalité de $\mathcal{S}$, qui en outre n'a aucune singularité. $\mathcal{S}$ est donc une variété close; nous prenons comme forme quadratique fondamentale le carré de l'élément de longueur euclidienne d'arc. Si dS est la mesure d'un élément de $\mathcal{S}$, nous posons, pour chaque système de paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$,

$$dS = \Omega\, d(t_1, \ldots, t_{m-1}),$$

et nous définissons ainsi le tenseur Ω (Chap. I, 6).

Nous introduisons en outre un autre tenseur, simple et contravariant, défini sur $\mathcal{S}$, et dont les composantes sont désignées par $\frac{\psi_\alpha}{\Omega}$, de sorte que, si $m > 2$, $(-1)^{m\alpha}\psi_\alpha$ est une composante d'un certain tenseur d'ordre $m-2$, symétrique gauche si $m > 3$, toujours covariant, à savoir la composante où, en ajoutant à la fin des $m-2$ indices de la notation classique le nombre α, on obtient une permutation circulaire des $m-1$ premiers nombres entiers positifs. Si $m = 2$, ψ_1 est une fonction scalaire. Nous supposons que les ψ_α remplissent des conditions de Hölder.

Soit maintenant

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ a_{\alpha,\alpha} > 0,\ a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha})$$

une opération aux dérivées partielles du type elliptique. On suppose que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ une condition de Hölder; les b_α et c sont supposés continus. On désignera aussi par $\mathcal{F}u$ l'opération généralisée, applicable à certaines fonctions u dépourvues de dérivées secondes, et indiquée dans un autre travail ([1]).

En nous donnant encore une fonction ψ, qui est définie pour un point variable de $\mathcal{S}$, et qui remplit une condition de Hölder, et en

---

([1]) *Bull. Sc. math.*, t. 56, 1932, article cité, spécialement Chapitre I (§ 1, 2 et 9).

désignant par $\varpi_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure à $\mathcal{S}$, nous poserons encore, pour les points de $\mathcal{S}$,

$$(2) \qquad \Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\Omega} \Sigma_\alpha \psi_\alpha \frac{\partial u}{\partial t_\alpha} + \psi u.$$

L'ensemble des termes où figurent les dérivées de u par rapport aux paramètres, est évidemment un invariant : cela résulte de nos définitions.

Quand les opérations $\mathcal{F}$ et Θ sont appliquées à une fonction de deux points, $F(X, \Xi)$, nous convenons qu'elles portent sur le premier point.

Le problème que nous voulons traiter est le suivant :

Étant données une fonction f continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et une fonction φ, définie sur $\mathcal{S}$ et remplissant une condition de Hölder, trouver une fonction u, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et qui satisfasse dans $\mathcal{D}$ à l'équation

$$(3) \qquad \mathcal{F} u = f,$$

et sur $\mathcal{S}$ à la condition

$$(4) \qquad \Theta u = \varphi.$$

3. Introduction d'un système d'équations intégrales. — Faisons choix d'une fonction $c - \chi$ continue, bornée, négative ou nulle dans tout l'espace, et inférieure à une constante négative hors d'un certain domaine borné (par exemple, cette fonction peut être une constante négative). On prendra $\chi = 0$ hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; c et χ sont ainsi définis partout, puisque c est égal dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à la fonction qui figure dans (1). L'opération $\mathcal{F} u - \chi u$ possède alors une solution élémentaire principale $G(X, A)$ [1]. Nous chercherons alors la fonction u, solution de notre problème, parmi les fonctions du type

$$(5) \qquad u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A) \rho(A)\, dV_A + 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B) \sigma(B)\, dS_B,$$

où la fonction ρ est à définir dans $\mathcal{D}$, pendant que σ est à définir sur $\mathcal{S}$.

En supposant que la fonction ρ soit continue en tout point de $\mathcal{D}$, et

[1] *Loc. cit.*, Chapitre II. Les $a_{\alpha,\beta}$ et les b_α doivent aussi être définis hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; ce prolongement, soumis à des conditions très larges, est toujours possible.

que la fonction σ remplisse une condition de Hölder, les conditions (3) et (4) se traduisent par les équations

$$(6)\quad \rho(X)-\chi(X)\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A + 2\chi(X)\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, B)\sigma(B)\,dS_B = f(X),$$

$$(7)\quad \sigma(Y)-\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G(Y, A)\rho(A)\,dV_A + 2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y),$$

où l'intégrale d'ordre $m-1$ qui figure dans l'équation (7) est une intégrale principale; les autres intégrales sont des intégrales ordinaires. En effet un changement de variables permet de mettre un domaine de $\mathfrak{S}$, contenant un point donné quelconque, sous la forme $t_m = 0$, et alors G est égal au produit d'un facteur constant par une fonction du type de la fonction H du lemme (§ 1), augmenté d'une fonction pour laquelle on peut dériver sans difficulté sous le signe intégral d'ordre $m-1$. On voit que, dans notre intégrale principale, les domaines d'exclusion relatifs à Y sont

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(Y)(y_\alpha - a_\alpha)(y_\beta - a_\beta) < \eta^2,$$

où les a_α sont à remplacer par leurs expressions paramétriques.

Nous voulons prouver que *les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm s'appliquent au système des équations* (6) *et* (7) *pourvu que m soit égal à deux ou à trois.*

Pour cela nous multiplions chacune des intégrales par un même paramètre λ, qui à la fin devra être pris égal à *un*. Nous posons

$$G^{(1)} = G, \qquad G^{(n+1)}(X, \Xi) = \int_{\varpi}^{(m)} G^{(n)}(X, A)\chi(A)\,G(A, \Xi)\,dV_A,$$

$$G_p(X, \Xi) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^{n-1} G^{(n)}(X, \Xi).$$

Introduisons une nouvelle inconnue $\rho'(X)$, destinée à remplacer ρ, en posant

$$(8)\qquad \rho(X) = \rho'(X) - 2\lambda\chi(X)\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G_{p-1}(X, B)\sigma(B)\,dS_B;$$

les équations (6) et (7) deviennent

$$(9)\qquad \rho'(X) - \lambda\chi(X)\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\rho'(A)\,dV_A + 2\lambda^p\chi(X)\int_{S}^{(m-1)} G^{(p)}(X, B)\sigma(B)\,dS_B = f(X),$$

$$(10)\qquad \sigma(Y) - \lambda\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G(Y, A)\rho'(A)\,dV_A + 2\lambda\int_{S}^{(m-1)} \Theta G_p(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y).$$

Comme on peut tirer de (8) la fonction ρ' en fonction de ρ et de σ, le système [(9), (10)] est entièrement équivalent à [(6), (7)]. On n'altère pas cette équivalence en remplaçant (10) par

$$(11)\qquad \sigma(Y) - \lambda\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G^{(p)}(Y, A)\rho'(A)\,dV_A + 2\lambda\int_{S}^{(m-1)} \Theta G_{2p-1}(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y) + \lambda\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G_{p-1}(Y, A)f(A)\,dV_A.$$

Enfin l'on peut de deux façons remplacer ce système par d'autres où toutes les intégrales, sauf une, portent sur des fonctions continues. D'abord en remplaçant l'équation (9) par celle dont le second membre est

$$f(X) + \lambda\chi(X)\int_{\varpi}^{(m)} G_p(X, A)f(A)\,dV_A,$$

on obtient, si p est assez grand, un tel système, lequel admet toutes les solutions du système [(9), (11)]. Ensuite, si l'on fait dans le système [(9), (11)] le changement d'inconnue

$$\rho'(X) = \rho''(X) + \lambda\chi(X)\int_{\varpi}^{(m)} G_p(X, A)\rho''(A)\,dV_A,$$

on a un nouveau système jouissant de cette propriété, et dont chaque solution donne une solution du système [(9), (11)].

Or je dis que, si p est assez grand, les deux derniers systèmes introduits sont d'un type déjà étudié (III, 10), à ceci près que chaque sous-noyau des nouveaux systèmes est fonction holomorphe de λ. Pour le voir, on vérifiera d'abord que G remplit les conditions énoncées au Chapitre I (§ 3). Posons

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{A})}} \mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} \mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\mathrm{A})(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - x_\beta)}\right],$$

en désignant par D le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ et par $\mathrm{F}(r)$ la solution élémentaire principale de

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0 \qquad (g = \text{constante positive};\ r = \text{distance});$$

soient encore

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathrm{K}^{(1)}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathcal{F}\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) - \chi(\mathrm{X})\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}),$$

$$\mathrm{K}^{(n+1)}(\mathrm{X}, \Xi) = \int_{\text{espace}}^{(m)} \mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

$$\mathrm{R}_n(\mathrm{X}, \Xi) = \mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi) - \mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi) - \sum_{q=1}^{n-1} \int_{\text{espace}}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}^{(q)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

de sorte que

$$\mathcal{F}\mathrm{R}_n - \chi\mathrm{R}_n = \mathrm{K}^{(n)}.$$

R_n et K_n sont continus si n est supérieur à $\frac{m}{h}$ et l'on a (¹)

$$\mathrm{R}_n(\mathrm{X}, \Xi) = -\int_{\text{espace}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

d'où

$$(12)\qquad \mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi) = \mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi) + \sum_{q=1}^{n-1} \int^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}^{(q)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} - \int^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}.$$

Pour éviter, si l'on veut, de reprendre les raisonnements du Chapitre I (§ 2), de façon à tenir compte du champ infini d'intégration, il suffit d'ajouter à nos hypothèses que, hors d'un domaine borné qui contient $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α et c ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$) sont

(¹) *Loc. cit.*, Chapitre II (§ 4).

constants, la valeur constante des $a_{\alpha,\alpha}$ étant *un*, celle de c étant égale à $-g^2$, et les autres étant nulles; alors $K(X, \Xi)$ est nul quand X et Ξ sont hors de ce domaine, et des changements de variables nous ramènent au cas des domaines bornés [1]; on voit ainsi (I, 2) que les hypothèses du Chapitre I (§ 1) sont satisfaiets par $G(X, \Xi)$ relativement à Ξ, les nombres nommés alors λ et h ayant respectivement ici les valeurs 2 et h (si $m = 2$, λ est quelconque < 2). Relativement à X, les mêmes hypothèses sont immédiatement vérifiées, puisque les dérivées partielles de $G(X, \Xi)$ existent et valent $O[L^{1-m}(X, \Xi)]$. Cette fonction G remplit donc les hypothèses du Chapitre I (§ 3).

La même expression (12) permet de vérifier sans peine que, si Y et B appartiennent à $\mathfrak{S}$, la fonction $\Theta[G(Y, B) - H(Y, B)]$ satisfait aussi sur $\mathfrak{S}$ aux hypothèses du Chapitre I (§ 3). Cela permet de voir ensuite que le noyau d'intégrale principale $\Theta G(Y, B)$ satisfait sur la variété close $\mathfrak{S}$ aux hypothèses du Chapitre I (§ 7).

Il est alors immédiat (I, 2) que, pour p assez grand, les deux systèmes déduits plus haut du système [(9), (11)] sont bien du type étudié au Chapitre III (§ 10), pourvu que m soit égal à deux ou à trois. Les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm s'appliquent donc à chacun de ces deux derniers systèmes.

Mais on peut alors reprendre les raisonnements du Chapitre III (§ 6 à 8), et l'on démontre ainsi que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm s'appliquent au système [(6), (7)], pourvu que m soit égal à deux ou à trois, comme il avait été annoncé.

4. **Cas où le problème homogène n'a que la solution zéro.** — Le problème homogène correspondant au problème donné est, par définition, celui qu'on obtient en remplaçant f et φ par zéro, sans changer les autres données,

Supposons que ce problème n'ait que la solution zéro. Je dis qu'alors le problème donné a une et une seule solution.

Pour le prouver, il suffit évidemment de montrer que le système

(1) *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 49, article cité, Chapitre V (§ 4).

déduit de [(6), (7)] en remplaçant par zéro les seconds membres f et φ, n'a que la solution zéro. Or, quels que soient ρ et σ, la fonction u représentée par (5) s'annule à l'infini, et elle satisfait hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ à l'équation $\mathcal{F}u=0$. Si en outre ρ et σ satisfont au système homogène correspondant à [(6), (7)], u est nul dans $\mathcal{D}$ d'après notre hypothèse. Vu la continuité de u même sur $\mathcal{S}$, vu aussi l'impossibilité d'un maximum positif ou d'un minimum négatif atteint en un point qui n'appartient pas à $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, u est nul aussi hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, donc dans tout l'espace. Sur chaque côté de $\mathcal{S}$, Θu est donc nul, ce qui entraîne la nullité de σ. La comparaison des équations (5) et (6) montre ensuite que $\rho=-\chi u=0$. Notre proposition est donc établie.

Ce raisonnement ressemble beaucoup à celui qui a servi précédemment dans le passage analogue de la théorie du problème de Neumann. Cette analogie va se poursuivre.

5. **Cas particulier.** — La proposition précédente s'applique en particulier si l'on a $c\leqq 0$ partout dans $\mathcal{D}$ et $\psi\geqq 0$ partout sur $\mathcal{S}$, pourvu que c et ψ ne soient pas à la fois identiquement nuls. En effet une solution du problème homogène ne peut alors atteindre un maximum positif ni dans $\mathcal{D}$ (¹) ni sur $\mathcal{S}$ (²); le minimum négatif est aussi impossible, et par suite cette solution ne peut être que zéro. Donc, dans ce cas, le problème donné a toujours une et une seule solution.

6. **Fonction de Green.** — Nous nommons fonction de Green, relativement au problème donné, une fonction $F(X, \Xi)$ qui jouit des propriétés suivantes :

1° Si Ξ et X appartiennent à $\mathcal{D}$, c'est une solution élémentaire de l'équation

$$\mathcal{F}F(X, \Xi)=0,$$

où l'opération porte sur le premier point, c'est-à-dire sur X, conformément à nos conventions ordinaires.

(¹) *Bull. Sc. math.*, t. 56, 1922, article cité, Chapitre I (§ 7).

(²) *Ibid.*, Chapitre IV (§ 4) et Chapitre V (§ 5); *voir* aussi *Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues*, Chapitre IV (§ 3) (*Bull. de la Soc. math.*, t. 61, 1933, p. 1 à 54).

2° Si Ξ appartient à $\mathcal{D}$, et si en outre X est en un point Y de $\mathcal{S}$, on a

$$\Theta F(Y, \Xi) = 0,$$

l'opération continuant à porter sur le premier point.

Cette fonction de Green existe dans les hypothèses du paragraphe 4. Reprenons en effet la fonction G_p, du paragraphe 3, en y faisant $\lambda = 1$, et considérons la fonction

$$u(X, \Xi) = F(X, \Xi) - G_p(X, \Xi),$$

en supposant $2p > m$, de sorte que $G^{(p)}(X, \Xi)$ est partout continu; alors quand X varie dans $\mathcal{D}$, u doit être une solution régulière [1] de l'équation

$$\mathcal{F} u(X, \Xi) = -\chi(X) G^{(p)}(X, \Xi);$$

de plus on doit avoir sur $\mathcal{S}$ la condition

$$\Theta u(Y, \Xi) = -\Theta G_p(Y, \Xi),$$

et nous avons vu au paragraphe 4 qu'il y a une fonction u et une seule remplissant ces conditions, quel que soit Ξ dans $\mathcal{D}$.

Développons le calcul en nous plaçant dans le cas où les hypothèses du paragraphe 5 sont satisfaites. On peut s'arranger alors pour que la fonction χ soit identiquement nulle, et nous faisons ainsi. Nous devons alors poser, quand Ξ appartient à $\mathcal{D}$,

$$F(X, \Xi) = G(X, \Xi) + 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) \sigma(A, \Xi) \, dS_A, \tag{13}$$

car l'équation $\mathcal{F} F = 0$ montre aussitôt qu'il n'y a pas d'intégrale d'ordre m. La condition à la frontière devient alors, si Ξ est dans $\mathcal{D}$,

$$\sigma(Y, \Xi) + 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, A) \sigma(A, \Xi) \, dS_A = -\Theta G(Y, \Xi), \tag{14}$$

l'intégrale étant une intégrale principale, prise de la façon déjà expliquée.

Moyennant l'hypothèse que m est égal à deux ou à trois, il existe,

---

[1] *Bull. Sc. math.*, t. 56, 1932, article cité, Chapitre I (§ 15).

d'après le chapitre précédent, une fonction $\Phi(Y)$ positive ou nulle et remplissant une condition de Hölder sur $\mathcal{S}$, et un noyau $N(Y, A)$ d'intégrale principale sur la variété close $\mathcal{S}$, qui jouissent des propriétés suivantes : quelle que soit la fonction $\tau(Y)$, qui remplit sur $\mathcal{S}$ une condition de Hölder, on a les identités

$$(15)\quad 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(Y, A)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(A, B)\tau(B)\, dS_B\, dS_A$$
$$= \frac{\Phi(Y)\tau(Y)}{1+\Phi(Y)} + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \tau(A)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(Y, B)\Theta G(B, A)\, dS_B\, dS_A,$$

$$(16)\quad 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, A)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(A, B)\tau(B)\, dS_B\, dS_A$$
$$= \frac{\Phi(Y)\tau(Y)}{1+\Phi(Y)} + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \tau(A)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, B)N(B, A)\, dS_B\, dS_A;$$

en outre, en nommant Υ un deuxième point de $\mathcal{S}$, distinct de Y, on a identiquement

$$(17)\quad N(Y, \Upsilon) + \frac{2\Theta G(Y, \Upsilon)}{1+\Phi(Y)} + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(Y, A)\Theta G(A, \Upsilon)\, dS_A = 0,$$

$$(18)\quad N(Y, \Upsilon) + \frac{2\Theta G(Y, \Upsilon)}{1+\Phi(\Upsilon)} + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, A)N(A, \Upsilon)\, dS_A = 0.$$

La solution de l'équation (14) est alors

$$(19)\quad \sigma(Y, \Xi) = -\frac{\Theta G(Y, \Xi)}{1+\Phi(Y)} - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(Y, A)\Theta G(A, \Xi)\, dS_A,$$

et l'on a par suite

$$(20)\quad F(X, \Xi) = G(X, \Xi) - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{G(X, A)\Theta G(A, \Xi)}{1+\Phi(A)}\, dS_A$$
$$- 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(A, \Xi)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)N(B, A)\, dS_B\, dS_A,$$

pourvu que Ξ appartienne à $\mathcal{D}$, car, $G(X, B)$ valant $O[L^{2-m}(X, B)]$, le changement dans l'ordre des intégrations du dernier terme est légitime (I, 9, 10), quel que soit X dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

Nous allons voir maintenant que si, X restant fixe ou tendant vers n'importe quel point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, Ξ tend vers un point Υ situé sur $\mathcal{S}$ et distinct de la limite de X, notre fonction de Green tend vers une certaine limite $F(X, \Upsilon)$. La formule (20) donne en effet

$$F(X,\Upsilon)=\frac{2+\Phi(\Upsilon)}{1+\Phi(\Upsilon)}G(X,\Upsilon)-2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\frac{G(X,A)\Theta G(A,\Upsilon)}{1+\Phi(A)}dS_A$$
$$+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,A)N(A,\Upsilon)\,dS_A$$
$$-2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\Theta G(A,\Upsilon)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,B)N(B,A)\,dS_B\,dS_A.$$

À l'aide de la formule (15), cette expression se transforme en (*voir* Chap. I, 13)

$$F(X,\Upsilon)=\frac{2G(X,\Upsilon)}{1+\Phi(\Upsilon)}+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,A)N(A,\Upsilon)\,dS_A$$
$$-2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,A)\left[\frac{\Theta G(A,\Upsilon)}{1+\Phi(A)}+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}N(A,B)\Theta G(B,\Upsilon)\,dS_B\right]dS_A,$$

d'où enfin, d'après la formule (17),

$$F(X,\Upsilon)=\frac{2G(X,\Upsilon)}{1+\Phi(\Upsilon)}+2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,A)N(A,\Upsilon)\,dS_A \qquad (\Upsilon \text{ sur } \mathcal{S}). \tag{21}$$

De même, si Ξ tend vers un point Υ de $\mathcal{S}$, et si Y tend vers une limite quelconque dans $\mathcal{S}-\Upsilon$, $\sigma(Y,\Xi)$ *tend vers* $N(Y,\Upsilon)$, car cette limite est, d'après la formule (19),

$$\sigma(Y,\Upsilon)=\frac{1}{2}N(Y,\Upsilon)-\frac{\Theta G(Y,\Upsilon)}{1+\Phi(Y)}-\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}N(Y,A)\Theta G(A,\Upsilon)\,dS_A,$$

c'est-à-dire, d'après (17),

$$\sigma(Y,\Upsilon)=N(Y,\Upsilon) \qquad (\Upsilon \text{ sur } \mathcal{S}). \tag{22}$$

Nous allons voir maintenant que, quand Ξ varie dans $\mathcal{D}$ et Y sur $\mathcal{S}$, on a

$$\sigma(Y,\Xi)=O[L^{1-m}(Y,\Xi)],$$

limitation qui restera forcément valable si Ξ vient en un point Υ de $\mathcal{S}$.

En effet, dans la formule (19), la partie d'intégrale qui provient du champ

$$2L(\Xi, A) < L(Y, \Xi)$$

a évidemment cette limitation, car

$$N(Y, A) = N(Y, \Xi) + L^k(\Xi, A) O[L^{1-k-m}(Y, \Xi)] \qquad (k > 0),$$

d'où le résultat annoncé, car l'intégrale de $\Theta G(A, \Xi)$ dans ce domaine reste bornée quand Y et Ξ varient. Un raisonnement semblable donne le même résultat dans le domaine

$$2L(Y, A) < L(Y, \Xi).$$

A l'extérieur de ces domaines, la fonction intégrée vaut $O[L^{2-2m}(Y, A)]$, d'où encore $O[L^{1-m}(Y, \Xi)]$ comme limitation de l'intégrale correspondante. La limitation annoncée est établie pour σ.

Quand X et Y varient sur $\mathfrak{S}$, Ξ variant en même temps dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, nous avons

$$\sigma(X, \Xi) - \sigma(Y, \Xi) = O[L^k(X, Y) l^{1-k-m}] \qquad (k > 0);$$

il suffit, pour l'établir, de reprendre sur la formule (19) les raisonnements du Chapitre I (§ 10 et 11). De même, si Ξ et Υ varient dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, pendant que Y varie sur $\mathfrak{S}$, de façon que $2L(\Xi, \Upsilon)$ reste inférieur à $L(Y, \Xi)$, on a

$$\sigma(Y, \Xi) - \sigma(Y, \Upsilon) = O[L^k(\Xi, \Upsilon) L^{1-k-m}(Y, \Xi)].$$

Ces résultats permettent d'établir que, quand X et Ξ varient dans $\mathcal{D}$, on a

$$F(X, \Xi) = O[L^{2-m}(X, \Xi)],$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) = O[L^{1-m}(X, \Xi)].$$

Ce sont toujours les mêmes genres de raisonnement. Pour la seconde limitation, on a à établir le fait que l'intégrale

$$\int^{(m-1)} \sigma(A, \Xi)\, dS_A,$$

étendue au champ $2L(A, \Xi) < L(Y, \Xi)$, reste bornée quand Y et Ξ varient; or, en nommant Υ le point de $\mathfrak{S}$ qui est le plus proche de Ξ, et en tenant compte de (22), on peut écrire

$$\sigma(A, \Xi) = N(A, Y) + O[L^k(\Xi, Y) L^{1-k-m}(A, Y)],$$

expression de laquelle ce fait découle [1].

7. **Équation intégrale contenant une fonction de Green.** — Supposons d'abord que les hypothèses du paragraphe 5 soient satisfaites, et soit $F(X, \Xi)$ la fonction de Green du problème donné. Je dis que la solution de ce problème est

$$(23) \qquad u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A) f(A)\, dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, B) \varphi(B)\, dS_B.$$

En effet il est tout d'abord évident qu'on a dans $\mathcal{D}$ l'identité $\mathcal{F}u = f$. Il est non moins évident qu'on a sur $\mathcal{S}$

$$\Theta \int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(Y, A) f(A)\, dV_A = 0,$$

car, d'après le paragraphe précédent, le premier membre est identique à

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta F(Y, A) f(A)\, dV_A,$$

où la fonction intégrée est identiquement nulle.

On a ensuite, d'après la formule (21),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, B)\varphi(B)\, dS_B = {} & 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{G(X, B)\varphi(B)}{1+\Phi(B)}\, dS_B \\
& + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi(B) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) N(A, B)\, dS_A\, dS_B \\
= {} & 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{G(X, A)\varphi(A)}{1+\Phi(A)}\, dS_A \\
& + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(A, B)\varphi(B)\, dS_B\, dS_A,
\end{aligned}$$

---

[1] *Voir* l'article cité du *Bulletin de la Société mathématique*, Chapitre I (§ 1).

d'où nous tirons

$$\begin{aligned}\Theta\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{F}(\mathrm{Y},\mathrm{B})\varphi(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}} &= \frac{\varphi(\mathrm{Y})}{1+\Phi(\mathrm{Y})}+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{N}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\varphi(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}\\ &\quad+2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\Theta\mathrm{G}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\varphi(\mathrm{A})}{1+\Phi(\mathrm{A})}\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}\\ &\quad+2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta\mathrm{G}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{N}(\mathrm{A},\mathrm{B})\varphi(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}}\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}\\ &= \varphi(\mathrm{Y})+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi(\mathrm{A})\Bigg[\mathrm{N}(\mathrm{Y},\mathrm{A})+\frac{2\Theta\mathrm{G}(\mathrm{Y},\mathrm{A})}{1+\Phi(\mathrm{A})}\\ &\qquad\qquad+2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta\mathrm{G}(\mathrm{Y},\mathrm{B})\mathrm{N}(\mathrm{B},\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}}\Bigg]d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},\end{aligned}$$

et ce dernier résultat, obtenu à l'aide de la formule (16), se réduit à $\varphi(\mathrm{Y})$ d'après la formule (18). Ainsi la fonction u donnée par la formule (23) est bien identique à l'unique solution de notre problème.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général du paragraphe 2. Choisissons comme au paragraphe 3 la fonction χ; soit en outre $\omega(\mathrm{Y})$ une fonction remplissant sur $\mathcal{S}$ une condition de Hölder, et telle qu'on ait partout

$$\omega(\mathrm{Y}) \leqq \psi(\mathrm{Y}),$$

en supposant pourtant que $\omega-\psi$ et $c-\chi$ ne sont pas identiquement nuls ensemble. Les équations du problème s'écrivent

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u-\chi u &= f-\chi u,\\ \Theta u-\omega u &= \varphi-\omega u.\end{aligned}$$

Nous bornons d'abord notre recherche aux fonctions u qui, sur $\mathcal{S}$, se réduisent à des fonctions remplissant des conditions de Hölder. Si alors $\mathrm{F}(\mathrm{X},\Xi)$ est la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{F}v-\chi v$ et $\Theta v-\omega v$, les conditions ci-dessus entraînent, d'après ce qui précède,

$$(24)\qquad \begin{aligned}u(\mathrm{X}) &= -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{A})[f(\mathrm{A})-\chi(\mathrm{A})u(\mathrm{A})]\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}\\ &\quad+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{B})[\varphi(\mathrm{B})-\omega(\mathrm{B})u(\mathrm{B})]\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}}.\end{aligned}$$

Cette équation intégrale, à laquelle la théorie ordinaire de Fredholm est applicable, équivaut entièrement à notre problème; en effet toute solution u de cette équation (qu'il y en ait une ou plusieurs) est continue; d'après les propriétés établies précédemment au sujet de F, les termes qui figurent au second membre de (24) remplissent alors une condition de Hölder avec n'importe quel exposant inférieur à *un*, et il en est par suite de même pour u; donc les conditions imposées dans $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{S}$ sont remplies, et par suite u est une solution de notre problème (il résulte alors aussi des paragraphes 4 et 5 que les dérivées de u remplissent dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ des conditions de Hölder).

La restriction que les valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$ doivent remplir une condition de Hölder peut elle-même être abandonnée; il suffit que ces valeurs soient continues sans plus. Ce sera certain si l'on montre que, au cas où la fonction φ serait seulement continue et où le problème du paragraphe 5 aurait néanmoins une solution, celle-ci serait encore donnée par la formule (23). Or si l'on remplace φ par une suite uniformément convergente de fonctions φ_n remplissant des conditions de Hölder, il est évident que les fonctions u_n obtenues tendent uniformément vers une limite u, qui satisfait à l'équation (23) si l'on suppose que la limite des φ_n est la fonction φ donnée. Mais, puisque le problème donné admet une solution, que nous nommerons pour un instant v, il est bien certain que $v = \lim u_n$; en effet, d'une part l'équation $\mathcal{F}(v - u_n) = 0$ entraîne que le maximum de $v - u_n$, s'il est positif, est atteint sur $\mathcal{S}$, et qu'il en est de même pour le minimum si celui-ci est négatif; si d'autre part M est le maximum de la fonction w, nécessairement partout positive [1], qui remplit dans $\mathcal{D}$ la condition $\mathcal{F}w = 0$ et sur $\mathcal{S}$ la condition $\Theta w = 1$, on voit qu'on a partout

$$|v - u_n| \leqq \mathrm{M} \text{ maximum } |\varphi - \varphi_n|,$$

ce qui achève notre démonstration. Donc v est bien identique à la fonction u donnée par la formule (23).

L'équation (24) donne donc toutes les solutions continues de notre problème, et l'on peut affirmer que les dérivées de toutes ces solutions remplissent des conditions de Hölder.

Même si φ est continu sans plus, ainsi que f, on peut vérifier, à

---

[1] Passages cités dans la dernière note du paragraphe 5.

l'aide de la formule démontrée au paragraphe suivant, que toute solution de l'équation (24) satisfait à toutes les équations analogues obtenues en modifiant le choix des fonctions χ et ω, qui déterminent la fonction de Green F.

8. **Relations entre fonctions de Green.** — Supposons que le problème homogène correspondant aux opérations $\mathcal{F}u - \chi^{\star}u$ et $\Theta u - \omega^{\star}u$ n'ait que la solution zéro. D'après ce qui précède, si l'on considère la relation

$$\begin{aligned}F(X, \Xi) - F^{\star}(X, \Xi) = &-\int_{\mathfrak{O}}^{(m)} F(X, A)[\chi(A) - \chi^{\star}(A)]F^{\star}(A, \Xi)\, dV_A \\ &+\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B)[\omega(B) - \omega^{\star}(B)]F^{\star}(B, \Xi)\, dS_B\end{aligned}$$

comme une équation contenant l'inconnue $F^{\star}$, cette équation de Fredholm a une et une seule solution, et l'on vérifie immédiatement que $F^{\star}$ *est la fonction de Green relative aux opérations* $\mathcal{F}u - \chi^{\star}u$ *et* $\Theta u - \omega^{\star}u$. En particulier on a

$$F(X, \Xi) - F^{\star}(X, \Xi) = O[L^{2-m}(X, \Xi)].$$

9. **Problème adjoint.** — On nomme *problème adjoint* au problème donné celui de trouver une fonction $v(X)$ qui satisfasse l'équation de Fredholm

$$\begin{aligned}(25)\qquad v(X) = &-\int_{\mathfrak{O}}^{(m)} F(A, X)[f_1(A) - \chi(A)v(A)]\, dV_A \\ &+\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(B, X)[\varphi_1(B) - \omega(B)v(B)]\, dS_B,\end{aligned}$$

où f_1 est une fonction donnée et continue d'un point de $\mathfrak{O} + \mathfrak{S}$, pendant que φ_1 est une fonction donnée et continue d'un point de $\mathfrak{S}$. D'après le paragraphe précédent, l'ensemble des solutions de ce problème ne dépend pas du choix des fonctions χ et ω, qui déterminent F.

Considérons en particulier le *problème adjoint homogène*, c'est-à-dire celui où les fonctions données f_1 et φ_1 sont nulles; soit v une solution quelconque de ce problème. On constate aussitôt que les fonctions $v'(X) = \chi(X)v(X)$ et $w'(Y) = -\omega(Y)v(Y)$ satisfont à un système de deux équations intégrales homogènes, et ce système n'est autre que le *système associé* (¹) à l'équation (24) : l'ensemble des solutions de ce système se réduit donc au même nombre de solutions linéairement indépendantes que l'ensemble des solutions du problème homogène correspondant au problème donné. D'ailleurs à toute solution v', w' correspond la fonction

$$v(x) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(A, X)v'(A)\,dV_A + \int^{(m-1)} F(B, X)w'(B)\,dS_B,$$

qui satisfait à notre problème homogène adjoint, et qui n'est identiquement nulle que si v' et w' le sont aussi, car on lit sur nos équations intégrales les identités $v' = \chi v$, $w' = -\omega v$. Donc *le problème homogène adjoint et le problème homogène qui correspond au problème donné, ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes.*

D'après ce qu'on vient de voir, si le problème homogène correspondant au problème donné a des solutions non nulles, *les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné* sont que, pour toute solution v du problème adjoint homogène, on ait l'identité

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \chi(X)v(X)\left[\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)f(A)\,dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, B)\varphi(B)\,dS_B\right] dV_X \\
+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \omega(Y)v(Y)\left[\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(Y, A)f(A)\,dV_A\right. \\
\left. - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(Y, B)\varphi(B)\,dS_B\right] dS_Y = 0.
\end{aligned}$$

Mais on peut ici changer l'ordre des intégrations; en tenant compte de l'équation intégrale de v, cela donne

$$(26) \qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} vf\,dV - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} v\varphi\,dS = 0.$$

Plus généralement on a, entre des solutions quelconques des équa-

(¹) *Journ. de Math.*, t. 11, 1932, p. 389 à 416, spécialement Chapitre I (§ 8).

tions (24) et (25), l'identité

$$(27) \qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} (v f - u f_1)\, dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} (v \varphi - u \varphi_1)\, dS,$$

que nous pouvons nommer une *formule de Green*. Pour démontrer cette formule, nous multiplions d'abord les deux membres de (24) par $[\chi(X) v(X) - f_1(X)]\, dV_X$, ceux de (25) par $[f(X) - \chi(X) u(X)]\, dV_X$, nous ajoutons membre à membre et nous intégrons dans $\mathcal{D}$: cela nous fournit une expression du premier membre de (27). On trouve ensuite pour le second membre de (27) une expression identique à la précédente, en multipliant les deux membres de (24) par

$$[\omega(X) v(X) - \varphi_1(X)]\, dS_X,$$

ceux de (25) par $[\varphi(X) - \omega(X) u(X)]\, dS_X$, puis en ajoutant membre à membre et en intégrant sur $\mathcal{S}$.

10. **Retour au premier système d'équations intégrales.** — Pour montrer que les équations (5) à (7) nous donnent toujours toutes les solutions du problème donné, et une seule fois chaque solution, nous pouvons procéder comme au paragraphe 7. Autrement dit, nous écrivons les équations données sous la forme

$$\mathcal{F} u - \chi u = f - \chi u, \qquad \Theta u - \omega u = \varphi - \omega u;$$

puisque nous savons (§ 7) que la fonction u remplit nécessairement une condition de Hölder dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, cette fonction u se trouve (§ 5) en joignant à l'équation (5) les deux équations

$$\rho = f - \chi u,$$

$$\sigma(Y) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\Theta G(Y, A) - \omega(Y) G(Y, A)] \rho(A)\, dV_A$$
$$+ 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [\Theta G(Y, B) - \omega(Y) G(Y, B)] \sigma(B)\, dS_B = \varphi(Y) - \omega(Y) u(Y),$$

et notre raisonnement montre même qu'à cette solution u correspond ainsi un seul système de fonctions ρ et σ; or ces équations forment avec l'équation (5) un système exactement équivalent au système [(5) à (7)], comme il est évident. Réciproquement nous savons déjà que toute fonction u qui fait partie d'une solution des équations (5) à (7), est une solution du problème. Notre démonstration est donc faite.

Nous pouvons exprimer $\rho(X)$ et $\sigma(Y)$ à l'aide des fonctions $\sigma(Y, \Xi)$ et $N(Y, \Upsilon)$ du paragraphe 6. Pour cela nous remplaçons dans l'équation (23) la fonction F par ses expressions (13) et (21), ce qui donne

$$\begin{aligned}
u(X) = &-\int_{\varpi}^{(m)}\left[G(X, \Xi) + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\sigma(B, \Xi)\, dS_A\right] \\
&\quad\times [f(\Xi) - \chi(\Xi)\, u(\Xi)]\, dV_\Xi \\
&+ 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\left[\frac{G(X, \Upsilon)}{1+\Phi(\Upsilon)} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\, N(B, \Upsilon)\, dS_B\right] \\
&\quad\times [\varphi(\Upsilon) - \chi(\Upsilon)\, u(\Upsilon)]\, dS_\Upsilon \\
= &-\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)[f(A) - \chi(A) u(A)]\, dV_A \\
&+ 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\left\{\frac{\varphi(B) - \chi(B)\, u(B)}{1+\Phi(B)}\right. \\
&\qquad + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} N(B, \Upsilon)[\varphi(\Upsilon) - \chi(\Upsilon)\, u(\Upsilon)]\, dS_\Upsilon \\
&\qquad \left. - \int_{\varpi}^{(m)} \sigma(B, A)[f(A) - \chi(A)\, u(A)]\, dV_A\right\} dS_B,
\end{aligned}$$

car toutes les intégrations superposées sont permutables, d'après l'étude de $\sigma(A, \Xi)$ faite au paragraphe 7. On voit que notre fonction u est mise ainsi sous la forme (5), et on lit sur cette formule les valeurs des fonctions $\rho(X)$ et $\sigma(Y)$ [1].

11. **Opérations $\mathcal{G}$ et Z.** — Si les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des

$$b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$$

existent et sont continues, on peut introduire l'*opération adjointe* à l'opération $\mathcal{F}$, savoir l'opération

$$\mathcal{G} v = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right) v\right] + cv;$$

[1] La marche ici employée doit être substituée à ce qui est dit dans l'article cité du *Bull. des Sc. math.*, t. 56, 1932, Chapitre IV (§ 10).

cette opération peut aussi être prise dans un sens généralisé, comme l'opération $\mathcal{F}$.

Si en outre les fonctions ψ_α ont, par rapport aux paramètres, des dérivées qui remplissent une condition de Hölder, nous définissons sur $\mathcal{S}$ l'opération Z (dzêta) par la relation

$$Zv = \sum_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta}(a_{\alpha\beta} v) - \frac{1}{\Omega} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha}(\psi_\alpha v) + (\psi - \Sigma_\alpha b_\alpha \varpi_\alpha) v;$$

nos hypothèses sur $\mathcal{S}$ sont insuffisantes pour introduire les dérivées covariantes, mais l'expression ci-dessus est invariante, ainsi qu'on le voit en considérant le cas général comme limite de cas dans lesquels la dérivée covariante existe.

Quand les opérations $\mathcal{G}$ et Z sont appliquées à une fonction de deux points, nous convenons qu'elles portent sur le second point.

Si des fonctions u et v et leurs dérivées jusqu'au second ordre sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, on vérifie immédiatement la formule

$$(28) \qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} (v\mathcal{F}u - u\mathcal{G}v)\,dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} (v\Theta u - uZv)\,dS,$$

que nous nommerons encore *formule de Green*; en effet on constate que les termes où figurent les fonctions ψ_α disparaissent au second membre. Cette formule subsiste même dans des cas plus généraux; il suffit en particulier de supposer [1] que $\mathcal{F}u$ et $\mathcal{G}v$ existent au sens généralisé dans le domaine $\mathcal{D}$ et coïncident, ainsi que les dérivées de u et de v, avec des fonctions continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

12. Théorème. — *Supposons que la fonction de Green* F(X, Ξ), *relative aux opérations* $\mathcal{F}$ *et* Θ, *existe. Alors si les hypothèses dans lesquelles nous venons de définir les opérations* $\mathcal{G}$ *et* Z *sont satisfaites, et si m est égal à deux ou à trois, il suffit d'échanger les rôles des deux points, dans la fonction* F, *pour obtenir la fonction de Green relative aux opérations* $\mathcal{G}$ *et* Z.

Supposons d'abord que les hypothèses du paragraphe 5 soient satisfaites pour les opérations $\mathcal{F}$ et Θ d'une part, et pour les opérations $\mathcal{G}$

(1) *Loc. cit.*, Chapitre IV (§ 9).

et Z d'autre part. Soit alors $F_1(X, \Xi)$ la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{G}$ et Z, considérées comme portant sur le second point.

Nous savons alors (§ 7) que les dérivées de F par rapport aux x_α sont continues en tout point de $\mathcal{D} + \mathcal{S} - \Xi$, et que les dérivées de F_1 par rapport aux ξ_α sont continues en tout point de $\mathcal{D} + \mathcal{S} - X$. Isolons alors les points X et Ξ par des circonférences si $m = 2$, ou par des sphères si $m = 3$, C et Γ de rayons infiniment petits; sur C et Γ nous définirons encore des opérations Θ et Z en convenant seulement que les fonctions ψ et ψ_α sont nulles. On a (§ 11)

$$\int_{C+\Gamma}^{(m-1)} [F_1(X, A)\Theta F(A, \Xi) - F(A, \Xi)ZF_1(X, A)]dS_A = 0,$$

et cette relation, d'après un calcul classique, donne à la limite

$$F(X, \Xi) = F_1(X, \Xi).$$

Abandonnons maintenant les hypothèses du paragraphe 5. En choisissant convenablement les fonctions χ et ω, ces hypothèses seront satisfaites à la fois par les opérations $\mathcal{F}u - \chi u$ et $\Theta u - \omega u$ d'une part, et d'autre part par les opérations qui correspondent à celles-ci par le procédé du paragraphe 11 et qui sont $\mathcal{G}v - \chi v$ et $Zv - \omega v$. La formule du paragraphe 8 permet d'achever alors la démonstration du théorème énoncé.

13. **Remarque.** — Ce théorème nous montre que, si la fonction $\varphi_1(Y)$ remplit sur $\mathcal{S}$ une condition de Hölder, le problème adjoint introduit au paragraphe 9 est identique à celui de trouver une fonction v, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et telle qu'on ait

$$\mathcal{G}v = f_1 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \; Zv = \varphi_1 \quad \text{sur } \mathcal{S}.$$