

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

CHARLES H. ROWE

**Tétraèdres inscrits dans une quadrique  $Q$  et circonscrits  
à une autre quadrique  $Q_1$**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 51 (1934), p. 153-198

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1934\\_3\\_51\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__153_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TÉTRAÈDRES

## INSCRITS DANS UNE QUADRIQUE Q

ET

## CIRCONSCRITS A UNE AUTRE QUADRIQUE Q<sub>1</sub>

PAR M. B. GAMBIER

(Lille)

ET M. CHARLES H. ROWE

(Dublin).

---

1. **Introduction.** — Nous allons montrer que, deux quadriques  $Q$ ,  $Q_1$  quelconques étant données, *il existe  $\infty^3$  tétraèdres dont les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sont situés sur  $Q$ , tandis que les faces opposées  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sont tangentes à  $Q_1$ ; il existe un seul cas exceptionnel où l'on obtient  $\infty^3$  tétraèdres : c'est celui où  $Q$  et  $Q_1$  ont quatre génératrices communes.* Dans le cas des quadriques *quelconques*, les quatre paramètres permettent de choisir arbitrairement deux sommets sur  $Q$  ou, ce qui revient au même, deux faces tangentes à  $Q_1$  : on obtient alors, *en général*, deux tétraèdres seulement; nous préciserons, par une discussion minutieuse le cas où la donnée de  $A$ ,  $B$  ou des deux faces  $\gamma$ ,  $\delta$  permet d'obtenir  $\infty^1$  ou même  $\infty^2$  tétraèdres. D'autre part, bien que la donnée de  $A$  et de la face opposée  $\alpha$  mette en jeu quatre paramètres, on ne peut choisir arbitrairement  $A$  et  $\alpha$  : *si  $A$  est donné, la face  $\alpha$  doit passer par un point fixe  $A_1$ ; corrélativement, si  $\alpha$  est donnée,  $A$  doit se trouver dans un plan fixe  $\alpha_1$ ; les correspondances  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha, \alpha_1)$  sont comprises dans deux homographies, inverses l'une de l'autre, conservant chaque sommet du tétraèdre conjugué commun, homographies*

qui restent les mêmes si l'on prend tous les couples de quadriques d'un certain groupe donnant le même tétraèdre conjugué et le même module pour leur intersection (ou leur développable circonscrite).

L'idée de ce travail est due à M. Rowe, qui a obtenu le résultat fondamental relatif au cas de  $\infty^4$  ou  $\infty^5$  tétraèdres et donné les démonstrations géométriques correspondantes; M. Rowe a signalé aussi divers résultats relatifs aux tétraèdres de l'espèce indiquée dont les sommets doivent, non seulement être sur Q, mais encore sur une cubique gauche ou sur une biquadratique donnée *a priori* sur Q. M. Gambier a eu l'idée de reprendre, pour le cas de  $\infty^4$  tétraèdres, les démonstrations imaginées par M. Rowe pour  $\infty^5$  tétraèdres et est ainsi arrivé à l'homographie  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha_1, \alpha)$ . Un échange de vues, par correspondance entre les deux auteurs, a conduit à la forme actuelle du Mémoire (1).

L'un des résultats de ce travail est que, si  $p$  équations renferment  $p+q$  inconnues ( $q$  entier positif ou nul), la solution générale ne dépend pas nécessairement de  $q$  paramètres : elle peut, par exemple, ne pas exister, sauf si les coefficients des équations sont assujettis à certaines conditions en nombre  $h$ , et alors elle dépend de  $q+h$  arbitraires (2). La détermination du nombre  $h$  est l'une des plus grosses difficultés : on verra la méthode employée dans le cas d'une cubique au paragraphe 11.

## 2. Dénombrements à priori. — Comparons le plan et l'espace à

(1) Aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3<sup>e</sup> série, 18, 1899, p. 67-69, Fontené démontre très rapidement par voie *analytique* le résultat relatif à  $\infty^5$  tétraèdres, et signale pour le cas de  $\infty^4$  tétraèdres, la correspondance  $(A, A_1)$ ; mais il n'indique aucune des démonstrations géométriques de M. Rowe et n'étudie pas à fond la figure si intéressante que l'on obtient. Au tome 2, 4<sup>e</sup> série, 1902, de la même Collection, Duporcq signale par une voie analytique le résultat retrouvé géométriquement par M. Rowe sur les tétraèdres inscrits dans une cubique et circonscrits à une quadrique; mais bien qu'extrêmement élégante, la démonstration de Duporcq ne donne pas le résultat complet.

(2) Ces considérations s'appliquent non seulement au problème traité dans ce Mémoire, mais encore à un problème différent qui s'introduit au cours de la discussion relative aux tétraèdres ayant une arête commune. Il s'agit du problème suivant : on donne deux quadriques Q, Q<sub>1</sub>; on cherche une génératrice G de Q, une génératrice G<sub>1</sub> de Q<sub>1</sub>, telles que les plans menés par G et par les points où G<sub>1</sub> perce Q soient tangents à Q<sub>1</sub> (en un point non situé sur G<sub>1</sub>). On a deux équations pour deux inconnues et le problème est, en général, impossible.

trois dimensions. Dans un plan, le total d'un triangle ABC (6 paramètres), d'une conique Γ circonscrite (2 paramètres), d'une conique Γ<sub>1</sub> inscrite (2 paramètres), dépend évidemment de 10 paramètres indépendants, tels que la variation de l'un quelconque modifie le total. Sans entrer plus avant dans l'étude, deux hypothèses seules sont possibles (sans savoir si elles sont ou non réalisées):

a. les 10 paramètres en jeu permettent de choisir arbitrairement Γ et Γ<sub>1</sub>; il existe un nombre *fini* de triangles associés à Γ et Γ<sub>1</sub>;

b. Γ, Γ<sub>1</sub> ne peuvent être choisies arbitrairement et satisfont à *p* conditions *a priori*; par contre, à un tel couple Γ, Γ<sub>1</sub> correspondent ∞<sup>*p*</sup> triangles; d'ailleurs, le choix de A sur Γ fixe les tangentes AB, AC à Γ<sub>1</sub>, de sorte que *p* est égal à 1.

L'étude classique montre que *les deux hypothèses sont réalisées, mais que la première donne des triangles impropres (A, B confondus avec le point de contact avec Γ d'une tangente commune à Γ et Γ<sub>1</sub>); la seconde seule donne des triangles véritables.* On peut mettre le problème en équation ainsi : du point inconnu A de Γ, on mène les tangentes à Γ<sub>1</sub>, qui recouper Γ en B et C; la droite BC enveloppe une conique et a des coefficients exprimés rationnellement au moyen du paramètre unicusale *t* de A; exprimant que BC touche Γ<sub>1</sub>, on a une équation en *t*, de degré 4, ne différant de l'équation donnant les points de contact avec Γ des tangentes communes, *que par un facteur numérique en t, mais fonction des coefficients de Γ et Γ<sub>1</sub>.* Suivant que ce facteur est nul ou non, on obtient la seconde hypothèse, ou simplement la première. Rappelons, pour la suite, la forme de ce facteur. Si l'on définit Γ, Γ<sub>1</sub> par leurs équations *ponctuelles*,

$$(\Gamma) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

$$(\Gamma_1) \quad A_1x^2 + \dots = 0,$$

appelons Δ, Δ<sub>1</sub> les discriminants de Γ, Γ<sub>1</sub>, puis *a, a', a'', b, b', b''* les coefficients de A, . . . , B'' dans le développement de Δ suivant une rangée, et de même *a<sub>1</sub>, . . .*; l'équation en λ exprimant que Γ — λΓ<sub>1</sub> = 0 représente deux droites est

$$\Delta - \lambda(A_1a + \dots + 2B_1b + \dots) + \lambda^2(Aa_1 + \dots) - \lambda^3\Delta_1 = 0.$$

La condition des triangles *propres* (l'autre cas étant désormais exclu) est

$$(\Sigma \lambda_1)^2 - 4 \Sigma \lambda_2 \lambda_3 = 0,$$

ou

$$(Aa_1 + \dots + 2Bb_1 + \dots)^2 - 4 \Delta_1 (A_1 a + \dots + 2B_1 b + \dots) = 0.$$

Si  $\Gamma_1$  se réduit à deux droites,  $\Delta_1$  est nul et l'équation  $Aa_1 + \dots = 0$ , trouvée dans ce cas, exprime que le point de concours de ces deux droites est sur  $\Gamma$ ; si c'est au contraire  $\Gamma$  qui dégénère en deux droites, on peut supposer  $\lambda_3 = 0$ , la relation devient  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0$ : l'une des deux droites est tangente à  $\Gamma_1$ ; (si  $\lambda_3 = 0$  est racine double, on trouve  $\lambda_1 = 0$  de sorte que, finalement, on obtient deux droites concourant sur  $\Gamma_1$ , l'une étant tangente à  $\Gamma_1$ ).

Si l'on définit au contraire  $\Gamma, \Gamma_1$  par leurs équations *tangentielles*

$$(\bar{\Gamma}) \quad \bar{A}u^2 + \dots + 2\bar{B}vw + \dots = 0,$$

$$(\bar{\Gamma}_1) \quad \bar{A}_1u^2 + \dots + 2\bar{B}_1vw + \dots = 0,$$

on forme l'équation en  $\mu$  du faisceau tangentiel  $\bar{\Gamma} - \mu\bar{\Gamma}_1 = 0$  et la condition est cette fois

$$(\Sigma \mu_2 \mu_3)^2 - 4 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \Sigma \mu_1 = 0,$$

ou

$$(\bar{A}_1 \bar{a} + \dots)^2 - 4 \bar{\Delta} (\bar{A} \bar{a}_1 + \dots) = 0.$$

Si donc  $\Gamma$  dégénère en deux points ( $\bar{\Delta} = 0$ ), la droite qui les joint est tangente à  $\Gamma_1$ ; si  $\Gamma_1$  dégénère en deux points, l'un d'eux est situé sur  $\Gamma$ .

Dans l'espace, la donnée du tétraèdre ABCD (12 paramètres), de la quadrique Q circonscrite (5 paramètres), de la quadrique  $Q_1$  inscrite (5), fait jouer 22 paramètres irréductibles. Or la donnée de deux quadriques *quelconques* fait jouer 18 paramètres: cette fois, nous pouvons choisir Q et  $Q_1$  *arbitrairement* et il existe  $\infty^4$  tétraèdres associés à Q et  $Q_1$ ; on peut ensuite choisir arbitrairement l'arête AB (ce qui fixe à la fois A et B et les faces  $\gamma, \delta$ ); mais, par analogie avec le plan, on ne peut choisir simultanément A et  $\alpha$ , bien que A d'une part,  $\alpha$  de l'autre fassent jouer séparément deux paramètres: en effet, soit  $\Gamma$  la conique section de Q par  $\alpha$ , S le cône de sommet A et base  $\Gamma$ ,  $S_1$  le cône de sommet A circonscrit à  $Q_1$ ,  $\Gamma_1$  la conique section de  $S_1$  par  $\alpha$ ; le triangle BCD est inscrit dans  $\Gamma$  et circonscrit à  $\Gamma_1$ ; l'invariant, pré-

cédemment calculé, relatif à  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  (ou aux sections de S et S<sub>1</sub> par un même plan) est nul et ceci donne une relation entre A et  $\alpha$ .

Les calculs donnant explicitement cette relation sont assez pénibles et ont sans doute arrêté les auteurs précédents; pour arriver à les faire aisément, il suffit de faire une *expérience* simple; en supposant Q et Q<sub>1</sub> se raccordant le long d'une conique; double avantage: d'abord confirmer les prévisions, puis découvrir certaines particularités du calcul du cas général.

3. **Couple de quadriques Q, Q<sub>1</sub> ayant une conique de rapport.** — Une transformation homographique nous donne deux sphères concentriques (distinctes):

$$\begin{aligned} (Q) \quad & x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \\ (Q_1) \quad & x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (R^2 \neq r^2). \end{aligned}$$

On peut se borner au point A (o, o, R); si  $\alpha$  n'a pas sa trace horizontale isotrope, une rotation d'ensemble autour de Oz ramène  $\alpha$  à avoir sa trace horizontale parallèle à Oy, d'où

$$(\alpha) \quad x \cos \varphi + z \sin \varphi - r = 0.$$

On forme sans peine les équations de S, S<sub>1</sub> et nous nous bornons à leur section S' ou S'<sub>1</sub> par le plan de l'infini

$$\begin{aligned} (S') \quad & (R \sin \varphi - r)(x^2 + y^2 + z^2) - 2Rz(x \cos \varphi + z \sin \varphi) = 0, \\ (S'_1) \quad & (x^2 + y^2)(R^2 - r^2) - r^2 z^2 = 0. \end{aligned}$$

L'équation en  $\lambda$  du faisceau  $S' - \lambda S'_1 = 0$  est

$$\begin{aligned} & [R \sin \varphi - r + \lambda(R^2 - r^2)] \\ & \times [\lambda^2 r^2 (R^2 - r^2) + \lambda \{ (R^2 - r^2)(R \sin \varphi + r) + r^2 (R \sin \varphi - r) \} \\ & \quad + R^2 - r^2] = 0. \end{aligned}$$

L'équation de condition se décompose

$$(R \sin \varphi + 3r)(R \sin \varphi - r) = 0.$$

La solution  $R \sin \varphi - r = 0$  est à rejeter: elle exprime que le plan  $\alpha$  passe en A; ce facteur parasite se présente dans le cas général ( $\Gamma_1$  se réduirait alors à une droite double issue de A, joignant A au point où  $\alpha$

touche  $Q_1$ ). Nous prenons donc

$$\sin \varphi = \frac{-3r}{\Omega}.$$

Cela exprime que le point de contact de  $\alpha$  avec  $Q_1$  est dans le plan horizontal  $z = -\frac{3r^2}{R}$ , donc que le plan  $\alpha$  passe par le point  $A_1 \left(0, 0, -\frac{R}{3}\right)$ ; si l'on remplace  $Q_1$  par une autre sphère concentrique,  $A_1$  ne change pas. Tous ces résultats confirment nos prévisions : elles sont donc vraies, même dans le cas général.

La correspondance  $(A, A_1)$  est une homothétie de pôle  $O$  et de rapport d'homothétie  $(\overline{OA} : \overline{OA_1}) = -3$ ; inversement,  $\alpha$  étant donné,  $A$  se trouve dans un plan  $\alpha_1$  tel que la correspondance  $(\alpha_1, \alpha)$  soit la même homothétie que la correspondance  $(A, A_1)$ . Donc dans le cas général, quand  $Q$  et  $Q_1$  sont deux quadriques quelconques se raccordant le long d'une conique d'un plan  $\omega$ , le cône circonscrit commun ayant son sommet en  $O$ , la correspondance  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha_1, \alpha)$  est l'homologie de pôle  $O$ , de plan directeur  $\omega$ ;  $OAA_1$  perçant en  $\omega$  en  $O'$ , le rapport anharmonique  $(OO'AA_1)$  est égal à  $(-3)$ .

On remarque, en revenant au cas des sphères concentriques, que  $O$  est à la distance  $r$  de chaque face, et en vertu de  $\overline{OA} : \overline{OA_1} = -3$ , chaque sommet est à la distance  $4r$  de la face opposée; les quatre faces sont équivalentes,  $O$  est centre de gravité du tétraèdre;  $B'$  étant milieu de l'arête  $AB$ ,  $B''$  celui de l'arête  $CD$ , les droites telles que  $B'B''$ ,  $C'C''$ ,  $D'D''$  se coupent en  $O$  et sont de plus perpendiculaires communes du couple d'arêtes opposées correspondant; elles sont donc axes de symétrie (deux à deux rectangulaires) du tétraèdre  $ABCD$ , de sorte que les arêtes opposées sont égales et les faces toutes égales et non simplement équivalentes. Les plans menés par les arêtes parallèlement à l'arête opposée forment un parallélépipède rectangle; réciproquement si dans un parallélépipède rectangle on prend dans deux faces parallèles, les diagonales non parallèles, elles donnent les 4 sommets d'un tétraèdre de l'espèce indiquée ici. De même, si dans un tétraèdre, deux des 3 points : centre de gravité, centre de la sphère inscrite, centre de la sphère circonscrite, coïncident, le troisième est lui-même réuni aux précédents. Ces tétraèdres ne sont réels que si  $R$  surpasse  $3r$

et ont des faces à angles tous aigus. Le tétraèdre possède trois séries de géodésiques fermées, comme on le voit en développant le tétraèdre sur un plan de façon à obtenir un parallélogramme.

Le cas  $R = 3r$  donne  $\infty^3$  tétraèdres réguliers; il y a à expliquer le paradoxe apparent, car on semble n'avoir plus les  $\infty^4$  tétraèdres du cas général. L'emploi du paramètre  $\varphi$  donne en effet simplement  $\sin \varphi = -1$ ; mais l'emploi de la cote  $z$  du point de contact de  $\alpha$  avec  $Q_1$  donne  $z = -r$ , de sorte que l'on retrouve  $\infty^1$  points de contact répartis sur les deux génératrices isotropes issues sur  $Q_1$  du point  $(0, 0, -r)$ : mais alors le plan  $\alpha$  a sa trace horizontale isotrope, et l'on ne peut plus employer la marche adoptée pour simplifier les calculs.

4. Cas général; correspondances  $(A, A_1)$  et  $(\alpha, \alpha_1)$ . — Voici d'abord un PREMIER LEMME évident: *un quadrilatère gauche et une conique, qui en rencontre chacun des côtés en un point, déterminent une quadrique et une seule.*

SECOND LEMME. — *On donne une quadrique  $Q_1$ , une conique  $q$  située dans un plan tangent  $\alpha$  de  $Q_1$  et ne passant pas au point de contact  $\omega$  de  $Q_1$  et  $\alpha$ ; par les côtés CD, DB, BC d'un triangle variable BCD inscrit dans  $q$  on mène à  $Q_1$  les plans tangents autres que  $\alpha$ : leur point commun A a pour lieu la quadrique  $\bar{Q}$  déterminée par  $q$  et les quatre génératrices de  $Q_1$ , non situées dans  $\alpha$ , issues des points où  $q$  perce  $Q_1$ .*

Laissons C et D fixes sur  $q$ ; faisons mouvoir B sur  $q$ ; les rayons CB et DB se correspondent homographiquement; le plan CDA est le plan fixe  $\beta$  tangent à  $Q_1$ , autre que  $\alpha$ , issu de CD; le plan CBA enveloppe le cône de sommet C circonscrit à  $Q_1$ , de sorte que les traces de ce plan CB et CA sur les deux plans tangents fixes  $\alpha$  et  $\beta$  de ce cône se correspondent homographiquement; de même DB et DA. Conclusion: dans le plan fixe  $\beta$ , les rayons CA et DA se correspondent homographiquement et A engendre une conique  $q_1$  passant en C et D (<sup>1</sup>). Si le point B

(<sup>1</sup>)  $\omega$  étant le point où  $\alpha$  touche  $Q_1$ , le rayon  $C\omega$  perce  $q$  en un point  $B_1$  que nous avons supposé distinct de  $\omega$ ; le rayon CA prend alors la direction CD; quant au rayon DA, il prend, puisque  $DB_1$  est distinct de  $D\omega$ , une direction autre que DC; par suite la conique  $q_1$  est indécomposable. Au contraire, si  $q$  passe en  $\omega$ , le rayon CD a pour homologue le rayon DC et  $q_1$  se réduit à une droite (en dehors de CD): ce cas sera examiné à part.



vient en l'un des 4 points *distincts* (puisque  $q$  ne passe pas au point  $\omega$  où  $\alpha$  touche  $Q_1$ ) M, N, P, R où  $q$  rencontre les deux génératrices MN, PR de  $Q_1$  situées dans  $\alpha$ , les plans tangents à  $Q_1$  menés par CM et DM contiennent tous deux la génératrice  $MM'$ , autre que MN, de  $Q_1$  issue de M; donc la conique  $q_1$  passe au point  $M_1$  où  $MM'$  perce le plan  $\beta$  et a 6 points (C, D,  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $P_1$ ,  $R_1$ ) communs avec  $\bar{Q}$ : elle n'est donc autre que la section de  $\bar{Q}$  par le plan tangent à  $Q_1$  (autre que  $\alpha$ ) issu de CD.

*Ce raisonnement prouve, en passant, que si deux quadriques  $\bar{Q}$  et  $Q_1$  ont quatre génératrices communes, il existe  $\infty^3$  tétraèdres inscrits dans  $\bar{Q}$  et circonscrits à  $Q_1$ ; on coupe en effet  $Q_1$  par un plan tangent  $\alpha$  dont le point de contact  $\omega$  n'est pas sur l'une des génératrices communes;  $\bar{Q}$  est coupée suivant une conique  $q$  ne passant pas en  $\omega$  et l'on choisit arbitrairement B, C, D sur  $q$ : par le second lemme, on déduit de B, C, D le point A. *Corrélativement*, on peut choisir A sur  $\bar{Q}$ , puis les plans  $\beta, \gamma, \delta$  issus de A et tangents à  $Q_1$ : B, C, D étant les points où les droites  $(\gamma, \delta), (\delta, \beta), (\beta, \gamma)$  recouperont  $\bar{Q}$ , le plan BCD est tangent à  $Q_1$ .*

Soit maintenant une quadrique Q n'ayant pas avec  $Q_1$  quatre génératrices communes; considérons une droite *quelconque*, qui coupe Q en C, D et par laquelle on peut mener à  $Q_1$  deux plans tangents  $\alpha, \beta$ . Le plan  $\alpha$  coupe Q suivant une conique  $q$  sur laquelle nous faisons mouvoir un point B': les plans tangents à  $Q_1$ , autres que  $\alpha$ , menés par CD, CB', DB' se recouperont en un point A' dont le lieu est la section  $q_1$ , par le plan  $\beta$ , de la quadrique  $\bar{Q}$  précédemment définie, associée à  $q$  et  $Q_1$ . La quadrique  $\bar{Q}$  est distincte de Q, car  $Q_1$  et  $\bar{Q}$  ont quatre génératrices communes; donc, *en général*,  $q_1$  n'est pas située sur Q <sup>(1)</sup> et la

---

(1) Nous étudierons avec soin le cas d'exception, qui correspond à  $\infty^1$  tétraèdres ayant en commun les sommets C, D et les plans des faces issues de l'arête CD. On voit *a priori* que la quadrique  $\bar{Q}$  ne se décomposant pas, c'est-à-dire la conique  $q$  ne passant pas au point  $\omega$  où MN et PR concourent, la quadrique Q peut contenir  $q_1$ . En effet donnons-nous *a priori*  $Q_1$ , le plan  $\alpha$  tangent à  $Q_1$ , puis la conique  $q$  située dans  $\alpha$  mais ne passant pas en  $\omega$ , et enfin une corde CD quelconque de  $q$ ; la quadrique Q pour l'instant est simplement assujettie à contenir  $q$ ; or la conique  $q_1$ , qui résulte des données, est bisécante à  $q$ ; si nous choisissons la quadrique Q dans le faisceau des quadriques contenant  $q$  et  $q_1$  la propriété annoncée est obtenue. Dans ce cas le plan  $\alpha_1$  coïncide avec le plan  $\beta$  et la quadrique  $Q_2$  qui interviendra plus bas coïncide avec  $Q_1$ .

perce en deux points A', A'', correspondant à deux points B', B'' de q; les tétraèdres CDA'B' et CDA''B'' sont les deux seuls tétraèdres de l'espèce cherchée ayant C, D pour sommets, et  $\alpha$ ,  $\beta$  pour faces. On remarque que A', A'' sont sur la partie de l'intersection de Q et  $\bar{Q}$  autre que q : cette partie est une conique; or les génératrices déjà étudiées, de Q<sub>1</sub> issues de M, N, P, R recourent la biquadratique  $\mathcal{B}$ , commune à Q et Q<sub>1</sub>, en des points M', N', P', R' situés sur le complément de l'intersection de Q et  $\bar{Q}$ , donc dans un même plan  $\alpha_1$ . Le plan  $\alpha_1$  ainsi obtenu correspond d'une façon univoque au plan  $\alpha$  tangent à Q<sub>1</sub> et ne change pas si Q<sub>1</sub> restant fixe, on remplace Q par une quadrique du faisceau ponctuel Q, Q<sub>1</sub>. La conclusion importante qui se dégage de ce résultat est la suivante : quand on se donne le plan  $\alpha$ , tangent à Q<sub>1</sub>, le sommet opposé A se trouve sur la conique découpée sur Q par le plan  $\alpha$ , correspondant à  $\alpha$ . Si donc on donne à la fois  $\alpha$  et  $\beta$  (ce qui donne C et D sur Q), A est situé d'une part dans  $\alpha_1$ , de l'autre dans  $\beta$ , donc aux points où la droite ( $\alpha_1$ ,  $\beta$ ) coupe Q.

Enonçons maintenant la propriété corrélatrice : on sait que Q et Q<sub>1</sub> étant données, il existe 8 quadriques dont chacune, par polarité, échange Q avec Q<sub>1</sub> et réciproquement; H étant l'une, (A, B, C, D), ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ) deviennent respectivement ( $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\delta}$ ) plans tangents de Q<sub>1</sub> et ( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ) points de Q; d'un tétraèdre de l'espèce étudiée, on en déduit donc 8 autres de la même espèce (j'entends inscrits dans Q, et circonscrits à Q<sub>1</sub>). Nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Quand on se donne le point A de Q, le plan  $\alpha$  passe en un point A<sub>1</sub> correspondant univoquement à A et enveloppe le cône circonscrit de A<sub>1</sub> à Q<sub>1</sub>. Si l'on se donne de plus le sommet B sur Q, le plan  $\alpha$  passe par A<sub>1</sub> et par B : on mène donc par B l'un ou l'autre des plans tangents au cône en question.

La construction de A<sub>1</sub> est la suivante : en A se croisent sur Q deux génératrices G', G''; de G' on peut mener à Q<sub>1</sub> deux plans tangents recoupant Q suivant deux génératrices g'', h''; de même G'' fournit g', h'; par chacune de ces génératrices g'', h'', g', h' on mène à Q<sub>1</sub> le nouveau plan tangent respectif : ces quatre plans concourent en A<sub>1</sub>.

Il est nécessaire, pour la suite, d'étudier plus en détail ces correspondances  $(A, A_1), (\alpha, \alpha_1)$ . Nous allons d'abord le faire analytiquement, de façon à prévoir plus aisément les résultats purement géométriques.

5. **Formules relatives aux correspondances  $(A, A_1), (\alpha, \alpha_1)$ .** — Dans le cas où  $Q$  et  $Q_1$  ont leur intersection formée d'une biquadratique sans point double, ou de deux coniques non décomposées (distinctes ou confondues), ou d'un quadrilatère gauche, on peut réduire leurs équations à la forme simultanée

$$\begin{aligned} (Q) \quad & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0. \\ (Q_1) \quad & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0. \end{aligned}$$

(Si ultérieurement, on a besoin, de prendre pour  $Q$  la forme  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$  au lieu de  $\Sigma x^2 = 0$ , il suffira, dans les calculs qui vont être faits, de remplacer, après achèvement,  $x, y, z, t$  par  $x\sqrt{A}, y\sqrt{B}, z\sqrt{C}, t\sqrt{D}$ ;  $u, v, w, h$  par  $\frac{u}{\sqrt{A}}, \frac{v}{\sqrt{B}}, \frac{w}{\sqrt{C}}, \frac{h}{\sqrt{D}}$ ;  $a, b, c, d$  par  $Aa, Bb, Cc, Dd$ ). Nous choisissons un point  $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$  de  $Q$ , un plan  $\alpha, (u_0, v_0, w_0, h_0)$ , tangent à  $Q_1$  : on a  $\Sigma x_0^2 = 0, \Sigma au_0^2 = 0$ . Si l'on pose

$$(1) \quad P_0 \equiv \sum u_0 x_0, \quad \Pi_0 \equiv \sum \frac{x_0^2}{a}$$

les équations des cônes  $S, S_1$  sont

$$\begin{aligned} (S) \quad & P_0(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \\ & - 2(u_0x + v_0y + w_0z + h_0t)(x_0x + y_0y + z_0z + t_0t) = 0, \\ (S_1) \quad & \Pi_0\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d}\right) - \left(\frac{xx_0}{a} + \frac{yy_0}{b} + \frac{zz_0}{c} + \frac{tt_0}{d}\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

et nous pouvons nous borner aux coniques  $s, s_1$  sections de ces cônes par le plan  $t = 0$

$$\begin{aligned} (s) \quad & P_0(x^2 + y^2 + z^2) - 2(u_0x + v_0y + w_0z)(x_0x + y_0y + z_0z) = 0, \\ (s_1) \quad & \Pi_0\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) - \left(\frac{xx_0}{a} + \frac{yy_0}{b} + \frac{zz_0}{c}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour préparer le calcul de l'invariant relatif à  $s$  et  $s_1$  écrivons

$$(2) \quad \begin{cases} A = P_0 - 2u_0x_0, & B = -(\nu_0z_0 + w_0y_0), \\ A' = P_0 - 2\nu_0y_0, & B' = -(\omega_0x_0 + u_0z_0), \\ A'' = P_0 - 2w_0z_0, & B'' = -(u_0y_0 + \nu_0x_0). \end{cases}$$

La quantité  $a$  est égale à

$$P_0^2 - 2P_0(\nu_0y_0 + w_0z_0) - (\nu_0z_0 - w_0y_0)^2;$$

les résultats déjà obtenus permettent de prévoir que seuls les groupes  $u_0x_0$ ,  $\nu_0y_0$ ,  $w_0z_0$ ,  $h_0t_0$  doivent rester dans le résultat final, de sorte que nous n'utiliserons les relations

$$(3) \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 = 0, \quad au_0^2 + b\nu_0^2 + cw_0^2 + dt_0^2 = 0$$

que dans la mesure où elles doivent contribuer à faire apparaître ces groupes  $u_0x_0$ ,  $\nu_0y_0$ ,  $w_0z_0$ ,  $h_0t_0$ . Nous écrivons :

$$(4) \quad \begin{cases} a = (u_0x_0 + h_0t_0)^2 - (\nu_0y_0 + w_0z_0)^2 - (\nu_0z_0 - w_0y_0)^2, \\ a' = (\nu_0y_0 + h_0t_0)^2 - (w_0z_0 + u_0x_0)^2 - (w_0x_0 - u_0z_0)^2, \\ a'' = (w_0z_0 + h_0t_0)^2 - (u_0x_0 + \nu_0y_0)^2 - (u_0y_0 - \nu_0x_0)^2, \\ b = (u_0^2 + \nu_0^2 + w_0^2)y_0z_0 - \nu_0w_0t_0^2 + h_0t_0(\nu_0z_0 + w_0y_0), \\ b' = (u_0^2 + \nu_0^2 + w_0^2)z_0x_0 - w_0u_0t_0^2 + h_0t_0(w_0x_0 + u_0z_0), \\ b'' = (u_0^2 + \nu_0^2 + w_0^2)x_0y_0 - u_0\nu_0t_0^2 + h_0t_0(u_0y_0 + \nu_0x_0). \end{cases}$$

De même, pour  $s_1$ , nous avons

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\Pi_0}{a} - \frac{x_0^2}{a^2}, & B_1 = -\frac{y_0z_0}{bc}, & a_1 = \frac{\Pi_0}{bc} \left( \frac{x_0^2}{a} + \frac{t_0^2}{d} \right), & b_1 = \frac{\Pi_0 y_0 z_0}{abc}, \\ A'_1 = \frac{\Pi_0}{b} - \frac{y_0^2}{b^2}, & B'_1 = -\frac{z_0x_0}{ca}, & a'_1 = \frac{\Pi_0}{ca} \left( \frac{y_0^2}{b} + \frac{t_0^2}{d} \right), & b'_1 = \frac{\Pi_0 z_0 x_0}{abc}, \\ A''_1 = \frac{\Pi_0}{c} - \frac{z_0^2}{c^2}, & B''_1 = -\frac{x_0y_0}{ab}, & a''_1 = \frac{\Pi_0}{ab} \left( \frac{z_0^2}{c} + \frac{t_0^2}{d} \right), & b''_1 = \frac{\Pi_0 x_0 y_0}{abc}. \end{cases}$$

L'équation à former est

$$(6) \quad (Aa_1 + \dots)^2 - 4\Delta_1(A_1a + \dots) = 0.$$

On a aisément

$$(7) \quad \Delta_1 = \frac{\Pi_0^2 t_0^2}{abcd}.$$

Un calcul, un peu long, mais toujours guidé par l'intention de ne conserver, autant que possible, que les groupes  $u_0 x_0, \dots, h_0 t_0$ , donne

$$(8) \quad \frac{A a_1 + \dots}{\Pi_0 t_0^2} = \sum u_0 x_0 \left[ \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{adb} - \frac{1}{bcd} \right]$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} u_0 x_0 (b + c + d - a) + v_0 y_0 (a + c + d - b) \\ + w_0 z_0 (a + b + d - c) + h_0 t_0 (a + b + c - d) \end{array} \right\}}{abcd},$$

$$(9) \quad \frac{A_1 a + \dots}{t_0^2} = \frac{\Sigma u_0^2 x_0^2 (cd + db + bc - ab - ac - ad + a^2) + 2 \Sigma u_0 x_0 v_0 y_0 cd}{abcd}.$$

L'équation (6) devient donc, en supprimant le facteur  $\Pi_0 t_0$  et posant

$$(10) \quad X = u_0 x_0, \quad Y = v_0 y_0, \quad Z = w_0 z_0, \quad T = h_0 t_0,$$

$$(11) \quad [(a + b + c + d)^2 - 4(bc + cd + db) - 4a^2] X^2 + \dots \\ + 2XY[(c - d)^2 - (a - b)^2] + \dots = 0.$$

On vérifie aussitôt que cette équation se décompose en deux facteurs dont l'un  $X + Y + Z + T = 0$  est à rejeter (prévu, grâce à l'exemple simple des deux sphères concentriques) et dont l'autre est

$$(12) \quad [(a + b + c + d)^2 - 4(bc + cd + db) - 4a^2] X + \dots = 0.$$

La vérification est faite complètement; le plan  $\alpha_1$  a pour coordonnées

$$(13) \quad u_1 = u_0 [(a + b + c + d)^2 - 4(bc + cd + db) - 4a^2], \quad v_1 = \dots,$$

et l'on vérifie sans peine que ces formules ne changent pas si l'on remplace  $a, b, c, d$  par  $a + \lambda, b + \lambda, c + \lambda, d + \lambda$ ; de même les coordonnées du point  $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  s'obtiennent par les formules

$$(14) \quad x_1 = x_0 [(a + b + c + d)^2 - 4(bc + cd + db) - 4a^2] \dots$$

Les formules (13), (14) montrent bien que les correspondances  $(\alpha, \alpha_1)$  et  $(A, A_1)$  sont deux *homographies* inverses l'une de l'autre, conservant le tétraèdre conjugué. Si Q reste fixe et si  $Q_1$  décrit le faisceau *tangentiel*  $(Q, Q_1)$  l'homographie  $(A, A_1)$  ne change pas, non plus que l'homographie  $(\alpha, \alpha_1)$ .

La propriété corrélatrice est que ces correspondances ne changent pas si  $Q_1$  restant fixe, on remplace Q par une quadrique du faisceau *punctuel*  $(Q, Q_1)$ .

[ Si nous revenons un instant aux notations

$$(Q) \quad \Sigma A x^2 = 0,$$

$$(Q_1) \quad \Sigma \frac{x^2}{a} = 0,$$

les formules de correspondance deviennent

$$(13') \quad u_1 = u_0 [(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 - 4(BbCc + CcDd + DdBb) - 4A^2a^2] \dots,$$

$$(14) \quad x_1 = x_0 [(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 - 4(BbCc + CcDd + DdBb) - 4A^2a^2] \dots,$$

laisser Q fixe, faire varier Q<sub>1</sub> dans le faisceau tangentiel (Q, Q<sub>1</sub>) revient à laisser A, B, C, D fixes et remplacer a, b, c, d par

$$a_1 = a + \frac{\lambda}{A}, \quad b_1 = b + \frac{\lambda}{B}, \quad c_1 = c + \frac{\lambda}{C}, \quad d_1 = d + \frac{\lambda}{D},$$

de sorte que Aa, Bb, Cc, Dd sont remplacés par Aa<sub>1</sub> = Aa + λ + ...; de même laisser Q<sub>1</sub> fixe et faire varier Q dans le faisceau ponctuel (Q, Q<sub>1</sub>) revient à conserver a, b, c, d et à remplacer A, B, C, D par A<sub>1</sub> = A +  $\frac{\lambda}{a}$  + ... , de sorte que l'on a encore

$$A_1 a = Aa + \lambda + \dots,$$

Si l'on remarque que, multiplier par un facteur constant le premier membre de l'équation de Q ou Q<sub>1</sub>, multiplie Aa, Bb, Cc, Dd par une même constante, on voit qu'au cours des opérations qui consistent à laisser Q fixe et remplacer Q<sub>1</sub> par une quadrique Q'<sub>1</sub> du faisceau *tangentiel* (Q, Q<sub>1</sub>), ou laisser Q<sub>1</sub> fixe et remplacer Q par une quadrique du faisceau ponctuel (Q, Q<sub>1</sub>), et à répéter ces opérations un nombre quelconque de fois, *les racines de l'équation en λ, Q - λQ<sub>1</sub> = 0, subissent les opérations du groupe λ' = μλ + ν où μ, et ν sont deux constantes arbitraires*; si l'on considère λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>, λ<sub>3</sub>, λ<sub>4</sub> (racines de l'équation en λ) comme les coordonnées homogènes d'un point par rapport à un certain tétraèdre de référence, *le groupe obtenu revient à déplacer arbitrairement le point (λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>, λ<sub>3</sub>, λ<sub>4</sub>) sur la droite qui le réunit au point de coordonnées (1, 1, 1, 1)*; le rapport anharmonique des quatre racines λ ne change pas au cours de ces opérations : c'est le *module*

des fonctions elliptiques qui interviennent pour la représentation paramétrique de la biquadratique  $(Q, Q_1)$  ou de la développable circonscrite à  $Q$  et  $Q_1$  (ou du moins une certaine fonction de ce module); dans le tétraèdre en question, c'est le *rapport anharmonique des quatre points où la droite en jeu perce les faces du tétraèdre* (ou des quatre plans joignant les sommets du tétraèdre à la droite).]

Cette digression faite, examinons dans quel cas le plan  $\alpha$  et le point  $A$  peuvent être choisis arbitrairement l'un et l'autre : posons, pour abrégé,

$$(15) \quad \begin{cases} A = (a + b + c + d)^2 - 4(bc + cd + db) - 4a^2, \\ B = \dots, \quad C = \dots, \quad D = \dots \end{cases}$$

(Le lecteur ne sera pas troublé par l'emploi des lettres  $A, B, C, D$  pour désigner d'une part les sommets de notre tétraèdre, d'autre part pour désigner certaines quantités numériques.) La question posée revient à voir si l'on peut obtenir des valeurs de  $a, b, c, d$  satisfaisant aux équations homogènes et quadratiques  $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0$ . Ces équations reviennent à trois seulement, car on a l'identité  $A + B + C + D \equiv 0$ ; il suffit donc que ces quatre expressions soient égales pour que chacune soit nulle : or on a

$$(16) \quad \begin{cases} A - B = 4(a - b)(c + d - a - b), \\ A - C = 4(a - c)(b + d - a - c), \\ A - D = 4(a - d)(b + c - a - d). \end{cases}$$

On ne peut supposer  $b, c, d$  tous égaux à  $a$ , car les deux quadriques doivent différer; si l'on suppose  $a = b$ , l'équation  $A - B = 0$  est vérifiée, et les deux équations  $A - C = 0, A - D = 0$  reviennent alors à  $(a - c)(c - d) = 0, (a - d)(c - d) = 0$  de sorte que l'on trouve la solution  $a = b, c = d$  et celles analogues qui expriment que deux des quatre nombres  $a, b, c, d$  sont égaux ainsi que les deux restants; ce sont les seules solutions;  $a = b, c = d$  exprime que les deux quadriques ont en commun les génératrices  $x + \varepsilon iy = 0, z + \varepsilon' it = 0$ . Ce cas a été élucidé : écartons-le désormais, tout au moins dans ce paragraphe.

Quand le plan  $\alpha$  enveloppe  $Q_1$ , le plan  $\alpha_1$  enveloppe la quadrique  $Q_2$

qui a pour équations tangentielle et ponctuelle

$$(Q_2) \quad \begin{cases} \frac{au^2}{A^2} + \frac{bv^2}{B^2} + \frac{cw^2}{C^2} + \frac{dh^2}{D^2} = 0, \\ A^2 \frac{x^2}{a} + B^2 \frac{y^2}{b} + C^2 \frac{z^2}{c} + D^2 \frac{t^2}{d} = 0. \end{cases}$$

Quand le point A décrit Q, le point A<sub>1</sub> décrit la quadrique  $\bar{Q}_2$  qui a pour équations ponctuelle et tangentielle

$$(\bar{Q}_2) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} + \frac{t^2}{D^2} = 0, \\ A^2 u^2 + B^2 v^2 + C^2 w^2 + D^2 h^2 = 0. \end{cases}$$

Si la quadrique  $Q_2$  coïncide avec  $Q_1$ , la quadrique  $\bar{Q}_2$  coïncide avec Q et réciproquement. Cela exige  $A^2 = B^2 = C^2 = D^2$ ; or nous avons vu que  $A = B = C = D$  conduit au cas où le point A et le plan  $\alpha$  sont arbitraires, et où il n'y a pas lieu de parler de la quadrique  $Q_2$  ni de  $\bar{Q}_2$ . Essayons donc d'abord d'avoir trois quantités A, B, C, D égales entre elles et égales à la restante changée de signe : par exemple  $A = B = C = -D$  : la relation  $A + B + C + D = 0$  entraîne alors en remplaçant A, B, C par  $(-D)$  le résultat  $D = 0$  et l'on retombe sur le cas déjà écarté; il n'y a donc plus qu'à écrire des égalités telles que

$$A = B = -C = -D \quad \text{ou} \quad A = -B = C = -D \quad \text{ou} \quad A = -B = -C = D.$$

On peut se borner, en changeant de notations, au premier de ces trois groupes; il suffit d'ailleurs d'écrire

$$(17) \quad A = B, \quad C = D,$$

car  $A + B + C + D = 0$  donne ensuite  $A + C = 0$ ; on a ainsi le système

$$(18) \quad (a - b)(c + d - a - b) = 0, \quad (c - d)(c + d - a - b) = 0.$$

La solution  $a = b, c = d$  donne toujours le cas des quatre génératrices communes; il faut donc prendre

$$(19) \quad a + b = c + d.$$

Or si l'on se reporte au Mémoire de M. Gambier, *Journal de Mathématiques*, t. XII, 1933, p. 309-336 (*Transformations homographiques*)



changeant une biquadratique en elle-même), on voit que cette condition (19) exprime que la quadrique  $Q_1$  reste invariante dans l'une ou l'autre de quatre involutions biaxiales échangeant la biquadratique  $\mathcal{B}$  avec elle-même, pendant que les deux cônes de sommets  $(1, 0, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0, 0)$  contenant  $\mathcal{B}$  s'échangent entre eux, ainsi que les deux cônes de sommets  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$  : sur ces quatre involutions, deux ont leurs axes constitués par des génératrices de  $Q_1$ , les deux autres ont leurs axes situés sur la seconde quadrique, contenant  $\mathcal{B}$ , qui reste aussi invariante <sup>(1)</sup>. Les conditions (17), (19) étant remplies, la correspondance  $(A, A_1)$  devient

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{-z_1}{z_0} = \frac{-t_1}{t_0}.$$

C'est l'involution biaxiale dont les axes sont les deux couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué joignant les sommets des deux cônes qui s'échangent; cette fois l'homographie  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha, \alpha_1)$  est à elle-même son inverse.

Nous devons remarquer que la quadrique  $Q_2$ , enveloppe du plan  $\alpha_1$ , appartient, dans le cas général, au faisceau ponctuel  $(Q, Q_1)$  : cela est lié à cette propriété que le plan  $\alpha_1$  ne change pas si  $Q$  décrit le faisceau ponctuel  $(Q, Q_1)$ ; la quadrique  $\bar{Q}_2$  appartient au faisceau tangentiel  $(Q, Q_1)$  : cela revient à vérifier que dans le tableau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \end{vmatrix}$$

tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls; or la relation

$$A^2(b - c) + B^2(c - a) + C^2(a - b) = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> En même temps  $Q$  reste invariante par l'une ou l'autre de quatre involutions biaxiales (différentes) laissant invariante la développable circonscrite simultanément à  $Q$  et  $Q_1$  : c'est la propriété corrélatrice. Dans le cas où l'on a, de plus,  $a + b = 0$ ,  $c + d = 0$ ,  $Q$  et  $Q_1$  sont les deux quadriques qui restent toutes deux invariante dans l'involution qui laisse  $\mathcal{B}$  inaltérée; mais alors la développable reste aussi inaltérée, et, si l'on considère les tétraèdres circonscrits à  $Q$ , inscrits à  $Q_1$ , on retrouve la même involution  $(A, A_1)$ ,  $(\alpha, \alpha_1)$ .

obtenue en supprimant la dernière colonne, peut s'écrire

$$(B^2 - A^2)(c - a) + (C^2 - A^2)(a - b) = 0.$$

Les décompositions

$$B - A = 4(a - b)(a + b - c - d),$$

$$B + A = 2(c - d + a - b)(c - d - a + b)$$

et analogues conduisent immédiatement à la vérification. Cela explique pourquoi *il a suffi d'une seule relation pour que Q<sub>2</sub> coïncide avec Q<sub>1</sub> (et Q<sub>2</sub> avec Q)*.

*Il suffit d'une seule relation pour que Q<sub>2</sub> coïncide avec Q (et par suite Q<sub>2</sub> avec Q<sub>1</sub>), toujours pour la même raison.* Cela se traduit par les égalités

$$(20) \quad \frac{A^2}{a} = \frac{B^2}{b} = \frac{C^2}{c} = \frac{D^2}{d}.$$

Remplaçons  $a, b, c, d$  par  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$  : les racines carrées  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  peuvent être choisies de sorte que les relations (20) deviennent

$$(20') \quad \frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \frac{D}{\delta}.$$

et l'identité  $A + B + C + D \equiv 0$  exige que l'on ait

$$(21) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Comme on sait, *a priori*, qu'il suffit d'une condition, la relation (21) est nécessaire et suffisante : d'ailleurs, tenant compte des relations de définition

$$A \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2 - 4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\delta^2 + \delta^2\beta^2) - 4\alpha^4 \dots,$$

un calcul simple donne

$$A\beta - B\alpha \equiv [(\alpha + \beta)^2 - (\gamma + \delta)^2][(\alpha + \beta)^2 - (\gamma - \delta)^2],$$

de sorte que la nullité de  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  entraîne bien celle des expressions  $A\beta - B\alpha \dots$ . On remarque que la quadrique

$$(H) \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \frac{t^2}{\delta} = 0$$

donne une polarité transformant Q en Q<sub>1</sub> et réciproquement.

Toutes ces remarques vont nous servir à l'instant.

6. **Étude plus approfondie de la correspondance  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha, \alpha_1)$ .**  
 — Rappelons que le plan  $\alpha$  coupe  $Q_1$  suivant deux génératrices, dont l'une coupe la conique  $(Q, \alpha)$  en M et N, et l'autre en P, R. Nous avons utilisé la quadrique auxiliaire  $\bar{Q}$  pour démontrer que M', N', P', R' sont dans un même plan : on peut le voir en remarquant que les quadriques suivantes : 1°  $Q$ ; 2°  $Q_1$ ; 3° l'ensemble des 2 plans (MM', PP') et (NN', RR'); 4° l'ensemble analogue (MM', RR') et (NN', PP') ont en commun ces 8 points M, N, P, R; M', N', P', R'. Or les quatre premiers sont coplanaires, donc les quatre derniers le sont; (toutes les quadriques qui contiennent sept d'entre eux contiennent le huitième). Nous connaissons encore deux autres quadriques de ce réseau :  $\bar{Q}$  et les deux plans  $(\alpha, \alpha_1)$ .

Si la biquadratique  $\mathcal{B}$  commune à  $\bar{Q}$  et  $Q_1$  est indécomposable et de genre un, les coordonnées du point courant de  $\mathcal{B}$  s'expriment en fonction elliptique d'un argument  $u$  tel que la somme des arguments relatifs à quatre points d'un même plan soit *constante* : on peut même la supposer *nulle*; de la sorte la relation  $u_1 + u_2 = a$ , où  $a$  est une constante numérique donnée, définit sur  $\mathcal{B}$  une correspondance involutive  $M_1, M_2$ , la corde  $M_1 M_2$  engendre une surface réglée  $R_a$ ; or on voit aussitôt que toute génératrice de  $R_a$  est coplanaire avec toute génératrice de la surface analogue  $R_{-a}$  : donc  $R_a$  et  $R_{-a}$  sont deux semi-quadriques complémentaires.

Or les paramètres des 8 points M, . . . , R' peuvent être pris ainsi :

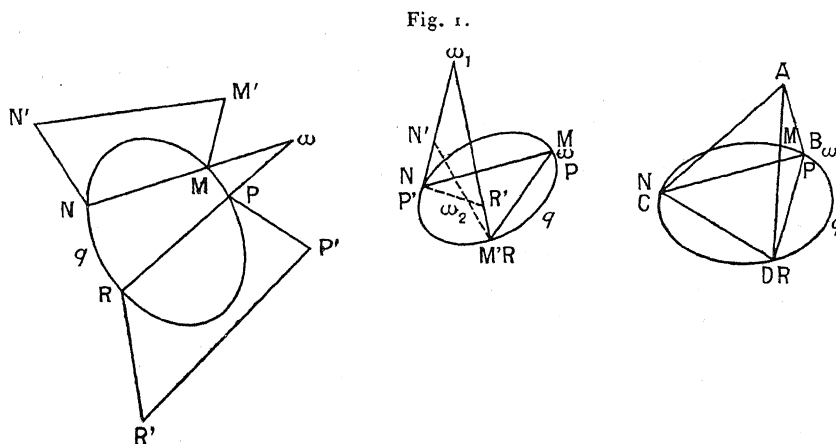
M.	M'.	N.	N'.	P.	P'.	R.	R'.
$u$	$-u - a$	$-u + a$	$u - 2a$	$v$	$-v + a$	$-v - a$	$v + 2a$

Cela prouve que M'N' est une génératrice de la semi-quadrique  $R_{-3a}$  et P'Q' de la semi-quadrique  $R_{3a}$ . La quadrique, appelée  $Q_2$ , enveloppe du plan  $\alpha_1$ , est donc le support des semi-quadriques  $R_{3a}$  et  $R_{-3a}$ ; nous avons de plus appris à construire les génératrices de  $Q_2$ .

La coïncidence de  $Q_2$  et  $Q_1$  exige soit  $R_{3a} = R_a$  soit  $R_{3a} = R_{-a}$ ; dans le premier cas,  $2a = 0$  (à un multiple près des périodes) et  $R_a, R_{-a}$  coïncident, de sorte que  $Q_1$  est un cône; le problème ne se pose

plus, car les faces des tétraèdres seraient concourantes en un point; donc on doit prendre  $R_{3a} = R_{-a}$ , d'où  $4a = 0$ ; si l'on appelle  $2\omega, 2\omega'$  les périodes fondamentales, on doit avoir  $2a = \omega$ , ou  $\omega$ , ou  $\omega + \omega'$ ; or  $2a = \omega$  donne l'un des systèmes de quatre semi-quadriques auxquelles il a été fait allusion plus haut : *chacune des six quadriques auxquelles on arrive possède  $\infty^1$  quadrilatères gauches tracés sur elle et inscrits dans  $\mathcal{B}$ .*

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe quand le point de contact  $\omega$  du plan  $\alpha$  avec  $Q_1$  vient sur  $\mathcal{B}$ . Nous faisons la figure dans les deux cas, pour pouvoir comparer (fig. 1).



Quand  $\omega$  est venu sur  $\mathcal{B}$ , on doit faire coïncider  $M, P$  avec  $\omega$ ,  $M'$  avec  $R$ ,  $P'$  avec  $N$ ; le plan  $M'N'P'R'$  devient le plan des deux génératrices  $NN'RR'$  : *il est donc tangent simultanément à  $Q_1$  et  $Q_2$*  : son point de contact avec  $Q_1$  est  $\omega_1$  point de concours de  $NN'$  et  $RR'$ , son point de contact avec  $Q_2$  est le point  $\omega_2$  où concourent  $RN'$  et  $NR'$ . Dans le cas plus particulier où  $Q_2$  coïncide avec  $Q_1$ , les quatre points  $R', N', \omega_1$  et  $\omega_2$  sont confondus et la quadrique  $Q_2$  contient  $\infty^1$  quadrilatères gauches tracés sur elle et inscrits dans  $\mathcal{B}$  <sup>(1)</sup>.

(1) Nous venons d'obtenir les plans  $\alpha_1$  tangents simultanément à  $Q_1$  et  $Q_2$ , ils enveloppent une développable de quatrième classe déduite de l'ensemble des plans tangents à  $Q_1$  aux divers points  $\omega$  situés sur  $\mathcal{B}$ ; dans le cas d'exception donné en note au paragraphe 4 [cas où la quadrique  $Q$  contient la conique  $g_1$  sans que  $\bar{Q}$  se décompose] on trouve un plan  $\alpha_1$  particulier tangent à  $Q_1$  et  $Q_2$ , autre que les plans précédents : donc cette fois  $Q_1$  et  $Q_2$  coïncident.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter la question suivante : *quelles sont les droites qui au, lieu d'être arêtes de deux tétraèdres seulement, sont arêtes de  $\infty^1$  (ou même  $\infty^2$  tétraèdres).*

7. **Examen du cas où il existe  $\infty^1$  tétraèdres ayant une arête commune.** — Opérons d'abord synthétiquement : étudions la figure 1 dans le cas où  $\omega$  est sur  $\mathcal{B}$ , M et P étant confondus avec  $\omega$ ; nous reprenons le raisonnement du second lemme du n° 4; si nous traçons une corde CD de la conique  $q$ , autre que NR, le plan  $\beta$ , nouveau plan tangent à  $Q_1$  mené par CD, coupe le plan  $\alpha_1$  suivant une droite unique qui coupe Q en deux points  $A'$ ,  $A''$  et l'on obtient deux tétraèdres  $CDA'B'$ ,  $CDA''B''$  <sup>(1)</sup>.

Supposons que CD coïncide avec NR (*fig. 1*); mettons C en N et D en R; si  $B'$  est un point de  $q$  autre que  $\omega$ , les plans tangents à  $Q_1$  menés par  $CB'$  et  $DB'$ , autres que  $\alpha$ , sont  $CB'\omega_1$  et  $DB'\omega_1$  : on trouve toujours le point  $\omega_1$ ; si B vient en  $\omega$ , les plans tangents sont respectivement un plan *quelconque* mené par  $\omega N$  ou  $\omega R$  : on trouve donc un point d'intersection *quelconque* dans le plan  $NN'$ ,  $RR'$ ; ceci explique pourquoi la quadrique  $\bar{Q}$  du lemme se décompose en le plan  $\alpha$  et le plan  $\alpha_1$  du cas actuel. *Si donc on prend un point quelconque A de la section de Q par ce plan  $\alpha_1$  actuel, on a un tétraèdre CDAB, (B =  $\omega$ )* répondant à la question; il y a  $\infty^1$  tétraèdres de cette espèce construits sur le même triangle CBD, de sorte que par chaque arête CB, DB, CD passent  $\infty^1$  tétraèdres.

Ceci nous renseigne sur la position du point  $C_1$  correspondant à C dans la correspondance  $(A, A_1)$  lorsque le point C vient sur la biquadratique  $\mathcal{B}$ ; le plan BDA est l'un des plans associés à C; ce plan pivote autour de la génératrice BD de  $Q_1$ , donc  $C_1$  est sur cette génératrice; autrement dit, si l'on considère un point C de la biquadratique  $\mathcal{B}$ , on prend une des deux génératrices de  $Q_1$  issue de C, CB par exemple; on en prend le nouveau point B de rencontre avec  $\mathcal{B}$  et par B on mène la nouvelle génératrice de  $Q_1$  :  $C_1$  est sur cette nouvelle

---

(1) Si C vient en N, sans que D soit en R, la droite  $(\beta, \alpha_1)$  est la génératrice  $N\omega_1$  et l'un des deux points  $A', A''$  est confondu avec N : il correspond à un tétraèdre aplati  $N\omega DN$ , tandis que l'autre solution est un tétraèdre véritable.

génératrice; en partant de C avec l'autre génératrice, on obtient C<sub>1</sub> par intersection de deux génératrices de Q<sub>1</sub>. En particulier si l'on applique cette construction à ω, on trouve ω<sub>1</sub> précisément; ω décrivant B, le point ω<sub>1</sub> décrit la biquadratique (Q<sub>1</sub>, Q̄<sub>2</sub>), si toute fois Q̄<sub>2</sub> est distincte de Q<sub>1</sub>; si Q̄<sub>2</sub> coïncide avec Q<sub>1</sub>, le point ω<sub>1</sub> décrit une biquadratique, transformée toujours de B par l'homographie (A, A<sub>1</sub>) (mais elle ne peut être définie par Q̄<sub>2</sub>, puisque Q̄<sub>2</sub> coïncide avec Q<sub>1</sub>).

*Par dualité, au lieu des plans α tangents à Q<sub>1</sub> en un point de la biquadratique (Q, Q<sub>1</sub>), nous aurons les points A où le plan tangent à Q appartient à la développable (Q, Q<sub>1</sub>).*

Traisons maintenant le problème annoncé : nous avons une infinité de tétraèdres ayant une arête commune; le raisonnement peut se faire soit en considérant les points U, V où cette arête perce Q, soit les plans u, v menés par cette arête tangentielllement à Q<sub>1</sub>. Adoptons les points U, V, ce qui exige que l'arête ne soit pas génératrice de Q. Supposons d'abord que U, V ne soit pas génératrice de Q<sub>1</sub> : donc les deux faces issues de l'arête UV sont connues; l'une au moins des faces VWX ou UWX est variable; supposons VWX variable : cette face passe d'abord en V, puis par U<sub>1</sub> : donc elle ne peut varier que si U<sub>1</sub> V est une génératrice de Q<sub>1</sub> ou si U<sub>1</sub> et V sont confondus.

Nous traitons le premier cas : UV non génératrice de Q<sub>1</sub> (ni de Q), U, V génératrice de Q<sub>1</sub>. Ceci entraîne comme conséquence nécessaire et suffisante pour U que U<sub>1</sub> soit sur Q<sub>1</sub>, car on prendra ensuite V sur l'une des deux génératrices de Q<sub>1</sub> issues de U<sub>1</sub>. Le lieu de U<sub>1</sub> est la biquadratique (Q<sub>1</sub>, Q̄<sub>2</sub>), si Q̄<sub>2</sub> est distincte de Q<sub>1</sub>; le point U décrit donc aussi une biquadratique, et nous avons reconnu synthétiquement que c'est la biquadratique (Q, Q<sub>1</sub>); cela résulte d'ailleurs aussi de ce que, par la transformation (A, A<sub>1</sub>), qui coïncide avec (α<sub>1</sub>, α), la quadrique Q<sub>2</sub> a pour transformée Q<sub>1</sub>, et Q pour transformée Q̄<sub>2</sub> et que Q<sub>2</sub>, Q, Q<sub>1</sub> appartiennent à un même faisceau linéaire.

Nous marquons donc (fig. 2) un point U de B, les deux génératrices Uu', Uu'' de Q<sub>1</sub> issues de U avec leur nouveau point de rencontre u' ou u'' avec B, puis les nouvelles génératrices u'U<sub>1</sub> et u''U<sub>1</sub>, issues sur Q<sub>1</sub> de u' et u''; si nous supposons aussi Q̄<sub>2</sub> différente de Q, le



tiquement : nous avons vu que l'on peut prendre convenablement une racine carrée  $\alpha$  de  $a$ ,  $\beta$  de  $b$ ,  $\gamma$  de  $c$ ,  $\delta$  de  $d$  de sorte que par polarité relativement à la quadrique H,

$$(H) \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \frac{t^2}{\delta} = 0,$$

la quadrique Q s'échange avec Q<sub>1</sub>; les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont liés par la relation  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$  et les nombres  $a, b, c, d$  par la relation

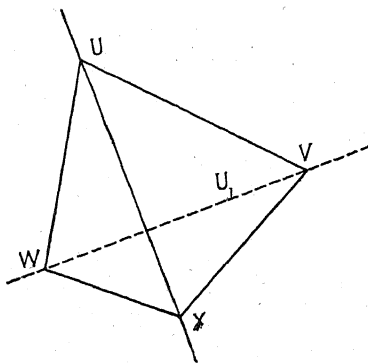
$$(\Sigma a^2 - 2 \Sigma ab)^2 - 64abcd = 0$$

ou

$$\Sigma a^4 + 6 \Sigma a^2 b^2 - 4 \Sigma a^3 b + 4 \Sigma a^2 bc - 40abcd = 0.$$

Une génératrice G de Q devient une génératrice de G<sub>1</sub> de Q<sub>1</sub>; si par G l'on mène les deux plans tangents à Q<sub>1</sub>, ces deux plans deviennent chacun par polarité un point commun à Q et Q<sub>1</sub>, et la droite joignant ces deux points est la génératrice G<sub>1</sub>. Cela posé, prenons sur Q une génératrice G (fig. 3) et marquons les points V, W où G<sub>1</sub> perce Q;

Fig. 3.



sur G marquons deux points arbitraires U, X; le tétraèdre UVWX a ses quatre faces tangentes à Q<sub>1</sub>, car UXW, UXV sont les deux plans tangents à Q<sub>1</sub> menés par G; d'autre part les faces WVU et W VX pivotent autour de G<sub>1</sub>; ici on obtient  $\infty^2$  tétraèdres ayant une arête portée par G (avec deux sommets variables sur G), ou  $\infty^2$  tétraèdres ayant une arête portée par G<sub>1</sub> (avec deux faces variables pivotant autour de G<sub>1</sub>); les  $\infty^2$  tétraèdres ont G et G<sub>1</sub> pour support commun de deux arêtes opposées. On peut remarquer que, si U reste fixe, V et W restent fixes



aussi et la face VWX pivote autour de WV, de sorte que le point  $U_1$  est nécessairement porté par la génératrice  $G_1$ ; *U et V restant fixes, on a  $\infty^1$  tétraèdres ayant les sommets U, V en commun (ainsi que le sommet W) : mais il y a une différence essentielle avec la figure 2 où nous avons aussi  $\infty^1$  tétraèdres ayant en commun les sommets U, V, ainsi que le sommet W : dans la figure 2, UV n'étant pas génératrice de  $Q_1$ , UW est génératrice de  $Q_1$  : dans la figure 3, ni UV ni UW ne sont génératrices de  $Q_1$  ; dans la figure 2, le lieu de X est une conique, section de Q par le plan fixe  $UVu''$  et U est sur  $\mathcal{B}$  ; dans la figure 3, le lieu de X est une génératrice de Q et U n'est pas sur  $\mathcal{B}$ .*

Cette discussion conduit à la solution de la question suivante : *étant données deux quadriques Q,  $Q_1$  peut-on trouver sur Q une génératrice G, sur  $Q_1$  une génératrice  $G_1$ , telles que V et W étant les points où  $G_1$  perce Q, les plans GV et GW soient tangents à  $Q_1$  ?* (La propriété géométrique se transforme en elle-même dans la polarité qui échange Q et  $Q_1$ ). *A priori*, si l'on donne G,  $G_1$ , les points V, W sur  $G_1$  (ce qui revient à donner les plans GV, GW passant par G), la quadrique Q contenant G, V, W, puis la quadrique  $Q_1$  contenant  $G_1$  et tangente aux plans GV, GW (en des points autres que V ou W), on fait jouer un nombre de paramètres égal à  $4 + 4 + 2 + 4 + 4$ , soit 18. Si l'on donne *a priori* Q,  $Q_1$ , ce qui fait disposer de 18 paramètres, la recherche de G et  $G_1$  introduit deux inconnues (une pour déterminer chaque génératrice G ou  $G_1$ ), avec un total de deux équations (le plan GV doit contenir un nouveau point de la génératrice autre que  $G_1$  issue de V sur  $Q_1$  ; de même GW) : *ces deux équations à deux inconnues ne sont pas compatibles dans le cas général* ; car si le couple G,  $G_1$  existe, on peut choisir U, X arbitrairement sur G, obtenir ainsi le tétraèdre de la figure 3 et alors U restant fixe, X variant sur G on voit que le point  $U_1$  est sur  $Q_1$  sans que U appartienne à  $\mathcal{B}$ , de sorte que les quadriques  $\bar{Q}_2$  et  $Q_1$  ont en commun, outre la biquadratique transformée de  $\mathcal{B}$ , un nouveau point  $U_1$  : *elles coïncident donc*. Les racines de l'équation en  $\lambda$  du faisceau  $Q - \lambda Q_1 = 0$  sont donc liées par la relation  $\Sigma \sqrt{\lambda} = 0$ , ce qui fait que le couple (Q,  $Q_1$ ) ne dépend plus que de 17 paramètres, au lieu de 18 ; par contre on obtient  $\infty^1$  couples G,  $G_1$  avec Q,  $Q_1$  fixées ainsi (et même deux séries  $\infty^1$  en prenant successivement les génératrices de chaque système de Q).

Revenons à notre second cas : UV *non génératrice* de Q<sub>1</sub>, U<sub>1</sub> et V *confondus*. Comme V est sur Q et U<sub>1</sub> sur Q<sub>2</sub>, le point U<sub>1</sub> ou V du cas actuel est sur la courbe Q, Q<sub>2</sub>, si nous supposons Q<sub>2</sub> et Q distinctes (nous étudierons plus loin le cas Q<sub>2</sub> et Q confondues). Le point U<sub>1</sub> dans le cas actuel satisfait aux deux équations

$$(U_1) \quad \begin{cases} (Q) & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ (\overline{Q}_2) & \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} + \frac{t^2}{D^2} = 0, \end{cases}$$

et le point U aux deux équations

$$(U) \quad \begin{cases} (Q) & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ & A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + D^2 t^2 = 0, \end{cases}$$

Nous avons remarqué que le tableau

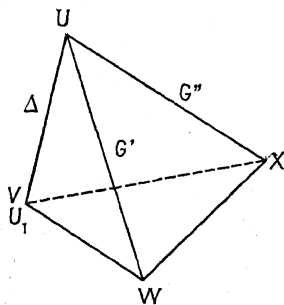
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \end{vmatrix}$$

a tous ses déterminants d'ordre 3 nuls; donc on peut remplacer les deux équations qui déterminent U par

$$(U) \quad \begin{cases} (Q) & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ & ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0. \end{cases}$$

la dernière exprime que le plan tangent en U à Q, plan qui a pour coordonnées (x, y, z, t) est tangent à Q<sub>1</sub>; donc le point U est sur la courbe

Fig. 4.



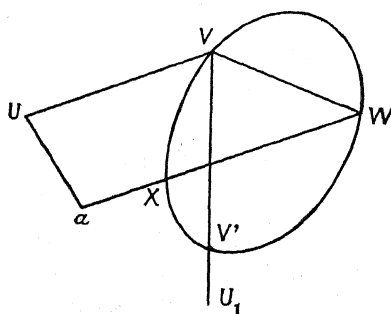
de contact avec Q de la développable circonscrite à Q et Q<sub>1</sub>. On obtient

les tétraèdres qui se déduisent par dualité de ceux de la figure 2 (ou figure 1). La construction synthétique est la suivante : par le point  $U$  pris sur la courbe de contact en jeu, on trace les deux génératrices de  $Q$  (fig. 4), soit  $G'$  et  $G''$ ; par  $G'$  et  $G''$  on mène le plan tangent à  $Q$ , autre que le plan  $G', G''$ ; les deux plans obtenus se croisent suivant une droite  $\Delta$  qui recoupe  $Q$  en  $V$ , lequel est en même temps le point  $U_1$  associé à  $U$ . Un plan tangent *quelconque* à  $Q$ , mené par  $V$  forme la quatrième face du trièdre cherché, les trois autres étant fixes ( $G', G''$ ;  $\Delta, G''$ ;  $\Delta, G'$ ).

Si  $\bar{Q}_2$  coïncide avec  $Q$  (auquel cas  $Q_2$  coïncide avec  $Q_1$ ) le point  $U$  peut être quelconque sur  $Q$ ; nous avons vu que la correspondance  $(U, U_1)$  est une involution biaxiale, de sorte que  $V$  coïncidant avec  $U_1$ ,  $V_1$  coïncide avec  $U$ ; les quadriques  $Q$  et  $Q_1$  se conservent dans l'involution biaxiale en jeu; les  $\infty^1$  tétraèdres obtenus se correspondent deux à deux dans l'involution biaxiale en jeu. Ce type de tétraèdres se correspond à lui-même par dualité, car les deux points  $U$  et  $V$  de  $Q$  se correspondent dans cette involution et les deux plans  $UVW$  et  $UVX$  tangents à  $Q$ , aussi. Nous avons vu, en notes, aux paragraphes 4 et 5 comment ce cas se prévoit *a priori*.

Passons maintenant au cas réservé dès le début :  $UV$  génératrice

Fig. 5.



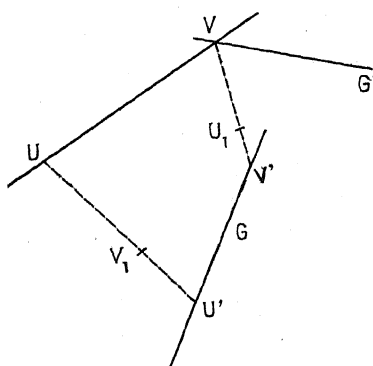
de  $Q_1$  (de sorte que pour une telle arête, on peut prendre les deux points où elle perce  $Q$ , mais non les plans tangents menés à  $Q_1$  qui sont indéterminés autour de l'arête).  $U$  et  $V$  sont sur la biquadratique  $\mathcal{B}$ ; nous savons que  $U_1$  est sur la nouvelle génératrice de  $Q_1$  issue de  $V$ ; donc par  $U_1, V$  menons un plan *quelconque*; nous obtenons

la figure 5 où nous avons marqué la conique  $\Gamma$  de section de Q par ce plan; la conique  $\Gamma_1$ , trace, sur ce plan, du cône circonscrit à Q<sub>1</sub> par U se réduit au point V et au point  $a$ ; d'un point W quelconque de  $\Gamma$  on mène Wa qui recoupe  $\Gamma$  en X; le tétraèdre UVWX répond aux conditions; il y a  $\infty^1$  plans tels que le plan choisi autour de  $VV'U_1$ , et dans chacun d'eux il y a  $\infty^1$  points W; on obtient donc  $\infty^2$  tétraèdres ayant pour arête une génératrice de Q<sub>1</sub>.

Par dualité, on obtient  $\infty^2$  tétraèdres ayant pour arête une génératrice de Q, ce qui était le cas réservé aussi dès le début.

Il reste encore un léger paradoxe à liquider; dans le cas où Q et Q<sub>1</sub> sont telles que les racines de l'équation en  $\lambda$  du faisceau  $Q - \lambda Q_1 = 0$  donnent la relation  $\Sigma \sqrt{\lambda} = 0$ , nous avons remarqué qu'il y avait  $\infty^2$  tétraèdres ayant pour arête une génératrice de Q<sub>1</sub>. Dans le cas de la figure 5 (en supposant que  $\bar{Q}_2$  ne coïncide pas avec Q<sub>1</sub>, ni la quadrique Q<sub>2</sub> avec Q) on n'obtient jamais pour l'arête WX une génératrice de Q, car si cela avait lieu on aurait précisément le couple WX génératrice de Q, UV génératrice de Q<sub>1</sub>, tel que les plans WXU, WXV reliant WX aux points d'intersection de UV avec Q soient tangents à Q<sub>1</sub> (contenant en effet la génératrice Ua, ou  $VV'U_1$ , de Q<sub>1</sub>). Dans le cas où  $\bar{Q}_2$  coïncide avec Q<sub>1</sub>, et Q<sub>2</sub> avec Q on obtient d'abord, pour

Fig. 6.



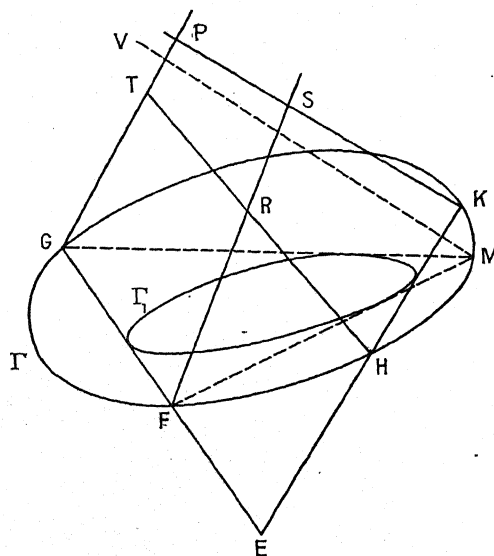
toute génératrice de Q<sub>1</sub>, les  $\infty^2$  tétraèdres de la figure 5 puis les  $\infty^2$  tétraèdres particuliers où l'arête WX est génératrice de Q; pour le voir marquons en effet sur la figure 6 la génératrice UV de Q<sub>1</sub>, les

points  $U, V$  où elle perce  $\mathcal{B}$ , puis  $U_1$  et  $V_1$  situés sur les nouvelles génératrices de  $Q_1$  issues de  $V$  et  $U$ , puis les points  $V'$  et  $U'$  où  $VU_1$  et  $UV_1$  percent à nouveau  $Q$ ; la droite  $V'U'$  est la génératrice de  $Q$  associée à  $UV$ ; le plan particulier  $U'V'U_1V$  donne comme conique  $\Gamma$  une conique dégénérée en deux droites dont l'une est  $G$ , l'autre une droite  $G'$  issue de  $V$ ; la section de  $\Gamma_1$  se réduit à deux points l'un  $V$  sur  $G'$ , l'autre  $U'$  sur  $G$ , de sorte que, dans ce cas particulier, il y a  $\infty^2$  triangles dont les sommets sont sur  $G$  ou  $G'$  et dont les côtés passent par  $V$  ou  $U'$ .

8. **Intersection de  $Q$  et  $Q_1$  formée de quatre génératrices.** — Nous avons reconnu directement, grâce au raisonnement géométrique de M. Rowe, employé comme lemme au n° 4, que les quadriques  $Q$  et  $Q_1$  ayant en commun quatre génératrices fournissent  $\infty^3$  tétraèdres. L'étude de la correspondance  $(A, A_1)$ , ou  $(\alpha, \alpha_1)$  a de nouveau signalé ce cas. Il va être instructif de donner de nouvelles démonstrations géométriques, intuitives, dues aussi à M. Rowe.

Dessignons (*fig. 7*) le quadrilatère PTRS formé par les quatre géné-

Fig. 7.



ratrices communes; en un point  $E$  de  $Q_1$  menons le plan tangent à  $Q_1$

coupant Q<sub>1</sub> suivant les génératrices EHK, EFG; la conique Γ, section de Q par ce plan passe en FGHK. D'autre part, par un point V de Q passe une génératrice de Q s'appuyant sur PT et SR, ayant son pied en M sur Γ; MG est la perspective de PT sur le plan de Γ, MF celle de SR; donc le triangle MFG est inscrit dans Γ et circonscrit à la conique Γ<sub>1</sub>, trace sur le plan adopté du cône circonscrit de V à Q<sub>1</sub>: donc Γ et Γ<sub>1</sub> admettent une infinité de triangles inscrits dans Γ et circonscrits à Γ<sub>1</sub> et l'on retrouve les ∞<sup>3</sup> tétraèdres.

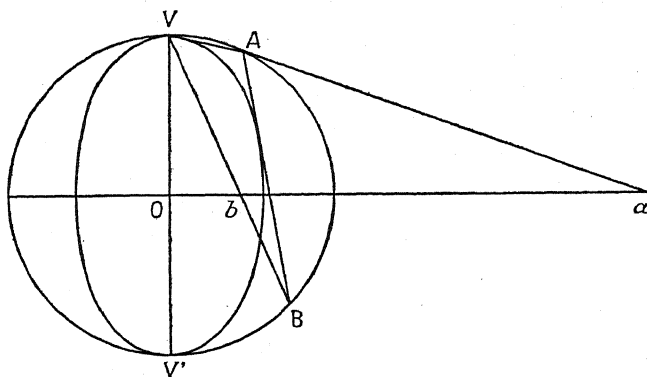
On peut remarquer qu'il y a deux séries ∞<sup>4</sup> de tétraèdres inscrits et circonscrits à Q, et aussi à Q<sub>1</sub> simultanément. En effet, menons par PT deux plans arbitraires, et deux autres par RS; ces quatre plans forment un tétraèdre de l'espèce indiquée, dont on peut dire qu'ils sont légèrement dégénérés, en ce sens que les quatre points de contact sont deux sur une arête, deux sur l'arête opposée. Le couple PS, TR livre de même une autre série ∞<sup>4</sup>; le tétraèdre PRST est commun aux deux séries.

Cette remarque permet d'expliquer ce que deviennent les ∞<sup>3</sup> tétraèdres quand Q restant fixe, Q<sub>1</sub> varie dans le faisceau déterminé par le quadrilatère PSRT de façon à venir coïncider avec Q: on trouve cette fois ∞<sup>6</sup> tétraèdres obtenus en prenant deux génératrices arbitraires du même système de Q, deux plans arbitraires par l'une et deux plans arbitraires par l'autre.

Donnons encore une autre démonstration géométrique qui nous permettra de passer du cas de quatre génératrices distinctes à celui de deux génératrices doubles. Par une homographie, on peut se borner au cas d'une sphère Q et d'une quadrique Q<sub>1</sub> de révolution tangente à la sphère aux deux extrémités d'un diamètre VV'; occupons-nous simplement des plans tangents à Q<sub>1</sub> aux divers points d'une méridienne (*fig.* 8); une tangente à cette méridienne perce le méridien de la sphère en deux points A, B tels que les rayons VA, VB se correspondent homographiquement, VV' et la tangente en V étant les rayons doubles; par perspective sur le diamètre perpendiculaire à VV', on a donc deux points a, b tels que  $\frac{Oa}{Ob}$  soit une constante; le cercle Γ section de Q par le plan tangent considéré a pour perspective le cercle décrit sur ab comme diamètre, autrement dit est vu de O

sous un angle constant. La question est donc ramenée à la suivante : on considère dans un plan un point fixe  $O$  et les  $\infty^2$  cercles tels que leur diamètre passant en  $O$  les coupe en deux points  $a, b$  tels que  $\frac{Oa}{Ob}$  soit égal à une constante donnée (ou tels que chacun d'eux soit vu de  $O$  sous un

Fig. 8.



angle fixe); par un point  $\alpha$  du plan passent  $\infty^1$  cercles de cette espèce; si l'on en prend trois au hasard, les points  $\beta, \gamma, \delta$  où ces trois cercles se recoupent 2 à 2 en dehors de  $\alpha$  sont sur un nouveau cercle appartenant à la famille  $\infty^2$  envisagée. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition.

Dans le cas de deux génératrices communes doubles, on ramène de même la figure à une sphère  $Q$  et à une quadrique de révolution  $Q_1$ , dont la méridienne est surosculée en  $V$  par le cercle méridien de la sphère; cette fois le segment  $ab$  (mêmes notations que précédemment) a une longueur constante; on obtient donc la propriété suivante bien connue : dans un plan, si trois cercles de même rayon passent par un point  $a$ , leurs nouveaux points communs  $b, c, d$  sont encore sur un cercle de même rayon.

9. Quadriques ayant une cubique gauche commune. — Les seuls cas où l'étude *analytique* de la correspondance  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha, \alpha_1)$  faite par le tétraèdre conjugué commun est en défaut sont les suivants :

1° Intersection  $(Q, Q_1)$  constituée par une biquadratique à point double;

2° Intersection (Q, Q<sub>1</sub>) constituée par une cubique gauche et une génératrice ;

3° Intersection (Q, Q<sub>1</sub>) constituée par une conique et deux génératrices de système opposé.

Les explications géométriques subsistent; les correspondances (A, A<sub>1</sub>), (α, α<sub>1</sub>) sont encore des homographies inverses l'une de l'autre, laissant inaltérés les sommets des cônes du second ordre contenant toute l'intersection.

Donnons quelques explications relatives au cas de la cubique gauche Γ et de la génératrice G communes à Q et Q<sub>1</sub>; un plan α tangent à Q<sub>1</sub> coupe la génératrice G en M et la cubique Γ en N, R, P; MN sont sur une génératrice de Q<sub>1</sub> de système opposé à G, R et P sur une génératrice du même système; donc R' et P' sont sur G, tandis que N' est sur la cubique Γ; le plan α<sub>1</sub> déterminé par N'P'R' pivote autour de G; il coupe Q d'abord suivant G, puis suivant une génératrice G' de système opposé à G; le second plan β mené par CD tangentielllement à Q<sub>1</sub> coupe G en un point A' qui, réuni à B' (=M), donne le tétraèdre A'B'CD qui répond aux conditions, les plans A'B'C et A'B'D ayant leur point de contact avec Q<sub>1</sub> sur le périmètre de la face; le point A où β coupe G' et le point B correspondant à A sur la conique q, commune à α et Q, donne un tétraèdre ABCD répondant aussi à la question, les points de contact avec Q<sub>1</sub> étant tous à l'intérieur de la face correspondante. A chacun des ∞<sup>2</sup> plans α correspond sur Q une génératrice G'; on peut remarquer que si α pivote autour d'une génératrice de Q<sub>1</sub>, de système opposé à G, la génératrice G' reste fixe; on a ainsi réalisé une correspondance biunivoque entre les génératrices de système opposé à G sur Q et Q<sub>1</sub>.

10. Quadriques ayant en commun une conique et deux génératrices sécantes. — Ce cas est compris comme dégénérescence dans le précédent; la quadrique auxiliaire  $\bar{Q}$  du n° 4 contient les deux génératrices sécantes communes à Q et Q<sub>1</sub>, de sorte que le résultat est le suivant : CD étant une corde quelconque de Q, par CD on mène les deux plans tangents à Q<sub>1</sub>; l'une des génératrices communes rencontre ces plans en A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>; A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>CD est l'un des tétraèdres cherchés; l'autre



génératrice donne de même  $A_2 B_2 CD$ ; on a  $\infty^4$  tétraèdres; mais il n'y a plus lieu de parler de la correspondance  $(\alpha, \alpha_1)$  car le plan de  $\alpha_1$  est toujours celui des deux génératrices communes.

11. **Tétraèdres dont les sommets sont sur une cubique gauche ou sur une biquadratique et dont les faces sont tangentes à une quadrique (ne passant pas par la courbe).** — Cette question est, si l'on veut, comprise dans celle qui a été étudiée ici : les faces du tétraèdre sont tangentes à une quadrique  $Q_1$  pendant que les sommets sont à la fois sur l'une et l'autre de deux quadriques  $Q, Q'$ .

J'indique, synthétiquement, quelques résultats, réservant l'étude complète pour un Mémoire séparé.

Considérons une cubique gauche  $\Gamma$  et une quadrique  $Q_1$  *quelconques* : il existe un tétraèdre et un seul  $T$  de sommets situés sur  $\Gamma$  et de faces tangentes à  $Q_1$ . Pour mettre le problème en équation, on peut supposer, par une homographie préalable, que  $\Gamma$  est la cubique d'équations  $y = x^2, z = x^3$  (ce qui laisse encore 3 paramètres disponibles pour l'homographie, mais peu importe). Du point  $A(t, t^2, t^3)$  de  $\Gamma$ , comme sommet commun, sont issus le cône  $S$  ayant  $\Gamma$  pour directrice, le cône  $S_1$  circonscrit à  $Q_1$ ; en exprimant que le cône  $S$  est capable d'un trièdre circonscrit à  $S_1$ , on trouve une équation qui (débarassée du facteur, de degré 12, carré du polynôme en  $t$  donnant les points communs à  $\Gamma$  et  $Q_1$ ) *est de degré 4 exactement* <sup>(1)</sup>; je dis que *les 4 points correspondants  $A, B, C, D$  sont les sommets du tétraèdre cherché*. En effet, sur le cône  $S^A$  je puis prendre  $AB$  comme première génératrice d'un trièdre inscrit dans  $S^A$ , circonscrit à  $S_1^A$ ; les deux faces issues de  $AB$  ne sont autres que les deux plans tangents menés à  $Q_1$  par  $AB$  : elles recouperont  $\Gamma$  en  $C'$  et  $D'$  et le plan  $C'AD'$  est tangent à  $S_1^A$ , donc à  $Q_1$ ; mais le même raisonnement fait avec le point  $B$  et les cônes  $S^B, S_1^B$  prouve que le plan  $C'BD'$  est tangent à  $Q_1$ ; donc  $C'$  et  $D'$  ne sont autres que  $C$  et  $D$  et le résultat est démontré. L'ensemble  $\Gamma, Q_1$  dépend de  $12 + 9$  ou  $21$  paramètres et le tétraèdre  $T$  est unique; si l'on part d'un tétraèdre  $T$  quelconque ( $12$  paramètres), d'une cubique  $\Gamma$

(1) Certains auteurs affirment que le degré est 10 : ils ont sans doute oublié de vérifier que le polynôme en  $t$  de degré 6, relatif aux points  $(\Gamma, Q_1)$  est en facteur *au carré*.

circonscrite à T (4 paramètres nouveaux), d'une quadrique Q inscrite dans T (5 paramètres nouveaux) on retrouve le nombre 21 pour l'ensemble des paramètres.

Sur la cubique  $\Gamma$  prenons deux tétraèdres T(ABCD) et T'(A'B'C'D'); si nous considérons une quelconque, Q<sub>1</sub>, des  $\infty^2$  quadriques tangentes aux 4 faces de T et aux 3 faces de T' issues de A', l'équation de degré 4, relative à  $\Gamma$  et Q<sub>1</sub>, formée à l'instant se réduit à une identité, car elle admet pour racines les t des 5 points A, B, C, D, A'; donc le raisonnement qui vient d'être fait peut s'appliquer à deux points quelconques M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> de  $\Gamma$  et fournit un tétraèdre M<sub>1</sub>M<sub>2</sub>M<sub>3</sub>M<sub>4</sub> inscrit dans  $\Gamma$  et circonscrit à Q<sub>1</sub>. Il y a deux conséquences à tirer de là :

1° Si deux tétraèdres sont inscrits dans une cubique gauche, toute quadrique tangente à 7 faces prélevées sur les 8, est tangente à la huitième : nous allons voir que ces 8 faces sont tangentes à une même développable  $\Delta$  de classe 3, admettant avec  $\Gamma$   $\infty^1$  tétraèdres de cette espèce, inscrits dans  $\Gamma$ , circonscrits à  $\Delta$ ;

2° Si une cubique  $\Gamma$  et une quadrique Q<sub>1</sub> admettent deux tétraèdres inscrits dans  $\Gamma$ , circonscrits à Q<sub>1</sub>, ils en admettent une double infinité.

Duporcq avait indiqué à ce sujet un résultat exact, mais incomplet (*Nouvelles Annales*, 4<sup>e</sup> série, t. II, 1902, p. 166) : il n'avait pas remarqué le premier des deux résultats qui viennent d'être indiqués; pour le second, il le signale en admettant que  $\Gamma$  et Q<sub>1</sub> admettent trois tétraèdres de cette espèce, tandis qu'il suffit de deux (1).

Nous allons, tout de suite, en utilisant la remarque que M. Rowe a faite sur un couple de quadriques Q, Q<sub>1</sub> ayant 4 génératrices communes, montrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple  $\Gamma$ , Q<sub>1</sub> admette  $\infty^2$  tétraèdres (au lieu d'un seul) se réduisent à 3 (bien que l'équation à rendre identique soit de degré 4), dont l'interprétation géométrique est la suivante : les 6 points où  $\Gamma$  perce Q<sub>1</sub> sont répartis, par couples de 2, sur 3 génératrices (de même système) de Q<sub>1</sub>. En effet, soit M l'un des 6 points en question : le cône S<sub>1</sub><sup>M</sup>, au point de

(1) Duporcq connaissait peut-être le résultat erroné donnant, comme degré de l'équation indiquée plus haut, 10 au lieu de 4 (et alors pour rendre l'équation identique, il eût fallu au moins 11 solutions, de sorte que 2 tétraèdres n'auraient pas suffi).

vue tangentiel, se réduit aux deux génératrices de  $Q_1$  issues de  $M$ ; l'une est sur  $S^u$ ; les 6 points offrent donc la particularité annoncée (*condition nécessaire*). Quand cette condition est remplie, appelons  $G'$ ,  $G''$ ,  $G'''$  les 3 génératrices en jeu; appelons  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$  les 3 quadriques contenant toutes les trois la cubique  $\Gamma$ , puis respectivement le couple  $(G'', G''')$  ou  $(G''', G')$  ou  $(G', G'')$ ; chacune coupe  $Q_1$  suivant quatre génératrices; donc si nous prenons un plan tangent *quelconque*  $\alpha$  de  $Q_1$ , ce plan coupe  $\Gamma$  en 3 points  $B, C, D$  et les plans, autres que  $\alpha$ , menés tangentiellement à  $Q_1$  par  $CD, DB$  et  $BC$  se recoupent en  $A$  situé à la fois sur  $Q', Q'', Q'''$ , donc sur  $\Gamma$  (*condition suffisante*).

Vérifions que le couple spécial  $\Gamma, Q_1$  dépend bien de 18 paramètres (au lieu de 21). Donnons-nous  $\Gamma$  (12 paramètres), le tétraèdre  $T$  (4), le tétraèdre  $T'$  (4); une quadrique  $Q_1$  tangente à 7 des faces de  $T$  et  $T'$  dépend encore de 2 paramètres; le total  $\Gamma, T, T', Q_1$  fait donc intervenir  $12 + 4 + 4 + 2$  soit 22 paramètres que nous pouvons obtenir aussi en donnant d'abord  $\Gamma$  et  $Q_1$ , soit  $x$  paramètres, puis  $T$  (2), puis  $T'$  (2);  $x + 4 = 22$ , dont le nombre  $x$  est bien égal à 18.

Duporcq, dans l'article cité, emploie le procédé suivant :  $T_1, T_2, T_3$  sont trois trièdres inscrits dans  $\Gamma$ ; leurs sommets sont donnés respectivement par  $f_1(t) = 0, f_2(t) = 0, f_3(t) = 0$ , où  $f_1, f_2, f_3$  sont 3 polynômes en  $t$  de degré 4; l'équation  $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) = 0$  représente les sommets de  $\infty^2$  tétraèdres inscrits dans  $\Gamma$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  étant des constantes), dont les faces restent tangentes à une même quadrique  $Q_1$ , car, de chaque corde  $M_1 M_2$  de  $\Gamma$  partent seulement 2 de ces faces.

Il y a lieu de compléter le raisonnement de Duporcq en considérant l'équation à un paramètre, au lieu de deux,  $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$  : par un point  $M$  arbitraire de  $\Gamma$  passent trois faces d'un trièdre emprunté à la série  $\infty^1$  de trièdres considérés; donc les faces des  $\infty^1$  trièdres ainsi obtenus sont tangentes à une développable  $\Delta$  de classe 3 et réciproquement, si une cubique gauche  $\Gamma$  et une développable  $\Delta$  de classe 3 admettent deux trièdres inscrits dans  $\Gamma$ , circonscrits à  $\Delta$ , elles en admettent une série  $\infty^1$ . Cherchons de combien de paramètres dépend un tel couple  $\Gamma, \Delta$ ; on donne d'abord  $\Gamma$  (12 paramètres) puis  $T_1$  (4), puis  $T_2$  (4); la développable  $\Delta$  est, par suite, complètement connue (déterminée, par exemple, par 6 des 8 faces de  $T_1$  et  $T_2$ ); l'ensemble

$\Gamma + T_1 + T_2 + \Delta$  dépend donc de 20 paramètres; en le prenant dans l'ordre  $\Gamma + \Delta + T_1 + T_2$ , on trouve  $x + 2 = 20$ , donc  $x = 18$ . Si l'on considère une cubique  $\Gamma$ , une développable de classe 3,  $\Delta$ , *quelconques*, leur ensemble dépend de 24 paramètres; si l'on cherche un tétraèdre T inscrit dans  $\Gamma$ , circonscrit à  $\Delta$ , on a 4 inconnues (les  $t$  des sommets) liées par 8 équations : notre analyse prouve qu'*en général* ces équations sont incompatibles, car si l'on donne d'abord T (12 paramètres), la cubique  $\Gamma$  fait intervenir 4 paramètres nouveaux,  $\Delta$  aussi 4 : de sorte que  $\Gamma$  et  $\Delta$  ne font intervenir que 20 paramètres au lieu de 24; les 8 équations à 4 inconnues deviennent donc compatibles, moyennant quatre relations <sup>(1)</sup>. Moyennant *six* relations, l'équation de degré 8, se réduit à une identité. L'interprétation de ces six relations s'obtient aussitôt en remarquant que le paramètre  $\lambda_1 : \lambda_2$  admet *six* valeurs pour chacune desquelles l'équation  $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$  a une racine double; si A, A', B, C sont les points ainsi obtenus sur  $\Gamma$  pour une telle valeur de  $\lambda_1 : \lambda_2$ , nous avons deux plans BAA', CAA tangents à  $\Delta$ , se coupant suivant une tangente AA' de  $\Gamma$ ; nous avons aussi deux plans BCA, BCA' *confondus*, tangents à  $\Delta$ , issus de BC, qui est donc une génératrice de la surface  $\Delta$ . *Donc les six conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une cubique gauche  $\Gamma$  et une développable  $\Delta$  de classe 3 admettent une série  $\infty^1$  de tétraèdres inscrits à  $\Gamma$ , circonscrits à  $\Delta$ , est que les 12 points où  $\Gamma$  rencontre la surface  $\Delta$  (qui est de degré 4) soient répartis par couples de deux sur 6 génératrices de  $\Delta$ , ou, ce qui est équivalent, que les 12 plans tangents simultanément à  $\Gamma$  et  $\Delta$  se répartissent en 6 couples se croisant, dans chaque couple, suivant une tangente de  $\Gamma$ .* Remarquons, pour les deux formes de cet énoncé, qu'une dua-

---

(1) Pour que le raisonnement soit parfaitement convaincant, il faut encore être assuré que  $\Gamma$  et  $\Delta$  n'ont dans le cas étudié que l'unique tétraèdre T. Pour voir qu'il existe effectivement des couples  $\Gamma, \Delta$  ayant un tétraèdre unique, donnons-nous  $\Gamma$  puis T; soient A, B, C trois points *quelconques* de  $\Gamma$ ; les développables de classe 3 tangentes aux 4 faces de T et au plan ABC forment une série  $\infty^2$ ; or si l'on donne un plan *arbitraire* passant par BC (un paramètre), il existe *une* développable  $\Delta$  de classe 3 tangente aux 4 faces de T, au plan ABC et au nouveau plan; donc, en opérant de même avec CA et AB, nous obtenons seulement 3 séries  $\infty^1$  de développables  $\Delta$ , comprises dans notre série  $\infty^2$  précédente, et admettant plus qu'un unique tétraèdre inscrit dans  $\Gamma$ , circonscrit à  $\Delta$ ; donc les développables obtenues en retranchant de la série  $\infty^2$  les trois séries  $\infty^1$  en jeu n'ont bien, avec  $\Gamma$  qu'un seul tétraèdre, à savoir T.

lité transforme  $\Gamma$  en une développable  $\bar{\Delta}$ ,  $\Delta$  en une cubique  $\bar{\Gamma}$ , un tétraèdre de sommets A, B, C, D, de faces  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  inscrit à  $\Gamma$ , circonscrit à  $\Delta$ , en un tétraèdre de faces  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$  et sommets  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  inscrit à  $\bar{\Gamma}$ , circonscrit à  $\bar{\Delta}$ ; la première forme de l'énoncé devient la seconde : *or, on peut s'arranger pour que  $\bar{\Gamma}$  coïncide avec  $\Gamma$  et  $\bar{\Delta}$  avec  $\Delta$* ; en effet, pour chaque tétraèdre ABCD, il est clair que les coordonnées du plan BCD s'expriment rationnellement par rapport au  $t$  de A ou aux coordonnées de A et que réciproquement les coordonnées de A s'expriment rationnellement au moyen du paramètre O qui individualise un plan  $\alpha$  tangent à  $\Delta$ ; cette correspondance (A,  $\alpha$ ) est la dualité annoncée, où chaque tétraèdre se correspond à lui-même.

Ici encore les  $\infty^1$  tétraèdres relatifs à  $\Delta$  et  $\Gamma$  se trouvent inscrits dans les  $\infty^2$  quadriques contenant  $\Gamma$  et circonscrits aux  $\infty^2$  quadriques inscrites dans  $\Delta$ .

Je signale encore, reprenant les idées de Duporcq, diverses propriétés de la série  $\infty^2$  de tétraèdres définis par l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0;$$

les sommets d'un tel tétraèdre sont définis par la même équation que les points d'intersection de la quartique plane unicursale

$$\gamma[x : y : z :: f_1(t) : f_2(t) : f_3(t)]$$

par la droite de coordonnées  $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$ ; aux  $\infty^2$  droites du plan  $\pi$  auxiliaire ainsi introduit correspondent nos  $\infty^2$  tétraèdres; aux  $\infty^1$  droites passant par un point fixe de ce plan  $\pi$  correspondent  $\infty^1$  tétraèdres enveloppant une développable  $\Delta$  étudiée ici, associée à  $\Gamma$  et circonscrite à  $Q_1$ ; deux de ces développables ont un seul tétraèdre circonscrit à chacune et inscrit dans  $\Gamma$ , correspondant à la droite joignant les points fixes de  $\pi$  relatifs aux deux développables. Dans cette représentation, à une droite du plan  $\pi$  correspond un tétraèdre T, à un point de  $\pi$  une développable  $\Delta$ ; soit alors le point  $m_0$ , de paramètre  $t_0$  sur  $\gamma$ , et l'ensemble des droites issues de ce point dans  $\pi$ , de façon que l'on ait  $\lambda_1 f_1(t_0) + \lambda_2 f_2(t_0) + \lambda_3 f_3(t_0) = 0$  : les tétraèdres correspondants ont tous le sommet  $M_0$  commun, point de paramètre  $t_0$

sur  $\Gamma$ , de sorte que la développable correspondante dégénère en deux morceaux : d'abord le cône  $C_0$  de sommet  $M_0$ , circonscrit à  $Q_1$ , puis une droite  $\delta_0$  enveloppe des plans  $M_1M_2M_3$ , tangente au cône  $C_0$  : en effet, quand la droite de  $\pi$  devient la tangente en  $m_0$  à  $\gamma$ , le tétraèdre dégénère en le tétraèdre  $M_0M_1M_2$ ; le plan  $M_0M_1M_2$  qui contient  $\delta_0$  (si on le regarde comme plan de la face opposée à  $M_0$ ) est aussi un plan tangent à  $C_0$  (si on le regarde comme plan de deux arêtes issues de  $M_0$ ); on obtient ainsi, en faisant varier  $t_0$ , les  $\infty^1$  cônes circonscrits à  $Q_1$  des points de  $\Gamma$  et les  $\infty^1$  génératrices  $\delta_0$  de  $Q_1$ , le système correspondant étant celui des génératrices par lesquelles on peut mener *un* plan tangent unique à chacune des développables  $\Delta$  (on joint en effet le point  $m_0$  au point fixe où se croisent les droites relatives à  $\Delta$ ). Si nous prenons un point double de  $\gamma$ , soit  $\mu$ , toute droite issue de  $\mu$  perce  $\gamma$  d'abord en  $\mu$ , puis en deux autres points  $\mu_1, \mu_2$  de sorte que les tétraèdres correspondant à la rotation de la droite  $\mu\mu_1\mu_2$  ont tous une arête fixe qui est la droite  $M, M'$  joignant les points de  $\Gamma$  obtenus pour les deux valeurs de  $t$  au point  $\mu$  sur  $\gamma$ ;  $M_1$  et  $M_2$  étant les deux autres sommets de ce tétraèdre  $T$ , le plan  $MM'M_1$  a pour enveloppe  $MM'$ , qui est donc une génératrice de  $Q_1$ ; le plan  $M'M_1M_2$  enveloppe une droite, passant par  $M'$ , qui est donc la génératrice de système opposé à  $MM'$  dans  $Q_1$ ; on a retrouvé la proposition fondamentale :  $Q_1$  admet 3 cordes de  $\Gamma$  pour génératrices; les droites  $\delta_0$  engendrent la semi-quadrique complémentaire de celle qui admet les 3 cordes en jeu [la développable correspondant à  $M$  dégénère en 3 droites : l'enveloppe du plan  $MM'M_1$ , qui est  $MM'$ , l'enveloppe du plan  $MM_1M_2$  qui est la génératrice de système opposé à  $MM'$  sur  $Q_1$ , issue de  $M$ , et enfin la droite enveloppe du plan  $M'M_1M_2$ ; ces deux dernières droites se retrouvent quand on prend la développable dégénérée correspondant à  $M'$ ].

Il reste à montrer que quatre tétraèdres inscrits dans une cubique gauche  $\Gamma$  définissent, par élimination de l'un d'eux, 4 quadriques associées à  $\Gamma$  et ayant une génératrice commune, qui est du système opposé aux génératrices  $\delta_0$  mises en évidence précédemment sur chacune des quadriques. Je donne un raisonnement différent de celui de Duporcq : appelons  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$  les polynômes ayant pour racines les  $t$  des sommets de  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . La quadrique  $Q_1$  est

l'enveloppe des faces des  $\infty^2$  tétraèdres définis par l'équation

$$(1) \quad 0 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

et la quadrique  $Q_2$  celle définie par l'équation

$$(2) \quad \mu_1 f_1 + 0 + \mu_3 f_3 + \mu_4 f_4 = 0.$$

$Q_1$  et  $Q_2$  admettent une développable de classe 3, circonscrite à chacune et définie par l'ensemble des tétraèdres

$$(3) \quad f_3 : f_4 = \text{const.},$$

de sorte que  $Q_1$  et  $Q_2$  ont une génératrice commune  $G$  par laquelle passent deux plans tangents à  $\Delta$ ; coupons la cubique  $\Gamma$  par un plan arbitraire issu de  $\Delta$ ; ce plan est tangent à  $Q_1$ , donc les trois points  $t_1^0$ ,  $t_2^0$ ,  $t_3^0$  où il coupe  $\Gamma$  peuvent être associés à un point  $u_1$  de  $\Gamma$  de façon à obtenir une identité :

$$(4) \quad 0 + \lambda_2^0 f_2 + \lambda_3^0 f_3 + \lambda_4^0 f_4 \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)(t - u_1).$$

On obtient les rapports mutuels de  $\lambda_2^0$ ,  $\lambda_3^0$ ,  $\lambda_4^0$  en exprimant que l'équation (1) est vérifiée pour  $t = t_1^0$  et  $t = t_2^0$ ; on obtient de même un point  $u_2$  tel que

$$(5) \quad \mu_1^0 f_1 + 0 + \mu_3^0 f_3 + \mu_4^0 f_4 \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)(t - u_2).$$

Mais alors on déduit immédiatement de (4) et (5) les équations

$$(6) \quad -\lambda_3^0 \mu_1^0 f_1 + \mu_3^0 \lambda_2^0 f_2 + 0 + (\mu_3^0 \lambda_4^0 - \lambda_3^0 \mu_4^0) f_4 \\ \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0) [\mu_3^0(t - u_1) - \lambda_3^0(t - u_2)].$$

$$(7) \quad -\lambda_4^0 \mu_1^0 f_1 + \mu_4^0 \lambda_2^0 f_2 + (\mu_4^0 \lambda_3^0 - \lambda_4^0 \mu_3^0) f_3 + 0 \\ \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0) [\mu_4^0(t - u_1) - \lambda_4^0(t - u_2)]$$

qui démontrent que le plan utilisé est aussi tangent à la quadrique  $Q_3$  définie par la série  $(T_1, T_2, T_4)$  et à la quadrique  $Q_4$  définie par la série  $(T_1, T_2, T_3)$ ; comme le plan utilisé est un plan arbitraire mené par la droite fixe  $G$ , cela prouve que  $G$  est aussi génératrice de  $Q_3$  et de  $Q_4$ . On peut remarquer que les équations (4), (5), (6), (7) expriment que sur la quartique gauche unicursale auxiliaire  $\gamma' [f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)]$  les points  $t_1^0$ ,  $t_2^0$ ,  $t_3^0$  sont sur une même droite; on

remarquera aussi la configuration remarquable des six développables définies par les tétraèdres  $T_i, T_j$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Un problème analogue à ceux qui viennent d'être traités est le suivant :

*Étant donnée une biquadratique, intersection de deux quadriques Q et Q', trouver un tétraèdre inscrit dans cette biquadratique et circonscrit soit à une quadrique Q<sub>1</sub> soit à une développable de classe 4 définie par deux quadriques Q<sub>1</sub> et Q<sub>2</sub>.*

Nous ne traiterons pas ce problème en détail; nous nous contentons d'indiquer un cas où il y a une série  $\infty^1$  de tétraèdres inscrits dans la biquadratique (Q, Q') et circonscrits à Q<sub>1</sub>; supposons que nous nous donnions la quadrique Q<sub>1</sub> (9 paramètres), 4 génératrices de Q<sub>1</sub>, côtés d'un quadrilatère gauche (4 paramètres), puis une quadrique Q contenant ce quadrilatère (1 paramètre), puis que nous recommencions avec un nouveau quadrilatère gauche tracé sur Q<sub>1</sub> pour aboutir à une nouvelle quadrique Q' (4 + 1 paramètres nouveaux); cela posé un plan tangent  $\alpha$  quelconque de Q<sub>1</sub> coupe la biquadratique (Q, Q') en 4 points, dont nous prenons 3, A, B et C; les nouveaux plans tangents à Q<sub>1</sub> menés par BC, CA, AB se coupent, d'après la remarque de M. Rowe, en un point D qui appartient simultanément à Q et Q', donc situé aussi sur la biquadratique: on trouve donc  $\infty^2$  tétraèdres T dont les sommets sont sur la courbe (Q, Q') et dont les faces sont tangentes à Q<sub>1</sub> (1). L'ensemble (Q<sub>1</sub>, Q, Q') présenté ici fait jouer 19 paramètres; M. Gambier

---

(1) Indiquons le nombre de paramètres mis en jeu par la donnée, dans l'ordre indiqué, des éléments suivants: d'abord un tétraèdre T (12), une biquadratique circonscrite (8), une quadrique inscrite (5), soit un total (25) qui est le même que si l'on se donne d'abord une biquadratique (16), puis une quadrique (9).

Maintenant un tétraèdre T (12), un nouveau tétraèdre T' quelconque par rapport au premier (12); la biquadratique circonscrite à T et T' (6), une quadrique tangente aux 8 faces (1), total 25 exactement comme pour la donnée d'une biquadratique et d'une quadrique. On ne peut déduire de ces résultats si une biquadratique et une quadrique données *a priori* admettent un tétraèdre de l'espèce en jeu ou deux. Une étude plus détaillée s'imposerait. En tout cas l'exemple donné dans le texte pour la biquadratique (Q, Q') et la quadrique Q<sub>1</sub> admettant  $\infty^2$  tétraèdres montre qu'il y a au plus six conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une infinité de tétraèdres de l'espèce indiquée relatifs à une biquadratique et une quadrique.



a montré dans le Mémoire déjà cité que  $Q$  et  $Q'$  ne sont pas quelconques et ne font jouer que 17 paramètres, la quadrique  $Q_1$ , pour un couple  $Q, Q'$  déjà donné (satisfaisant à la relation convenable qui abaisse à 17 le nombre de paramètres nécessaires pour obtenir  $Q$  et  $Q'$ ) dépendant de 2 paramètres; dans la biquadratique ( $Q$  et  $Q'$ ) existent deux séries  $\infty^1$  de quadrilatères inscrits dont deux côtés opposés sont génératrices de  $Q$ , et les deux autres génératrices de  $Q'$ .

12. Compléments divers. — 1° Considérons les deux quadriques

$$\begin{aligned} (Q) \quad & x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ (Q_1) \quad & xy - z = 0. \end{aligned}$$

La symétrie  $Ox$  (involution biaxiale d'axes  $Ox$  et la droite de l'infini du plan  $zOy$ ) conserve  $Q$  et  $Q_1$ , et a pour axes deux génératrices de  $Q_1$ ; nous sommes dans le cas signalé en note au paragraphe 5; l'équation en  $\lambda$  du faisceau  $Q - \lambda Q_1 = 0$  est bicarrée; la racine  $\lambda = \varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) donne un cylindre à génératrices horizontales, parallèles à la bissectrice  $x - \varepsilon y = 0$  des axes  $Ox, Oy$  de  $xOy$ ; la racine  $\lambda = \varepsilon iR$  donne un cône ayant son sommet au point  $(0, 0, \varepsilon iR)$  de l'axe  $Oy$ . Le calcul relatif à la correspondance  $(A, \alpha)$  donne

$$(R^2 + 1) [(h_0 t_0 + w_0 z_0)^2 - (u_0 x_0 + v_0 y_0)^2] = 0.$$

Le facteur  $R^2 + 1 = 0$  correspondrait au cas où  $Q$  et  $Q_1$  auraient un quadrilatère commun (défini par  $x^2 + 1 = 0$  ou  $y^2 + 1 = 0$ ). Le facteur à conserver  $u_0 x_0 + v_0 y_0 - h_0 t_0 - w_0 z_0 = 0$  montre que la correspondance  $(A, A_1)$  ou  $(\alpha, \alpha_1)$  se réduit à la symétrie  $Oz$ . Si l'on cherchait les tétraèdres inscrits dans  $Q_1$  et circonscrits à  $Q_1$ , on retrouverait cette même symétrie  $Oz$ .

2° On peut se demander quels théorèmes de géométrie plane correspondent à ceux que nous avons obtenus pour l'espace.

Considérons dans le plan une congruence *quadratique* de cercles, c'est-à-dire  $\infty^2$  cercles tels que par deux points quelconques du plan passent *deux* de ces cercles; les cercles de rayon nul de ce système forment une famille simplement infinie dont les centres sont répartis sur une quartique bicirculaire. Dans le cas, et seulement dans le cas

où cette quartique dégénère en quatre droites isotropes AI, AJ, BI, BJ, en prenant trois quelconques de ces cercles ayant un point commun, les trois points résiduels d'intersection de ces 3 cercles sont sur un cercle de la famille. En effet, par inversion, ceci revient à considérer une sphère Q et les sections de cette sphère par des plans tangents à une quadrique Q<sub>1</sub> : le cas *spécial* envisagé est celui où Q et Q<sub>1</sub> ont 4 génératrices communes; le cas *général* donne sur Q des cercles de rayon nul dont le centre est réparti sur la biquadratique (Q, Q<sub>1</sub>), qui a, pour perspective stéréographique, une quartique bicirculaire.

3° Dans le cas de deux quadriques Q, Q<sub>1</sub> *quelconques* faisons une perspective de la figure, à partir du sommet  $\omega_1$  du tétraèdre conjugué commun, sur la face opposée  $\omega_2\omega_3\omega_4$  de ce tétraèdre. La courbe B se projette suivant une conique C<sub>2</sub>; le contour apparent de Q<sub>1</sub> est une conique C<sub>1</sub>, celui de Q une conique C; C, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> sont trois coniques d'un même faisceau linéaire ponctuel. La section de Q par le plan  $\alpha$  tangent à Q<sub>1</sub> donne en perspective une conique  $\gamma$  dont deux cordes communes avec C<sub>2</sub> sont tangentes à C<sub>1</sub>; de plus  $\gamma$  est bitangente à C : *c'est déjà un théorème que les coniques  $\gamma$  définies par ces conditions en nombre égal à 4 dépendent de deux paramètres* et ce résultat tient à ce que C, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> appartiennent à un même faisceau linéaire ponctuel; les coniques  $\gamma$  qui passent en un point fixe  $m$  du plan forment un système  $\infty^1$ . A une conique  $\gamma_0$  *donnée* correspond un plan  $\alpha$  tangent à Q<sub>1</sub>, puis un plan  $\alpha_1$  tangent à une quadrique Q'<sub>1</sub>, donc une conique  $\gamma'$  analogue à  $\gamma$  mais relative à C, C<sub>1</sub> et C'<sub>1</sub> où C'<sub>1</sub> est le contour apparent de Q'<sub>1</sub> (nous avons vu que Q'<sub>1</sub> est une quadrique du faisceau ponctuel Q, Q<sub>1</sub>); à un point  $a$  choisi arbitrairement sur  $\gamma'$  correspondent  $\infty^1$  coniques du système  $\gamma$ , passant en  $a$ , et l'on peut en choisir (d'une infinité simple de façons), trois,  $\gamma'_0, \gamma''_0, \gamma'''_0$  de façon que  $(\gamma''_0, \gamma'_0), (\gamma'''_0, \gamma'_0), (\gamma'_0, \gamma''_0)$  aient un de leurs points d'intersection, autre que  $a$ , situé en  $b, c$ , ou  $d$  sur  $\gamma_0$ .

4° Nous devons indiquer comment on vérifie que l'équation formée pour une cubique gauche  $\Gamma$  et une quadrique Q est de degré 4. On a pris la cubique  $\Gamma, (x = t, y = t^2, z = t^3)$ ; le cône S qui a son sommet en  $(t, t^2, t^3)$  et pour directrice  $\Gamma$ , a pour équation, quand on transporte

les axes en son sommet

$$t^2 X^2 - tXY + Y^2 - ZX = 0,$$

de sorte que nous pouvons prendre pour ce cône

$$\begin{aligned} A = 2t^2, \quad A' = 2, \quad A'' = 0, \quad B = 0, \quad B' = -1, \quad B'' = -t, \\ a = 0, \quad a' = -1, \quad a'' = 3t^2, \quad b = t, \quad b' = 2, \quad b'' = 0. \end{aligned}$$

Nous allons former l'équation du cône  $S_1$  (les axes étant encore transportés en  $t, t^2, t^3$ )

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 zx + 2B''_1 xy = 0,$$

et nous aurons à écrire l'équation

$$(1) \quad (2t^2 a_1 + 2a'_1 - 2b'_1 - 2tb'_1)^2 - 4\Delta_1(-A'_1 + 3t^2 A''_1 + 2tB_1 + 4B'_1) = 0.$$

Prenons l'équation de la quadrique Q

$$(Q_1) \quad \begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

[Ayant écrit l'équation (1), il n'y a plus inconvénient à employer pour Q les lettres A, . . .] L'équation de  $S_1$ , après transport des axes, est

$$\begin{aligned} (At^2 + A't^4 + A''t^6 + 2Bt^5 + 2B't^4 + 2B''t^3 + 2Ct + 2C't^2 + 2C''t^3 + D) \\ \times (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy) - (Atx + A't^2y + A''t^3z \\ + Bt^2z + Byt^3 + B't^3x + B'zt + B''tz + B''xt^2 + Cx + C'y + C''z)^2 = 0, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a en posant

$$(2) \quad \begin{cases} P \equiv At^2 + A't^4 + \dots + D, \\ \alpha \equiv B't^3 + B''t_2 + At + C, \\ \alpha' \equiv Bt^3 + A't^2 + B''t + C', \\ \alpha'' \equiv A''t^3 + Bt^2 + B't + C'', \end{cases}$$

les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = AP - \alpha^2, & A'_1 = A'P - \alpha'^2, & A''_1 = A''P - \alpha''^2, \\ B_1 = BP - \alpha'\alpha'', & B'_1 = B'P - \alpha''\alpha, & B''_1 = B''P - \alpha\alpha'. \end{cases}$$

Nous employons les notations usuelles

$$a = A'A'' - B^2, \quad b = B'B'' - AB \dots,$$

On trouve sans peine

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = A_1 A_1'' - B_1^2 = P[aP - A' \alpha''^2 - A'' \alpha'^2 + 2B \alpha' \alpha''], \\ a_1' = P[a'P - A \alpha''^2 - A'' \alpha'^2 + 2B' \alpha'' \alpha'], \\ b_1' = P[b'P - B \alpha \alpha' - B'' \alpha' \alpha'' + A' \alpha \alpha'' + B' \alpha'^2], \\ b_1'' = P[b''P - B' \alpha' \alpha'' - B \alpha'' \alpha + A'' \alpha'' \alpha + B'' \alpha''^2]. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta_1 = A_1 a_1 + B_1' b_1'' + B_1'' b_1', \\ = P^2[\Delta P - a \alpha^2 - a' \alpha'^2 - a'' \alpha''^2 - 2b \alpha' \alpha'' - 2b' \alpha'' \alpha - 2b'' \alpha \alpha']. \end{cases}$$

L'équation (1) peut donc être débarrassée du facteur  $4P^2$ , ensuite on a

$$\Delta P - a \alpha^2 - a' \alpha'^2 - a'' \alpha''^2 - 2b \alpha' \alpha'' - 2b' \alpha'' \alpha - 2b'' \alpha \alpha',$$

$$\equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \alpha' \\ B' & B & A'' & \alpha'' \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & P \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} \equiv H,$$

H étant le hessien de la quadrique Q<sub>1</sub>. L'équation (1) devient donc

$$\frac{1}{P^2} (t^2 a_1 - t b_1'' + a_1' - b_1')^2 - H(3t^2 A_1'' + 2t B_1 + 4B_1' - A_1) = 0.$$

Ce n'est plus qu'une question de patience de vérifier que les polynomes en  $t$ ,  $\frac{t^2 a_1 - t b_1'' + a_1' - b_1'}{P}$  et  $3t^2 A_1'' + 2t B_1 + 4B_1' - A_1$  se réduisent le premier à un polynome en  $t$  de degré 2 et le second à un polynome de degré 4.

#### SUR UN PARADOXE.

Voici maintenant un paradoxe que nous a signalé M. Lebel et que, malgré sa simplicité, nous avons eu beaucoup de peine à lever. Soient une quadrique Q et un cône S ayant son sommet en A sur Q. Cherchons l'enveloppe des plans coupant Q suivant une conique  $q$  admettant  $\infty^1$  triangles inscrits dans  $q$  et circonscrits à la section  $s$  de S par le même plan. On trouve aisément une quadrique  $\Sigma$  inscrite dans le cône S. Si donc on imagine une quadrique Q<sub>1</sub> nouvelle *inscrite dans S*, pour obtenir les tétraèdres de sommet A, de faces tangentes à Q<sub>1</sub>, on devra prendre les plans tangents communs à  $\Sigma$  et Q<sub>1</sub> comme plans

de la face  $\alpha$  inconnue opposée à A; ces plans, en dehors de ceux communs à S et  $Q_1$  qui ne conviennent pas, enveloppent un cône du second degré. Ceci est expliqué en supposant  $Q_1$  quelconque. Supposons  $Q_1$  coïncidant avec  $\Sigma$ ; on aura, pour le point A  $\infty^2$  plans  $\alpha$  et non  $\infty^1$ ; or, ceci n'est possible que si Q et  $\Sigma$  ont quatre droites communes. C'est là que se présentent divers paradoxes : les équations de Q et  $\Sigma$  ne manifestent pas à première vue l'existence de 4 génératrices communes;  $\Sigma$  semble dépendre de 7 paramètres quand Q est donnée (2 pour la position du point A, 5 ensuite pour le cône S), tandis que les quadriques  $\Sigma$  ayant avec Q 4 génératrices communes ne dépendent que de 5 paramètres. Nous levons aisément les objections en remarquant que la proposition étudiée ici est la transformée par dualité du lemme initial de M. Rowe, transformée que nous avons d'ailleurs explicitée plus loin pour construire le point  $A_1$  associé à A. Le plan tangent à Q en A coupe Q suivant deux génératrices  $\gamma_1, \gamma_2$ ; par  $\gamma_1$  (ou  $\gamma_2$ ) menons les deux plans tangents à S, recoupant chacun Q suivant une génératrice nouvelle  $G'_1, G''_1$  (ou  $G'_2, G''_2$ );  $\Sigma$  contient  $G'_1, G''_1, G'_2, G''_2$ . Si l'on prend sur Q un nouveau point  $A'$ , puis le cône circonscrit de  $A'$  à  $\Sigma$  comme cône  $S'$ , le même problème posé pour  $A'$  et  $S'$  (au lieu de A et S) redonne la quadrique  $\Sigma$ , ce qui explique la présence apparente de deux paramètres supplémentaires.

## NOTE COMPLÉMENTAIRE.

Nous devons aussi indiquer une méthode un peu plus facile pour effectuer le calcul des pages 162-164. Il s'agit d'exprimer que le cône S, qui a pour sommet le point  $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$  de la quadrique Q et pour base la conique section de Q par le plan  $\alpha(u_0, v_0, w_0, h_0)$  tangent à  $Q_1$ , est capable de  $\infty^1$  trièdres circonscrits au cône  $S_1$  de même sommet A, circonscrit à la quadrique  $Q_1$ . Cette relation a été obtenue en employant le faisceau ponctuel de cônes déterminé par S et  $S_1$ ; nous avons indiqué, page 156, que cette condition peut aussi se trouver au moyen du faisceau tangentiel de cônes déterminé encore par S et  $S_1$ : nous allons former l'équation exprimant que l'un des cônes de ce faisceau tangentiel dégénère en deux droites. Pour cela remarquons que la conique (Q,  $\alpha$ ) a pour équation tangentielle (Q,  $\alpha$ )

$$(1) \quad (u^2 + v^2 + w^2 + h^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 + h_0^2) - (uu_0 + vv_0 + ww_0 + hh_0)^2 = 0,$$



On a ensuite

$$C = \sigma_0^2 [x_0^2 (b + c + d) + \dots] - \sigma_0 [x_0^2 \{ (c + d)v_0^2 + (b + d)\omega_0^2 + (b + c)h_0^2 \} + \dots] \\ + \sigma_0 [2(c + d)u_0 v_0 x_0 y_0 + \dots].$$

Dans le quotient  $C : \sigma_0$ , le coefficient de  $x_0^2$  est

$$u_0^2 (b + c + d) + bv_0^2 + c\omega_0^2 + dh_0^2 = (b + c + d - a)u_0^2,$$

et l'on constate aussitôt que l'on a

$$(9) \quad C = \sigma_0 (u_0 x_0 + v_0 y_0 + \omega_0 z_0 + h_0 t_0) [(b + c + d - a)u_0 x_0 + \dots].$$

On a ensuite

$$B = x_0^2 \{ \sigma_0 (bc + cd + db) - v_0^2 cd - \omega_0^2 bd - h_0^2 bc \} + \dots + 2u_0 v_0 x_0 y_0 cd + \dots \\ = x_0^2 \{ u_0^2 (bc + cd + db) + bv_0^2 (c + d) + c\omega_0^2 (d + b) + dh_0^2 (b + c) \} + \dots \\ + 2u_0 v_0 x_0 y_0 cd + \dots$$

En ordonnant autrement les termes, on a

$$B = u_0^2 x_0^2 (bc + cd + db) + \dots \\ + au_0^2 \{ (c + d)y_0^2 + (b + d)z_0^2 + (b + c)t_0^2 \} + \dots + 2u_0 v_0 x_0 y_0 cd + \dots$$

Or

$$(c + d)y_0^2 + (b + d)z_0^2 + (b + c)t_0^2 \\ = (b + c + d)(y_0^2 + z_0^2 + t_0^2) - by_0^2 - cz_0^2 - dt_0^2 \\ = (a - b - c - d)x_0^2 - [ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dt_0^2].$$

On en déduit donc (puisque  $\Sigma x_0^2 = 0$ ,  $\Sigma au_0^2 = 0$ )

$$(10) \quad B = u_0^2 x_0^2 [bc + cd + db + a(a - b - c - d)] + \dots + 2u_0 v_0 x_0 y_0 cd + \dots$$

En écrivant l'équation

$$\frac{4BD - C^2}{[\sigma_0 (u_0 x_0 + v_0 y_0 + \omega_0 z_0 + h_0 t_0)]^2} = 0,$$

on retrouve l'équation (11) donnée page 164, et les calculs employés avec cette nouvelle méthode sont un peu moins pénibles; nous avons d'autre part une vérification précieuse des résultats.