

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

POTRON

Sur les normalisants des s_2 dans les groupes gauche et quadratique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 51 (1934), p. 141-151

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__141_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES NORMALISANTS DES s_2

DANS

LES GROUPES GAUCHE ET QUADRATIQUE

PAR M. POTRON

L'objet de ce travail est de donner une démonstration plus courte et plus simple de quelques-uns des résultats obtenus par M. de Séguier dans son Mémoire *Les substitutions d'ordre 2 des groupes linéaire, hermitien, gauche et quadratique dans un champ de Galois*. Quelques-uns de ces résultats seront en outre précisés ⁽¹⁾.

Généralités.

1. Les classes de s_2 de seconde espèce du groupe homogène total \mathcal{U}' d'une forme gauche ou quadratique a ayant été déterminées, il s'agit, pour un représentant de chaque classe, de déterminer son normalisant \mathcal{U}' dans le groupe homogène total \mathcal{U}' , et son normalisant \mathcal{U} dans le groupe homogène spécial \mathcal{A} de la forme a .

Dans le Mémoire cité ont été obtenus, relativement aux s_2 du groupe linéaire homogène $\mathcal{L}(n, \pi)$, les résultats suivants. Si (s) , forme homogène de s , est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{L}(n, \pi)$ (n pair = 2ν), c'est-à-dire si s^2 est la similitude $[\iota^{2\nu+1}]$, la substitution s est conjuguée, dans $L(n, \pi^2)$ de la substitution $[\iota^{\nu}\iota_0]\varphi$, φ désignant une s_2 qui multiplie ν des variables par -1 et les autres par 1 , et ι_0 désignent $\iota^{(\pi+1)/2}$ ($\iota_0^2 = \iota$). On peut dire aussi que $[\iota^{\nu}\iota_0]\varphi$, dont les multiplicateurs sont $\pm \iota^{\nu}\iota_0$, est la forme canonique de s . Il existe donc n nouvelles

(1) Toutes les notations de ce Mémoire seront conservées.

variables,

$$(1) \quad u_i = \sum_{k=1}^{k=n} \rho_{ik} x_k, \quad \dot{u}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \dot{\rho}_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, \nu),$$

telles que la substitution s devienne $\Pi_1^\nu s_i$, $s_i = \begin{vmatrix} u_i & v^h v_0 u_i \\ \dot{u}_i & -v^h v_0 \dot{u}_i \end{vmatrix}$.

Pour qu'une substitution de $L(n, \pi)$ soit permutable à s , il faut et suffit qu'elle opère, sur les variables canoniques de s , une substitution $\alpha = \Pi_1^\nu \alpha_i$, avec

$$(2) \quad \alpha_i = \begin{vmatrix} u_i & \sum_1^\nu \alpha_{ik} u_k \\ \dot{u}_i & \sum_1^\nu \dot{\alpha}_{ik} \dot{u}_k \end{vmatrix}.$$

2. Comme $\mathcal{C}'(n, \pi)$ divise $\mathcal{L}(n, \pi)$, si (s) est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{C}'(n, \pi)$, on pourra donner à s sa forme canonique $[v^h v_0] \varphi$ en effectuant, sur les variables de la forme gauche ou quadratique a , un changement de variables tel que (1). Les substitutions α du normalisant N' de s dans $A'(n, \pi)$ auront alors la forme (2) et devront multiplier la forme a par un facteur constant f . Le normalisant N de s dans $A(n, \pi)$ sera le diviseur de N' correspondant à $f = 1$.

On sait qu'une substitution (σ) de $\mathcal{C}'(n, \pi)$ est permutable à (s) toujours et seulement si $\sigma^{-1} s \sigma = s$ ou ds . Si donc $A(n, \pi)$ contient une telle substitution σ , \mathcal{N}' et \mathcal{N} seront les groupes homogènes déduits respectivement des groupes $N' + \sigma N'$ et $N + \sigma N$, ce que l'on écrira $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$.

On voit que, si $\varphi_i = \begin{vmatrix} u_i & u_i \\ \dot{u}_i & -\dot{u}_i \end{vmatrix}$ et $d_i = \begin{vmatrix} u_i & -u_i \\ \dot{u}_i & -\dot{u}_i \end{vmatrix}$, la substitution réelle σ_i la plus générale telle que $\varphi_i \sigma_i = \sigma_i d_i \varphi_i$ est $\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \rho \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \rho u_i \end{vmatrix}$. Le multiplicateur ρ sera déterminé par la condition que $\sigma = \Pi \sigma_i$ conserve la forme a .

3. J'aurai à faire usage du théorème suivant. Si x_i et x'_i ($i = 1, \dots, n$) désignent $2n$ variables parcourant \mathcal{C}' , une identité de la forme

$$\sum_i \sum_k \rho_{ik} x_i x'_k = h \sum_i \sum_k \dot{\rho}_{ik} \dot{x}_i \dot{x}'_k,$$

où h désigne un facteur constant, ne peut avoir lieu que si les coefficients ρ_{ik} sont tous nuls, autrement dit, si chacun des deux membres se

réduit séparément à 0. Soit en effet υ un élément définissant \mathcal{C}' ; exprimons les variables x_i et x'_i , en fonction de variables y_i, z_i, y'_i, z'_i parcourant \mathcal{C} , par

$$x_i = y_i + \upsilon z_i, \quad x'_i = y'_i + \upsilon z'_i,$$

en sorte que

$$\dot{x}_i = y_i + \dot{\upsilon} z_i, \quad \dot{x}'_i = y'_i + \dot{\upsilon} z'_i.$$

L'identité considérée s'écrit

$$\Sigma_i \Sigma_k \rho_{ik} (y_i + \upsilon z_i) (y'_k + \upsilon z'_k) = h \Sigma_i \Sigma_k \dot{\rho}_{ik} (y_i + \dot{\upsilon} z_i) (y'_k + \dot{\upsilon} z'_k).$$

Écrivant que les coefficients de $y_i y'_k$ sont égaux, ainsi que ceux de $y_i z'_k$, on obtient

$$\rho_{ik} - h \dot{\rho}_{ik} = \rho_{ik} \upsilon - h \dot{\rho}_{ik} \dot{\upsilon} = 0;$$

comme $h(\upsilon - \dot{\upsilon}) \neq 0$, il faut $\rho_{ik} = \dot{\rho}_{ik} = 0$.

4. Soient $n = 2\nu$ variables x_i et y_i ($i = 1, \dots, \nu$) parcourant \mathcal{C} , et n variables z_i et \dot{z}_i , parcourant \mathcal{C}' , définies par $z_i = \Sigma_k (\rho_{ik} x_k + \rho'_{ik} y_k)$, $\dot{z}_i = \Sigma_k (\dot{\rho}_{ik} x_k + \dot{\rho}'_{ik} y_k)$. Si $\check{\alpha}$ et $\check{\alpha}$ sont les substitutions

$$|z_i \quad \Sigma_k (\alpha_{ik} z_k + \beta_{ik} \dot{z}_k)| \quad \text{et} \quad |\dot{z}_i \quad \Sigma_k (\dot{\beta}_{ik} z_k + \dot{\alpha}_{ik} \dot{z}_k)|,$$

$\check{\alpha}$ désignera le produit $\check{\alpha}\check{\alpha}$, substitution sur les variables x_i et y_i à coefficients dans \mathcal{C} . Si $\check{\alpha}$ parcourt un groupe $\check{\Gamma}$, $\check{\alpha}$ parcourt un groupe, $\check{\Gamma}$ complètement déterminé par le groupe $\check{\Gamma}$ et les formules

$$z_i = \Sigma_k (\rho_{ik} x_k + \rho'_{ik} y_k)$$

du changement de variables.

GROUPE GAUCHE.

5. Les variables sont choisies de manière à donner à l'invariant a la forme

$$g = \Sigma_i g_i, \quad g_i = (x_i y'_i - y_i x'_i),$$

Les variables x'_i et y'_i étant cogrédientes aux variables x_i et y_i .

Les classes de s_2 de seconde espèce du groupe homogène total $\mathcal{G}'(n, \pi)$

($n = 2\nu$) sont représentées par les formes homogènes des substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau\gamma &= \Pi_1^\nu \tau_i \gamma_i, & \tau_i \gamma_i &= \begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix} & (\pi \equiv 1 \pmod{4}), \\ \tau &= \Pi_1^\nu \tau_i, & \tau_i &= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix} & (\pi \equiv 3 \pmod{4}), \\ \Theta &= \Pi_1^{\nu/2} \theta_i, & \theta_i &= \begin{vmatrix} x_{2i-1} & \iota y_{2i} \\ y_{2i-1} & -x_{2i} \\ x_{2i} & -\iota y_{2i-1} \\ y_{2i} & x_{2i-1} \end{vmatrix} & (\nu \text{ pair}). \end{aligned}$$

Normalisant de $(\tau\gamma)$.

6. Si $\eta = \iota^{(\pi+1)/2} (\eta^2 = -\iota)$, le changement de variables

$$(3) \quad u_i = x_i - \eta y_i, \quad \dot{u}_i = x_i + \eta y_i$$

donne à $\tau_i \gamma_i$ la forme canonique $\begin{vmatrix} u_i & u_i \\ \dot{u}_i & -\dot{u}_i \end{vmatrix}$. Si l'on introduit les variables cogrédientes

$$u'_i = x'_i - \eta y'_i, \quad \dot{u}'_i = x'_i + \eta y'_i,$$

la forme g_i devient

$$g_i = \frac{1}{2\eta} (u_i \dot{u}'_i - \dot{u}_i u'_i).$$

Les substitutions du normalisant N' seront $\alpha = \Pi_1^\nu \alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} u_i & \sum_k \alpha_{ik} u_k = U_i \\ \dot{u}_i & \sum_k \dot{\alpha}_{ik} \dot{u}_k = \dot{U}_i \end{vmatrix}$$

et

$$\sum_1^\nu (U_i \dot{U}_i - U'_i \dot{U}'_i) = f \sum_1^\nu (u_i \dot{u}'_i - u'_i \dot{u}_i).$$

Cette identité entraîne (3) l'identité

$$\sum_1^\nu U_i \dot{U}_i - f \sum_1^\nu u_i \dot{u}'_i = 0,$$

qui exprime que la substitution $\check{\alpha} = \Pi_1^\nu \check{\alpha}_i$, où $\check{\alpha}_i = \begin{vmatrix} u_i & \sum \alpha_{ik} u_k \end{vmatrix}$, appar-

tient au groupe total de la forme hermitienne $e = \sum_i u_i \dot{u}_i$. Pour obtenir le normalisant N, il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, les normalisants N' et N de $\tau\gamma$ dans $G'(n, \pi)$ et $G(n, \pi)$ sont respectivement transformés, par (3), en les groupes $\bar{\Gamma}'$ et $\bar{\Gamma}$ correspondant aux groupes hermitiens $\bar{\Gamma}' = E'(\nu, \pi)$ et $\bar{\Gamma} = E(\nu, \pi)$.

7. Une substitution $\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \rho \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \rho u_i \end{vmatrix}$ transforme g_i en $-\rho \dot{\rho} g_i$ (2). Il lui correspond une substitution de $G(n, \pi)$ si

On a alors $\rho \dot{\rho} = -1$ ou $\rho = \iota^{(\pi-1)/2} = j_0$ ($j_0^{\pi} = j_0^{-1}$).

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & j_0 \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & -j_0^{-1} u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \beta y_i \\ y_i & \beta^{-1} x_i - \alpha y_i \end{vmatrix} \quad (2\alpha = j_0 - j_0^{-1}, \quad 2\beta = \eta j_0 + \eta j_0^{-1}).$$

Normalisant de (τ).

8. Il suffit, dans ce qui précède, de remplacer partout η par

$$\varepsilon = \iota^{(\pi^2-1)/4}.$$

On obtient les mêmes résultats pour les normalisants N et N' ; et ensuite

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & j_0 \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & -j_0^{-1} u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \beta y_i \\ y_i & \beta x_i - \alpha y_i \end{vmatrix} \quad (2\alpha = j_0 - j_0^{-1}, \quad 2\beta = \varepsilon j_0 + \varepsilon j_0^{-1}).$$

Normalisant de (Θ).

9. Le changement de variables

$$(4) \quad \begin{cases} u_i = x_{2i-1} + \iota_0 y_{2i}, & v_i = -\iota_0 y_{2i-1} + x_{2i}, \\ \dot{u}_i = x_{2i-1} - \iota_0 y_{2i}, & \dot{v}_i = \iota_0 y_{2i-1} + x_{2i}, \end{cases}$$

i parcourant $1, \dots, \nu/2$ donne

$$\theta_i = \begin{vmatrix} u_i & \iota_0 u_i \\ \dot{u}_i & -\iota_0 \dot{u}_i \\ v_i & \iota_0 v_i \\ \dot{v}_i & -\iota_0 \dot{v}_i \end{vmatrix}.$$

Si l'on introduit les variables accentuées cogrédientes, la forme g_i devient

$$-\frac{1}{2\varepsilon} \Sigma_1^{\gamma/2} [u_i v'_i - v_i u'_i - (\dot{u}_i \dot{v}'_i - \dot{u}'_i \dot{u}_i)].$$

Les substitutions du normalisant N' seront $\alpha = \Pi_1^{\gamma/2} \alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k (\alpha_{ik} u_k + \alpha'_{ik} v_k) = U_i \\ \dot{u}_i & \Sigma_k (\dot{\alpha}_{ik} \dot{u}_k + \dot{\alpha}'_{ik} \dot{v}_k) = \dot{U}_i \\ v_i & \Sigma_k (\beta_{ik} u_k + \beta'_{ik} v_k) = V_i \\ \dot{v}_i & \Sigma_k (\dot{\beta}_{ik} \dot{u}_k + \dot{\beta}'_{ik} \dot{v}_k) = \dot{V}_i \end{vmatrix},$$

et

$$\Sigma_1^{\gamma/2} [U_i V_i - V_i U_i - (\dot{U}_i \dot{V}_i - \dot{V}_i \dot{U}_i)] = f \Sigma_1^{\gamma/2} [u_i v'_i - v_i u'_i - (\dot{u}_i \dot{v}'_i - \dot{v}_i \dot{u}'_i)].$$

Cette identité entraîne (3) l'identité

$$\Sigma_1^{\gamma/2} (U_i V_i - V_i U_i) = f \Sigma_1^{\gamma/2} (u_i v'_i - v_i u'_i),$$

qui exprime que la substitution $\check{\alpha} = \Pi_1^{\gamma/2} \check{\alpha}_i$, où

$$\check{\alpha}_i = \begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k (\alpha_{ik} u_k + \alpha'_{ik} v_k) = U_i \\ v_i & \Sigma_k (\beta_{ik} u_k + \beta'_{ik} v_k) = V_i \end{vmatrix},$$

dont les coefficients sont dans \mathcal{C}' , appartient au groupe total, dans le champ \mathcal{C}' , de la forme gauche $\Sigma_1^{\gamma/2} (u_i v'_i - v_i u'_i)$. Pour obtenir le normalisant N , il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, les normalisants N' et N de Θ dans $G'(n, \pi)$ et $G(n, \pi)$ sont respectivement transformés par (4) en les groupes $\bar{\Gamma}'$ et $\bar{\Gamma}$ correspondant aux groupes gauches $\check{\Gamma}' = G'(\nu, \pi^2)$ et $\check{\Gamma} = G(\nu, \pi^2)$.

10. La substitution $\sigma = \Pi_1^{\gamma/2} \sigma_i$, où

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \dot{v}_i \\ \dot{u}_i & v_i \\ v_i & \dot{u}_i \\ \dot{v}_i & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i} \\ y_{2i-1} & y_{2i} \\ x_{2i} & x_{2i-1} \\ y_{2i} & y_{2i-1} \end{vmatrix}$$

conserve g et transforme Θ en $d\Theta$,

GROUPE QUADRATIQUE.

11. Les variables sont choisies de manière à donner à l'invariant a la forme

$$g = \sum_1^{\nu} x_i y_i + \psi, \quad \psi = cx^2 + bxy + c'y'^2 = x_{\nu'} y_{\nu'}$$

les variables $x_{\nu'}$ et $y_{\nu'}$, ($\nu' = \nu + 1$) étant réelles ou imaginaires et conjuguées suivant que ψ est réductible ou irréductible dans \mathcal{C} .

Les classes de s_2 du groupe homogène total $\mathcal{Q}'(n, \pi)$ ($n = 2\nu'$) sont représentées par les formes homogènes des substitutions suivantes :

$$1^\circ \quad t_{1\dots\nu'}\gamma, \quad t_{1\dots\nu'} = \prod_1^{\nu'} t_i, \quad t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \prod_1^{\nu'} \gamma_i, \quad \gamma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, \nu),$$

$$\gamma_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} \end{vmatrix} \quad (\psi \text{ réd.}); \quad \gamma_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota' x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & \iota'' y_{\nu'} \end{vmatrix} \quad (\psi \text{ irréd.});$$

2° $\Theta_{\nu'}$, pour $n \equiv 0 \pmod{4}$, ψ réductible, et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ en posant

$$\Theta_{2k} = \prod_1^k \theta_i, \quad \theta_i = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i} \\ y_{2i-1} & x_{2i} \\ x_{2i} & -y_{2i-1} \\ y_{2i} & -x_{2i-1} \end{vmatrix};$$

3° $\Theta_{\nu'}\gamma$ pour $n \equiv 0 \pmod{4}$, ψ réductible, et $\pi \equiv 1 \pmod{4}$;

4° $\Theta_{\nu'} m_{\nu'\varepsilon}$, $m_{\nu'\varepsilon} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \varepsilon x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & -\varepsilon y_{\nu'} \end{vmatrix}$, pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$.

5° $\Theta_{\nu'} \gamma m_{\nu'\sigma}$, $\sigma = \iota^{(\pi-1)/4} \iota'^{(\pi+1)/2}$, pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 1 \pmod{4}$.

Normalisant de $s = t_{1\dots\nu'}\gamma$.

12. Le changement de variables

$$u_i = x_i + \iota_0 y_i, \quad \dot{u}_i = x_i - \iota_0 y_i$$

donne

$$\iota_i \gamma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & \iota_0 u_i \\ \dot{u}_i & -\iota_0 \dot{u}_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, \nu).$$

Si ψ est réductible, on a le même résultat pour $i = \nu'$, et la forme $x_i y_i$ ($i = 1, \dots, \nu'$) devient

$$q_i = \frac{1}{4t_0} (u_i^2 - \dot{u}_i^2).$$

Si ψ est irréductible, le changement de variables

$$u_{\nu'} = j_0 x_{\nu'} + y_{\nu'}, \quad \dot{u}_{\nu'} = x_{\nu'} - j_0^{-1} y_{\nu'}$$

donne

$$t_{\nu'} y_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & t' y_{\nu'} \\ y_{\nu'} & t' \pi x_{\nu'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{\nu'} & t_0 u_{\nu'} \\ \dot{u}_{\nu'} & t_0 \dot{u}_{\nu'} \end{vmatrix}.$$

et les formes $x_i y_i$ ($i = 1, \dots, \nu$) et $x_{\nu'} y_{\nu'}$ deviennent respectivement

$$q_i = \frac{1}{4t_0} (u_i^2 - \dot{u}_i^2), \quad q_{\nu'} = j_0^{-1} u_{\nu'}^2 - j_0 \dot{u}_{\nu'}^2.$$

Les substitutions du normalisant N' de s seront $\alpha = \Pi_1^{\nu'} \alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} u_i & \sum_k \alpha_{ik} u_k = U_i \\ \dot{u}_i & \sum_k \dot{\alpha}_{ik} u_k = \dot{U}_i \end{vmatrix}.$$

Pour que α multiplie g par f , il faut et suffit (3) que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\nu'} U_i^2 &= f \Sigma_1^{\nu'} u_i^2 && (\psi \text{ réductible}), \\ \frac{1}{4t_0} \Sigma_1^{\nu'} U_i^2 + j_0^{-1} U_{\nu'}^2 &= f \left[\frac{1}{4t_0} \Sigma_1^{\nu'} u_i^2 + j_0^{-1} u_{\nu'}^2 \right] && (\psi \text{ irréductible}); \end{aligned}$$

autrement dit, que la substitution $\check{\alpha} = \Pi_1^{\nu'} \check{\alpha}_i$, où

$$\check{\alpha}_i = \begin{vmatrix} u_i & \sum \alpha_{ik} u_k = U_i \end{vmatrix},$$

dont les coefficients sont dans \mathcal{C}' , appartienne au groupe total, semblable à $Q'(\nu', \pi^2)$, de la forme quadratique

$$\Sigma_1^{\nu'} u_i^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4t_0} \Sigma_1^{\nu'} u_i^2 + j_0^{-1} u_{\nu'}^2.$$

Pour obtenir le normalisant N , il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, les normalisants N' et N de $t_{1, \dots, \nu'} \gamma$ sont respectivement isomorphes aux groupes quadratiques $\mathcal{Q}'(\nu', \pi^2)$ et $\mathcal{Q}(\nu', \pi)$.

13. Une substitution $\sigma_i = \begin{vmatrix} \dot{u}_i & \rho_i u_i \\ \dot{u}_i & \dot{\rho}_i u_i \end{vmatrix} (2)$ transforme q_i en

$$\frac{1}{4t_0} (\rho_i^2 \dot{u}_i^2 - \dot{\rho}_i^2 u_i^2),$$

et, pour ψ irréductible, $\sigma_{v'}$ transforme $q_{v'}$ en $j_0^{-1} \rho_{v'}^2 \dot{u}_{v'}^2 - j_0 \dot{\rho}_{v'}^2 u_{v'}^2$. La substitution $\sigma = \Pi_{i'} \sigma_i$ conserve donc la forme q si $\rho_i^2 = -1$, et, pour ψ irréductible $\rho_{v'}^2 = -j$, soit $\rho_i = \varepsilon$ et $\rho_{v'} = \varepsilon j_0$. Alors, si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, on a

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \varepsilon \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \varepsilon u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varepsilon x_i \\ y_i & -\varepsilon y_i \end{vmatrix},$$

et, pour ψ irréductible,

$$\sigma_{v'} = \begin{vmatrix} u_{v'} & -\varepsilon j_0 \dot{u}_{v'} \\ \dot{u}_{v'} & \varepsilon j_0^{-1} u_{v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{v'} & \varepsilon j_0^{-1} y_{v'} \\ y_{v'} & -\varepsilon j_0 x_{v'} \end{vmatrix}.$$

Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, on a

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & -\varepsilon \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \varepsilon u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \eta y_i \\ y_i & \eta^{-1} x_i \end{vmatrix},$$

et, pour ψ irréductible,

$$\sigma_{v'} = \begin{vmatrix} u_{v'} & \varepsilon j_0 \dot{u}_{v'} \\ \dot{u}_{v'} & \varepsilon j_0^{-1} u_{v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{v'} & \varepsilon x_{v'} \\ y_{v'} & -\varepsilon y_{v'} \end{vmatrix}.$$

Normalisants de $s = \Theta_{v'}$ ou $\Theta_{v'} \gamma$ (v' pair et ψ réductible).

14. Si $s_i = \theta_i$ ou $\theta_i \gamma_i$, en désignant par ρ soit ε si $s_i = \theta_i [\pi \equiv 3 \pmod{4}]$, soit η si $s_i = \theta_i \gamma_i [\pi \equiv 1 \pmod{4}]$, le changement de variables

$$\begin{aligned} u_i &= x_{2i-1} - \rho y_{2i}, & v_i &= \rho y_{2i-1} + x_{2i} \\ \dot{u}_i &= x_{2i-1} + \rho y_{2i}, & \dot{v}_i &= -\rho y_{2i-1} + x_{2i} \end{aligned} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{v'}{2} \right)$$

donne

$$s_i = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & -\rho^2 y_{2i} \\ y_{2i-1} & x_{2i} \\ x_{2i} & \rho^2 y_{2i-1} \\ y_{2i} & -x_{2i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & \rho u_i \\ \dot{u}_i & -\rho \dot{u}_i \\ v_i & \rho v_i \\ \dot{v}_i & -\rho \dot{v}_i \end{vmatrix}.$$

et la forme $x_i y_i$ devient

$$q_i = -\frac{1}{2\rho} (u_i \dot{v}_i - v_i \dot{u}_i).$$

Les substitutions du normalisant N' de s seront $\alpha = \Pi_1^{\nu/2} \alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k (\alpha_{ik} u_k + \alpha'_{ik} v_k) = U_i \\ \dot{u}_i & \Sigma_k (\dot{\alpha}_{ik} \dot{u}_k + \dot{\alpha}'_{ik} \dot{v}_k) = \dot{U}_i \\ v_i & \Sigma_k (\beta_{ik} u_k + \beta'_{ik} v_k) = V_i \\ \dot{v}_i & \Sigma_k (\dot{\beta}_{ik} \dot{u}_k + \dot{\beta}'_{ik} \dot{v}_k) = \dot{V}_i \end{vmatrix}.$$

Pour que α multiplie q par f , il faut et suffit, d'après le n° 2, que l'on ait l'identité

$$\Sigma_1^{\nu/2} (U_i \dot{V}_i - \dot{V}_i U_i) = f \Sigma_1^{\nu/2} (u_i \dot{v}_i - v_i \dot{u}_i),$$

autrement dit que la substitution $\check{\alpha} = \Pi_1^{\nu/2} \check{\alpha}_i$, où

$$\check{\alpha}_i = \begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k (\alpha_{ik} u_k + \alpha'_{ik} v_k) = U_i \\ v_i & \Sigma_k (\beta_{ik} u_k + \beta'_{ik} v_k) = V_i \end{vmatrix},$$

appartienne au groupe total $H(\nu', \pi)$ de la forme hermitienne

$$\rho^{-1} \Sigma_1^{\nu/2} (u_i \dot{v}_i - v_i \dot{u}_i).$$

Pour avoir le normalisant N , il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, les normalisants N' et N de s dans $Q'(n, \pi)$ et $Q(n, \pi)$ sont isomorphes aux groupes hermitiens $H'(\nu', \pi)$ et $H(\nu', \pi)$.

15. On transforme s en ds par une substitution $\sigma = \Pi_1^{\nu/2} \sigma_i$ de $Q(n, \pi)$ où

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \dot{v}_i \\ \dot{u}_i & v_i \\ v_i & \dot{u}_i \\ \dot{v}_i & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i} \\ y_{2i-1} & y_{2i} \\ x_{2i} & x_{2i-1} \\ y_{2i} & y_{2i-1} \end{vmatrix}.$$

Normalisants de $s = \Theta_{\nu, m_{\nu/2}} \sigma$ ou $\Theta_{\nu, \gamma m_{\nu/2}} \sigma$ (ν' impair et ψ irréductible).

16. Pour $i = 1, \dots, \nu/2$, le changement de variables indiqué au n° 14 canonise la substitution $\Pi_1^{\nu/2} s_i$. On a ensuite, avec les notations

adoptées

$$s_{y'} = m_{y'\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \gamma_{y'} m_{y'\sigma} = \begin{vmatrix} x_{y'} & \rho x_{y'} \\ y_{y'} & -\rho y_{y'} \end{vmatrix}.$$

La substitution s est alors mise sous forme canonique, et la forme q est devenue la forme hermitienne

$$-\rho^{-1} \sum \gamma_i^2 (u_i \hat{v}_i - u_i \hat{v}_i) + x_{y'} \bar{x}_{y'}.$$

Le raisonnement du n° 14 conduit alors aux mêmes résultats pour les normalisants N' et N de s .

17. On transformera s en ds par la substitution $\sigma = \Pi_i^{\gamma_i/2} \sigma_i \tau_{y'}$, σ_i étant défini comme au n° 15.