Annales scientifiques de l'É.N.S.

DE SÉGUIER

Les substitutions d'ordre 2 des groupes linéaires, hermitiens gauches et quadriques dans un champ de Galois

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 51 (1934), p. 79-140 http://www.numdam.org/item?id=ASENS 1934 3 51 79 0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2

DES

GROUPES LINÉAIRE, HERMITIEN, GAUCHE ET QUADRATIQUE

DANS UN CHAMP DE GALOIS

PAR M. DE SÉGUIER (1)

CHAPITRE III.

GROUPE QUADRATIQUE.

38. Prenons l'invariante a sous la forme

$$a = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + \psi \qquad (\psi = b x y + c x^2 + c' y^2),$$

b, c, c' étant dans \mathcal{C} , et $b^2-4cc'=\delta$ étant supposé \neq o, à moins que b=cc'=0. Je désignerai par θ le caractère quadratique de δ ($\theta=1$, si $\delta=0$). Si ψ est irréductible ($\theta=-1$), on peut (I, 24) par un changement de variables à coefficients dans \mathcal{C}' , mettre ψ sous la forme $x_{\nu'}y_{\nu'}=x_{\nu'}x_{\nu'}$, $[\nu'=\nu+1;x_{\nu'}=x(x-\nu y),xx=c,\psi(\nu,1)=0]$. La substitution réelle γ qui multiplie x_1,\ldots,x_{ν} par 1 et $x_{\nu'}$, par une racine ξ de $\xi^{\pi+1}=\iota$ (donc $y_{\nu'}=x_{\nu'}$ par ξ^{π}) sans altérer les autres variables multiplie a par ι . Je désignerai par φ la substitution $\gamma^{\frac{\pi-1}{2}}m_{\nu'},-\xi^{\frac{1-\pi}{2}}$. Cette substitution multiplie $x_1,\ldots,x_{\nu'}$ par -1 sans altérer les y correspondants. Elle multiplie $x_{\nu'}$ par -1, et $y_{\nu'}$ par

$$-\xi^{(\pi+1)\frac{\pi-1}{2}} = -\xi^{\frac{\pi-1}{2}} = 1,$$

⁽¹⁾ Ce Mémoire fait suite à celui qui a été publié dans ces Annales (juillet et août 1933).

qui n'est pas conjugué de -1. Donc φ est dans $\mathrm{A}'(n,\pi^2)$ hors de $\mathrm{A}(n,\pi)$. Si ψ est réductible ($\theta = 1$), on peut encore par un changement de variables à coefficients réels mettre ψ sous la forme $x_{\nu}y_{\nu}$, x_{ν} et y_{ν} étant réels. On prendra alors $\phi = \overline{\gamma^2}$, γ étant la substitution réelle qui multiplie $x_1, \ldots, x_{\nu'}$ par ι , sans altérer les y.

§ I.
$$n \le 3$$
.

39. Si n=1, et si $a=x^2$, $A=\{d\}$, A'=I, n'ont d'autre s_2 que d. Les groupes A^o, B, A, A^o, B se réduisent à 1.

40. Soit n=2. Alors (1, 25) on a $A=\{m_{1\sigma}, t_1\}$, où σ est d'ordre $\pi = \theta \text{ dans } \mathcal{C}', \text{ et } t_1 = \left| \begin{array}{c} x_1 & Y_1 \\ Y_1 & x_1 \end{array} \right|, \text{ A}^0 = \left\{ m_{1\sigma} \right\} (\mathbf{I}, 34), \text{ B} = \left\{ m_{1\sigma^2} \right\} (\mathbf{I}, 39).$ B, étant d'ordre $\frac{\pi - \theta}{2}$, n'a pas de s_2 si $\pi = 0 \not\equiv 2 \mod 4$, et n'a pas

d'autre s_2 que $d \operatorname{si} \pi - \theta \equiv \operatorname{o} \operatorname{mod} 4$.

A⁰, étant d'ordre $\pi - \theta$, n'a qu'une s_2 , qui est d.

A, étant diédral d'ordre $2(\pi - \theta)$, a trois classes de s_2 représentées par d, t_1 , $t_1 m_{1\sigma}$ (E, 20), le nombre des éléments de chacune des deux dernières classes étant $\frac{\pi - \theta}{2}$.

Les substitutions de A' sont (I, 25) de la forme $\gamma^{\rho} t_{\perp}^{\epsilon} m_{1\sigma}^{\beta}$, ou, si ψ est irréductible, de la forme $\gamma^{\rho} t_{1}^{\epsilon}$. Elles sont hors de A pour $\rho \not\equiv 0 \mod \pi - 1$. A' est donc d'ordre $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$. En faisant les deux hypothèses $\varepsilon = 0$, 1, on voit directement qu'une s_2 hors de A ne peut exister que si ψ est réductible, et qu'elle a alors une des deux déterminations φ , $d\varphi$, que t₊ transforme l'une dans l'autre.

Ainsi A' n'a de s_2 hors de A que $si \psi$ est réductible; et alors ces s_2 sont φ et $d\varphi$, qui sont conjuguées. De plus, quel que soit ψ , les deux classes de s2 non normales de A se réunissent, dans A', en une seule classe, car $\gamma^{-1}t_1\gamma = t_1m_{1\sigma_0}$ ($\sigma_0 = \iota$, si ψ est réductible, $\sigma_0 = \xi^{1-\pi}$, si ψ est irréductible; σ_0 est toujours d'ordre $\pi - \theta$).

41. Soient N, N', No, P les normalisants respectifs, dans A, A', Ao, B, d'une $s_2 s \neq d$.

Pour déterminer N, No, P dans les cas $s = t_1$ ou $s = t_1 m_{10}$, il suffit de rappeler que, dans un g_{2m} diédral défini par $a^m = b^2 = 1$, $ba \cdot b = a^{-1}$,

le normalisant d'une s_2 s de ce diédral est le $g_2\{s\}$ si m est impair, et le $g_4\{s, a^{\mu}\}$ si m pair $= 2\mu$. Ici, pour A, $m = \pi - \theta$ est pair.

Pour déterminer N', on peut supposer $s = t_1$ ou φ .

Si $s = t_1$, on a N'= $\{t_1, I\}$. En effet, ce groupe contient normalement t_1 et son ordre est bien $2(\pi - 1)$, quotient de l'ordre $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$ par le nombre $\pi - \theta$ des conjugués de t_1 dans A'. Si $s = \varphi$ (ψ est alors réductible). N' contient évidemment le produit direct $\{m_{1i}\}\{\gamma\}$. Donc, φ n'ayant que deux conjuguées, N' est d'indice 2

dans A' et coïncide avec ce produit direct. N' étant ici dans A, on a N = N'. On voit ensuite que $N^0 = A^0$ et que P = B.

42. Posons maintenant $\frac{x_1}{y_1} = z$, x_1 et y_1 étant les variables, réelles ou non, telles que $\psi = x_1 y_1$.

Alors $\mathfrak{A}^0 = \{(\sigma^2 z)\}$ est d'ordre $\frac{\pi - \theta}{2}$, n'a de s_2 que si $\pi - \theta \equiv o \pmod{4}$; et alors, il n'en a qu'une, qui est (-z).

 $\mathcal{B} = \{(\sigma^4 z)\}\$ se confond avec \mathfrak{C}^0 si $\pi - \theta \equiv 2 \pmod{4}$. Si $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{4}$, il est d'ordre $\frac{\pi - \theta}{4}$, et contient (-z) toujours et seulement si $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{8}$.

 $\mathfrak{A} = \{(\sigma^2 z), (z^{-1})\} = \{\mathfrak{A}^0, (z^{-1})\}$ est diédral d'ordre $\pi - \theta$, n'a hors de \mathfrak{A}^0 , qu'une ou deux classes de s_2 ; si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est pair; il en a deux, représentées par $(z^{-1}) = (t_1)$ et $(\sigma^2 z^{-1}) = (t_1 m_{1\sigma})$; si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est impair, il n'en a qu'une, représentée par $(z^{-1}) = (t_1)$.

 $\mathcal{C}' = \{\mathcal{C}, (\sigma z)\} [(\gamma) = (\sigma z) \text{ quel que soit } \psi] = \{(\sigma z), (z^{-1})\},$ diédral d'ordre $2(\pi - \theta)$ a trois classes de s_2 représentées par $(z^{-1}) = (t_1), (\sigma z^{-1}) = (t, \gamma)$ et $(-z) = (\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}})$. (La substitution réelle $\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}}$ coîncide avec φ si ψ est réductible, avec $\left[-\xi^{\frac{\pi + 1}{2}}\right] \varphi$ si ψ est irréductible.) La première est toujours dans \mathcal{C} hors de \mathcal{C}' . La seconde est toujours hors de \mathcal{C} [c'est le produit de (z^{-1}) , qui est dans \mathcal{C} , par (σz) , qui est hors de \mathcal{C}]. La troisième est dans \mathcal{C} toujours et seulement si -z est de la forme $\sigma^{2r}z$, c'est-à-dire si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est pair; et elle est alors dans \mathcal{C} .

Les groupes \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}° , \mathfrak{B} étant diédraux ou cycliques, les normalisants des s_2 obtenues se déterminent d'après les principes généraux rappelés au n° 41.

43. Soit n = 3. Alors $B = \mathfrak{Al}(2, \pi)$ (I, 40). Or on a vu (12) que $\mathfrak{Al}(2, \pi)$ n'a qu'une classe de s_2 . On peut la représenter par une s_2 quelconque de B, par exemple par $s_1 = t_{01} m_{1k}$, -ck étant un carré (1).

 $A^0 \equiv \mathcal{L}(2, \pi) (1, 40) \equiv \mathcal{B}(2, \pi) (1, 5)$ a deux classes de s_2 (12), dont une peut être représentée par $s_1 = t_{01} m_{1k}$ (— kc étant carré) et l'autre par $s_2 = s_1 m_{1N}$, qui est hors de B, donc non conjuguée de s_1 , ou, ce qui revient au même, par t_{01} et $t_{01} m_{1N}$.

Toute s_2 de A = A°D hors de A° a la forme ds, s étant une s_2 de A°; et deux s_2 ds et ds' sont conjuguées dans A toujours et seulement si s et s' le sont dans A°. De même s et s' sont conjuguées dans A toujours et seulement si elles le sont dans A°. Donc les classes de s_2 de A sont représentées par s_1 , s_2 , d, ds_1 , ds_2 .

En changeant k en -k, ce qui revient à remplacer s_1 par $s'_4 = d_1 s_1$ et s_2 par $s'_2 = d_1 s_2$, on peut représenter les deux dernières classes de A par $ds'_4 = t_0 s_1$, $ds'_2 = t_0 s_2$. Donc les classes de s_2 de A peuvent être représentées par

$$s_1 = t_{01}, m_{1k}, \quad s_1 m_{1N}, \quad t_0 s_1, \quad t_0 s_1 m_{1N}, \quad d.$$

On peut encore remplacer s_1 et s_2 par $t_{0.1}d_1$ et $t_{0.1}m_{1,-N}$. Les classes de A hors de A⁰ sont alors représentées par t_1 et $t_1 m_{1N}$ (2).

(1) On a (I, 32),
$$\ell_{01} m_{1,-c\lambda^{2}} = U_{01\lambda} V_{0,1,(c\lambda)^{-1}} U_{0,1\lambda},$$
 où (I, 28),
$$V_{0,1,\lambda} = \begin{vmatrix} x & x + \lambda x_{1} \\ x_{1} & x_{1} \\ y_{1} & v_{1} - 2c\lambda x - c\lambda^{2} x_{1} \end{vmatrix},$$

$$U_{0,1,\lambda} = \ell_{1} V_{01\lambda} \ell_{1}, \qquad \ell_{01} = \ell_{0} \ell_{1}, \qquad \ell_{0} = |x, -x|.$$

(2) Les substitutions $dt_{01} = t_1 m_{1,-1}$, et $dt_{01} m_{1N} = t_1 m_{1,-N}$ sont, dans le diédral $\{t_1, m_{1,t}\}$, conjuguées l'une de t_1 , l'autre de $t_1 m_{1t}$. Donc t_0 est conjugué de t_1 ou de $t_1 m_{1t}$. Or, pour que t_0 soit conjugué de $t_1 m_{1h}$, il faut, d'après la correspondance indiquée (1, 40) entre $A^0 \equiv A \mid D$ et $\mathcal{L}(2, \pi)$ que $-\frac{ch}{z}$ qui répond à $(t_1 m_{1h})$, soit conjugué de -z qui répond à t_0 , donc que $-\frac{ch}{z}$ et -z soient toutes deux dans $\mathfrak{U}(2, \pi)$ ou toutes deux hors de $\mathfrak{U}(2, \pi)$, donc, que leurs déterminants, ch et -1, aient le même caractère quadratique, donc que h ait la forme $-c\lambda^2$. Cette condition suffit; car, si elle est remplie,

Enfin A' = AI = A°I (I, 24), A° étant premier à I. Donc toute substitution de A' hors de A a la forme $[\iota^h]\alpha = \alpha'$, α étant dans A° et $[\iota^h]$ hors de D, donc $\iota^{2h} \neq I$. Pour que $\alpha'^2 = I$, il faut donc que $\alpha^2 = [\iota^{-h}]^2$; d'où A° étant premier à I, $\iota^{2h} = I$ contre l'hypothèse. Donc A' n'a pas de s_2 hors de A. Il est clair d'ailleurs que deux substitutions de A, conjuguées dans A', le sont dans A. Donc les classes de s_2 de A sont aussi les classes de s_2 de A'.

On a $\mathfrak{B} \equiv B$, et (I, 24, 39), $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\circ} \equiv A^{\circ}$. Done \mathfrak{B} n'a qu'une classe de s_2 représentée par $(s_1) = (t_{0+}m_{1k})$, et $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\circ}$ a, hors de \mathfrak{B} une seule classe de s_2 représentée par $(t_{0+}m_{1k})$.

 t_0 est conjuguée de celle des deux substitutions $d^{\varepsilon}t_1m_{1h}$ ($\varepsilon=0,1$) qui a pour déterminant -1, c'est-à-dire de t_1m_{1h} .

On peut d'ailleurs trouver directement ce résultat en cherchant une substitution z de Λ telle que $t_0 z = z t_1 m_{1h}$, ce qui donne

$$\begin{split} & \alpha_{11}x_1 + \alpha'_{11}y_1 + \alpha_{10}x = h(\beta_{11}x_1 + \beta'_{11}y_1 + \beta_{10}x), \\ & \beta_{11}x_1 + \beta'_{11}y_1 + \beta_{10}x = h^{-1}(\alpha_{11}x_1 + \alpha'_{11}y_1 + \alpha_{10}x), \\ & \alpha_{01}x_1 + \alpha'_{01}y_1 + \alpha_{00}x = \alpha_{01}x_1 + \alpha'_{01}y_1 + \alpha_{00}x. \end{split}$$

D'où

$$\beta_{11} = h^{-1}\alpha_{11}, \qquad \beta'_{11} = h^{-1}\alpha'_{11}, \qquad \beta_{10} = -h^{-1}\alpha_{10}, \qquad \alpha_{00} = 0.$$

Done

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases}
\alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{10} \\
\frac{\alpha_{11}}{h} & \frac{\alpha'_{11}}{h} & -\frac{\alpha_{10}}{h} \\
\alpha_{01} & \alpha'_{01} & 0
\end{cases}.$$

Pour que z soit dans A il faut et suffit que l'on ait (cf. I, 26)

$$\frac{\alpha_{11}^2}{h} + c\alpha_{01}^2 = 0, \qquad \frac{\alpha_{11}'^2}{h} + c\alpha_{01}'^2 = 0, \qquad -\frac{\alpha_{10}^2}{h} = c, \qquad \frac{2}{h}\alpha_{11}\alpha_{11}' + 2c\alpha_{01}\alpha_{01}' = 1.$$

Les trois premières donnent

$$\mathit{ch} = -\,\alpha_{10}^2, \qquad \alpha_{11} = \epsilon\alpha_{10}\,\alpha_{01}, \qquad \alpha_{11}' = \epsilon'\,\alpha_{10}\,\alpha_{01}', \qquad \epsilon, \, \epsilon' = \pm\, 1\,.$$

La dernière donne alors, en éliminant h,

$$2\,\alpha_{01}\,\alpha_{01}'\,(1-\epsilon\epsilon')=\frac{1}{\epsilon}.$$

Donc en prenant zz' = -1, on peut construire z dès que -ch est carré.

Ainsi t_0 est conjuguée de t_1m_{1h} toujours et seulement si — ch est carré. En particulier t_0 est toujours conjugué de $t_1m_{1,-c}$.

Si d'ailleurs $t_0 \alpha = \alpha t_1 m_{1h}$, en posant (I, 34, 39) $\alpha = t_1^2 m_{1\mu} \beta$, β étant dans B, ou a $t_0 \beta = \beta t_1 m_{1h}$, c'est-à-dire que t_0 peut être transformé en $t_1 m_{1h}$ par une substitution de B.

Le normalisant d'une s_2 quelconque de A' ou de $\mathcal{C}U$ dans un des groupes considérés pour n=3 résulte de l'étude faite de \mathcal{L} et de \mathcal{U} , et de la notion de produit direct (A' et A sont les produits directs de A° par I et D respectivement).

§ 11.
$$n = 4$$
.

44. Soit n=4, et supposons $\psi \neq 0$, il est avantageux ici de commencer par les groupes \mathcal{B} , \mathcal{K}^0 , \mathcal{K} , \mathcal{K}' .

Soit d'abord ψ irréductible [d] est ici dans A_0 , hors de B(I, 39)]. Alors $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{U}(2, \pi^2)(I, 40)$ n'a qu'une classe de s_2 , qu'on peut représenter par (t_{12}) .

Considérons $[\mathfrak{A}] = \{\mathfrak{U}(2, \pi^2), z\} \equiv \mathfrak{A}(1, 40), z$ étant la variable de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$. Soit $z\alpha_z$ une s_2 de $[\mathfrak{A}]$ hors de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, $\alpha_z = \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$. Je supposerai $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$. La condition $z\alpha_z = (z\alpha_z)^{-1}$ donne, en désignant par τ un facteur de proportionnalité,

(1)
$$\alpha = \tau \dot{\beta}', \quad \alpha' = -\tau \dot{\alpha}', \quad \beta = -\tau \dot{\beta}, \quad \beta' = \tau \dot{\alpha},$$

ces relations sont compatibles avec $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ toujours et seulement si $\tau^2 = 1$. τ sera dit le caractère de la s_2 z α_z

45. Je dis que, dans $[\mathfrak{A}]$, $z\alpha_z$ est conjuguée de $-z^{-1}$ ou de z suivant que $\tau=-1$, ou $\tau=1$ [d'après la correspondance établie (I, 40) entre \mathfrak{A} et $[\mathfrak{A}]$, $-z^{-1}$ répond à t_1 ; d'après la correspondance entre \mathfrak{B} et $\mathfrak{U}(2,\pi^2)$, $-z^{-1}$ répond à dt_{12} ; donc $(-z^{-1})(-z^{-1})=z$ de $[\mathfrak{A}]$ répond à t_1 $dt_{12}=dt_2=dm_{2q}t_0$ de $\{B,t_1\}\equiv\mathfrak{A}$ et que $-z^{-1}$ et z ne sont pas conjuguées. On verra, en même temps, que deux s_2 conjuguées peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre par une substitution de $\mathfrak{U}(2,\pi^2)$.

Soit $z\lambda_z$ une substitution de α , $\lambda_z = \frac{\lambda z + \lambda'}{\mu z + \mu'} (\lambda \mu' - \mu \lambda' = 1)$ étant dans $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$.

Pour qu'elle transforme $z\alpha_z$ soit en z, soit en $-z^{-1}$, il faut et suffit, z étant permutable à chacune de ces deux substitutions, que λ_z opère la même transformation.

Si $\lambda_z \dot{z} \alpha_z = (-\dot{z}^{-1})\lambda_z$, on a, f designant un facteur de proportion-

nalité,

(2)
$$\begin{cases} \alpha \dot{\lambda} + \alpha' \dot{\mu} = f \lambda', & \beta \dot{\lambda} + \beta' \dot{\mu} = f \mu', \\ \alpha \dot{\lambda}' + \alpha' \dot{\mu}' = -f \lambda, & \beta \dot{\lambda}' + \beta' \dot{\mu}' = -f \mu. \end{cases}$$

joint à

$$\lambda \mu' - \mu \lambda' = \mathbf{r},$$

En tirant λ' et μ' des deux premières et en les portant dans les deux dernières de (2), on obtient d'après (1), λ et μ n'étant pas simultanément nuls,

$$\tau + f f = 0.$$

En les portant dans (3), on obtient

(5)
$$\beta \lambda \dot{\lambda} + \beta' \lambda \dot{\mu} - \alpha \mu \dot{\lambda} - \alpha' \mu \dot{\mu} = f.$$

Si les conditions (4) et (5) sont remplies, les équations (2) et (3) détermineront complètement λ' et μ' .

Si $\tau = 1$, (1) et (5) donne $\dot{f} = -f$, d'où, d'après (4), $f^2 = 1$, ce qui est contradictoire.

Si $\tau = -1$, (1) montre que α' et β sont réels, et que $\beta' = -\alpha$. Le premier membre de (5) est alors une forme hermitienne; on a ici f = f, d'où, d'après (4), $f^2 = 1$. Alors (5) a des solutions en λ , μ comme le montrent, par exemple, les formes canoniques rappelées au n° 16. Donc $z\alpha_z$ est conjuguée de $-z^{-1}$ toujours et seulement si $\tau = -1$. Donc z n'est pas conjuguée de $-z^{-1}$.

46. Si $\lambda_z z \alpha_z = z \lambda_z$, on a, f désignant un facteur de proportionnalité,

(6)
$$\begin{cases} \alpha \dot{\lambda} + \alpha' \dot{\mu} = f \lambda, & \beta \dot{\lambda} + \beta' \dot{\mu} = f \mu, \\ \alpha \dot{\lambda}' + \alpha' \dot{\mu}' = f \lambda', & \beta \dot{\lambda}' + \beta' \dot{\mu}' = f \mu'. \end{cases}$$

joint à

$$\lambda \mu' - \mu \lambda' = 1.$$

En éliminant λ , μ , λ' , μ' entre (6) et les équations conjuguées, on obtient, d'après (1), λ , μ , λ' , μ' n'étant pas simultanément nuls,

$$\tau - f \dot{f} = 0.$$

D'ailleurs (6) donne, en tenant compte de $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$

(9)
$$(\lambda \mu' - \mu \lambda') f^2 = (\dot{\lambda} \dot{\mu}' - \dot{\mu} \dot{\lambda}').$$

Donc, d'après (7) et (8),

$$(10) f^2 = 1, \tau = 1.$$

Si (10) est vérifiée, il résulte de (6) que $\lambda \mu' - \mu \lambda'$ est réel.

Prenons alors, comme élément définissant de \mathcal{C} , $\omega = \upsilon - \upsilon$, au lieu de $\upsilon = -\frac{b}{2c} + \frac{\omega}{2}$ on aura

$$\begin{split} \lambda & \equiv \lambda_0 + \omega \, \lambda_1, & \lambda' & \equiv \lambda'_0 + \omega \, \lambda'_1, & \alpha & \equiv \alpha_0 + \omega \alpha_1, & \alpha' & \equiv \alpha'_0 + \omega \alpha'_1, \\ \mu & \equiv \mu_0 + \omega \mu_1, & \mu' & \equiv \mu'_0 + \omega \mu'_1, & \beta & \equiv \beta_0 + \omega \beta_1, & \beta' & \equiv \beta'_0 + \omega \beta'_1, \end{split}$$

 $\lambda_i, \lambda_i', \mu_i, \mu_i', \alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i' \ (i = 0, 1)$ étant tous réels, et $\omega^2 = \frac{\delta}{c^2}$ étant un non carré de \mathcal{C} . Faisons de plus f = 1. Alors (1) donne

$$\alpha'_0 = \beta_0 = 0, \quad \beta'_0 = \alpha_0, \quad \beta'_1 = -\alpha_1,$$

et $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ devient

(12)
$$\alpha_0^2 - \omega^2(\alpha_1^2 + \alpha_1'\beta_1) = 1.$$

Les deux premières équations (6) donnent, en termes réels,

$$\begin{cases} (\alpha_{0}-1)\lambda_{0}-\omega^{2}\alpha_{1}\lambda_{1} & -\omega^{2}\alpha_{1}'\mu_{1} \equiv 0, \\ \alpha_{1}\lambda_{0}-(\alpha_{0}+1)\lambda_{1}+\alpha_{1}'\mu_{0} & \equiv 0, \\ -\omega^{2}\beta_{1}\lambda_{1} & +(\alpha_{0}-1)\mu_{0}+\omega^{2}\alpha_{1}\mu_{1} & \equiv 0, \\ \beta_{1}\lambda_{0} & -\alpha_{1}\mu_{0} & -(\alpha_{0}+1)\mu_{1}\equiv 0, \end{cases}$$

 $\lambda_0', \lambda_1', \mu_0', \mu_1'$ vérifient les mêmes équations.

Les équations (13) se réduisent à deux. On peut le voir en vérifiant que tous les mineurs à 9 éléments du déterminant sont nuls, ou, plus simplement, comme suit.

Si $\alpha'_1 = \beta_1 = 0$, les deux premières équations se réduisent à une, et, de même les deux dernières.

Si l'un des coefficients β_1 , α'_1 est $\neq 1$, on peut résoudre deux des équations (13) par rapport à l'un des couples λ_0 , λ_1 ou μ_0 , μ_1 . Les deux autres s'évanouissent en vertu de (12) quand on y substitue les valeurs trouvées.

Ainsi on peut exprimer λ_0 , λ_1 , μ_0 , μ_1 , à l'aide de deux solutions particulières (g_0, g_1, h_0, h_1) et (g'_0, g'_1, h'_0, h'_1) du système (13) et de deux paramètres réels x, y, ce qui, en posant

$$g_0 + \upsilon g_1 = g$$
, $h_0 + \upsilon h_1 = h$, $g'_0 + \upsilon g'_1 = g'$, $h'_0 + \upsilon h'_1 = h$,

peut s'écrire

$$\lambda = gx + g'y$$
, $\mu = hx + h'y$.

On aura de même, x', y' étant d'autres paramètres réels,

$$\lambda' = gx' + g'y', \quad \mu' = hx' + h'y'.$$

La condition (7) s'écrit alors

$$(gh'-hg')(xy'-yx')=1,$$

et il suffit de déterminer les paramètres réels x, y, x', y' de manière à vérifier cette équation. Comme f = 1, $\lambda \mu' - \mu \lambda'$ est réel en vertu de (9), qui résulte de (6). Il en est donc de même de gh' - hg'.

Ainsi \mathfrak{A} a trois classes de s_2 représentées par (t_{01}) (44) qui est dans $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{B}$, et par (t_1) et (t_2) qui sont hors de \mathfrak{A}^0 .

47. Le groupe $\mathfrak{C}' = A'/I$ est isomorphe au groupe $[\mathfrak{C}'] = [\mathfrak{C}] + \mathfrak{G}[\mathfrak{C}]$, où $\mathfrak{g} = (\xi z)$, $\xi^{\pi+1} = \iota$, en sorte que $[\mathfrak{C}'] = \{ \mathfrak{L}(2, \pi^2), \dot{z} \}$. En effet \mathfrak{g} transforme les éléments de $[\mathfrak{C}]$ comme γ transforme ceux de \mathfrak{C} . On le voit en prenant comme générateurs de $\mathfrak{C} = AI/I$ les complexes $IP_{1,\rho}$, $IO_{1,-\rho}$ (ρ parconrant \mathfrak{C}') et It_1 , et, comme générateurs de $[\mathfrak{C}]$, les substitutions correspondantes (I, 40) $z + \dot{\rho}$, $\frac{z}{1-\rho z}$, $-\dot{z}^{-1}$, et en observant que g^2 , qui est dans $\mathfrak{U}(z, \pi^2)$ correspond de même à $I\gamma^2$ de BI/I.

Toute substitution σ de $[\mathfrak{A}']$ hors de $[\mathfrak{A}]$ a la forme

$$\sigma = (\dot{z}z)(\dot{z})^{z} \left(\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right) \qquad (\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1).$$

Si $\varepsilon = 1$, les conditions pour que $\sigma = \sigma^{-1}$ sont, en désignant par φ un facteur de proportionnalité,

$$\alpha \xi = \rho \beta', \quad \alpha' = -\rho \dot{\alpha}', \\
\beta \xi = -\rho \dot{\beta} \dot{\xi}, \quad \beta' = \dot{\alpha} \dot{\xi}.$$

En égalant le déterminant des premiers membres à celui des seconds, on a $\xi = \rho^2 \dot{\xi}$ ou $\xi^{1-\pi} = \rho^2$. D'ailleurs, la deuxième équation donne

$$-\rho = \alpha'^{(1-\pi)},$$
 d'où $\alpha'^{2(1-\pi)} = \xi^{1-\pi+\lambda(1-\pi^2)},$ d'où $\alpha'^2 = \xi^{1+\lambda(\pi+1)},$

ce qui est impossible, le second membre n'étant pas carré.

Donc $\varepsilon = 0$ et toute s_2 σ est dans $\mathcal{L}(2, \pi^2)$. Or on sait (12), que ce groupe n'a hors de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ qu'une classe de s_2 . Cette classe contient $(45)\left(-\frac{\dot{\xi}}{z}\right) = \left(-\frac{1}{z}\right)(\xi z)$ qui correspond à $(t_{12}\gamma)$. Cette substitution représente donc l'unique classe de s_2 de \mathfrak{C} hors de \mathfrak{C} . Elle est d'ailleurs de seconde espèce, car $(t_{12}\gamma)^2 = [t]$.

Les deux classes de s_2 de \mathfrak{C} , dont les représentants indiqués (t_1) et (t_2) correspondent à $(-\dot{z}^{-1})$ et (\dot{z}) se réunissent en une dans \mathfrak{C} , car $\mathfrak{g}^{-1}(\dot{z})$ $\mathfrak{g}=(\dot{z})(\xi^{\pi-1}z)$ a le caractère $-\mathfrak{1}$, donc (45) est conjuguée de $(-\dot{z}^{-1})$. Ces substitutions sont évidemment de première espèce.

La troisième classe de s_2 de \mathfrak{A} est l'unique classe de s_2 de \mathfrak{A}^0 , représentée par (t_{01}) (45), correspondant à l'unique classe de s_2 de $\mathfrak{A}(2, \pi^2)$ représentée par $(-z^{-1})$ (12). Cette substitution est évidemment de première espèce.

48. Supposons maintenant ψ réductible (1). On a (1, 40) $\mathcal{B} \equiv \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$ ($z = \frac{x_1}{x_2}$, $u = \frac{x_1}{y_2}$), et toute $s_2 \sigma$ de $\mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$ est de la forme $\alpha_z \beta_u$, α_z étant dans \mathfrak{U}_z et β_u dans \mathfrak{U}_u ; de plus $\alpha_z^2 = \beta_u^2 = 1$, l'une au moins des substitutions α_z , β_u étant d'ordre 2. Comme \mathfrak{U}_z n'a qu'une classe de s_2 , σ est nécessairement conjuguée de l'une des trois substitutions $\left(-\frac{1}{z}\right)$, $\left(-\frac{1}{u}\right)$, $\left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)$, auxquelles répondent respectivement dans \mathcal{B} , $(R_{121}) = (d_1 T_{12})$, $(S_{12,-1}) = (d_1 T_{12} t_{12})$, $(R_{121} S_{1,2,-1}) = (t_{12})$ (I, 28, 29) (2).

⁽¹⁾ On peut supposer (I, 24), ou bien que v'=v=2 et que $\psi=0$, ou bien que v=1, v'=2, et que ψ est $\neq 0$. Dans (I, 40), on a pris la première hypothèse; on adopte ici la seconde; les résultats sont identiques.

⁽²⁾ On a vu (44) que, si ψ est irréductible, $\overline{\mathcal{B}}(4, \pi)$ n'a qu'une classe de s_2 réprésentée par (t_{12}) . D'après les résultats du texte, $\mathcal{B}(4, \pi^2)$, qui contient $\mathcal{B}(4, \pi)$, a deux autres classes de s_2 , mais qui sont hors de $\overline{\mathcal{B}}(4, \pi)$.

Si — I est carré, on peut représenter respectivement ces trois classes par (-z), (-u) et (-z)(-u) ou, en posant $\varepsilon^2 = -I$, par $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon^{-1}}\right)$, $\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon^{-1}}\right)$ et $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon^{-1}}\right)\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon^{-1}}\right)$: leurs correspondantes respectives dans \mathcal{B} , sont $(m_{1,z}m_{2,z^{-1}})$, $(m_{1,\varepsilon}m_{2,\varepsilon})$, (d_1) .

Comme $\overline{d_1 T_{12}}^2 = \overline{d_1 T_{12} t_{12}}^2 = d$, $(d_1 T_{12})$ et $(d_1 T_{12} t_{12})$ sont de première ou de seconde espèce suivant que -1 est carré ou non (5,6); (t_{12}) est évidemment toujours de première espèce.

49. En faisant correspondre $\mathbf{w}_{\lambda} = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda u \end{vmatrix}$ à $m_{1\lambda}$, on voit que $\mathfrak{CC} = \{\mathfrak{A}_z \mathfrak{A}_u, \mathbf{w}_N\} = [\mathfrak{CC}]$. Toute substitution σ de $[\mathfrak{CC}]$ hors de $\mathfrak{A}_z \mathfrak{A}_u$ a la forme $(\mathbf{N}z)\alpha_z(\mathbf{N}u)\beta_u$, α_z étant dans \mathfrak{A}_z et β_u dans \mathfrak{A}_u , c'est-à-dire la forme $\alpha_z'\beta_u'$, α_z' étant dans \mathcal{L}_z hors de \mathfrak{A}_z , et β_u' dans \mathcal{L}_u hors de \mathfrak{A}_u . Pour que σ soit d'ordre 2, il faut et suffit que les deux substitutions α_z' et β_u' soient d'ordre 2. Comme \mathcal{L}_z n'a, hors de \mathfrak{A}_z , qu'une classe de s_z (12), représentée par $\frac{-\mathbf{N}}{z}$, et que toute cette classe s'obtient en transformant $\frac{-\mathbf{N}}{z}$ par \mathfrak{A}_z (15), σ est toujours conjuguée de

$$\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-N}{u}\right) = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right) u_N,$$

qui répond à $(t_{12}m_{1N})$ de \mathfrak{C}^0 ; comme $\overline{t_{12}m_{1N}}^2 = 1$, cette s_2 est de première espèce.

Comme \mathfrak{U}_z et \mathfrak{U}_u sont normaux dans $[\mathfrak{C}^0]$, aucune substitution de ce groupe ne peut transformer l'une dans l'autre deux des substitutions $\left(\frac{-1}{z}\right)$, $\left(\frac{-1}{u}\right)$, $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$. Ainsi les trois classes de \mathfrak{B} restent distinctes dans \mathfrak{C}^0 .

50. En faisant correspondre $\iota = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ à t_2 , on voit (I, 40) que $\mathfrak{A} \equiv \{\mathfrak{A}_z \mathfrak{A}_u, \mathfrak{M}_N, \iota\} = [\mathfrak{A}]$. Toute substitution σ de $[\mathfrak{A}]$ hors de $[\mathfrak{A}^0]$ a la forme $\lim_N \alpha_z \beta_u$ ($\varepsilon = 0$, ι ; α_z dans \mathfrak{A}_z , β_u dans \mathfrak{A}_u) ou $\iota \alpha_z' \beta_u'$, en posant $(N^{\varepsilon}z)\alpha_z = \alpha_z'$, $(N^{\varepsilon}u)\beta_u = \beta_u'$. La condition $\sigma^2 = \iota$ donne

$$1 = t \alpha'_{z} \beta'_{u} t \alpha'_{z} \beta'_{u} = \alpha'_{u} \beta'_{z} \alpha'_{z} \beta'_{u},$$

d'où $\beta_z' = \alpha_z'^{-1}$. Donc σ a la forme $+\alpha_z' \alpha_z'^{-1} = \alpha_u' + \alpha_u'^{-1} = (N^z u) \alpha_u + \alpha_u'^{-1} (N^{-z} u)$.

Ann. Éc. Norm., (3), Li. – Fasc. 1.

En posant $\gamma_u = (N^{\epsilon}u)\alpha_u^{-1}(N^{-\epsilon}u)$, qui est dans [\mathcal{B}], on voit

$$\sigma = \gamma_u^{-1}(N^{\varepsilon}u) + (N^{-\varepsilon}u) \gamma u$$
.

$$+ (\operatorname{N} z) \left(\operatorname{N}^{-1} u\right) = \beta_u^{-1} \alpha_z^{-1} \operatorname{m}_{\operatorname{N}}^{-\varepsilon} \operatorname{tom}_{\operatorname{N}}^{\varepsilon} \alpha_z \beta_u = + \beta_u^{-1} \alpha_u^{-1} \alpha_z \beta_u,$$

et $(Nz)(N^{-1}u)$ serait dans $\mathfrak{Al}_z\mathfrak{Al}_u$. On verrait de même que $\mathfrak{l}(Nz)(N^{-1})$ ne peut être conjugué de $\mathfrak{l}(kNz)(k^{-1}N^{-1}u)$ que si k est carré.

Donc $[\mathfrak{A}]$ a, hors de $[\mathfrak{A}^0]$, deux classes de s_2 , représentées par \mathfrak{t} et $\mathfrak{t}(Nz)(N^{-1}u)$ ou, plus généralement, par

$$\mathsf{t}(kz)(k^{-1}u)$$
 et $\mathsf{t}(kNz)(k^{-1}N^{-1}u)$.

auxquelles répondent dans \mathfrak{C} , (t_2) et (t_2m_{2N}) , ou, plus généralement, (t_2m_{2k}) et $(t_2m_{2,kN})$, toutes deux de première espèce. [On verra au n° 51 que (ιu) correspond à (γ) , donc (ιz) à $(t_2\gamma t_2)$.]

Il est clair que i transforme l'une dans l'autre les deux classes de s_2 de $[\mathfrak{C}^0]$ représentées par $\left(\frac{-1}{z}\right)$ et $\left(\frac{-1}{u}\right)$, et transforme en elle-même chacune des classes représentée par $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ et $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ un. Donc les s_2 de \mathfrak{C} qui sont dans \mathfrak{C}^0 forment trois classes représentées par (d_1T_{12}) [ou par $(d_1T_{12}t_{12})$], (t_{12}) , et $(t_{12}m_{1N})$, la dernière seule étant hors de \mathfrak{B} .

51. En faisant correspondre $g_u = (\iota u)$ à γ , on voit que

$$[\alpha'] = [\alpha] + g_u[\alpha]$$

est isomorphe à $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_+(\gamma)\mathcal{C}$. On remarquera que $[\mathcal{C}'] = \{\mathcal{L}_z\mathcal{L}_u, t\}$, et que les substitutions g_u et $g_z = tg_u t$ correspondent respectivement à γ et $t_2 \gamma t_2$ suivant la même loi que les substitutions β_u de \mathcal{U}_u et α_z de \mathcal{U}_z aux substitutions r de \mathbf{W} et s de \mathbf{V} . En prenant $\{\mathbf{V}, s_2 \gamma t_2\} = \mathbf{V}'$ et $\{\mathbf{W}, \gamma\} = \mathbf{W}'$, le produit direct $\mathcal{L}_z\mathcal{L}_u$ correspond à $\mathbf{V}'\mathbf{W}'$; mais γ n'est pas permutable a toute substitution de \mathbf{V} , ni donc $t_2 \gamma t_2$ à toute

substitution de **W**. Toute substitution σ de $[\mathfrak{C}\mathfrak{C}']$ hors de $[\mathfrak{C}\mathfrak{C}]$ est de la forme $\mathfrak{g}_{u}\iota^{\varepsilon}\mathfrak{m}_{N}^{\eta}\alpha_{\sigma}\beta_{u}$ (ε , $\eta=0$, 1; α_{ε} étant dans $\mathfrak{U}_{\varepsilon}$, et β_{u} dans \mathfrak{U}_{u}).

Si $\varepsilon = 1$, σ a la forme $g_u t \alpha'_z \beta'_u$, $\alpha'_z = (N^{\eta} z) \alpha_z$, $\beta'_u = (N^{\eta} u) \beta_u$. La condition $\sigma^2 = 1$ donne

$$\mathbf{I} = \mathbf{j}_u \mathbf{t} \, \alpha_z' \, \beta_u' \, \mathbf{g}_u \mathbf{t} \, \alpha_z' \, \beta_u' = \mathcal{G}_u \, \alpha_u' \, \beta_z' \, \mathcal{G}_z \, \alpha_z' \, \beta_u'.$$

D'où

$$g_u(N^{\eta}u)\alpha_u(N^{\eta}u)\beta_u = (N^{\eta}z)\beta_zg_z(N^{\eta}z)\alpha_z = 1$$
.

Le premier membre est dans le complexe $\mathfrak{g}_u\mathfrak{U}_u$, il ne peut donc pas être égal à 1.

Soit donc $\varepsilon = 0$, alors σ a la forme $\mathfrak{g}_u \alpha_z' \beta_u'$. La condition $\sigma^2 = 1$ donne

$$\alpha_z^{\prime 2} = (\mathfrak{g}_u \beta_u^{\prime})^2 = 1$$
.

Si $\eta = 0$, $\alpha'_z = \alpha_z$ est conjuguée, dans \mathfrak{U}_z , de r ou de $\frac{-1}{z}$; $\mathfrak{g}_u\beta'_u = \mathfrak{g}_u\beta_u$ qui est hors de \mathfrak{U}_u est conjuguée par \mathfrak{U}_u de $\frac{-N}{u}$. Donc σ est conjuguée de $\frac{-N}{u}$ ou de $\left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$.

Si $\eta = r$, on voit de même que σ est conjuguée de $\frac{-N}{z}$ ou de $\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-r}{u}\right)$.

transforme les deux dernières substitutions en les deux premières. Comme $\{\mathcal{U}_u\mathcal{U}_z, \, \mathbf{u}_N, \, \mathbf{g}_u\} = \mathcal{E}_z\mathcal{E}_u, \, \mathrm{d'où}\,\,[\mathcal{C}'] = \{\mathcal{E}_z\mathcal{E}_u, \, \mathbf{1}\}, \, \left(\frac{-\mathrm{N}}{u}\right)\,\mathrm{n'est}$ pas conjuguée de $\left(\frac{-\mathrm{N}}{u}\right)\left(\frac{-\mathrm{I}}{z}\right)$. Donc $[\mathcal{C}']$ n'a hors de $[\mathcal{C}]$ que deux classes de s_2 représentées par $\frac{-\mathrm{N}}{u} = \left(\frac{-\mathrm{I}}{u}\right)(\mathrm{N}u)$ et $\left(\frac{-\mathrm{N}}{u}\right)\left(\frac{-\mathrm{I}}{z}\right)$ auxquelles répondent respectivement, dans \mathcal{C}' , si $\mathrm{N} = v^k$ (k impair) [en sorte que $(\mathrm{N}u) = g_u^k$], $(d_1\mathrm{T}_{12}t_{12}\gamma^k) = (d_2\mathrm{T}_{12}t_{12}\gamma^k)$ et $(t_{12}\gamma^k)$.

Les relations $\overline{d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k}^2 = [-\iota^k]$ et $\overline{t_{12} \gamma^k}^2 = [\iota^k]$ montrent que $(t_{12} \gamma^k)$ est toujours de seconde espèce et que $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k)$ est de seconde ou de première espèce suivant que $-\iota$ est carré ou non.

Les quatre classes de s_2 de $[\mathfrak{A}]$ représentées par $\left(-\frac{1}{z}\right)$ et $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$, qui sont dans $[\mathfrak{B}]$, $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ m, qui est dans $[\mathfrak{A}^0]$

hors de $[\mathfrak{A}]$, \mathfrak{l} qui est dans $[\mathfrak{A}]$ hors de $[\mathfrak{A}^{\mathfrak{d}}]$ restent évidemment distinctes dans $[\mathfrak{A}']$; mais $(N^{-1}u)$ transforme \mathfrak{l} en \mathfrak{l} $(N\mathfrak{z})(N^{-1}u)$. Les deux classes correspondantes de $[\mathfrak{A}]$ se réunissent donc en une seule dans $[\mathfrak{A}']$.

52. Cherchons maintenant les normalisants respectifs \mathfrak{I}° , \mathfrak{I}° , \mathfrak{I}° dans $[\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{C}^{\circ}]$, $[\mathfrak{C}^{\circ}]$, $[\mathfrak{B}]$ d'une s_2 quelconque σ de $[\mathfrak{C}^{\vee}]$.

Soit d'abord ψ irréductible. Alors (47) $[\mathcal{C}'] = \{\mathcal{L}(2, \pi^2), z\}$. Désignons par \mathcal{M} le normalisant de σ dans $\mathcal{L}(2, \pi^2)$ et par α_z la substitution générale $\left(\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right)$ de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, en supposant $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$.

Soit d'abord σ dans $[\mathcal{B}] = \mathfrak{U}(2, \pi^2)$. On peut supposer que $\sigma = -z$. D'après ce qu'on a vu (13), on a ici $\mathfrak{M} = \left\{ \iota' z, \frac{-\imath}{z} \right\}, \mathfrak{L} = \left\{ \iota'^2 z, \frac{-\imath}{z} \right\}$. Comme z est permutable à -z, on a $\mathfrak{N} = \left\{ \mathfrak{L}, \ z \right\} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}z$, $\mathfrak{L} = \left\{ \mathfrak{N}, \ \iota' z \right\}$; \mathfrak{L} est normal et d'indice 4 dans \mathfrak{L}' .

53. Soit σ dans $[\mathfrak{A}]$ hors de \mathfrak{B} . On peut d'abord supposer (45) que $\sigma = z$. Pour qu'une substitution α_z vérifie $\alpha_z \sigma = \sigma \alpha_z$, il faut et suffit que l'on ait; ρ désignant un facteur de proportionnalité,

$$\dot{\alpha} = \rho \alpha, \quad \dot{\alpha}' = \rho \alpha', \quad \text{d'où } \rho^2 = 1.$$

Si $\rho = 1$, α_z est une substitution quelconque de $\mathfrak{U}(2, \pi)$. Si $\rho = -1$, en introduisant $\omega = \upsilon - \upsilon$ au lieu de $\upsilon = -\frac{b}{2c} + \frac{\omega}{2}$, α , β , α' , β' ont respectivement les formes $\omega \alpha_1$, $\omega \alpha'_1$, $\omega \beta_1$, $\omega \beta'_1$, d'où $\alpha_1 \beta'_1 - \beta_1 \alpha'_1 = \frac{1}{\omega^2}$, $\omega^2 = \frac{\delta}{c_2}$ étant non carré dans \mathcal{C} . Donc $(\omega^{-2}z)\left(\frac{\alpha_1z + \alpha'_1}{\beta_1z + \beta'_1}\right)$ est dans $\mathfrak{U}(2, \pi)$, donc α_z est une substitution quelconque de $(\omega^2z)\mathfrak{U}(2, \pi)$. Donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^0 = \mathfrak{U}(2, \pi) + (\omega^2z)\mathfrak{U}(2, \pi) = \mathfrak{L}(2, \pi)$. Donc $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{L}, z\}$, et z étant permutable à $\mathfrak{L}(2, \pi)$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}z$.

Comme $\left(\frac{-1}{z}\right)$ est conjuguée de z dans $\left[\mathfrak{A}'\right]$ (47), on obtiendra le normalisant dans $\left[\mathfrak{A}\right]$ de $\left(\frac{-1}{z}\right)$ en transformant celui de z par une

substitution s de $[\mathcal{C}(x')]$, transformant (z) en (z) en (z). La forme générale de s est $\left[\frac{(\alpha z + \alpha')}{\rho(\alpha z + \alpha')}\right]$, $\rho \dot{\rho} = -1$.

De plus, le nombre des conjuguées de z dans $[\mathfrak{A}']$ étant double du nombre de ses conjuguées dans $[\mathfrak{A}]$, on a $\mathfrak{I}'=\mathfrak{I}$.

54. Soit σ dans $[\mathfrak{C}']$ hors de $[\mathfrak{C}]$. On peut supposer (48) que $\sigma = \left(\frac{-\xi}{z}\right)$. Comme au n° 52, on connaît (43) ses normalisants \mathfrak{M} dans $\mathfrak{L}(2, \pi^2)$ et $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^0$ dans $\mathfrak{U}(2, \pi^2) \equiv \mathfrak{G} = \mathfrak{C}^0$. Pour déterminer \mathfrak{N} , il suffit donc de chercher une substitution $\tau = z\alpha_z$, de $z\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, permutable à σ . Or, si l'on pose

$$\alpha_z = \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}, \quad \alpha \beta' - \beta \alpha' = 1,$$

la condition $\sigma z \alpha_z = z \alpha_z \sigma$ donne, en désignant par ρ un facteur de proportionnalité,

$$\alpha \xi = \rho \xi \beta', \qquad \beta \xi = -\rho \alpha', \\ \beta' = \rho \alpha, \qquad \alpha' = -\rho \xi \beta.$$

La condition de compatibilité est $\rho^2 = \xi^{1-\pi}$. La condition $\alpha\beta' - \beta\alpha' \equiv 1$ donne $\rho\alpha^2 + \rho\dot{\xi}\beta^2 = 1$. Si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, on peut faire $\beta = 0$, $\alpha = \xi^{\frac{\pi-1}{4}}$; alors $\alpha_z = \frac{z}{\rho} = \xi^{\frac{\pi-1}{2}}$. Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, on peut faire $\alpha = 0$, $\alpha = \xi^{-\frac{\pi+1}{2}}$; alors $\alpha_z = -\frac{\rho\dot{\xi}}{z} = -\frac{\xi^{\frac{\pi+1}{2}}}{z}$. Alors $\Re z = \Re z + \Re z = \Re z + \Re z$. Enfin $\Re z' = \Re z + \Re z = \Re z + \Re z$;

et l'on peut ici, quel que soit π , prendre une quelconque des deux formes de τ .

55. Supposons maintenant ψ réductible. Désignons ici par $\mathfrak{M}_z k$ et \mathfrak{N}_{zk} les normalisants respectifs de $\left(\frac{-k}{z}\right)$ dans $\mathfrak{L}_z(2,\pi)$ et $\mathfrak{U}_z(2,\pi)$. On a vu (13), pour -k carré et (13-15) pour -k non carré, que $\mathfrak{M}_z k$ et $\mathfrak{N}_z k$ sont diédraux et que, si $\mathfrak{D}_z k$ et \mathfrak{D}_{zk}^0 sont leurs diviseurs

cycliques d'indice 2, on peut déterminer une même substitution τ_{zk} telle que

 $\mathfrak{M}_{zk} = \{ \mathcal{O}_{zk}, \tau_{zk} \}, \qquad \mathfrak{N}_{zk} = \{ \mathcal{O}_{zk}^0, \tau_{zk} \}.$

Je supprimerai l'indice k pour k = 1.

Soit d'abord $\sigma = \frac{-1}{z}$. Alors, comme $[\mathcal{B}] = \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$, on a $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{U}_u$; et comme $[\mathfrak{C}^\circ] = \{[\mathcal{B}], \, \mathfrak{u}_N\} \ (49) = \{[\mathcal{B}], \, \alpha_z \alpha_u\}, \, \alpha_z$ étant dans \mathcal{L}_z hors de \mathfrak{U}_z , on a $\mathfrak{N}^\circ = \{\mathfrak{L}, \, \beta_z \alpha_u\}, \, \beta_z$ étant dans \mathfrak{N}_z hors de \mathfrak{N}_z . Comme $[\mathfrak{C}] = [\mathfrak{C}^\circ] + [\mathfrak{C}^\circ] + (50)$ et comme aucune substitution de $[\mathfrak{C}^\circ] + \mathsf{n}$ est permutable à σ , on a $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^\circ$; cela correspond au fait que, dans $[\mathfrak{C}], \left(\frac{-1}{z}\right)$ est conjugué de $\left(\frac{-1}{u}\right)$. Enfin, comme

$$[\alpha'] = \{ [\alpha], g_u \} = \{ \mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, \iota \},\$$

on a $\mathfrak{I}\mathcal{V} = \mathfrak{I}\mathfrak{N}_z \mathcal{L}_u$.

Pour traiter le cas $\sigma = \left(\frac{-1}{u}\right)$, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{-1}{u}\right) = t\left(\frac{-1}{z}\right)t.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right).$$

Alors

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{I} \mathfrak{I}_z \mathfrak{I} \mathfrak{I}_u, \quad \mathfrak{I} \mathfrak{I}^0 = \{ \mathfrak{A}, \beta_z \beta_u \}, \quad \mathfrak{I} \mathfrak{I} = \{ \mathfrak{I} \mathfrak{I}_0, \mathfrak{t} \},$$

et, comme

$$[\mathfrak{A}'] = \{ \mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, \mathfrak{t} \}, \qquad \mathfrak{N}' = \{ \mathfrak{I} \mathfrak{I}_z \mathfrak{I} \mathfrak{I}_u, \mathfrak{t} \}.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{z}\right) m_{N} = \left(\frac{-N}{z}\right) \left(\frac{-N}{u}\right).$$

Alors

$$\begin{split} \mathfrak{T} &= \mathfrak{I} t_{zN} \, \mathfrak{I} t_{uN}, \qquad \mathfrak{I}^0 = \{ \, \mathfrak{T}, \, \sigma \, \}, \qquad \mathfrak{I}^{} t = \{ \, \mathfrak{I} t_0, \, t \, \}, \\ \mathfrak{I}^{} t' &= \left\{ \, \mathfrak{I} t, \left(\frac{-\, N}{z} \right) \right\} = \{ \, \mathfrak{I} t_{zN} \, \mathfrak{I} t_{uN}, \, t \, \}. \end{split}$$

Soit $\sigma = \mathfrak{t}$. Désignons par \mathfrak{U}_{zu} le groupe formé des substitutions $\alpha_z \alpha_u$ où α_z parcourt \mathfrak{U}_z et soit $\mathcal{L}_{zu} = \{\mathfrak{U}_{zu}, (N_z)(N_u)\}$. Il est clair que $\mathfrak{L} = \mathfrak{U}_{zu}, \mathfrak{H} = \{\mathfrak{L}_{zu}, \mathfrak{L}_{zu}\} = \{\mathfrak{L}_{zu}, \mathfrak{L}_{zu}\} = \{\mathfrak{L}_{zu}, \mathfrak{L}_{zu}\}$ Comme

$$\alpha' = \{ \mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, t \},$$

on a $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}$.

Soit $\sigma = \left(\frac{-N}{u}\right)$, on a $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}_{uN} \mathfrak{A}_z$, $\mathfrak{R}_0 = \{\mathfrak{L}, \beta_{uN} \alpha_z\} \alpha_z$ étant dans \mathfrak{L}_z hors de \mathfrak{A}_z et β_{uN} dans \mathfrak{R}_{uN} hors de \mathfrak{R}_{uN} , $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_{uN} \mathfrak{L}_z$.

Soit $\sigma = \left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$. On a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{uN}\mathfrak{N}_z$. Soient β_{uN} une substitution de \mathfrak{M}_z hors de \mathfrak{N}_z . Comme on peut écrire $[\mathfrak{C}^0] = \{[\mathfrak{B}], \beta_{uN}\beta_z\}$, on a $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_{uN}\beta_z\}$. Comme + transforme σ en $\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ et qu'aucune substitution de $[\mathfrak{C}_0]$ ne peut transformer $\left(\frac{-1}{u}\right)$ en $\left(\frac{-N}{u}\right)$, qui est hors de \mathfrak{U}_u , donc hors de $[\mathfrak{C}_0]$, on a $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$. On a de même, aucune substitution de $\mathfrak{L}_z \mathcal{L}_u$ n'étant permutable à σ , $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_{uN}\mathfrak{M}_z$.

56. Passons aux groupes B, Aº A, A'.

Tout d'abord, si (s) est une s_2 de première espèce de $\mathfrak{C}V'$, c'est-à-dire si $s^2 = \lfloor v^{2h} \rfloor$, Is contient exactement deux s_2 qui sont $\lfloor v^{-h} \rfloor s$ et $d \lfloor v^{-h} \rfloor s$. Si au contraire (s) est de seconde espèce, c'est-à-dire si $s^2 = \lfloor v^{2h+1} \rfloor$, Is ne contient évidemment aucune s_2 . Ainsi Is contient ou non des s_2 suivant que (s) est de première ou de seconde espèce. On a vu d'ailleurs (5) que, si s et s' sont deux s_2 de A', (s') est conjuguée de (s) dans $\mathfrak{C}V'$ toujours et seulement si s' l'est, dans A', de s ou de ds.

Si donc (s) parcourt un système de représentants (s_1) , (s_2) , ... des classes de première espèce de A', s_i étant choisi de manière que $s_i^2 = 1$, l'ensemble des substitutions s_i , ds_i et d contient un système de représentants des classes de s_2 de A', s_i ne pouvant être conjuguée de s_k , ni de ds_k , si $k \neq i$. Si d'ailleurs s_i est conjuguée de ds_i dans A', le normalisant de s_i (qui est toujours aussi celui de ds_i) est d'indice 2 dans le normalisant S_i de Ds_i dans A' qui correspond à celui de (s_i) dans C. Si au contraire s_i n'est pas conjuguée de ds_i , S_i est à la fois le normalisant de s_i et de Ds_i .

Les mêmes considérations s'appliquent à \mathfrak{A} , \mathfrak{A}^{0} , \mathfrak{B} , en observant que les s_{i} tels que $s_{i}^{2} = 1$ ne sont pas nécessairement tous dans A, A⁰, qui ne contiennent pas I, mais seulement D, ni dans B qui peut ne pas contenir D (I, 39).

57. Supposons d'abord ψ irréductible. \mathcal{B} n'ayant ici qu'une classe de s_2 (44) et d étant ici hors de B(I, 39), B n'a qu'une classe de s_2 , que l'on peut représenter par $t_{01}m_{1k}$, k étant tel que cette substitution soit dans B (I, 32).

Il est clair que $A_0 = BD$ a exactement trois classes de s_2 représentées par $s = t_{01} m_{1k}$, d, et ds. On peut remplacer ds par une s_2 quelconque $\neq d$ hors de B, par exemple par sm_{1N} .

Dans A, les trois classes de s_2 de A° restent distinctes, puisque $t_{0+}m_{1k}$ est dans B, et $dt_{0+}m_{1k}$ hors de B. Comme \mathfrak{C} a, hors de $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^0$ les deux classes (t_1) et (t_2) (46), l'ensemble des quatre substitutions t_1 , t_2 , dt_1 , dt_2 contient (56) un système de représentants des classes de s_2 de $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ hors de $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^0$, t_i ne pouvant être conjugué ni de t_k , ni de dt_k , si $k \neq i$. D'ailleurs t_i , ayant un multiplicateur égal à — 1 et trois égaux à 1, ne peut être conjugué de dt_i . Donc A a exactement, hors de A°, quatre classes de s_2 , représentées par t_1 , t_2 , dt_1 , dt_2 .

On remarquera que t_2 est conjugué de t_1m_{1N} . En effet les substitutions de $[\mathcal{C}']$ qui correspondent respectivement à It_1 , It_2 , Im_{1h} (puissance de $I\gamma$) sont (45,47) $\left(\frac{-1}{z}\right)$, z, (hz). Donc à It_1m_{1h} correspond $\left(\frac{-1}{z}\right)(hz)=z\left(\frac{-h}{z}\right)$. Si $h=r^2$, on a $\left(\frac{-h}{z}\right)=\left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$; et le caractère (44) de $(z)\left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$ est $\frac{-r}{r}=-r^{1-\pi}=-h^{\frac{1-\pi}{2}}$. Selon que h est carré ou non, ce caractère est -1 ou +1; donc, (45) $z\left(\frac{-h}{z}\right)$ est conjuguée de $\left(\frac{-1}{z}\right)$; ou de (z); donc (t_1m_{1h}) est conjuguée de (t_1) ou (t_2) . Donc t_1m_{1h} est conjuguée de t_1 ou t_2 , puisqu'elle n'a comme eux qu'un seul multiplicateur égal à -1 (1). On peut donc remplacer t_1 et t_2 par $t_1m_{1,k}$, $t_1m_{1,kn}$. Donc les classes de A peuvent être représentées par t_0 , m_{1h} es, sm_{1n} et d, qui sont dans A^0 , puis st_0 , $sm_{1n}t_0$, dst_0 , $dsm_{1n}t_0$, qui sont hors de A^0 , où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de k.

A toute s_2 de A' hors de A correspond une s_2 de première espèce de α' hors de α . Or α' n'a hors de α qu'une classe de s_2 représentée

⁽¹⁾ De même $t_2m_{2\sigma}$, σ étant de la forme $\xi^{k(n-1)}$ est conjuguée de t_2 ou de t_1 suivant que k est pair ou impair. Car $t_2m_{2\sigma}$ répond à $(z)(\sigma z)$, dont le caractère est $(-1)^k$, et ne peut être conjuguée de dt_2 ni de dt_1 , qui ont trois multiplicateurs égaux à -1.

par $(t_{12}\gamma)$ (47). Comme $(t_{12}\gamma)^2 = [1]$ cette classe est de seconde espèce. Donc A' n'a aucune s_2 hors de A.

On voit de suite que les classes de s_2 de A^o restent distinctes dans A', comme dans A. Mais les classes de A représentées par t_1 et t_2 se réunissent dans A', et de même celles représentées par dt_1 et dt_2 . Cela résulte de ce que les deux classes de s_2 de \mathfrak{C} hors de $\mathfrak{C} \mathfrak{C}_0$, représentées par (t_1) et (t_2) , se réunissent en une seule dans $\mathfrak{C} \mathfrak{C}'$ (47) (1).

58. Supposons maintenant ψ réductible, B contient ici d (I, 39). Les trois classes de s_2 de \mathcal{B} sont $(d_4 T_{12})$, $(d_1 T_{12} t_{12})$, (t_{12}) ; et $\overline{d_1 T_{12}^2} = \overline{d_1 T_{12}} t_{12}^2 = d$ (48). Donc pour que $[t^h] d_1 T_{12}$ et $[t^h] d_4 T_{12} t_{12}$ soit d'ordre 2, il faut que $\pi - 1$ soit \equiv 0 (mod 4) et que $h = \frac{\pi - 1}{4}$; mais alors ces substitutions sont dans A' hors de A. A la classe (t_{12}) de \mathcal{B} correspondent au plus, dans B, deux classes représentées par t_{12} et dt_{12} . Mais dt_{12} est conjuguée de t_{12} . En effet, on a $t_{12} = R_{1,2,1} S_{1,2,-1}$ (I, 28), R_{121} étant dans $\mathbf{V} \equiv \mathbf{U}_{x_1,x_2}$ et $S_{4,2,-1}$ dans $\mathbf{W} \equiv \mathbf{U}_{x_2,x_2}$ (I, 28, 40). Or R_{121} par exemple répond à $|x_2 - x_1| = \alpha$ de \mathbf{U}_{x_1,x_2} ; et toute substitution de \mathbf{U}_{x_1,x_2} de la forme $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda^2 + \mu^2 = -1$ transforme α en α . α^2 , $\alpha^2 = |-x_1| - x_2 |$ (S., p. 115). Donc la substitution de \mathbf{V} qui répond à β transforme R_{121} en dR_{121} , et, par suite t_{12} en dt_{12} . Cette substitution, qui est

$$\begin{bmatrix} x_1 & \lambda x_1 & + \mu x_2 \\ y_1 & - \lambda y_1 & - \mu y_2 \\ x_2 & \mu x_1 & - \lambda x_2 \\ y_2 & - \mu y_1 & + \lambda y_2 \end{bmatrix}$$

est égale à $m_{1\lambda}m_{2\lambda}^{-1}V_{1,2,\lambda\mu}V_{2,1,\mu/\lambda}$, si $\lambda \neq 0$, et à $m_{1\mu}m_{2\mu}T_{12}$ si $\lambda = 0$ $(\lambda^2 + \mu^2 = -1)$. Donc B a exactement deux classes de s_2 représentées par d et t_{12} .

D'après l'étude de & (49), Ao a, hors de B, au plus deux classes

⁽¹⁾ On pourrait dire aussi que $\gamma^{-1}t_1\gamma=t_1m_1$, est, comme on vient de le voir, conjuguée de t_2 . Mais c'est au fond la même démonstration.

de s_2 , représentées par $t_{12}m_{1N}$ et $dt_{12}m_{1N}$. Mais ces deux substitutions sont conjuguées dans A^0 , car si -1 est carré, la substitution $m_{1\lambda}m_{2\lambda}$ où $\lambda^2 = -1$ transforme $t_{12}m_{1N}$ en $dt_{12}m_{1N}$; et, si (-1) est non carré, la substitution $m_{1\mu}T_{12}m_{1\mu}^{-1}$, où $\mu^2 = -N$, transforme encore $t_{12}m_{1N}$ en $dt_{12}m_{1N}$. On peut remplacer t_{12} par $s = t_{01}m_{1k}$ (k étant tel que cette substitution soit dans B). Alors, comme dans le cas de ψ irréductible, les trois classes de s_2 de A^0 peuvent être représentés par s, sm_{1N} , et d; où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de k.

D'après l'étude de $\mathfrak{C}(50)$, A a, outre les classes de s_2 de A^0 (qui restent évidemment distinctes dans A), exactement quatre classes de s_2 , représentées par t_2m_{2k} et dt_2m_{2k} , $t_2m_{2,kN}$ et $dt_2m_{2,kN}$ (t_2m_{2k} et $t_2m_{2,kN}$ ont un seul multiplicateur — 1; leurs produits par d en ont trois), ou, en transformant par T_{12} , par t_1m_{1k} et dt_1m_{1k} , $t_1m_{1,kN}$ et $dt_1m_{1,kN}$. Donc A a exactement, comme pour ψ irréductible, sept classes de s_2 , que l'on peut représenter par s, sm_{1N} et d, qui sont dans A^0 , et st_0 , dst_0 , st_0m_{1N} , dst_0m_{1N} , qui sont hors de A^0 .

On a vu que les classes de s_2 de \mathfrak{B} réprésentées par $(d_1 T_{12})$ et $(d_1 T_{12} t_{12})$ (48) se réunissent en une dans \mathfrak{A} (50). D'autre part (58) il ne leur correspond de s_2 que dans A' hors de A, et seulement si — I est carré. De plus la seule classe de s_2 de \mathfrak{A}' hors de \mathfrak{A} qui puisse fournir des s_2 de A' est $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k)$ (k impair) (51, 56), et seulement si — I est non carré.

Si — 1 est carré, et si — 1 = ε^2 , les s_2 de I d_1 T₁₂ sont (56) [ε] d_4 T₁₂ et [ε] d_2 T₁₂, que T₁₂ transforme l'une dans l'autre. Si — 1 est non carré, et si g^2 = — ι , les s_2 de I d_4 T₁₂ t_{12} γ^k sont [g^{-k}] d_4 T₁₂ t_{12} γ^k et [g^{-k}] d_2 T₁₂ t_{12} γ^k , que T₄₂ transforme encore l'une dans l'autre.

Donc, quel que soit π , A' a, hors de A, une seule classe de s_2 que l'on peut, par exemple, représenter par $\varphi = \gamma^{(\pi-1)/2}$ (38).

D'après l'étude de \mathcal{CU} (51), les quatre classes, de s_2 de A hors de A⁰ se réunissent, dans A', en deux classes, que l'on peut représenter par t_2m_{2k} et dt_2m_{2k} . Les autres classes de s_2 de A restent évidemment distinctes dans A'.

59. D'après le nº 12, si
$$-k$$
 est carré $\left(\frac{-k}{z}\right)$ est conjugué de $(-z)$

dans \mathcal{L}_z ; les substitutions qui transforment $\left(\frac{-k}{z}\right)$ en (-z) forment le complexe \mathcal{M}_{zk} , e_{zk} étant la substitution unimodulaire ξ du n° 13 et \mathcal{M}_{zk} le normalisant de $\left(\frac{-k}{z}\right)$ dans \mathcal{L}_z . Soient e=k une des deux correspondantes de e_{zk} dans B (48) et $\varepsilon^2=-k$.

Soit — I carré, et k=1, les transformées de $[\varepsilon]d_1T_{12}$ et de $[\varepsilon]d_2T_{12}$ par e_{z1} sont les s_2 du complexe $Im_{1z}m_{zz}^{-1}$ qui correspond à (-z) (1). Ces s_2 sont les substitutions du complexe $D[\varepsilon]m_{1z}m_{zz}^{-1}$ dont l'une fixe 1000.

Soit — 1 non carré; si k est non carré et = t^h (h impair), les transformées de $[g^{-h}]d_1T_{12}t_{12}\gamma^h$ et de $[g^{-h}]d_2T_{12}t_{12}\gamma^h$ par e_{ut^h} sont les deux s_2 du complexe qui correspond à $(-u) = \frac{\pi-1}{9u^2}$. Ces deux s_2 sont φ et $d\varphi$, dont la seconde fixe 1000.

60. Cherchons les normalisants respectifs N, N', N°, P dans A, A', A°, B d'une s_2 $s \neq d$ de A'. Au complexe Is (dont les seules s_2 sont s et ds) répond dans [' \mathfrak{C}'] une s_2 \mathfrak{T} . Soient N_D , N_D ,

61. Si ψ est irréductible, on a vu (57) que s n'est jamais conjuguée de ds. Les normalisants N, N', N°, P sont donc complètement déterminés par \mathfrak{I} , \mathfrak{I} , \mathfrak{I} , \mathfrak{I} , \mathfrak{I} , \mathfrak{I} .

62. Soit ψ réductible. Comme précédemment on connaît déjà ici (50, 55) le normalisant de t_2 et de dt_2 . Il reste donc seulement à

⁽¹⁾ On voit directement que $(m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}^{-1})$ de \mathcal{B} correspond à (-z).

considérer les cas

$$s = [\varepsilon] d_1 T_{12}$$
 (-1 carré; $\varepsilon^2 = -1$),
 $s = [g^{-1}] d_1 T_{12} t_{12} \gamma$ (-1 non carré; $g^2 = -\iota$) (58),
 $s = t_{12} m_{1N}$ (49), $s = t_{12}$ (48).

63. Au lieu de $s = [\varepsilon] d_1 T_{12}$, $\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)$ (48, 58), il est avantageux de prendre (59) $s = [\varepsilon] m_{1\varepsilon} m_{2\varepsilon^{-1}}$, $\sigma = (-z)$. En désignant ici par \mathfrak{N}_z et \mathfrak{N}_z les normalisants $\left\{(\iota z), \frac{-1}{z}\right\}$ et $\left\{(\iota^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right)\right\}$ (13) de (-z) dans \mathscr{L}_z et \mathfrak{N}_z , et par \mathscr{R} celui de (-z) dans $[\mathscr{B}]$, on a $\mathscr{L} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{N}_u$ (55). \mathfrak{N}_z a trois diviseurs d'indice 2, qui sont

$$\{\iota^2 z\} = \mathcal{O}_z^0, \qquad \left\{(\iota^i z), \left(\frac{-1}{z}\right)\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(\iota^i z), (\iota^2 z) \left(\frac{-1}{z}\right)\right\}.$$

Or les correspondants de $\left(\frac{-1}{z}\right)$ sont hors de A, et ceux de $(\iota^2 z)$ étant dans B, ceux de $(\iota^2 z)\left(\frac{-1}{z}\right)$ sont hors de B. D'ailleurs (I, 40) toute substitution du groupe W qui répond à \mathfrak{A}_u est permutable à s, qui est dans V. Donc P répond à $\mathcal{O}_z^0 \mathfrak{A}_u$. De même N° répond à un diviseur d'indice 2 de $\mathfrak{I}^0 = \{\mathfrak{A}, \beta_z \alpha_u\}$ (55), où l'on peut supposer $\beta_z = (\iota z)$ (13) et $\alpha_u = (\iota u)$. Comme $\mathfrak{A} = \left\{(\iota^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right), \mathfrak{A}_u\right\}$, on a $\mathfrak{I}^0 = \left\{\mathfrak{A}_z, \left(\frac{-1}{z}\right), \mathfrak{A}_u\right\}$.

Comme précédemment, le seul diviseur d'indice 2 dont le correspondant soit dans A^0 est $\{m_1, \mathfrak{Al}_n\}$.

Comme $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^{0}$, et que ce diviseur est aussi le seul dont le correspondant soit dans A (55), on a N=N°. Enfin $\mathfrak{N}'=\mathfrak{M}_{z}\mathcal{L}_{u}$ (55) n'a qu'un diviseur d'indice 2 contenant σ , qui est $\left\{\mathcal{O}_{z}^{0}, \frac{-1}{z}, \mathcal{L}_{u}\right\}$, donc N', qui contient évidemment s, correspond à ce diviseur.

64. Soient
$$s = [g^{-1}] d_1 T_{12} \gamma \quad (-1 \text{ non carré}; g^2 = -\iota), \qquad \sigma = \left(\frac{-\iota}{u}\right), \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{R}_{u_1} \mathfrak{U}_z.$$

Le diédral \mathcal{H}_{u} , a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe montre que \mathcal{O}_{u}^{0} (13) est le seul auquel corresponde un diviseur de P. Donc P répond à \mathcal{O}_{u}^{0} \mathcal{U}_{z} . De même N° répond à un diviseur d'indice 2 de $\mathcal{H}^{0} = \{\mathcal{R}, \beta_{u}, \alpha_{z}\}$ (55) où l'on peut supposer que β_{u} est un générateur de \mathcal{O}_{u} (13) et que $\alpha_{z} = (\iota z)$. Comme $\mathfrak{T} = \{\beta_{u}^{2}, \tau_{u}, \mathfrak{U}_{z}\}, \tau_{u}$ étant, comme τ_{k} au n° 55, la substitution σ du n° 15 où l'on change z en u et k en ι , on a $\mathcal{H}^{0} = \{\beta_{u}(\iota z), \tau_{u}, \mathfrak{U}_{z}\}$. Le diédral $\{\beta_{ui}(iz), \tau_{ui}\}$ a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe, opérée sur les correspondantes (51) de β_{u} et (ιz) montre que $\{\beta_{u}(\iota z)\}$ est le seul auquel corresponde un diviseur de N°. Donc N° répond à $\{\beta_{u}(\iota z), \mathfrak{U}_{z}\}$. Comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{0}$ (55) on a N = N°. Enfin on voit, comme dans le cas de P, que N' répond à \mathcal{O}_{u} \mathcal{L}_{z} .

65. Soient
$$s = t_{12} m_{11}, \qquad \sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right) m_{1}(49) = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right).$$

66. Soient $s = t_{12}$, $\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right)$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}_z \mathfrak{R}_u$ a plusieurs diviseurs d'indice 2. Soit d'abord -1 non carré. Une vérification directe montre que toute substitution de B correspondant à la substitution générale de \mathcal{O}_z^0 (14) ou de \mathcal{O}_u^0 est permutable à t_{12} (1). Au contraire,

⁽¹⁾ Ce calcul ne fait pas intervenir le caractère quadratique du déterminant de la substitution générale considérée. Il montre donc aussi que toute substitution de A⁰ correspondant à la substitution générale de \mathcal{O}_z ou de \mathcal{O}_u est permutable à ℓ_{12} .

toute substitution de B correspondant à τ_z (qui est ici la substitution σ du n° 15 pour k=1) transforme t_{12} en dt_{12} . Donc toute substitution correspondant à $\tau_z \tau_u$ est permutable à t_{12} . Donc P répond à

$$\{ \mathcal{Q}_z^0 \mathcal{Q}_u^0, \tau_z \tau_u \} = \mathfrak{L}_1.$$

Soit -1 carré, il est alors avantageux de prendre (59) $s=d_1$, $\sigma=(-z)(-u)$. D'après les résultats obtenus pour les normalisants de $[\varepsilon]m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon^{-1}}$ correspondant à (-z), le normalisant de d_1 dans B répond à

 $\left\{\left\{\left\{\iota^{2}z\right\}\left\{\left\{\iota^{2}u\right\}\right,\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\right\}=\mathcal{Z}_{1}'.\right.$

Si l'on transforme par la substitution $e_{z_1}^{-1}e_{u_1}^{-1}=f(59)$, on voit que le normalisant P de t_{12} dans B répond au transformé de \mathscr{R}_i par $e_{z_1}^{-1}e_{u_1}^{-1}=f$, qui est précisément \mathscr{R}_i , les notations ayant toujours les significations indiquées au début du n° 55.

Si (-1) est carré, le normalisant de d_1 dans A^0 répond à $\{\mathcal{L}'_1, m_1\}$, car \mathcal{L}'_1 est d'indice 2 dans ce dernier groupe, et m_{11} , qui correspond à m_1 (49) est évidemment permutable à d_1 . Le normalisant N^0 de t_{12} dans A^0 s'obtient en transformant celui de d_1 par f. Donc N^0 répond à $\{\mathcal{L}_1, f^{-1}m_1f\} = \mathcal{D}\mathcal{L}^0$. On remarquera que $f^{-1}m_1f$ est le produit de deux générateurs respectifs δ_2 et δ_n de \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_n .

Il en est de même si (-1) est non carré, comme le montrent les observations faites à l'occasion du calcul de P.

N répond évidemment à $\{\mathcal{N}_{1}^{0}, t\} = \mathcal{N}_{1}$, en sorte que $N = \{N^{0}, t_{2}\}$. N' répond à $\{\mathcal{N}_{1}, \delta_{z}\} = \{\mathcal{O}_{z}\mathcal{O}_{u}, \tau_{z}\tau_{u}\}$, car, d'après les calculs précédents, toute substitution de A' répondant à δ_{z} est permutable à t_{12} .

§ III.
$$n > 4$$
.

67. Les résultats précédents s'étendent comme il suit au cas où n est > 4. Supposons $\psi \neq 0$, réductible ou irréductible. Les classes de s_2 de $A(n, \pi)$ peuvent être représentées, si n impair $= 2\nu + 1$, par les substitutions $s_i = t_{0+} m_{1k_i} d_{4...i}$, $s_i m_{1N}$, qui ont chacune 2i multiplicateurs -1 $(i = 1, ..., \nu)$; $s_i t_0$, $s_i m_{1N} t_0$, qui ont chacune 2i - 1 multiplicateurs -1 $(i = 1, ..., \nu)$; d, qui a $2\nu + 1$ multiplicateurs (-1) $(i = 1, ..., \nu)$; k_i étant assujetti à la condition que s_i soit dans B $(k_i$ ne dépend que de a,

et, si — I est non carré, de i; en prenant au besoin $m_{+r}^{-1}s_im_{+r}$ pour s_i , on peut remplacer k_i par k_ir^2);

si n pair = 2 γ , par les mêmes substitutions auxquelles on adjoint $ds_1 t_0$ et $ds_1 m_{1N} t_0$, qui ont chacune $2\gamma + 1$ multiplicateurs = 1, et qu'on peut désigner, pour plus de symétrie, par $s_{\gamma} t_0$, $s_{\gamma} m_{1N} t_0$, en posant $s_{\gamma} = t_{01} m_{1k_{\gamma}} d$ et en faisant $k_{\gamma} = -k_{1}$ (1).

68. Montrons d'abord que les classes indiquées dans l'énoncé sont distinctes. Cela est clair pour celles qui n'ont pas le même nombre de multiplicateurs. Il reste seulement à établir, la distinction de deux classes de s_2 , représentées, l'une par s, l'autre par sm_{in} .

Si s est une s_i , cela résulte de ce que s_i est dans B, et $s_i m_{iN}$ dans A⁰ hors de B.

Si s est une $s_j t_0$, $j = 1, \ldots, \nu'$, s et sm_{1N} sont toutes deux dans A hors de A°. Or on a $A = A^0 + A^0 t_1$ (I, 34) et $A^0 = B + Bm_{1N}$ (I, 39), donc $A = B + Bm_{1N} - Bt_1 + Bt_1 m_{1N}$; et les deux groupes $B^1 = \{B, t_1\}$, $B^2 = \{B, t_1 m_{1N}\}$ sont d'indice 2 et normaux dans A. Il est clair que s et sm_{1N} sont toujours l'une dans B¹, l'autre dans B²; elles ne sont donc pas conjuguées dans A.

On a évidemment aussi

$$B^1 = \{B, t_i\}, \quad B^2 = \{B, t_i m_{iN}\} \quad (i = 1, ..., \nu).$$

De même si n est pair, et $m_{\nu'\rho}$ dans A^0 hors de B, les groupes B^1 et B^2 coïncident avec $\{B, t_{\nu'}\}$ et $\{B, t_{\nu'}m_{\nu'\rho}\}$; pour préciser B^1 coïncide avec $\{B, t_{\nu'}\}$ toujours et seulement si $t_{1\nu'}$ est dans B, c'est-à-dire toujours et seulement si ψ est réductible (2). De même B^1 et B^2 coïncident

$$t_{01} m_{1k_i} d_{2,...,\gamma-i+1} = t_{01} m_{1,-k_i} d_{1,2,...,\gamma-i+i},$$

qui, suivant le caractère quadratique de $-k_i$, est conjuguée de $s_{\nu-i+1}$ ou de $s_{\nu-i+1}m_{1N}$. Comme ici d n'a que 2ν multiplicateurs -1 (d_0 n'en a qu'un), ds_1t_0 et $ds_1m_{1N}t_0$ n'en ont que 2ν , comme s_2 et s_2m_{1N} .

⁽¹⁾ Si n est impair, les ds_it_0 et $ds_im_1Nt_0$ sont conjugués des s_i et s_im_1N ; car on a alors $dt_0=d_1,...,v$ ($t_0=d_0$ pour n impair) et la s_2 $ds_it_0=t_{01}m_1k_id_{i+1},...,v$ est transformée par $T_{i+1,2}T_{i+2,3}\ldots T_{\nu,\nu-i+1}$ (qui se réduit à r pour i=r) en

⁽²⁾ t_{0i} est dans B toujours et seulement si δc est carré (I, p. 348).

Soit d'abord ψ irréductible. On a $t_0 = t_{\gamma'} m_{\gamma' q} (q = xx^{-1}, xx = c)$ (I, p. 322). Si l'on pose $c = \iota'^{k(\pi+1)}$, on peut prendre $x = \iota'^{k}, x = \iota'^{k\pi}$; donc $q = \iota'^{(1-\pi)k}$. Done pour

avec $\{B, t_0\}$ et $\{B, t_0 m_{j\rho}\}$, j étant l'un des nombres $1, \ldots, \nu'$, et $m_{j\rho}$ étant dans A^0 hors de B. Pour préciser, B^1 coincide avec $\{B, t_0\}$ toujours si t_{01} est dans B, c'est-à-dire que si ∂c est carré (I, p. 348).

On remarquera, pour la suite, que, si une certaine substitution τ est dans l'un des groupes B' ou B², la substitution $\tau_k = \tau m_{\nu\sigma^k}$, σ étant d'ordre $\pi + 1$, est dans ce même groupe ou dans l'autre, suivant que m_{ν,σ^k} est ou non dans B, c'est-à-dire suivant que k est pair ou impair.

Si n est impair, et $\psi = cx^2$, $t_{01}m_{1,-c\lambda^2}$ est toujours dans B (1, p. 336). Donc {B, t_0 } coïncide avec B' toujours et seulement si -c est carré. D'autre part comme $dt_1 = t_{01}m_{1,-c}m_{1,c^{-1}}d_{2...\nu}$, {B, d} coïncide avec B' toujours et seulement si c est carré avec -1 carré ou ν impair, ou si c est non carré avec -1 non carré et ν pair.

69. Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres classes que celles indiquées dans l'énoncé. On l'a vu pour n=3 (43) et pour n=4 (57, 58). Admettons-le pour les valeurs de n inférieures à la valeur considérée. Soit s une $s_2 \neq d$ de A. Si s déplace tous les points du champ, sa forme canonique est d, et, comme d est normale dans L, s coincide avec d. Donc s fixe au moins un point.

70. Soit d'abord $n = 2\nu + 1$. On a vu (II, 1) que A a π systèmes d'intransitivité $q_{\lambda a} = q_{\lambda}$, $q_{\lambda a}$ désignant l'ensemble des points vérifiant $a = \lambda$, λ parcourant \mathcal{C} , et le point $(0, \ldots, 0)$ étant exclu de q_0 . Si s fixe un point de q_0 , on peut supposer que s est dans le diviseur X_0 de A qui fixe le point $(1, 0, \ldots, 0)$. On voit alors, comme dans l'étude du groupe hermitien (17), que s est conjuguée d'une s_2 du groupe A_1 de la forme $a = x_1 y_4$. Ce groupe fixant tous les points $(x_1, y_1, 0, \ldots, 0)$, on est ramené au cas où s fixe des points q_{λ} ($\lambda \neq 0$).

que $m_{\gamma'q}$ soit dans B, il faut et il suffit (I, p. 347) que k soit pair, donc que c soit carré. Alors t_{0i} , et, par suite, $t_{i\gamma'}$ ne sont pas dans B.

Soit maintenant ψ réductible. En posant $q = xx'^{-1}$, xx' = c, on a encore (I, p. 333-334) $t_0 = t_{y'}m_{y'q}$. Pour que $m_{y'q}$ soit dans B, il faut et il suffit que q soit carré (I, p. 347; σ est ici réel), ou, ce qui revient au même, que c soit carré. Alors t_{0i} , et par suite t_{iy} , sont dans B.

Supposons donc que s fixe un point de $q_{i,a}$ ($\lambda \neq 0$) on peut supposer que s est dans le diviseur X_{λ} de A qui fixe le point $(1, \lambda, 0, \ldots, 0)$ [II, p. 48, note (1)]. Or ce groupe est isomorphe (I, 21) au groupe $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ de la forme

$$a_{\lambda 0} = \sum_{i=1}^{\gamma-1} x_i y_i + c x^2 - \frac{y^2}{4\lambda},$$

dont les classes de s2 sont représentées par

$$s_i$$
, $s_i m_{iN}$, $s_i t_0$, $s_i m_{iN} t_0$ ($i = 1, ..., \nu - 1$;
 $d_{1,...,\nu-1,0} s_1 t_0$, $d_{1,...,\nu-1,0} s_1 m_{iN} t_0$, et $d_{1,...,\nu-1,0}$

D'après la correspondance indiquée [I, p. 48, note (1)] entre $A(2\nu, \pi, a_{\nu_0})$ et $X_{\nu_0}(1)$, leurs correspondantes sont

$$s_{i\lambda} = m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_{2, \dots, i+1}, \qquad s_{i\lambda} m_{2N},$$

$$s_{i\lambda} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2k_i} d_{2, \dots, i+1},$$

$$s_{i\lambda} m_{2N} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2, k_i N} d_{2, \dots, i+1},$$

$$d_{2, \dots, \gamma} m_{1\lambda} t_{01} t_2 m_{2k_1} d_2 = d m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_1} d_{12}, \qquad d m_{1\lambda} t_{12} m_{2, k_1 N} d_{12},$$

$$d_{2, \dots, \gamma} m_{1\lambda} t_{01} t_2 m_{2k_1} d_1 = t_{01} m_{1\lambda -1} d_{2, \dots \gamma}.$$

Désignons maintenant par $A_{j_1,j_2,...,j_r}$, $A_{j_1,...,j_r}^0$, $B_{j_1,...,j_r}$ $(r \ge 2)$ les diviseurs de A, A^0 , B, qui agissent sur les seules variables d'indice $j_1,...,j_r$ (l'un de ces indices pouvant être nul). La s_2 $m_{1\lambda}t_{12}m_{2k_i}d_2 = s_{i\lambda}d_{3,...,i+1}$ $(d_{3,...,i+1}$ est à supprimer si i=1) de A_{12}^0 est conjuguée, dans A_{012} d'une s_2 de la forme $t_{01}m_{4\mu}$. En effet, A_{12}^0 n'a, d'après le cas n=4 et en négligeant d, qu'une classe de s_2 dans B_{12} et une hors de B_{12} (58). Comme $t_{12}m_{1\mu}m_{2,-c}$ est une s_2 dans B_{12} ou hors de B_{12} suivant le caractère quadratique de μ , on peut toujours déterminer μ de manière que $t_{12}m_{1\mu}m_{2,-c}$ soit conjuguée de $s_{i\lambda}d_{3,...,i+1}$. Ensuite, d'après le cas n=3 (43, note) $t_2m_{2,-c}$ est conjuguée de t_0 dans A_{02} . Donc, dans A_{012} , $t_{01}m_{1\mu}$ est conjuguée de $s_{i\lambda}d_{3,...,i+1}$. Donc $s_{i\lambda}$ est conjuguée de $t_{01}m_{1\mu}d_{3,...,i+1}$, que $t_{01}m_{1\mu}d_{01}m_{$

⁽¹⁾ D'après cette correspondance, aux substitutions t_0 , d_0 , t_k , d_k , $m_{k\mu}$ (k=1, ..., v-1) de $\Lambda(2v, \pi, a_{\lambda 0})$ correspondent les substitutions $m_{1\lambda}t_1$, $m_{1\lambda}t_{01}$, t_{k+1} , d_{k+1} , m_{k+1} , m_k .

 $\nu = 1$). On voit encore, comme pour $m_{1k}t_{12}m_{2k}d_2$, que les substitutions

$$dm_{1\lambda}t_{12}m_{2k_1}d_{12}$$
 et $dm_{1\lambda}t_{12}m_{2,k_1N}d_{12}$

sont conjuguées de dt_{0+} et $dt_{0+}m_{1N}$, conjuguées elles-mêmes $(d_0 = t_0)$ de s, t_0 et $s, m_{1N}t_0$.

Enfin $t_{0+}m_{1\lambda-1}d_{2,...,\nu} = t_{0+}m_{1,-\lambda-1}d_{1,2,...,\nu}$ est évidemment conjuguée, suivant le caractère quadratique de λ , de s_{ν} ou de $s_{\nu}m_{1N}$.

On n'a donc obtenu ainsi que les classes indiquées dans l'énoncé.

71. Soit $n = 2\nu + 2$. Si s fixe un point de q_0 , on peut, ici encore, supposer que s est dans le diviseur X_0 de A qui fixe le point (1, 0, ..., 0). On voit alors, comme dans le cas de n impair, que l'on est ramené au cas où s fixe un point de q_{λ} ($\lambda \neq 0$).

Si s fixe un point de q_{λ} ($\lambda \neq 0$), on peut d'abord supposer que $\lambda = c'$, et que s est dans le diviseur $X_{c'}$ de A qui fixe le point de coordonnées

$$x_1 = \ldots = x_2 = x = 0, \quad y_1 = \ldots = y_2 = 0, \quad y = 1$$

Ce groupe est isomorphe au groupe $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ de la forme

$$a_1 = \Sigma_1' x_i y_i + c_1 x^2 \left(c_1 = \frac{-\delta}{\sqrt{c'}}, \ \delta = b^2 - 4 cc' \right) \quad (\text{II}, 22),$$

dont les classes de s2 sont représentées par

$$s_i$$
, $s_i m_{1N}$, $s_i t_0$, $s_i m_{1N} t_0$ $(i = 1, ..., \nu)$,
 $d_{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot \nu_0}$ (ici $d_0 = |x, -x|$).

D'après la correspondance indiquée [II, p. 50, note (1)] (1) entre $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ et $X_{c'}$ leurs correspondantes dans $X_{c'}$ sont

$$s_{ic'} = u_0 t_1 m_{1k_1} d_{1...i}, \qquad s_{ic'} m_{1N}, \quad s_{ic'} u_0, \quad s_{ic'} m_{1N} u_0, \quad u_0 d_{1...v}.$$

(1) D'après cette correspondance, à $t_0 = d_0$ de $A(2v + 1, \pi, a_1)$ correspond

$$u_0 = l_0 m_{0,-1,-b/c'} = \begin{bmatrix} x, & -x \\ y, & y + \frac{b}{c'} x \end{bmatrix}$$
 (I, 25),

de $X_{c'}$; aux substitutions d_k , t_k , $m_{k\mu}$ de $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ correspondent respectivement ces mêmes substitutions dans $X_{c'}$.

Or, d'après le cas n = 4 (57), les substitutions

$$u_0 t_1 m_{1k_i} d_1$$
 et $u_0 t_1 m_{1,k_i N} d_1$

sont conjuguées, dans A_{01}^0 de substitutions de la forme $t_{01}m_{1\mu}$ et u_0d_4 , qui est dans A_{04} hors de A_{01}^0 et a trois multiplicateurs — 1, est conjuguée de l'une des deux $s_2:d_{04}s_4t_0$ ou $d_{04}s_4m_{1N}t_0$. Donc $s_{ic'}$ et $s_{ic'}m_{1N}$ sont conjuguées de s_i et s_im_{1N} ; ou $u_0d_{1,2,\ldots,N}$ est conjuguée de l'une des $s_2:ds_4t_0$ ou $ds_4m_{1N}t_0$. D'ailleurs $s_{ic'}u_0$ et $s_{ic'}m_{1N}u_0$, sont, d'après leur forme, conjuguées de s_it_0 et $s_im_{4N}t_0$.

Comme γ permute circulairement les q_{λ} où $\lambda \neq 0$ (II, 15), si s fixe un point de q_{λ} ($\lambda \neq c'$), on peut supposer que s est dans $\gamma^{-k}X_{c'}\gamma^k$. Les classes de s_2 de ce groupe sont représentées, en supposant d'abord ψ irréductible, par

Or, d'après le cas n = 4, toute s_2 réelle de la forme $u_0 t_1 m_{1h} m_{\nu x}$ est conjuguée, dans A_{01}^0 , d'une $t_{01} m_{1\mu}$; et toute s_2 réelle de la forme $u_0 m_{\nu x} d_1$ (qui a trois multiplicateurs — 1) est conjuguée, dans A_{01} d'une $d_{01} t_1 m_{1\mu}$. Donc σ_i et $\sigma_i m_{1N}$ sont conjuguées de s_i et $s_i m_{1N}$, τ_k est, suivant la parité

Soient d'abord ψ irréductible, et $\psi = cx^2 + bxy + c'y^2 = x_{y'}y_{y'}$ en posant (I, 24):

$$x_{y'} = \varkappa(x - \upsilon y'), \quad y_{y'} = \varkappa(x - \upsilon y'), \quad \varkappa \varkappa = c, \quad \psi(\upsilon, \tau) = 0.$$

Si $s = s_0 + us_1$, s_0 et s_1 étant réels, on désignera par $m_0s_0s_1$ l'action, sur x et y, de

$$m_{\gamma's} = \begin{vmatrix} x_{\gamma'}, & s x_{\gamma'} \\ y_{\gamma'}, & s^{-1} y_{\gamma'} \end{vmatrix} \quad (1, 25);$$

cette substitution est réelle toujours et seulement si $s^{-1} = \hat{s}$, c'est-à-dire $s^{\pi+1} = 1$. On vérifie alors les formules suivantes :

$$\begin{split} t_0 &= t_{\gamma'} m_{\gamma' q}, & q = x \dot{x}^{-1}, & u_0 &= t_0 m_{0,-1,-b/c'} = t_{\gamma'} m_{\gamma', qr}, & r = -1 - \frac{b}{c'} \circ. \\ & \gamma^{-1} t_i \gamma = t_i m_{it}, & \gamma^{-1} m_{i\lambda} \gamma = m_{i\lambda}, & (i = 1, \dots, \nu), \\ & \gamma^{-1} t_{\gamma'} \gamma = t_{\gamma'} m_{\gamma' \rho}, & \rho \equiv \xi \dot{\xi}^{-1}, & \gamma^{-1} m_{\gamma'} \xi \gamma = m_{\gamma' \xi}, & \gamma^{-1} u_0 \gamma = u_0 m_{\gamma' \rho}. \end{split}$$

⁽¹) Pour justifier les formules ou textes il convient d'abord de rappeler les définitions suivantes :

de k (68), conjuguée de ds_1t_0 ou de $ds_1m_{1N}t_0$; enfin σ'_i et σ'_im_{1N} sont évidemment conjuguées de s_it_0 et $s_im_{1N}t_0$.

Soit maintenant ψ réductible. On peut encore poser

$$x_{\nu} = \varkappa(x - \upsilon y), \quad y_{\nu} = \varkappa'(x - \upsilon' y), \quad \varkappa x' = c, \quad \psi(u, \tau) = \psi(u', \tau) = 0.$$

Les formules précédentes subsistent alors, en remplaçant s, s, ξ , ξ' respectivement par des quantités réelles s, s', ξ , ξ' vérifient ss' = 1, $\xi\xi' = \iota$; alors $s_0 + \upsilon s_4 = s$, $s_0 + \upsilon' s_1 = s^{-1}$, $r_0 + \upsilon r_4 = r_0 + \upsilon' r_1 = 1$; il faut, bien entendu, supposer que, dans le cas de ψ irréductible, on a toujours désigné les conjuguées de υ , s, ξ par υ , s, ξ , et non par υ^{π} , s^{π} , ξ^{π} .

72. Pour n > 4 (comme pour $n \le 4$), A' n'a de s_2 hors de A que si n est pair et ψ réductible : alors toute s_2 de A' hors de A est conjuguée de φ .

En effet, soit s une s₂ de A' hors de A. On voit d'abord, comme dans le cas de A, que s, nécessairement distincte de d, fixe au moins un point. Mais s ne peut fixer hors de q_0 . Car le diviseur de A' fixant ce point est aussi le diviseur de A fixant ce même point (II, 21, 22), et alors s serait dans A. Donc s fixe un point de q_0 ; et l'on peut supposer que s'est dans le diviseur $X' = \{X, m_{ii}^{-1}\gamma\}$ de A' qui fixe le point (1, o, ..., o) (II, 18). Donc s a la forme $(m_{ii}^{-1}\gamma)^{\rho}\alpha_{i}\varpi$, α_{i} étant dans A_{i} et ϖ dans P $(m_{i}, \text{ et } \gamma \text{ sont permutables à P et à } A_{i})$. On voit alors, comme dans le cas du groupe hermitien (17), que s est conjuguée de $s' = (m_{tt}^{-1} \gamma)^{\rho} \alpha_1$. En considérant l'action de cette substitution sur les variables x_1, y_1 , on voit que la condition $s^2 = 1$ exige que $\rho = \frac{k(\pi - 1)}{2}$, et que, en désignant par γι l'action de γ sur les variables de A₁, $(\gamma_1^{\rho}\alpha_1)^2 = 1$. Or ρ ne peut être égal à $\pi - 1$, sans quoi s', qui multiplie a par ι^{ρ} ou $\iota^{2\rho}$, serait dans A. Donc $\rho = \frac{\pi - 1}{2}$, et la substitution $\gamma_{\iota}^{\frac{\pi - 1}{2}} \alpha_{\iota}$ multiplie a_1 par -1. En admettant le théorème pour les valeurs de ninférieures à la valeur considérée, on voit que s n'existe que si n est pair et ψ réductible, et qu'alors, $\gamma_{\perp}^{\frac{\pi-1}{2}}\alpha_{\perp}$ étant conjuguée de $\gamma_{\perp}^{\frac{\pi-1}{2}}$, s est conjuguée de $d_1 \varphi$, que t_1 transforme en φ .

Si n est pair, les classes de s_2 de A ne sont pas toutes distinctes dans A', car, γ transformant B' en $B^2(\gamma^{-1}t_1\gamma = t_1m_{11})$, les deux classes représentées par s_jt_0 et $s_jm_{1N}t_0$, j étant l'un des nombres $1, \ldots, \gamma^l$ se

réunissent en une seule dans A'. Les classes représentées par s_i et s_im_{4N} étant, l'une dans B, l'autre dans A⁰ hors de B, restent distinctes dans A'. Si n est impair, on a A' = AI (I, p. 320); et les classes de A restent évidemment distinctes dans A'.

73. Cherchons les normalisants N, N', N°, P dans A, A', A°, B d'une $s_2s \neq d$. Je supposerai, dans ce qui suit, que $\psi = x^2 + c'y^2$, c' étant nul si n est impair. Il est clair que chacun des groupes P, N°, N, N' est normal dans tous ceux des autres qui le contiennent.

Soit d'abord s dans A^0 , et par suite de la forme $t_{0+}m_{1t}d_{1,...,r}$, l étant carré ou non. L'action de s sur x_1 et y_1 est $\begin{vmatrix} x_1, & -ly_1 \\ y_1, & -l^{-1}x_1 \end{vmatrix}$. Prenons, au lieu de x_1 et y_1 les variables $x_1' = x_1 + ly_1$, $y_1' = x_1 - ly_1$ qui canonisent cette action $\left(x_1 = \frac{x_1' + y_1'}{2}, y_1 = \frac{x_1' - y_1'}{2t}\right)$. Alors s multiplie par -1 les variables x_1' , x_2 , y_2 , ..., x_r , y_r , y, et les autres par 1. Posons

$$\alpha_{4} = \Sigma_{2}^{r} x_{i} y_{i} + \frac{x_{1}^{\prime 2}}{4 l} + c^{\prime} y^{2}, \qquad \alpha_{2} = \Sigma_{r+1}^{r} x_{i} y_{i} + x^{2} - \frac{y_{4}^{\prime 2}}{4 l},$$

d'où $a = a_1 + a_2$. Soient A_i le groupe de a_i , A_i^0 son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit (I, 39). Le normalisant de s dans $L_{x_1', y_1', x_n, y_n, \dots, x_n, y_n, x_n, y_n}$ est le produit direct de $L_{x_1', x_n, y_n, \dots, x_n, y_n, y_n}$ par $L_{y_1', x_{n+1}, y_{n+1}, \dots, x_n, y_n, x_n}(3)$. On a donc $N = A_1 A_2$, $N' = \{A_1 A_2, \gamma_1 \gamma_2\}$, γ_i étant une substitution qui multiplie a_i par ι ou ι^2 , suivant que c' est \neq 0 ou = 0, $N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\}$, τ_i étant une substitution quelconque de A_i hors de A_i^0 , $P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_1 \tau_2\}$, car, τ_1 et τ_2 étant dans A hors de B, et $A \mid B$ étant un g_4 non cyclique (68), $\tau_1 \tau_2$ est dans B.

Il est clair que l'on a $N^0 = \{P, \mu_1\}, N = \{N_0, \tau_1\}; \text{ et, comme}$

$$(N', N) = (A', A)(N', P) = (A', B)$$
 et $A' = BN'$.

Donc (E, 67) tout système de restes de B mod P est un système de restes de A' mod N', et toutes les conjuguées de s dans A' s'obtiennent en la transformant par B.

Remarque. — Comme il n'y a, dans A⁰, que deux classes à 2r multiplicateurs — 1, représentées par s et sm_{1N} , l'une de ces substitutions est conjuguée de $d_{1,\ldots,r}$. Soient en posant $a_1 = \sum_{i=1}^{r} x_i$, y_i , $a - a_1 = a_2$,

d'où

 A_i le groupe de a_i , A_i^0 son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit. On aura évidemment

$$N = A_1 A_2, \quad N' = \{N, \gamma\}, \quad N_0 = \{A_1^0 A_2^0, t_{01}\}, \quad P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, t_{01}\},$$

 μ_i étant une substitution quelconque de A_i^0 hors de B.

74. Supposons maintenant s dans A hors de A^o . Comme $s_i t_0$ et $s_i t_0 m_{1N}$ sont conjuguées dans A', on peut prendre, pour s, une s_2 quelconque de A ayant 2i-1 multiplicateurs -1. Soit $s=t_0 d_{1,...,\rho}$, $\rho=i-1$, $d_{1,...,\rho}=1$ si $\rho=0$, et posons $a_1=\sum_{i=1}^{\rho} x_i y_i+c'y^2$ si $c'\neq 0$ (alors $t_0=\begin{bmatrix}x,&x\\y,&-y\end{bmatrix}$), $a_1=\sum_{i=1}^{\rho} x_i y_i+x^2$, si c'=0 (alors $t_0=d_0=|x,-x|$) en convenant que $\sum_{i=1}^{\rho} x_i y_i=0$ pour $\rho\equiv 0$, et $a_2=a-a_1$. Soient A_i le groupe de la forme a_i , A_i^o son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit. On aura

$$N = A_1 A_2$$
, $N' = \{A_1 A_2, \gamma\}$, $N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\}$,

 τ_i étant une substitution quelconque de A_i hors de A^o , $P = \{B_1B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_4 \tau_2\}$, μ_i étant une substitution quelconque de A^{i0} hors de B_i .

On a, comme précédemment,

$$N' = \{ N, \gamma \} = \{ N^0, \tau_1, \gamma \} = \{ P, \mu_1, \tau_1, \gamma \},$$

 $(N', P) = (A', B)$ et $A' = BN'.$

Donc tout système de restes de B(mod P) est un système de restes de A(mod N'), et toutes les conjuguées de s dans A' s'obtiennent en transformant s par B.

Le normalisant de $t_1 m_{1l} d$, qu'il n'y a d'ailleurs lieu de considérer que pour n pair (67) est le même que celui de $t_1 m_{1l}$.

75. Soit enfin s dans A' hors de A, en supposant n pair et ψ réductible. On peut prendre $s = \varphi$ (72). Soit $\psi = x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$. Comme φ multiplie les x par -1 sans altérer les y, son normalisant dans $L_{x_i,\dots,x_{\nu'},\dots}$ est (3) le produit direct de $L_{x_i,\dots,x_{\nu'}}$ par $L_{y_i,\dots,y_{\nu'}}$. Soient α une substitution linéaire, β une substitution linéaire des y_i ; pour que $\alpha\beta$ conserve a, il faut et il suffit, on le vérifie aisément, que $\beta = \overline{\alpha}^{-1}$ (cf. E, 188).

Comme

$$\mathbf{L}_{x_1...x_{s'}} = \{\{\mathbf{U}_{x_1...x_{s'}} | x_1, \mathfrak{s}_{x_1}\}\},\,$$

on a

$$N = \{ \mathbf{V}_{1...\nu}(\pi), m_{1t} \} \quad (1, 40, 41),$$

que l'on peut désigner par $V_{1,\dots,\nu;\iota}(\pi)$. Comme $V_{1\dots\nu}(\pi)$ est dans B (I, 41), N est dans A°; donc N° = N. Il est clair que

$$P = \{ \mathbf{V}_{1,...,t}(\pi), m_{1t^2} \} = \mathbf{V}_{1,...,t,t^2}(\pi),$$

Enfin N', contenant évidemment γ , coı̈ncide avec $\{N, \gamma\}$. Comme précédemment, on a

$$N' = \{N, \gamma\} = \{N^0, \gamma\} = \{P, m_{\mu}, \gamma\}, \quad \text{d'où } A' = AN',$$

Donc tout système de restes de A (mod N) est un système de restes de A' (mod N'), et l'on obtient toutes les conjuguées de φ dans A' en la transformant par A. Mais ici A' est > A' N'. On a bien $\Lambda^0 = BN^0$; et, par suite, tout système de restes de B (mod P) est un système de restes de A' (mod N'). Il en résulte qu'on obtient toutes les transformations de φ par Λ^0 en la transformant par B.

76. Considérons \mathcal{C}' (ici n pourrait a priori être impair). Soit s une substitution de A' telle que (s) soit une s^2 de \mathcal{C}' , c'est-à-dire telle que s^2 soit dans I.

Si s^2 a la forme $[\iota^{2h}]$, $s[\iota^{-h}]$ est une s^2 de A'. Je dirai alors que (s) et sa classe sont de première espèce. Les s_2 de première espèce ne sont donc autres que les s_2 de A' où l'on regarde les variables comme homogènes. Il reste à étudier leur distribution en classes.

Il est clair d'abord que, si σ et σ' sont conjuguées dans A', (σ) et (σ') le sont dans \mathcal{C}' . Si σ et σ' sont deux s_2 non conjuguées de A', (σ) et (σ') ne peuvent être conjuguées dans \mathcal{C}' que si σ' est conjuguée dans A' d'une s_2 de la forme $\sigma[\iota^k]$, qui ne peut être que σd , et que, par suite, σ' ait autant de multiplicateurs — ι que σ a de multiplicateurs + ι . Si alors σ' et σd sont toutes deux dans B, ou toutes deux dans A^0 hors de B, ou toutes deux dans A hors de A^0 , ou toutes deux hors de A, elles sont conjuguées dans A' (67, 72).

77. Supposons d'abord n pair (et $\psi \neq o$). Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{i,N}$,

et $\sigma' = s_k$ ou $s_k m_{1N}$ $(i, k = 1, ..., \nu)$; pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ'), il faut d'abord que σ' ait n = 2i multiplicateurs -1; d'où 2k = n = 2i, ou $k = \nu' - i$. Si alors d est dans B, ds_i et $ds_i m_{1N}$ sont respectivement conjuguées de s_k et $s_k m_{1N}$. Si d est hors de B, ds_i et $ds_i m_{1N}$ sont respectivement conjuguées de $s_k m_{1N}$ et s_k ; et si alors n = 4h, donc ψ irréductible (I, p. 348), ds_h est conjuguée de $s_h m_{1N}$ et $ds_h m_{1N}$ de s_h , donc (s_h) de $(s_h m_{1N})$.

Soient $\sigma = s_i t_0$ et $\sigma' = s_k t_0$ $(i, k = 1, ..., \nu')$. Pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' , il faut d'abord que σ' ait n = 2i + 1 multiplicateurs — 1. donc 2k - 1 = n - 2i + 1 ou $k = \nu' - i + 1$.

Donc, pour n pair, on aura des représentants, non conjugués, de toutes les classes de s_2 de première espèce de \mathfrak{C}' en prenant les (s_i) et les $(s_im_{1:N})$ où $i \leq \frac{\gamma+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant pour n = 4h et ψ irréductible, (s_h) ou $(s_hm_{1:N})$; puis les (s_it_0) où $i \leq \frac{\gamma+1}{2} = \frac{n+2}{4}$; et enfin (φ) , si ψ est réductible.

78. Supposons n impair. Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{1N}$ et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{1N} t_0$. Pour que $d\sigma$ (qui est ici hors de A_0) soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ), il faut d'abord que σ' ait n-2i multiplicateurs — I; d'où 2k-1=n-2i ou $k=\nu-i+1$.

Alors ds_i est conjuguée de $s_k t_0$ ou de $s_k m_{1N} t_0$ qui sont, l'une dans un des Bⁱ, l'autre dans l'autre (68). Pour préciser, ds_i , qui est dans $\{B, d\}$, est conjuguée de $s_k t_0$, qui est dans $\{B, t_0\}$, toujours et seulement si $dt_0 = d_{1...v}$ est dans B, c'est-à-dire si — 1 est carré ou si v est pair.

Donc, pour n impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 de première espèce de \mathfrak{C}' en prenant les (s_i) et (s_im_{1N}) pour $i=1,\ldots,\gamma$.

79. Si s^2 a la forme $[\iota^{2h+1}]$, je dirai que (s) et sa classe sont de deuxième espèce. Il est clair qu'une $s_2(s)$ de seconde espèce ne peut être conjuguée d'une $s_2(s')$ de première espèce, car s' le serait d'une substitution de la forme $[\iota^k]s$ et, leurs carrés étant dans I, on aurait $s'^2 = [\iota^{2k}]s^2$, ce qui est impossible. Dans $\mathfrak{C}'(n, \pi^2)$, (s) est évidemment de première espèce. Donc (s) est conjuguée d'un et d'un seul

des représentants obtenus des classes de première espèce de $\mathfrak{A}'(n,\pi^2)$. Soit (σ) ce représentant.

Il y aura, dans $A'(n, \pi^2)$, une substitution ζ telle que, pour une valeur convenable de k, $\lfloor \iota'^k \rfloor \zeta^{-1} \sigma \zeta$ soit réelle et égale à s. Alors $s^2 = \lfloor \iota'^{2k} \rfloor$ et k doit être $\not\equiv$ 0 (mod $\pi + 1$), sans quoi (s) serait de première espèce dans $\mathcal{C}(n, \pi)$. Les multiplicateurs de s sont, comme ceux de $\lfloor \iota'^k \rfloor \sigma$, de la forme $\pm \iota'^k$; d'ailleurs, s étant réelle, ces multiplicateurs sont conjugués deux à deux. Donc il y a autant de multiplicateurs $-\iota'^k$ que de multiplicateurs ι'^k , et $-\iota'^k = \iota'^{\pi k}$. Donc n est pair et :

1° σ a autant de multiplicateurs — 1 que de multiplicateurs + 1;

 2° k a la forme $(2\lambda + 1)\frac{\pi + 1}{2}$, donc $i'' = i^{\lambda}i_{0}$, et, en remplaçant au besoin s par $[i^{\lambda}]s$, ce qui ne change pas (s), on peut supposer que $\lambda = 0$.

80. A chaque détermination de σ répond une seule classe de (s) dans $A'(n, \pi)$. Soient, en effet, $\zeta^{-1}\sigma\zeta = s[\iota_0^{-1}]$ et $\zeta^{-1}\sigma\zeta' = s'[\iota_0^{-1}]$. D'après ce qu'on a vu (73-75), $s'[\iota_0^{-1}]$ est une transformée de $s[\iota_0^{-1}]$ par $A(n, \pi^2)$ et non pas seulement par $A'(n, \pi^2)$. Il y a donc, dans $A(n, \pi^2)$, une substitution α telle que $s\alpha = \alpha s'$. Donc, avec les variables $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r, x_r, y_r$, les coefficients de s et s' étant réels, ceux de α sont proportionnels à des nombres réels. Soit $\alpha = [\rho]\alpha'$, α' étant dans \mathcal{C} , et ρ étant un facteur de proportionnalité. Comme ρ multiplie α par ρ^2 , α' la multiplie par ρ^{-2} et ρ^2 est réel. Donc α' est dans $A'(n, \pi)$, et, puisque $s\alpha = \alpha s'$, on a aussi $s\alpha' = \alpha' s'$, en sorte que s' est conjuguée de s dans $A'(n, \pi)$.

81. Tenant compte de la condition qui porte sur les multiplicateurs, et remarquant que ψ est réductible dans le champ \mathcal{C}' de $A'(n, \pi^2)$, on voit, d'après le n° 77, que la s_2 σ de $A'(n, \pi^2)$ ne peut avoir que les déterminations φ , s_h et $s_h m_{1t'}$ si n = 4h, $s_h t_0$ si n = 4h - 2. On peut d'ailleurs, si n = 4h, remplacer s_h par $t_{1...y'}$, qui a les mêmes multiplicateurs et est dans $B(n, \pi^2)$, et $s_h m_{1t'}$ par $t_{1...y'} m_{1t'}^{\pi} m_{2t'}^{\pi} \dots m_{yt'}^{\pi}$, qui a les mêmes multiplicateurs et est dans $A_0(n, \pi^2)$ hors de $B(n, \pi^2)$. On peut aussi, si n = 4h - 2, remplacer

 $s_h t_0$ par $t_{1...\nu'}$, ou encore par $t_{1...\nu'} m_{1\nu'}^{\pi} m_{2\nu'}^{\pi} \dots m_{\nu\nu'}^{\pi}$, qui ont les mêmes multiplicateurs et sont dans $A(n, \pi^2)$ hors de $A^0(n, \pi^2)$.

82. Soit $n = 2\nu' = 4h$. La détermination $s_h m_{\nu}$ est à rejeter $si \psi$ est réductible, et la détermination s_h est à rejeter $si \psi$ est irréductible.

Soit, en effet, $\zeta^{-1}\sigma[\iota_0]\zeta = s$, σ étant dans $A^0(n, \pi^2)$. Comme $\sigma[\iota_0]$, et de même s, multiplient a par ι , s, qui est dans $A'(n, \pi)$, est de la forme $\alpha\gamma$, α étant dans $A(n, \pi)$ et $\zeta^{-1}\sigma\zeta = \alpha\gamma[\iota_0^{-1}]$.

Soit d'abord ψ réductible; on a $\gamma[\iota_0^{-1}] = \Pi_1^{\nu} m_{i,\cdot_0}$; je désignerai ce dernier produit par μ_{ι_0} . Donc tout d'abord, $|\alpha| = 1$; donc α est dans $A^0(n, \pi)$. Comme $A^0(n, \pi)$ et μ_{ι_0} sont dans $B(n, \pi^2)$, σ y est aussi, donc a nécessairement la forme s_h . On peut d'ailleurs remplacer s_h par $t_{1...\nu}$, qui a les mêmes multiplicateurs, et est dans $B(n, \pi)$.

Soit maintenant ψ irréductible. Alors, en posant $i'\frac{\pi-1}{2}=j_0$, on a

$$\gamma[\iota_0^{-1}] = m_{-1}^{\nu'}/_{0} \Pi_1^{\nu} m_{i\iota_0}.$$

Comme ν est impair, et que j_0 et ι_0 , dont le produit est ι'^{π} , ont toujours des caractères quadratiques opposés, $\gamma[\iota_0^{-1}]$ est dans $A^0(n, \pi^2)$, donc $|\alpha| = |\sigma| = 1$ hors de $B(n, \pi^2)$. Donc α est dans $A^0(n, \pi)$, c'est-à-dire dans $B(n, \pi^2)$ et σ hors de $B(n, \pi^2)$; donc σ a la forme $s_h m_{\mu'}$.

83. Je dis, de plus, que la détermination φ n'est acceptable, pour $n = o \pmod{4}$, que si ψ est réductible, et, pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, que si ψ est irréductible. En effet, $\varphi[\iota_0]$ multiplie a par $-\iota$, et a pour déterminant $(-\iota)^{\vee}$. Sa conjuguée réelle $\zeta^{-\iota}\varphi[\iota_0]\zeta$ a donc la forme $\gamma_0\alpha$, α étant dans A, en posant $\gamma_0 = \gamma \frac{\pi+1}{2}$. Comme $|\gamma_0| = (-\iota)^{\vee}$, on $\alpha |\alpha| = \iota$, donc α est dans A⁰. La condition $(\gamma_0\alpha)^2 = [\iota]$ peut s'écrire

$$\gamma_0^{-1} \alpha \gamma_0 \alpha^{-1} = [\iota] \gamma_0^{-2} \alpha^{-2}.$$

Or le premier membre est dans $B(n, \pi)$, car α et $\gamma_0^{-1} \alpha \gamma_0$ sont dans A^0 et toutes deux en même temps dans B ou hors de B. Comme α^2 es dans B, $[\iota] \gamma_0^{-2}$ est donc dans B.

Or, si ψ est réductible, $[\iota]\gamma_0^{-2} = \Pi_{\iota}^{\nu} m_{\iota}^{-4}$, et cette substitution ne peut être dans B que si ν est pair ou $n \equiv 0 \pmod{4}$. Si ψ est irréduc-

tible $[\iota] \gamma_0^{-2} = \Pi_1^{\gamma} m_{ii}^{-1}$, et cette substitution ne peut être dans B que si ν est pair, ou $n \equiv 2 \pmod{4}$.

On remarquera que, si ψ est irréductible, l'action de $\varphi[\iota_0]$ sur x_{ν} et y_{ν} , est réelle (les multiplicateurs — ι_0 et ι_0 sont conjugués). Il suffit donc que l'on puisse trouver une substitution ζ , agissant sur x_{ι} , y_{ι} , ..., x_{ν} , y_{ν} seuls, telle que $\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta$ soit réelle. Or ν étant ici paire, on saura former une telle substitution ζ si l'on sait la former dans le cas où ψ est réductible.

84. D'après les résultats obtenus, $\mathfrak{C}'(n, \pi)$ peut avoir seulement : une classe de s_2 de seconde espèce lorsque $n \equiv o \pmod{4}$ et ψ irréductible, ou lorsque n est $\equiv 2 \pmod{4}$ et ψ réductible; deux classes de s_2 de seconde espèce lorsque n est $\equiv o \pmod{4}$ et ψ réductible ou lorsque n est $\equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible.

Pour tous les cas, on a vu (42) que $\mathcal{C}(2, \pi)$ contient (t_1, γ) , et l'on a $\overline{t_1 \gamma}^2 = [t]$. Donc le carré de

$$\Pi_1^{\nu'} t_i \gamma_i = t_{1...\nu'} \gamma$$

est [1], et $(t_{1...,\gamma}\gamma)$ est une s_2 de seconde espèce. Donc $\mathfrak{A}'(n,\pi)$ a toujours une classe de s_2 de seconde espèce que l'on peut représenter par $(t_{1...,\gamma'}\gamma)$. Elle est toujours hors de $\mathfrak{A}(n,\pi)$.

85. Pour les troisième et quatrième cas, il faut distinguer suivant que π est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$.

Soit $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. $\mathcal{C}(4, \pi)$ si ψ est réductible contient $(d_1 T_{12} t_{12})$ et $\overline{d_1 T_{12} t_{12}} = [d]$. Donc dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi_{1}^{\gamma/2}d_{2i-1}T_{2i-1,2i}t_{2i-1,2i} = \Theta_{\gamma} = \Theta$$

est [d] et (Θ) est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{C}(n, \pi)$. Comme (I, 28) $T_{12} = S_{121} d_2 t_{12}$, la substitution $T_{12} d_2 t_{12} = d_4 T_{12} t_{12}$ est dans B. Il en est donc de même de Θ .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta\alpha'=[\mu]t_{1...\nu'}\gamma,$$

 α' et μ étant dans $A'(n, \pi)$, car la substitution du premier membre

conserve la forme a, et la substitution du second membre la multiplie par $\mu^2 \iota$, toujours $\neq \iota$.

Dans le quatrième cas, si l'on pose

$$\Pi^{\gamma/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} = \Theta_{\gamma},$$

on a toujours $(\Theta_{\nu})^2 = \prod_{i=1}^{\nu} d_i$. Or on a vu que si Ψ est irréductible $\mathfrak{C}(2, \pi)$ contient $\left(\gamma \frac{\pi+1}{2}\right) = ([\iota_0]\varphi)$ et que $\overline{[\iota_0]\varphi}^2 = [\iota]$. Désignons alors en général par s_i l'action de s sur les variables x_i et y_i . On aura

$$\frac{1}{d_{2i-1}T_{2l-1,2i}t_{2i-1,2i}[\iota]_{2i-1}^{\frac{\pi+1}{4}}[\iota]_{2i-1}^{\frac{\pi+1}{4}}^{2i}} = [\iota]_{2i-1}[\iota]_{2i}.$$

Donc

$$\frac{1}{\Theta_{\nu} \Pi_{1}^{\nu} \left[\iota_{0} \right]_{\nu}^{\frac{\pi+1}{4}} \left[\iota_{0} \right]_{\nu} \varphi_{\nu}} = \left[\iota \right].$$

Or on voit que

$$[t_0]_{\gamma'}\varphi_{\gamma'} = \left[t^{\frac{\pi+1}{4}}\right]_{\gamma'}m_{\gamma'\varepsilon};$$

donc on a

$$\Theta_{\boldsymbol{\gamma}} \Pi_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{\gamma}} \bigg[\iota^{\frac{\pi+1}{k}} \bigg]_{i} . \big[\iota_{0} \big]_{\boldsymbol{\gamma'}} \varphi_{\boldsymbol{\gamma'}} \underline{=} \Theta_{\boldsymbol{\gamma}} \bigg[\iota^{\frac{\pi+1}{k}} \bigg] m_{\boldsymbol{\gamma'} \boldsymbol{\varepsilon}}$$

et, si $\Theta' = \Theta_{\nu} m_{\nu'\varepsilon}$, on a $\Theta'^2 = [d]$. Et (Θ') est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{C}'(n, \pi)$. Θ_{ν} est toujours dans B, donc Θ' toujours dans A° est dans B en même temps que $m_{\nu'\varepsilon}$, c'est-à-dire (I, 40) toujours et seulement si l'ordre 4 de ε divise $\frac{\pi+1}{2}$, c'est-à-dire si $\pi+1$ est $\equiv 0 \pmod{8}$.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta'\alpha' = [\mu]t_{1...\nu'}\gamma,$$

 α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n, \pi)$, car la substitution premier membre conserve la forme a et la substitution second membre la multiplie par $\mu^2 \iota$, toujours $\neq \iota$.

86. Soit $\pi \equiv \mathbf{1} \pmod{4}$. $\mathcal{O}(4, \pi)$, si Ψ est réductible, contient $d_1 T_{12} t_{12} \gamma$ et $\overline{d_1 T_{12} t_{12} \gamma}^2 = [-1]$. Donc, dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi_1^{\gamma'/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} \gamma_{2i-1} \gamma_{2i} = \Theta \gamma$$

est [-1] et $(\Theta \gamma)$ est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{O}'(n, \pi)$.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta\gamma\alpha'=[\mu]t_{1...\nu'}\gamma,$$

 α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n, \pi)$, car, en élevant au carré on aurait

$$[-\iota] = [\mu^2][\iota],$$

d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme a par une même quantité, il faudrait $\mu^2 = 1$.

Pour le quatrième cas, on voit que le carré de $\Theta_{\nu}\Pi_{i}^{\nu}\gamma_{i}[\iota]_{i}^{\frac{\pi-1}{4}}$ est $\Pi_{i}^{\nu}[\iota]_{i}$. Comme le carré de $[\iota_{0}]_{\nu}\varphi_{\nu}$, est $[\iota_{\nu}]_{i}$, le carré de

$$\Theta_{\nu} \mathbf{H}_{1}^{\nu} \gamma_{i} \left[\iota\right]_{i}^{\frac{\pi-1}{4}} \left[\iota_{0}\right]_{\nu} \varphi_{\nu}$$

est [1]. Si l'on pose

$$[\iota_0]_{\nu'}\phi_{\nu'} = \gamma_{\nu'} \left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right]_{\nu'}\alpha_{\nu'},$$

on voit que $|\alpha_{v'}| = 1$, donc $\alpha_{v'} = m_{v'o}$, et l'on doit avoir, en comparant les multiplicateurs de $x_{v'}$,

$$-\iota_0 = \iota' \iota^{\frac{\pi - 1}{4}} \rho \qquad \text{ou} \qquad \rho = \iota'^{\frac{\pi^2 - 1}{2} + \frac{\pi + 1}{2} - 1 - \frac{\pi^2 - 1}{4}} = \iota^{\frac{\pi - 1}{4}} \iota'^{\frac{\pi - 1}{2}},$$

et si $\Theta_{\nu} \gamma m_{\nu' \rho} = \Theta''$, on a $\Theta''^2 = d$, et (Θ'') est une ρ_2 de seconde espèce de $\mathcal{C}(n, \pi)$. Comme Θ'' est dans $A'' \gamma$, (Θ'') est hors de \mathcal{C} .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta''\alpha'=[\mu]t_{1...\nu'}\gamma,$$

 α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n,\pi)$, car, en élevant au carré, on aurait $[d] = [\mu^2][\iota]$ ou $\mu^2 = -\iota$; d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme a par une même quantité, il faudrait $\iota = \mu^2 \iota$, ou $\mu^2 = -\iota$.

Ainsi à la classe représentée par $(t_{1...,\gamma}\gamma)$, s'ajoute comme classe distincte : Si n est $\equiv o \pmod{4}$ et ψ , réductible, la classe représentée par $(\Theta) = (\prod_{i=1}^{\gamma/2} d_{2i-1} \prod_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i})$, si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, et par $(\Theta\gamma)$ si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$;

Si $n \equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible, la classe représentée par $\Theta' = \Theta_{\nu} m_{\nu/\epsilon}$, si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, et par $(\Theta'') = \Theta_{\nu} \gamma m_{\nu/\epsilon}$, $\rho = i^{\frac{\pi-1}{4}} i^{\frac{\pi-1}{2}}$, si $\pi \equiv i \pmod{4}$.

87. D'après le n° 79, les substitutions de A' (n, π) ainsi obtenues doivent être conjuguées, dans A' (n, π^2) , d'une des déterminations acceptables de $\sigma[\iota_0]$, à savoir $t_{1...\nu}[\iota_0]$, ou $t_{\nu}[\iota_0]\Pi_1^{\nu}t_im_{i\nu}^{\pi}$, (81, 82) ou $\varphi[\iota_0](84)$.

Or si l'on pose $a_i = x_i y_i$, $a_{\nu'} = \psi$, le groupe $\mathfrak{C}(2, \pi^2, a_i)$ (I, p. 284) contient pour $i = 1, \ldots, \nu'$ les substitutions (t_i) , $(t_i m_{i'}^{\pi})$, (γ'_i) que l'on peut écrire en posant $\frac{x_i}{y_i} = z$, $(\frac{1}{z})$, $(\frac{\iota'^{2\pi}}{z})$, $(\iota'z)$. Le groupe $\mathfrak{C}(2, \pi^2, a_i)$ contient $(t_i \gamma_i)$, et l'on a

$$(t_i\gamma_i) = \left(\frac{\iota}{z}\right)$$
 $(i=1,\ldots,\nu)$

et

$$t_{\nu'}\gamma_{\nu'} = \left(\frac{\iota}{z}\right)$$
 pour ψ réductible, $t_{\nu'}\gamma_{\nu'} = \left(\frac{\iota}{Jz}\right)$ pour ψ irréductible.

Les substitutions $\left(\gamma_i^{\frac{\pi+1}{2}}\right) = (\iota_0 z)$ et $\left(\gamma_i^{\frac{1-\pi}{2}}\right) = (j_0^{-1} z)$ transforment respectivement les pôles i et -i de (t_i) et ceux i'^{π} et $-i'^{\pi}$ de $(t_i m_{i'}^{\pi})$ en ceux ι_0 et $-i_0$ de $(t_i \gamma_i)$. Si $\zeta_i = \gamma_i'^{\frac{\pi+1}{2}}$, et $\zeta_i' = \gamma_i'^{\frac{1-\pi}{2}}$, on vérifie que

$$\zeta_{i}^{-1}t_{i}[\iota_{0}]_{i}\zeta_{i}=t_{i}\gamma_{i}$$

$$\zeta_{i}^{-1}t_{i}m_{t'}^{\pi}[\iota_{0}]_{i}\zeta_{i}=t_{i}\gamma_{i}$$

$$(i=1,\ldots,\nu).$$

Si ψ est réductible, on a aussi

$$\zeta_{\nu'}^{-1} t_{\nu'} [\iota_0]_{\nu'} \zeta_{\nu'} = t_{\nu'} \gamma_{\nu'}.$$

Si donc $\zeta = \gamma^{\frac{\pi+1}{2}}$, on a

$$\zeta^{-1} t_{1...\nu'} [\iota_0] = \zeta = t_{1...\nu'} \gamma.$$

Si ψ est irréductible, on a

$$\zeta_{\nu'}^{\prime-1} t_{\nu'} [\iota_0] \zeta_{\nu'}^{\prime} = t_{\nu'} \gamma_{\nu'}.$$

Si donc
$$\zeta' = \gamma^{\frac{1-\pi}{2}}$$
, on a

$$\zeta'^{-1}[\iota_0]t_{\nu'}\Pi_1^{\nu}t_im_{ii'}^{\pi}\zeta'=t_{1...\nu'}\gamma.$$

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 119

Si, en supposant $n \equiv o \pmod{4}$ et ψ réductible (83), on pose

$$a_i = x_{2i-1}y_{2i-1} + x_{2i}y_{2i}$$
 $(i = 1, ..., v^{1/2}),$

le groupe $\mathfrak{A}'(4, \pi^2, a_i)$ contient les substitutions (φ)

$$(d_{2i-1}T_{2i-1,2i}t_{2i-1,2i}) = (\theta_i) \qquad (\theta_i\gamma_{2i-1}\gamma_{2i})$$

qui, si l'on pose $\frac{x_2 t-1}{y_2 t} = u$, répondent respectivement aux substitutions (-u), $\left(\frac{-1}{u}\right)$ et $\left(\frac{-t}{u}\right)$ de $\left[\mathfrak{C}'(4, \pi^2, a_i)\right]$ (48, 51). Leurs pôles respectifs sont o et ∞ , ε et $-\varepsilon(\varepsilon^2 = -1)$, η et $-\eta(\eta^2 = -1)$.

Or $\mathfrak{U}(2,\pi^2)$ contient la substitution $\ell_{\rho} = \left(\frac{-\rho u - \frac{1}{2}}{u - \frac{1}{2\rho}}\right)$ qui transforme

o et ∞ en ρ et $-\rho$; et dans la correspondance de $\mathfrak{U}(\mathbf{2},\pi^2)$ à $B(4,\pi^2,a_i)$ (48; I, 40) à \mathcal{L}_{ρ} répond

$$\zeta_{i\varrho} = \mathbf{U}_{2i-1,2i,1-1/2\varrho} \mathbf{W}_{2i-1,2i,1} \mathbf{U}_{2i-1,2i,1-\varrho}.$$

On vérifie alors que, si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$,

$$\zeta_{i\epsilon}^{-1} \varphi_i [\iota_0]_i \zeta_{i\epsilon} = \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]_i d_{2i-1,2i} \theta_i$$

et que, si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$,

$$\zeta_{i\eta_1}^{-1} \varphi_i[\iota_0]_i \zeta_{i\eta_1} = \left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right] \Theta_i \gamma_{2l-1} \gamma_{2l};$$

si donc on pose $\Theta = \Pi_1^{\nu/2}\theta_i$, et suivant les cas, $\zeta = \Pi_1^{\nu/1}\zeta_{i\epsilon}$ ou $\Pi_2^{\nu/2}$ in, on a

$$\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta=\left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]d\Theta$$
.

ou

$$\zeta^{-1} \phi \left[\iota_0\right] \zeta = \left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right] \Theta \gamma.$$

88. Cherchons maintenant les s_2 de $\mathfrak{A} = \frac{A''}{I} = \frac{A}{D}$. Une substitution (s) de \mathfrak{A} est une s_2 toujours et seulement si s^2 est dans D. Je dirai que (s) et sa classe sont propres si $s^2 = \mathfrak{l}$, impropres si $s^2 = d$. Une s_2 propre est toujours de première espèce; une s_2 impropre est de première ou de seconde espèce suivant que $\pi \equiv \mathfrak{l}$ ou $3 \pmod{4}$. Une s_2 propre (s) et une s_2 impropre (s') ne peuvent être conjuguées

dans α , car s', qui est d'ordre 4 devrait être conjuguée de $d^{\epsilon}s$ qui est d'ordre 2.

- 89. D'après leur définition, les s_2 propres de \mathfrak{C} ne sont autres que les s_2 de A où l'on regarde les variables comme homogènes. Il reste à étudier leur distribution en classes.
- (σ') est conjuguée de (σ) dans α toujours et seulement si σ' est conjuguée, dans A, de σ ou de $d\sigma$. Or pour que deux s_2 soient conjuguées dans A (67, 68) il faut et suffit qu'elles aient les mêmes multiplicateurs, et qu'elles soient toutes deux dans B, ou toutes deux dans a0 hors de B, ou toutes deux dans a1, ou toutes deux dans a2.
- 90. Supposons d'abord n pair (et $\psi \neq 0$). Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{iN}$, et $\sigma' = s_k$ ou $s_k m_{iN}$. Comme au n° 77, pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ), il faut d'abord que $k = \nu' i$. Si alors d est dans d, et $ds_i m_{iN}$ sont respectivement conjuguées de s_k et $s_k m_{iN}$. Si d est hors de d, d, et d, d, sont respectivement conjuguées de d, d, et d, et d, et d, donc d irréductible (I, p. 348), d, est conjuguée de d, d, donc (d) de (d).

Soient $\sigma = s_i t_0$ ou $s_i m_{1N} t_0$, et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{1N} t_0$ $(i, k = 1, ..., \nu')$. Comme au no 77, pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' , il faut d'abord que $k = \nu' - i + 1$. Si alors d est dans B, $ds_i t_0$ et $s_k t_0$, toutes deux dans $\{B, t_0\}$, sont conjuguées, $ds_i m_{1N} t_0$ et $s_k m_{1N} t_0$, toutes deux dans $\{B, t_0 m_{1N}\}$ sont conjuguées. Si d est hors de d, $ds_i t_0$ et $ds_i m_{1N} t_0$ sont respectivement conjuguées de $s_k m_{1N} t_0$ et $s_k t_0$; et, si alors $s_k t_0 = s_k t_0$ est conjuguée de $s_k m_{1N} t_0$, donc $s_k t_0$ de $s_k t_0$.

Donc, pour n pair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de $\mathfrak A$ en prenant : les (s_i) et (s_im_{iN}) où $i \leq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant, pour n = 4h et ψ irréductible, (s_h) ou (s_hm_{iN}) ; puis les (s_it_0) et $(s_im_{iN}t_0)$, où $i \leq \frac{\nu'+1}{2} = \frac{n+2}{4}$, en supprimant, pour $n = 4h^{-2}$ et d hors de B, (s_ht_0) ou $(s_hm_{iN}t_0)$.

91. Supposons n impair. Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{in}$, et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{in} t_0$. Alors $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$ (I, p. 320). Il suffit donc de répéter l'énoncé du n° 78. Pour que $d\sigma$ (qui est ici hors de A°) soit conjuguée de σ' (donc aussi

 $d\sigma'$ de σ), il faut d'abord (78) que $k = \nu - i + 1$. Alors ds_i est conjuguée de $s_k t_0$ ou de $s_k m_{in} t_0$, qui sont, l'une dans un des B^i , l'autre dans l'autre (68). Pour préciser, ds_i , qui est dans $\{B, d\}$, est conjuguée de $s_k t_0$, qui est dans $\{B_1 t_0\}$ toujours et seulement si $dt_0 = d_{1,\dots,\nu}$ est dans B, c'est-à-dire si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, ou si ν est pair.

Donc, pour n impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de \mathfrak{C} en prenant les (s_i) et (s_im_{in}) pour $i=1,\ldots,\nu$.

92. Soit (s) une s_2 impropre de α .

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. Alors $[\varepsilon^{-1}]s = s_0$ est une s_2 de A' hors de A. Elle n'existe (72) que si n est pair et ψ réductible, et elle est alors conjuguée de φ dans A'. Donc s est conjuguée, dans A'= $\{A, \gamma\}$ de $[\varepsilon]\varphi = d\Pi'_1m_{i\varepsilon} = d\mu$. Comme γ est permutable à μ , s est conjuguée de $d\mu$ dans A, donc (s) de (μ) dans α . En ce cas, α contient donc une classe et une seule de s_2 impropres, que l'on peut représenter par (μ) .

Soit $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. Alors (s) est une s_2 de seconde espèce de \mathfrak{C}' . Elle n'existe (79) que pour n pair, et (86) est conjuguée, dans \mathfrak{C}' , de (Θ) si n est $\equiv 0 \pmod{4}$ et ψ réductible, de $(\Theta') = (\Theta_{\nu} m_{\nu \varepsilon})$, si n est $\equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible. Or on vérifie directement que

$$\gamma_{2i}^{-1} \gamma_{2i-1}^{-1} \theta_i \gamma_{2i-1} \gamma_{2i} = m_{2i-1,t}^{-1} \theta_i m_{2i-1,t};$$

donc, si l'on pose $\mu = \prod_{i=1,t}^{\gamma/2} m_{2i-1,t}$ pour $n \equiv 0 \pmod{4}$ et $\mu' = \prod_{i=1,t}^{\gamma/2} m_{2i-1,t}$ pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, on a

$$\gamma^{-1}\Theta\gamma = \mu^{-1}\Theta\mu$$

et, γ comme μ' étant permutable à $m_{\nu \epsilon}$,

$$\gamma^{-1}\Theta'\gamma = \mu'^{-1}\Theta'\mu'$$
.

Ainsi toutes les conjuguées de Θ ou Θ' dans $A' = \{A, \gamma\}$ s'obtiennent en transformant Θ ou Θ' par A. Donc les s_2 impropres de \mathfrak{A} forment une seule classe, que l'on peut représenter, suivant les cas, $par(\Theta)$ ou (Θ') .

93. Comme A^o contient ou non D suivant que n est pair ou impair, si n est impair $\mathfrak{A}^o = A^o$; et, si n est pair $\mathfrak{A}^o = \frac{A^o}{D}$.

Soit donc n pair. Les s₂ propres de \mathfrak{C}^0 ne sont autres que les s₂ de A^0 Ann. Éc. Norm., (3), Ll. – Fasc. 1.

où l'on regarde les variables comme homogènes; et l'on voit, comme pour \mathfrak{A} , que l'on obtient des représentants non conjugés de toutes les classes de s_2 propres de \mathfrak{A}° en prenant les (s_i) et $(s_i m_{iN})$ où $i \leq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant, pour n = 4h et ψ irréductible (s_h) ou $(s_h m_{iN})$.

94. Soit (s) une s_2 impropre de \mathfrak{A}^0 .

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod 4$. Comme pour $\mathfrak{C}(92)$, (s) n'existe que si ψ est réductible, et ds est conjuguée de μ (92) dans $A = \{A^0, t_1\}$. Or t_1 transforme m_{1z} en $m_{1,-z} = d_1 m_{1z}$, donc μ en $d_1 \mu$. Donc ds est conjuguée, dans A^0 , de μ ou de $d_1 \mu$. Or considérons en général les substitutions de A qui transforment μ en $d_{1...k}\mu$, ou φ en $d_{1...k}\varphi$. Elles sont de la forme $\sigma t_{1...k}$, σ étant permutable à φ , donc de la forme $\alpha\beta$, α étant dans $\Gamma_{x_1...x_{y'}}$ et β dans $\Gamma_{y_1...y_{y'}}$. Pour que $\alpha\beta$ soit dans A, il faut et suffit que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{\nu'} \alpha_{ih} \beta_{ik} = \begin{cases} o & \text{si} \quad k \neq h, \\ 1 & \text{si} \quad k = h, \end{cases}$$

en sorte que $|\sigma| = |\alpha| |\beta| = 1$, et σ est dans A° . Ainsi les substitutions de A qui transforment μ en $d_{1...k}\mu$ sont dans A° ou hors de A° , en même temps que $t_{1...k}$, c'est-à-dire suivant que k est pair ou impair.

Si donc $n \equiv 0 \pmod{4}$, ni $d_1\mu$, ni $dd_1\mu = d_{2...\nu}\mu$ ne sont conjuguées de μ dans A^0 , donc (μ) et $(d_1\mu)$ représentent deux classes distinctes de \mathfrak{C}^0 . Mais si $n \equiv 2 \pmod{4}$, $dd_1\mu$ est conjuguée de μ dans A^0 , donc (d, μ) de (μ) dans \mathfrak{C}^0 .

95. Soit maintenant $\pi \equiv 3 \pmod{4}$.

Alors (92), (s) est conjuguée, dans $\alpha = \{\alpha^0, t_1\}$:

de (0), si n est \equiv o (mod 4) et ψ réductible;

de $(\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon})$, si n est $\equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible.

Dans le premier cas, (s) est conjuguée dans \mathfrak{C}^0 , dans (Θ) ou $(t_1 \Theta t_1) = (\Theta t_{12})$. Or, dans ce cas, les s_2 impropres de

$$\mathfrak{A}^{0}(n,\pi^{2}) > \mathfrak{A}^{0}(n,\pi)$$

forment [d'après le nº 94, π^2 étant $\equiv 1 \pmod{4}$] deux classes distinctes. Donc les s_2 impropres de $\mathfrak{CC}^0(n, \pi)$ forment deux classes distinctes, que l'on peut représenter par (Θ) et (Θt_{12}) .

Dans le deuxième cas, les s_2 impropres de $\mathfrak{C}^0(n, \pi^2)$ ne forment qu'une classe (94). Il y a donc, dans $A^0(n, \pi^2)$, une substitution α_0 telle que $D\Theta_{\nu}t_{12}m_{\nu/\epsilon}\alpha_0 = D\alpha_0\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon}$. Si l'on prend pour variables x et y au lieu de x_{ν} et y_{ν} , il résulte de cette relation que les coefficients de α'_0 sont proportionnels à des nombres réels, en sorte que $\alpha^0 = [\rho]\alpha'$, α' étant dans $A'(n, \pi)$, et ρ désignant un facteur de proportionnalité. Comme α' multiplie la forme a par ρ^{-2} , ρ^2 est réel. Si ρ^2 est carré dans \mathcal{C} , ρ est réel, donc α'_0 dans $A^0(n, \pi)$ et $(\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon})$ est conjugué dans $\mathfrak{C}^0(n, \pi)$ de $\Theta_{\nu}t_{12}m_{\nu/\epsilon}$. Si ρ^2 n'est pas carré dans \mathcal{C} , remarquons que $m_{2i-1,\epsilon}m_{2i,\epsilon}^{-1}$ est permutable à $d_{2i-1}T_{2i-1,2i}t_{2i-1,2i}$, que, pour $k=t\pm 1$, et $j=1,\ldots,\nu'$, $m_{j,\epsilon}^k$ est dans $B(n,\pi^2)$ (ϵ est carré dans \mathcal{C}') et que

$$\left[\varepsilon\right]_{j}^{-1}m_{j,\varepsilon}^{k} = \left|\begin{array}{cc} x_{j} & \varepsilon^{-1+k}x_{j} \\ y_{j} & \varepsilon^{-1-k}y_{j} \end{array}\right|$$

est toujours réel. Si donc on pose

$$\sigma_0 = \prod_{1}^{\gamma/2} m_{2i-1,\varepsilon} m_{2i,\varepsilon}^{-1} m_{\gamma',\varepsilon},$$

 σ_0 est permutable à $\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon}$ et dans $B(n, \pi^2)$, donc $\alpha_0\sigma_0$ est dans $A^0(n, \pi^2)$ et transforme $\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon}$ comme α_0 . D'ailleurs $\sigma_0 = [\epsilon]\sigma'$, σ' étant dans $A'(n, \pi)$; donc $\alpha_0\sigma_0 = [\epsilon\rho]\alpha'\sigma'$. Ici $\epsilon\rho' = -\rho^2$ est carré dans C; donc $\epsilon\rho$ est réel, donc $\alpha_0\sigma_0$ dans $A^0(n, \pi)$, et $(\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon})$ est conjugué, dans $C^0(n, \pi)$ de $(\Theta_{\nu}t_{12}m_{\nu/\epsilon})$. Donc les s_2 impropres de $C^0(n, \pi)$ forment une seule classe, que l'on peut représenter par $(\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon})$.

96. Si d est hors de B [ce qui a toujours lieu pour n impair (I, 39)], on a $\mathfrak{B} \equiv B$. Supposons donc d dans B, donc n pair et (I, 39):

ou bien $n \equiv o \pmod{4}$ et ψ réductibles;

ou bien $n \equiv 2 \pmod{4}$, et soient $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ et ψ réductible, soient $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ et ψ irréductible.

Les s_2 propres de \mathfrak{B} ne sont autres que les s_2 de B où l'on regarde les variables comme homogènes, et l'on voit, comme pour \mathfrak{A} , que l'on obtient des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de \mathfrak{B} en prenant les (s_i) où $i \leq \frac{\nu'}{2} = \frac{n}{4}$.

97. Soit (s) une s_2 impropre de \mathcal{B} .

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, Comme pour $\mathfrak{C}(92)$, (s) n'existe que si ψ est réductible et, dans $A^{\circ} = \{B, m_{iN}\}$, ds est conjuguée de μ si $n \equiv 2 \pmod{4}$, de μ ou de $d_{i}\mu$ (92) (ni μ ni $d\mu$ n'étant conjuguées de $d_{i}\mu$) si $n \equiv 0 \pmod{4}$ (94). Comme m_{iN} est permutable à μ et $d_{i}\mu$, ds sera conjuguée, par B, de μ , si $n \equiv 2 \pmod{4}$, de μ ou de $d_{i}\mu$, si $n \equiv 0 \pmod{4}$. Si donc $n \equiv 0 \pmod{4}$, μ et $d_{i}\mu$ sont dans B, les s_{2} impropres de \mathfrak{B} forment deux classes, que l'on peut représenter par (μ) et $(d_{i}\mu)$.

Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, comme $\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\pi-1}{4}}$ n'est carré que si $\pi \not= 1 \pmod{8}$, μ n'est pas de B, et \mathcal{B} n'a pas de s_2 impropres. Mais $si \pi \equiv 1 \pmod{8}$, μ est dans B, les s_2 impropres de \mathcal{B} forment une seule classe, que l'on peut représenter par (μ) .

98. Soit maintenant $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. Alors (s) est de deuxième espèce et n'existe, dans $\mathfrak{C}^0 = \{ \mathfrak{G}, (d_4) \}$, que dans les deux cas suivants (95):

si n est \equiv o (mod 4) et ψ réductible; alors (s) est conjuguée de (Θ) ou de (Θt_{12}) représentant deux classes distinctes);

si n est $\equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible; alors (s) est conjuguée de $(\Theta_{\nu}m_{\nu\varepsilon})$.

Soient $n \equiv 0 \pmod{4}$ et ψ réductible. La substitution d_1 transforme $d_4 T_{12} t_{12} = S_{1,2,-1}$ et $d_4 T_{42} = R_{12,4}$ en $d_{42} S_{1,2,-1} d_{12} R_{124}$, donc Θ en $d_{42} \Theta$ et Θt_{12} en $d_{42} \Theta t_{12}$ Or (58) si $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ désigne une matrice de $U(2, \Pi)$ ($\lambda^2 + \mu^2 = -e$), à une substitution de U_{x_4,y_2} de matrice β répond dans W (I, 40) une substitution transformant $S_{1,2,-4}$ en $d_{42} S_{1,2,-}$; et à une substitution de U_{x_4,x_2} , répond, dans V (I, 40), une substitution transformant R_{424} en $d_{42} R_{424}$. Ces substitutions étant dans $R_{42} = VW$, $d_{42} \Theta$ et $d_{42} \Theta t_{42}$ sont respectivement conjuguées, dans $R_{42} = VW$, des $R_{42} = VW$, d

99. Soient $n \equiv 2 \pmod{4}$ et ψ irréductible; d_1 transforme $\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon}$ en $d_{12}\Theta_{\nu}m_{\nu/\epsilon}$. Or ces deux substitutions sont transformées l'une dans l'autre par la substitution de \mathbf{V} indiquée au numéro précédent; elles

sont donc conjuguées dans B; et les s_2 impropres de \mathcal{B} forment alors une seule classe, que l'on peut représenter par $(\Theta_{\gamma} m_{\gamma'z})$.

- 100. Soit (s) une s_2 quelconque de \mathcal{C}' ; désignons par $\mathcal{I}, \mathcal{I}', \mathcal{I}^0$, \mathcal{D} ses normalisants respectifs dans $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}^0, \mathcal{B}$. $Si(\sigma)$ est dans \mathcal{I}', σ n'étant pas dans N', on doit avoir $\sigma^{-1}s\sigma = [\iota^k]s$. Élevant au carré et remarquant que s^2 est dans I', on obtient $\iota^{2k} = 1$, d'où $\iota^k = -1$. Donc σ transforme s en ds et σ^2 est dans N'.
- 101. Soit (s) de première espèce. On peut supposer que $s^2 = 1$ (76) et (77, 78) que $s = s_r = t_{01} m_{1l} d_{1...r}$, ou $s = s_r m_{1l}$, ou $s = \dot{s}_r t_0$ si n est pair ou $s = \varphi$ si n est pair, Ψ réductible.

Dans tous les cas, pour que dt soit conjuguée de s, il faut que s ait autant de multiplicateurs -1 que de multiplicateurs +1, donc que n soit pair. Alors σ ne peut exister que pour φ , si ψ est réductible, ou, si n=4h pour s_h ou s_hm_{12} qui ont 2h multiplicateurs -1 ou, si n=4h-2, pour s_ht_0 qui ont 2h-1 multiplicateurs -1. Dans tous les autres cas, les normalisants de (s) sont ceux de s où l'on regarde les variables comme homogènes.

102. Soient n = 4h et $s = t_{01} m_{11} d_{1...h}$. Prenons les mêmes variables $x'_1, y'_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, x, y$ qu'au n° 73, supposons que

$$\psi = x^2 + c'y^2,$$

et considérons encore les formes

$$a_1 = \Sigma_2^h x_i y_i + \frac{{x'_1}^2}{4l} + c' y^2, \qquad a_2 = \Sigma_{n+1}^v x_i y_i + x^2 - \frac{{y'_1}^2}{4l}.$$

Comme s multiplie par — 1 les variables de a_1 , et par 1 celles de a_2 , pour que σ transforme s en ds, il faut qu'elle remplace les variables de a_1 par des fonctions des seules variables de a_2 , et les variables de a_2 par des fonctions des seules variables de a_1 . De plus pour que σ soit dans A', c'est-à-dire transforme a en fa, il faut et suffit qu'elle transforme a_1 en fa_2 et a_2 en fa_4 . Si donc A_1 et A_2 désignent les groupes respectifs des formes a_4 et a_2 , on aura $\sigma^{-1}A_1\sigma = A_2$; donc A_1 et A_2 sont de même ordre. Il faut et suffit

pour cela (I, 27) que les discriminants des deux formes

$$\psi_1 = \frac{x_1'^2}{4l} + c'y^2$$
 et $\psi_2 = x^2 - \frac{y_1'^2}{4l}$

aient même caractère quadratique. Donc — c' est carré et ψ réductible, et l'on peut supposer c' = -1. Mais alors (s_h) et $(s_h m_{12})$ sont conjuguées dans \mathfrak{C}' (77). On peut donc toujours supposer que $s = t_{01} d_{1...h}$, donc l = 1.

Les variables x'_1 et y'_1 sont alors définies par

$$x'_1 = x_1 + y_1, \quad y'_1 = x_1 - y_1.$$

On peut remplacer x et y par $x_{y'} = x + y$ et $y_{y'} = x - y$, ce qui donne $t_0 = t_{y'}$ (I, p. 322), donc $s = t_{1y'}d_{1...h}$. On voit alors que la substitution

$$\sigma = \mathrm{T}_{12} \mathrm{T}_{2,h+2} \mathrm{T}_{3,h+3} \ldots \mathrm{T}_{h2},$$

qui est dans B, transforme s en ds.

Ainsi, pour n = 4h, si ψ est réductible, les normalisants de (s_h) sont $\Re = (N + \sigma P) \Re' = (N' + \sigma N'), \Re = (N^0 + \sigma N^0), \Re = (P + \sigma P).$ Si ψ est irréductible, les normalisants de s_h sont (N). (N'), (N^0) , (P).

403. Soit n=4h-2. Comme au n° 74 prenons pour s une s_2 quelconque de A' ayant 2h-1 multiplicateurs -1, soit $s=t_0\,d_{1,\ldots,h-1}$, et posons

$$a_1 = \sum_{i=1}^{h-1} x_i y_i + c' y^2, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{h} x_i y_i + x^2.$$

Comme s multiplie par -1 les variables de a_1 et par 1 celles de a_2 , pour que σ transforme s en ds, il faut qu'elle remplace les variables de a_1 par des fonctions des seules variables de a_2 , et les variables de a_2 par des fonctions des seules variables de a_4 . De plus, pour que σ soit dans A_1 , c'est-à-dire transforme a en fa, il faut et suffit qu'elle transforme a_1 en fa_2 et a_2 en fa_4 . Donc les discriminants $(-1)^{h-1}2c'$ de a_4 et $(-1)^{h-1}f^{2h+1}2$ de fa_2 ont même caractère quadratique. Donc f a le caractère quadratique de c'.

Si c' est carré, on peut faire $c'=\mathfrak{r}$. On voit alors que la substitution

$$\sigma = \mathbf{T}_{1,h}\mathbf{T}_{2,h+1}\dots\mathbf{T}_{h-1,\nu} \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 127

qui est dans A°, transforme s en ds. On peut prendre $x_v = x - \varepsilon y$, $y_v = x + \varepsilon y$, Alors $\begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = m_{v_z}$, et σ est dans B toujours et seulement si $\pi \equiv 1$ ou $7 \pmod{8} (I, 32)$. Si cette condition n'est pas remplie, on remplacera σ par $\sigma \mu_1$, μ_1 étant une substitution quelconque de A° hors de B₁ (74), par exemple m_{12} .

Ainsi, pour n = 4h - 2 et c' = 1, les normalisants de $(t_0 d_{1,...,h-1})$ sont $\Im \mathcal{C} = (N + \sigma N)$, $\Im \mathcal{C}' = (N' + \sigma N')$, $\Im \mathcal{C} = (N' + \sigma N^0)$, $\mathfrak{L} = (P + \sigma P)$ en prenant

$$\sigma = \mathbf{T}_{1,h} \mathbf{T}_{2,h+1} \dots \mathbf{T}_{h+1,\nu} m_{\nu \in m_{1t}^{k}},$$

$$k = \begin{cases} o & \text{si } \pi \equiv 1,7 \\ 1 & \text{si } \pi \equiv 3,5 \end{cases} \pmod{8}.$$

Soit c' non carré. Si $\pi \equiv I \pmod{4}$, ψ est irréductible, et d est hors de B (I, p. 348). Si $\psi \equiv 3 \pmod{4}$, ψ est réductible et d est hors de B (ibid.). Donc, si c' est non carré, d est toujours hors de B, $A^0 = BD$ (I, 39) et $\mathcal{B} = \frac{BD}{D} = \frac{A^0}{D} = \mathcal{C}_0$. Alors σ , multipliant la forme a par un non carré est dans A' hors de A'' (I, 24); donc (σ) sera dans \mathcal{C}' hors de \mathcal{C} .

Soient τ la substitution, hors de A', qui multiplie chaque x par c' sans altérer les y, et σ la substitution précédemment trouvée.

On voit que $\sigma \tau$ transforme s en ds et la forme a en c'a.

Ainsi pour $n = l_1 h - 2$ et c' non carré, les normalisants de $t_0 d_{1,...,h-1}$ sont $\mathfrak{N} = (N)$, $\mathfrak{N} = (N' + \sigma \tau N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0) = \mathfrak{L}$.

104. Soient $s = \varphi$, et ψ réductible. Comme

$$\varphi = \begin{vmatrix} x_i & -x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$$
 $(i = 1, ..., \nu'),$

on voit que $t_{1...,\nu}$ transforme φ en $d\varphi$ et est dans B ou dans A hors de A⁰ suivant que ν' est pair ou impair. Si donc ν' est pair les normalisants $de(\varphi)$ sont $\partial \mathcal{U} = (N + \sigma N)$, $\partial \mathcal{U} = (N' + \sigma N')$, $\partial \mathcal{U} = \partial \mathcal{U}[N^0 = N(75)]$, $\mathfrak{Z} = (P + \sigma P)$, $\sigma = t_{1...,\nu}$. Si ν' est impair, toute substitution σ de A transformant φ en $d\varphi$, étant dans $t_{1...,\nu}N < t_{1...,\nu}A^0$, est nécessairement hors de A₀. Si donc ν' est impair, les normalisants de (φ) sont $\partial \mathcal{U} = (N + \sigma N)$, $\partial \mathcal{U} = (N' + \sigma N')$, $\partial \mathcal{U} = (N)$, $\mathcal{Z} = (P)$.

104 bis. Soit (s) de deuxième espèce. On peut supposer (86) que $s = t_{1...v'}\gamma$, ou θ , si n est \equiv 0 (mod 4), ψ réductible, et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, ou $(\theta\gamma)$, si n est \equiv 0 (mod 4), ψ réductible et $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, ou $\theta_{\nu} m_{\nu'2}$. si n est $\equiv 2 \pmod{4}$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, ou $(\theta_{\nu} \gamma m_{\nu'p})$, si n est $\equiv 2 \pmod{4}$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 1 \pmod{4}$.

Les normalisants \mathcal{H} , \mathcal{H}' \mathcal{H}^0 , \mathcal{R} de (s) dans les groupes \mathcal{H} , \mathcal{H}' , \mathcal{H}^0 , \mathcal{G} , contiennent les groupes (N), (N'), (N^0) , (P) obtenus en regardant les variables comme homogènes dans les normalisants de s dans A, A', A^0 , B. Si, de plus, ces groupes contiennent une substitution σ transformant s en ds (100), les normalisants de (s) contiennent en outre les complexes (σN) , $(\sigma N')$, (σN^0) , (σP) .

105. Soit $s = t_{1...\nu}\gamma$. Supposons ψ réductible. L'action s_i de s sur x_i et y_i $(i = 1, ..., \nu)$ est $\begin{vmatrix} x_i & i y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}$. Si l'on prend les variables

$$x_i' = x_i + \iota_0 y_i, \quad y_i' = \dot{x}_i' = x_i - \iota_0 y_i,$$

 s_i prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x_i' & \iota_0 x_i' \\ y_i' & -\iota_0 y_i' \end{vmatrix}$, et $x_i y_i$ devient $\frac{1}{4\iota_0} (x_i'^2 - y_i'^2)$. Si donc on pose

$$a_1 \! = \! \frac{1}{4 t_0} \sum_{i}^{\gamma'} \! x_i'^2, \qquad a_2 \! = \! - \frac{1}{4 t_0} \sum_{i}^{\gamma'} \! y_i'^2 \! = \! \dot{a}_1,$$

s multiplie les variables de a_1 par ι_0 , et celles de a_2 par $-\iota_0$. Dans $A(n, \pi^2)$, le normalisant de s est donc le produit direct $A(\nu', \pi^2, a_1)A(\nu', \pi^2, a_2)$. Comme $\gamma'_i = x'_i$, les substitutions de l'un de ces groupes sont conjuguées de celles de l'autre. Le normalisant N de s dans $A(n, \pi)$ sera formé des substitutions réelles de ce produit.

Ce sera donc le groupe \check{A} formé des produits $\alpha_1 \alpha_2$ de deux substitutions conjuguées. Comme $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \pm 1$, \check{A} divise $A^0(n, \pi)$. Donc $N = N^0 = \check{A}$. P est le p. g. c. d. de \check{A} et de B. \check{A} , contenant nécessairement d, ne divise pas toujours \check{B} .

Comme s multiplie la forme a par i, on a A' = $\{X, s\}$, donc N' = $\{N, s\}$. On voit ensuite, en revenant aux variables x_i et y_i , que φ transforme s en ds. D'ailleurs, $s^{\frac{\pi-1}{2}}\varphi$ est dans A et transforme aussi s en ds.

On a $|s| = (-\tau)^{\nu'} = \tau^{\nu'} = \tau^{\nu'$

$$\sigma_i = \left| \begin{array}{cc} x_i & \iota_0^{\frac{\pi+1}{2}} y_i \\ \vdots & \vdots \\ y_i & \iota_0^{-\frac{\pi+1}{2}} y_i \end{array} \right| = t_i m_h^{\frac{\pi+1}{4}}.$$

Donc $\sigma = \prod_{i=1}^{n} t_i m_{ii}^{\frac{\pi+1}{4}}$ est dans B; et $\mathfrak{L} = (P + \sigma P)$.

106. Supposons ψ irréductible. Si l'on prend les variables

$$x_i' = x_i + \iota_0 y_i, \quad y_i' = x_i \iota_0 - y_i,$$

 s_i prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x_i' & \iota_0 x_i' \\ y_i' & -\iota_0 y_i' \end{vmatrix}$ $(i=1,\ldots,\nu)$; et, comme $s_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota' y^{\nu'} \\ y_{\nu'} & \iota'^{\pi} x_{\nu'} \end{vmatrix}$, $s_{\nu'}$, si l'on prend les variables $x_{\nu'} = x_{\nu'} + g y_{\nu'}$, $y_{\nu'} = g^{\pi}(x_{\nu'} - g y_{\nu'})$, $g = \iota^{\frac{1-\pi}{2}}$, $g^{\pi} = -\frac{1}{e}$,

prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x'_{\nu'} & \iota_0 x'_{\nu'} \\ y'_{\nu'} & -\iota_0 y'_{\nu'} \end{vmatrix}$. Ainsi la forme canonique de s est $\Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x'_k & \iota_0 x'_k \\ \gamma'_k & -\iota_0 y'_k \end{vmatrix}$. Et l'on a

$$\begin{split} x_i y_i &= \frac{1}{4 \iota_0} (x_i'^2 - y_i'^2) & (i = 1, \dots, \nu'), \\ x_{\nu'} y_{\nu'} &= \frac{1}{4} (g^{-1} x_{\nu'}^2 - g y_{\nu'}^2). \end{split}$$

Si donc on pose

$$a_1 = \frac{1}{4} \left(\Sigma_i^{\gamma} \frac{x_i^{\prime 2}}{\iota_0} + \frac{x_{\gamma'}^{\prime 2}}{g} \right), \qquad a_2 = \frac{1}{4} \left(\Sigma_i^{\gamma} \frac{y_i^{\prime 2}}{-\iota_0} - g y_{\gamma'}^{\prime 2} \right) = a_1,$$

s multiplie les variables de a_1 par ι_0 et celles de a_2 par — ι_0 . Comme Ann. Éc. Norm., (3), LI. — FASC. 1.

précédemment, N sera le groupe A formé des substitutions $\alpha_1 \alpha_2$, α_1 étant dans le groupe A_1 de la forme a_1 et a_2 conjuguée de a_1 et A divise $A^0(n,\pi)$. Donc $N = N^0 = A$. P est le p. g. c. d. de A et de B, et $N' = \{N, s\}$.

On voit ensuite que la substitution

$$\tau = \Pi_i^{\gamma} \left| \begin{array}{cc} x_i' & y_i' \\ y_i' & x_i' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x_{\gamma'}' & g & y_{\gamma'}' \\ y_{\gamma'}' & -g^{-1}x_{\gamma'}' \end{array} \right|$$

transforme s en ds. D'ailleurs $s^{\frac{\pi-1}{2}}\tau$ est dans A, et transforme aussi s en ds. Ici $|\sigma| = -(-1)^{\frac{\sqrt{\pi-1}}{2}}$. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$ ou si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, σ n'est pas dans A^0 , donc $\Re = (N + \sigma N)$, $\Re = (N' + \sigma N')$, $\Re = (N^0)$, $\Re = (N^0)$. Si $n \equiv 2 \pmod{4}$ et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, σ est dans A^0 et $\Re = (N^0 + \sigma N^0)$. En ce cas, on voit que $\sigma = \prod_{i=1}^{N} t_i m_{i_i}^{\frac{\pi+1}{4}} \cdot m_{i_i} = 0$. Comme φ est pair, σ est dans φ ou hors de φ en même temps que φ c'està-dire suivant φ est φ ou φ est φ ou φ est φ . On a donc, suivant les cas, $\Re = (P + \sigma P)$, ou $\Re = (P)$.

107. Dans les quatre cas qui restent à étudier, on a une relation de la forme $\zeta^{-1} \varphi[\iota_0] \zeta = [\iota^h] s$, $h = \frac{\pi \pm 1}{4}$. Considérons d'abord les normalisants N_{φ} , N'_{φ} , N'_{φ} , P_{φ} de φ dans $A(n, \pi^2)$, $A'(n, \pi^2)$, $A^0(n, \pi^2)$, $B(n, \pi^2)$, et ceux $\Im \iota_{\varphi}$, $\Im \iota'_{\varphi}$, $\Im \iota'_{\varphi}$, $\Im \iota'_{\varphi}$ de (φ) dans $\Re (n, \pi^2)$, $\Re \iota'(n, \pi^2)$, $\Re \iota'(n, \pi^2)$, $\Re \iota'(n, \pi^2)$.

Or, on a (75), $N_{\varphi} = N_{\varphi}^{0} = \mathbf{V}_{1,...,\nu',\iota}$, $N_{\varphi}' = \{N_{\varphi}, \gamma'\}$, $\gamma' = \Pi_{1}^{\nu'} \begin{vmatrix} x_{l} & \iota' x_{l} \\ y_{l} & y_{l} \end{vmatrix}$, $P_{\varphi} = \mathbf{V}_{1,...,\nu',\iota^{2}}$, et (104), en posant $\sigma = t_{1,...\nu'}$, $\partial \mathcal{V}_{\varphi} = (N_{\varphi} + \sigma N_{\varphi})$, $\partial \mathcal{V}_{\varphi}' = (N_{\varphi}' + \sigma N_{\varphi}')$; puis, si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $\partial \mathcal{V}_{\varphi}^{0} = \partial \mathcal{V}_{\varphi}$, $\mathcal{R}_{\varphi} = (P_{\varphi} + \sigma P_{\varphi})$; si $n \equiv 2 \pmod{4}$, $\partial \mathcal{V}_{\varphi}^{0} = (N_{\varphi})$, $\mathcal{R}_{\varphi} = (P_{\varphi})$.

Le normalisant \mathcal{H} est formé des substitutions (α) de \mathcal{H} , α transformant s en s ou ds. Si α est permutable à s, elle le sera à $\zeta^{-1} \varphi \zeta$. Donc $\zeta \alpha \zeta^{-1}$ est dans N_{φ} , donc α dans $\zeta^{-1} N_{\varphi} \zeta$. De même, si α transforme s en ds, elle transforme $\zeta^{-1} \varphi \zeta$ en $d\zeta^{-1} \varphi \zeta$, donc $\zeta \alpha \zeta^{-1}$ transforme φ en $d\varphi$. Donc $\zeta \alpha \zeta^{-1}$ est dans $N_{\varphi} \sigma$, donc α dans $\zeta^{-1} N_{\varphi} \sigma \zeta$. Donc \mathcal{H} est le p. g. c. d.

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 131

de $\zeta^{-1} \mathcal{H}_{\varphi} \zeta$ avec $\mathfrak{C}(n, \pi)$. De même \mathfrak{I}' , \mathfrak{I}' , \mathfrak{L} sont les p. g. c. d. de \mathfrak{I}'_{φ} , \mathfrak{I}'_{φ} , \mathfrak{L}_{φ} avec $\mathfrak{C}'(n, \pi)$, $\mathfrak{C}'(n, \pi)$, $\mathfrak{B}(n, \pi)$.

Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1}\alpha_{\varphi}\zeta=\beta_{\varphi}$, α_{φ} étant une substitution quelconque de N_{φ} , et ζ une des substitutions définies au n° 79, et déterminée au n° 87.

108. Soit $n \equiv 0 \pmod{4}$, en posant j = 2i - 1, k = 2i, on a

$$\zeta_{i\phi} = \zeta_{jk\phi} = U_{j,k,1-1/2\phi} W_{jk_1} U_{j,k,1-\phi} = \begin{bmatrix} x_j & \rho x_j + \frac{\mathfrak{t}}{2} y_k \\ y_j & \frac{\mathfrak{t}}{2\rho} y_j + x_k \\ x_k & \rho x_k - \frac{\mathfrak{t}}{2} y_j \\ y_k & \frac{\mathfrak{t}}{2\rho} y_k - x_j \end{bmatrix}.$$

Comme (I, 28) $\zeta_{j,k,\varrho}^{-1} = \zeta_{k,j,1/2\varrho}$, on aura

$$\zeta_{j,k,\rho}^{-} = \begin{vmatrix} x_j & \frac{\mathbf{I}}{2\rho} x_j - \frac{\mathbf{I}}{2} y_k \\ y_j & \rho y_j - x_k \\ x_k & \frac{\mathbf{I}}{2\rho} x_k + \frac{\mathbf{I}}{2} y_j \\ y_k & \rho y_k + x_j \end{vmatrix}.$$

La substitution α_{φ} a la forme

$$\begin{bmatrix} x_{i} & \Sigma_{k}(\alpha_{ik} & x_{k} + \alpha_{i,k+1} & x_{k+1}) \\ y_{i} & \Sigma_{k}(\beta_{ik}' & y_{k} + \beta_{i,k+1}' & y_{k+1}) \\ x_{i+1} & \Sigma_{k}(\alpha_{i+1,k}x_{k} + \alpha_{i+1,k+1}x_{k+1}) \\ y_{i+1} & \Sigma_{k}(\beta_{i+1,k}' y_{k} + \beta_{i+1,k+1}' y_{k+1}) \end{bmatrix},$$

avec la condition $\beta' = \overline{\alpha}^{-1}(I, 40, 41)$. On voit que β_{ϕ} se déduit de α_{ϕ} en remplaçant chaque sous-matrice (S, 117):

$$lpha_{arphi}^{(i,k)} = \left\{ egin{array}{cccc} lpha_{ik} & \mathrm{o} & lpha_{i,k+1} & \mathrm{o} \ & \mathrm{o} & eta_{i,k+1} & \mathrm{o} \ & lpha_{i+1,k} & \mathrm{o} & lpha_{i+1,k+1} & \mathrm{o} \ & \mathrm{o} & eta_{i+1,k+1} & \mathrm{o} \end{array}
ight.
ight.$$

(*i* et *k* impairs) de α_{φ} par $\zeta_{k,k+1,\rho}^{-1}\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$, $\zeta_{i,i+1,\rho} = \beta_{\varphi}^{(i,k)}$ (*cf.* S, 117). On obtient

La matrice β_{φ} , ainsi obtenue, est la matrice générale du normalisant de s dans $A(n, \pi^2)$.

Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1} \alpha_{\varphi} \sigma$, $\zeta = \tau_{\varphi}$, $\sigma = t_{\dots, \psi}$. Les sous-matrices de $\alpha_{\varphi} \sigma$, analogues aux $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$, sont

$$lpha_{m{ ilde{ au}}}^{(i,k)} t_{i,i+1} = egin{pmatrix}
m{o} & eta_{ik}' &
m{o} & eta_{i,k+1}' &
m{o} \
m{a}_{ik} &
m{o} & eta_{i,k+1} &
m{o} \
m{o} & eta_{i+1,k}' &
m{o} & eta_{i+1,k+1}' &
m{o} \end{pmatrix}.$$

On aura donc

$$\tau_{\varphi}^{(i,k)} = \zeta_{k,k+1}^{-1} \alpha_{\varphi}^{(i,k)} t_{i,i+1} \zeta_{i,i+1}$$

ce qui donne

109. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod{4}$, ψ étant alors irréductible, β_{φ} se déduit ici de α_{φ} , en remplaçant :

1° chaque sous matrice $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leq \nu - 1$ par la sous-matrice $\beta_{\varphi}^{(i,k)}$ de tout à l'heure;

2º chaque sous-matrice

$$\alpha_{\varphi}^{(\gamma',k)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{\gamma'k} & \text{o} & \alpha_{\gamma'k+1} & \text{o} \\ \text{o} & \beta'_{\gamma'k} & \text{o} & \beta'_{\gamma'k+1} \end{array} \right\},$$

 $k \text{ impair} \leq v - 1 \text{ par}$

$$\zeta_{k,k+1}^{-1}\alpha_{\varphi}^{(\gamma',k)} = \beta_{\varphi}^{(\gamma',k)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\rho}\alpha_{\gamma,k} & \frac{1}{2}\alpha_{\gamma'k+1} & \frac{1}{2\rho}\alpha_{\gamma',k+1} & -\frac{1}{2}\alpha_{\gamma'k} \\ \beta'_{\gamma',k+1} & \rho\beta'_{\gamma'k} & -\beta'_{\gamma'k} & \rho\beta'_{\gamma',k+1} \end{array} \right\};$$

3° chaque sous-matrice

$$egin{align*} egin{align*} egin{align*}$$

par

$$\alpha_{\rho}^{(i,\nu')}\zeta_{l,l+1} = \beta_{\varphi}^{(i,\nu')} = \begin{cases} \rho\alpha_{i\nu'} & \frac{1}{2} \beta_{l+1,\nu'}' \\ \\ \alpha_{i+1,\nu'} & \frac{1}{2\rho} \beta_{l\nu'}' \\ \\ \rho\alpha_{l+1,\nu'} & -\frac{1}{2} \beta_{l\nu'}' \\ \\ -\alpha_{i\nu'} & \frac{1}{2\rho} \beta_{l+1,\nu'}' \end{cases};$$

 4° la sous-matrice $\alpha_{\circ}^{(\vee\vee)}$ par elle-même.

La matrice β_{φ} ainsi obtenue est la matrice générale du normalisant de φ dans $A(n, \pi^2)$. Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1}\alpha_{\varphi}\sigma\zeta = \tau_{\varphi}$, $\sigma = t_{1...y'}$. Les sous-matrices de $\alpha_{\varphi}\sigma$ analogues aux $\alpha_{\varphi}^{(l,k)}$ s'obtiennent en remplaçant :

1° chaque $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leq \nu - 1$ par la matrice $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}t_{i,i+4}$ déjà formée pour $n \equiv o \pmod{4}$;

2° chaque $\alpha_{\phi}^{(\nu',\kappa)}$ par

$$\alpha_{\sigma}^{(\gamma',k)}\ell_{\gamma'} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \beta_{\gamma'k} & 0 & \beta_{\gamma'k+1} \\ \alpha_{\gamma'k} & 0 & \alpha_{\gamma'k+1} & 0 \end{array} \right\};$$

 3° chaque $\alpha_{\phi}^{(i,\nu)}$ par

$$lpha_{\mathfrak{P}}^{(l, \gamma')} t_{l, l+1} = \left\{ egin{array}{ccc} 0 & eta_{l \gamma'} & 0 \ lpha_{l \gamma'} & 0 \ lpha_{l+1, \gamma'} & 0 \end{array}
ight\};$$

$$4^{\circ} \alpha_{\varphi}^{(\vee,\vee)} = \begin{cases} \alpha_{\nu'\nu'} & o \\ o & \beta'_{\nu'\nu'} \end{cases} \text{ par } \alpha_{\varphi}^{(\vee,\vee)} t_{\nu'} = \begin{cases} o & \beta'_{\nu'\nu'} \\ \alpha_{\nu'\nu'} & o \end{cases}.$$

Donc τ_{ϕ} se déduit de α_{ϕ} en remplaçant :

1° chaque $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leq \nu - 1$ par la sous-matrice $\tau_{\varphi}^{(i,k)}$ déjà considérée pour $n \equiv 0 \pmod{4}$;

2° chaque α_φ^(ν',k) par

$$\zeta_{\kappa,k+1}^{-1} \alpha_{\phi}^{(\gamma',k)} t_{\nu'} = au_{\phi}^{(\gamma',k)} = \left\{ egin{array}{ll} eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} & -eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} & -eta_{
u',k+1} & -eta_{
u',k+1} & -eta_{
u',k+1} &
ho eta_{
u',k+1} &
ho eta$$

3° chaque $\alpha_{\varphi}^{(i,\nu')}$ par

$$\alpha_{\varphi}^{(l,\vee)} t_{l,i+1} \zeta_{l,i+1} = \tau_{\varphi}^{(l,\vee)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \alpha_{l+1}, \nu' & \rho \beta_{l\nu'} \\ \\ \frac{1}{2\rho} & \alpha_{l\nu'} & \beta'_{l+1}, \nu' \\ \\ -\frac{1}{2} & \alpha_{l\nu'} & \rho \beta'_{l+1}, \nu' \\ \\ \frac{1}{2\rho} & \beta_{l+1}, \nu' & -\beta'_{l\nu'} \end{array} \right\};$$

 $4^{\circ} \alpha_{\varphi}^{(\nu'\nu')} par$

$$\alpha_{z}^{\gamma'\gamma'}t_{\gamma'} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \beta_{\gamma'\gamma'} \\ \alpha_{\gamma'\gamma'} & 0 \end{array} \right\}.$$

110. Arrivons maintenant à la détermination de 91.

N, p. g. c. d. de $\zeta^{-1} N_{\phi} \zeta$ et de $A(n, \pi)$ sera formé des substitutions β_{ϕ} réelles.

Soit d'abord $n \equiv 0 \pmod{4}$, donc ψ réductible, ρ est ici imaginaire $[\rho = \eta, \text{ quand } \pi \equiv 1 \pmod{4}, \text{ et } \rho = \epsilon \text{ quand } \pi \equiv 3 \pmod{4} \pmod{5}];$ ρ^2 est réel et $\rho = -\rho$. Un calcul direct montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\beta_{\varphi}^{(\ell,k)}$ sont

$$\begin{array}{c}
(1) \\
\beta'_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{lk}, & \beta'_{lk} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, \\
\beta'_{l,k+1} = -\dot{\alpha}_{l+1,k}, & \beta'_{l+1,k} = -\dot{\alpha}_{l,k+1}, \\
\beta'_{l,k+1} = \dot{\alpha}_{lk}, & \beta'_{l+1,k} = -\dot{\alpha}_{l,k+1}, \\
\alpha_{lk} = \dot{\alpha}_{lk}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k} = \dot{\alpha}_{lk}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k} = \dot{\alpha}_{lk}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k} = \dot{\alpha}_{lk}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k}, \\
\alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{lk}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, \\
\alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, & \alpha_{l+1,k+1} = \dot{\alpha}_{l+1,k+1}, \\
\alpha_{l+1,k$$

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 135

Les relations fondamentales [I, p. 324, formules (4)] deviennent

$$\begin{cases} \Sigma_{l}(\alpha_{lk} \quad \dot{\alpha}_{l+1,l+1} - \alpha_{l+1,k} \quad \dot{\alpha}_{l,l+1}) = \begin{cases} \quad \text{o} \quad \text{si} \quad l \neq k, \\ \quad l \quad \text{si} \quad l = k, \end{cases} \\ \Sigma_{l}(\alpha_{l,k+1} \dot{\alpha}_{l+1,l+1} - \alpha_{l+1,k+1} \dot{\alpha}_{l,l+1}) = 0, \\ \Sigma_{l}(\alpha_{lk} \quad \dot{\alpha}_{l+1,l} - \alpha_{l+1,k} \quad \dot{\alpha}_{ll}) = 0, \end{cases}$$

i, k, l parcourant les nombres impairs < v'.

Considérons maintenant la matrice des α qui détermine α_{φ} . En remplaçant i par 2i-1 et k par 2k-1 (en sorte que i, $k=1,2,\ldots,\frac{\nu'}{2}$) la sous-matrice des α qui figure dans $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ deviendra

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{2i-1,2k-1} & \alpha_{2i-1,2k} \\ \alpha_{2i,2k-1} & \alpha_{2i,2k} \end{array} \right\},$$

et pourra s'écrire $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_{lk} & \ddot{\alpha}'_{lk} \\ \ddot{\beta}_{lk} & \ddot{\beta}'_{lk} \end{pmatrix}$. Par la même transformation, l étant aussi remplacé par 2l-1, les formules (2) deviennent

$$\begin{split} & \Sigma_{l}(\alpha_{2l-1,2k-1}\dot{\alpha}_{2l,2l} - \alpha_{2l,2k-1}\dot{\alpha}_{2l-1,2l}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{o si } l \neq k, \\ \text{i si } l = k, \end{array} \right. \\ & \Sigma_{l}(\alpha_{2l-1,2k} \dot{\alpha}_{2l,2l} - \alpha_{2l,2k} \dot{\alpha}_{2l-1,2l}) = \text{o}, \\ & \Sigma_{l}(\alpha_{2l-1,2k-1}\dot{\alpha}_{2l,2l-1} - \alpha_{2l,2k-1}\dot{\alpha}_{2l-1,2l-1}) = \text{o}. \end{split}$$

On peut les écrire

$$\Sigma_{l}(\overset{\smile}{\alpha}_{lk}\overset{\smile}{\beta}_{ll}'-\overset{\smile}{\beta}_{lk}\overset{\smile}{\alpha}_{ll}') = \begin{cases} & \text{o si} & l \neq k, \\ & \text{i si} & l = k, \end{cases}$$

$$\Sigma_{l}(\overset{\smile}{\alpha}_{lk}\overset{\smile}{\beta}_{ll}'-\overset{\smile}{\beta}_{lk}\overset{\smile}{\alpha}_{ll}') = 0,$$

$$\Sigma_{l}(\overset{\smile}{\alpha}_{lk}\overset{\smile}{\beta}_{ll}-\overset{\smile}{\beta}_{lk}\overset{\smile}{\alpha}_{ll}') = 0$$

$$(i, k, l = 1, 2, \dots, \frac{\nu'}{2}).$$

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)] la matrice α parcourt $H(\nu', \pi)$. Soit $H_{\varphi} \equiv H(\nu, \pi)$ le groupe que parcourt α_{φ} quand α parcourt $H(\nu', \pi)$. On voit que le p. g. c. d. de $\zeta^{-1}N_{\varphi}\zeta$ avec $A(n, \pi)$ est $\zeta^{-1}H_{\varphi}\zeta$. On voit, comme précédemment, que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\tau_{\varphi}^{(i,k)}$ sont

$$\beta'_{\ell,k+1} = -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{\ell+1,k}, \qquad \beta'_{\ell+1,k} = -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{\ell,k+1},$$

$$\beta'_{ik} = \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{\ell+1,k+1}, \qquad \beta'_{\ell+1,k+1} = \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{\ell k}.$$

Donc

$$\alpha_{\varphi}^{(l,k)}t_{i,l+1} = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{lk} & \text{o} & \alpha_{l,k+1} & \text{o} \\ & & \frac{1}{4}\rho^2\dot{\alpha}_{l+1,k+1} & \text{o} & \frac{-1}{4}\rho^2\dot{\alpha}_{l+1,k} \\ \\ \alpha_{l+1,k} & \text{o} & \alpha_{l+1,+k_1} & \text{o} \\ & \text{o} & -\frac{1}{4}\rho^2\dot{\alpha}_{l,k+1} & \text{o} & \frac{1}{4}\rho^2\dot{\alpha}_{lk} \end{array} \right\}.$$

La première des formules (2), pour l = k, devient

$$\sum_{i} (\alpha_{ik} \dot{\alpha}_{i+1,k+1} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{i,k+1}) = 4 \rho^{2};$$

les autres restent inaltérées. On peut encore écrire

$$\alpha_{\varphi}^{(i,k)}t_{i,i+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\rho}\alpha_{i+1,k} & 0 & \frac{1}{2\rho}\alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i,k+1} & 0 & \frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{ik} \\ \frac{1}{2\rho}\alpha_{ik} & 0 & \frac{1}{2\rho}\alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i+1,k+1} & 0 & \frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i+1,k} \end{cases} \xi_{i}$$

$$(\xi_{i} = T_{l,i+1}m_{l,2}\alpha_{l+1,2}\alpha_{l,i+1})$$

ou, en remplaçant au second membre i par 2i-1,

$$\xi_{i} = T_{2i-1,2i} m_{2i-1,20} m_{2i,20} t_{2i-1,2i}
= d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} m_{2i-1,20} m_{2i,20} = d_{2i-1} S_{2i-1,2i,20}.$$

La sous-matrice qui multiplie ξ_i étant une sous-matrice de H_{φ} , $\alpha_{\varphi} t_{1...,\gamma}$ est une substitution de $H_{\varphi}\xi$, en posant $\xi = \Pi_{1}^{\gamma/2}\xi_{i}$. Donc

$$\mathfrak{N} = (\zeta^{-1} H_{\phi} \zeta + \zeta^{-1} H_{\phi} \xi \zeta).$$

On remarquera que $\zeta^{-1}\xi\zeta=d_{2i\ldots\nu'}$.

111. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod{4}$, donc ψ irréductible.

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 137

Les conditions de réalité de $\beta_{\varphi}^{(i,k)}$ (i,k) impairs < v) sont les mêmes que :

pour que $\beta_{\sigma}^{(\gamma,k)}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

(3)
$$\beta'_{\nu',k+1} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta_{\nu'k} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu',k+1};$$

pour que $\beta_{\phi}^{(i,v)}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

(4)
$$\beta'_{i+1,\nu'} = -2\rho\dot{\alpha}_{i\nu'}, \quad \beta'_{i\nu'} = 2\rho\dot{\alpha}_{i+1,\nu'};$$

pour que β^(ν',ν') soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu'\nu'} = \dot{\alpha}_{\nu'\nu'}.$$

Les relations fondamentales deviennent donc :

(6)
$$\Sigma_{l}(\alpha_{lk} \quad \dot{\alpha}_{l+1,l+1} - \alpha_{l+1,k} \quad \dot{\alpha}_{l,l+1}) + \frac{1}{2\rho} \alpha_{\nu'k} \quad \dot{\alpha}_{\nu',l+1} = \begin{cases} o & \text{si} \quad l \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad l = k, \end{cases}$$

(7)
$$\Sigma_{l}(\alpha_{i,k+1}\dot{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k+1}\dot{\alpha}_{i,l+1}) + \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu',k+1}\dot{\alpha}_{\nu',l+1} = 0,$$

(8)
$$\Sigma_{l}(\alpha_{ik} \quad \dot{\alpha}_{i+1,l} \quad -\alpha_{i+1,k} \quad \dot{\alpha}_{il} \quad) + \frac{1}{2\rho} \alpha_{i'k} \quad \dot{\alpha}_{i'k} \quad \equiv 0,$$

$$(9) \qquad \Sigma_{i}(\alpha_{ik} \quad \dot{\alpha}_{i+1,\nu'} = \alpha_{i+1,k} \quad \dot{\alpha}_{i''} \quad) + \quad \alpha_{\nu'k} \quad \dot{\alpha}_{\nu'\nu'} \quad = \begin{cases} \text{o si } k \neq \nu', \\ \text{i si } k = \nu', \end{cases}$$

$$(10) \quad 2\rho \sum_{i} (\alpha_{l,k+1} \dot{\alpha}_{l+1,\nu'} - \alpha_{l+1,k+1} \dot{\alpha}_{l\nu'}) + \alpha_{\nu',k+1} \dot{\alpha}_{\nu'\nu'} = 0.$$

Les indices i et l parcourent les nombres impairs $\langle \nu$. L'indice k parcourt les mêmes nombres dans (7), et peut prendre la valeur ν' dans (6), (8), (9). [(6) pour $k = \nu'$ est la conjuguée de (10), que l'on peut supprimer.

Comme précédemment, la sous-matrice des α qui figure dans $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ pourra s'écrire $\begin{pmatrix} \overset{\smile}{\alpha_{ik}} & \overset{\smile}{\alpha'_{ik}} \\ \overset{\smile}{\beta_{ik}} & \overset{\smile}{\beta'_{ik}} \end{pmatrix}$ $(i, k = 1, \ldots, \frac{\nu}{2})$; la sous-matrice $(\alpha_{\nu',2k-1}, \alpha_{\nu',2k})$ s'écrira $(\overset{\smile}{\alpha_{0k}}, \overset{\smile}{\alpha'_{0k}})$; la sous-matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{2i-1} & \nu' \\ \alpha_{2i} & \nu' \end{pmatrix}$ pourra s'écrire $\begin{pmatrix} \overset{\smile}{\alpha_{i0}} \\ \overset{\smile}{\alpha} \end{pmatrix}$; enfin, on remplacera $\alpha_{\nu',\nu'}$ par α_{00} . En faisant alors

$$\upsilon = \frac{1}{4\rho}, \text{ d'où } \omega = \upsilon - \dot{\upsilon} = \frac{1}{2\rho}, \text{ les relations (6), (10) s'écrivent :}$$

$$\Sigma_{l} (\overset{\smile}{\alpha'_{lk}} \overset{\smile}{\beta'_{ll}} - \overset{\smile}{\beta_{lk}} \overset{\smile}{\alpha'_{ll}}) + \overset{\smile}{\omega_{0k}} \overset{\smile}{\alpha'_{0l}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l \neq k \\ 1 & \text{si} \quad t = k \end{cases} (k \geq 0; l \neq 0)$$

[cette relation vient de (6) et (10)],

$$\Sigma_{i} \left(\overset{\smile}{\alpha_{ik}} \overset{\smile}{\beta_{il}} - \overset{\smile}{\beta_{ik}} \overset{\smile}{\alpha_{il}} \right) + \overset{\smile}{\omega_{\alpha_{0k}}} \overset{\smile}{\alpha_{0l}} = 0 \qquad (k, l \neq 0)$$

[cette relation vient de (7)],

$$\Sigma_{l}(\overset{\smile}{\alpha_{ik}}\overset{\smile}{\beta}_{il}-\overset{\smile}{\beta}_{ik}\overset{\smile}{\alpha}_{il})+\omega\alpha_{0k}\overset{\smile}{\alpha}_{0l}=\begin{cases} o & \text{sauf si} \quad k=l=o \\ \omega & \text{si} \quad k=l=o \end{cases}$$

[cette relation vient de (8) et (9)].

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)] α parcourt $H(\nu', \pi)$.

Soit $H_{\varphi} \equiv H(\nu', \pi)$ le groupe que parcourt α_{φ} quand α parcourt $H(\nu', \varphi)$. On voit que le p. g. c. d. de $\zeta^{-1}N_{\varphi}\zeta$ avec $A(n, \pi)$ est $\zeta^{-1}H_{\varphi}\zeta$.

On voit comme précédemment que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\tau_{\varphi}^{(i,k)}(i,k)$ impairs $< \nu$) sont

$$\beta_{\nu',k+1}' = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta_{\nu'k}' = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu',k+1}.$$

On remarquera que ce sont les mêmes conditions que pour la réalité de $\beta_{\sigma}^{(\ell,k)}$:

pour que $\tau_{\varphi}^{(\nu',k)}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta_{\nu',k+1} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta'_{\nu'k} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu',k+1};$$

pour que $\tau_{\phi}^{(i,\nu')}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{i\nu'} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i+1,\nu'}, \qquad \beta'_{i+1,\nu'} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i\nu'};$$

pour que $\tau_{\phi}^{\scriptscriptstyle{(\nu'\nu')}}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu'\nu'} = \dot{\alpha}_{\nu'\nu'}$$

On transforme $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$ comme dans le cas $n \equiv 0 \pmod{4}$ [on a ici $\frac{1}{4\rho^2} \sum_i (\dot{\alpha}_{ik} \alpha_{i+1,k+1} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{i,k+1}) + \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu'k} \alpha_{\nu',k+1} = 1$], et l'on a de plus

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DU GROUPE QUADRATIQUE GALOISIEN. 139 ou, en remplaçant i par 2i-1,

$$\xi_i = d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} m_{2i-1,-2i} m_{2i,2i} = d_{2i-1} S_{2i-1,2i,2i}$$

La sous-matrice qui multiplie ξ_i étant une sous-matrice de H_c , $\alpha_z t_1 \dots$ est une substitution de $H_z \xi$ en posant

$$\xi = t_{\gamma'} \Pi^{\gamma/2} \xi_i$$
.

Donc $\mathcal{H} = (\zeta^{-1} H_{\varphi} \zeta + \zeta^{-1} H_{\varphi} \xi \zeta)$; comme dans le cas $n \equiv 0 \pmod{4}$, $\zeta^2 = 1$.

- 112. Déterminons maintenant \mathfrak{I}' . Pour que $\zeta^{-1}\alpha_z\gamma''\zeta$, qui multiplie a par ι'' soit réelle, il faut que ι'' soit réel, donc $\iota'' = \iota^{\lambda}$. D'ailleurs $\alpha_{z}\gamma'^{r}$ se déduit de α_{z} en y multipliant chaque coefficient α par i^{λ} . Donc, les conditions de réalité se déduisent de (1) si $n \equiv 0 \pmod{4}$, ou de (1), (3), (4), (5) si $n \equiv 2 \pmod{4}$, en multipliant les deux nombres par $!^{4}$. Donc $\alpha_{\varphi} = \alpha'_{\varphi} t_{1...\nu'} \gamma'' t_{1...\nu'}$, α'_{φ} se déduisent de α_{φ} en multipliant chaque coefficient β' par $\iota^{-\lambda}$. Entre les coefficients de α_z , on a, au lieu des relations (2) ou (6)-(10), celles qui s'en déduisent en y remplaçant seulement les seconds membres 1 par $t^{-\lambda}$. Donc la matrice (α_{ik}) est dans $H(\nu', \pi)[\iota'^{-\lambda}]$, où elle peut être prise arbitrairement. Donc $(\alpha)_{ik}[\iota^{ik}]$ peut être prise arbitrairement dans $H(\nu', \pi)$. Or, la matrice correspondante de H_{φ} est $\alpha'_{\varphi} \gamma'^{\lambda} t_{1...y}$, $\gamma'^{\pi\lambda} t_{1...y}$. Ainsi α'_{φ} peut être prise arbitrairement dans $H_{\varphi}\xi'^{\lambda}$, en posant $\xi' = \Pi''_{i} \begin{vmatrix} x_{i}, \ \iota'^{\pi}x_{i} \\ y_{i}, \ \iota'y_{i} \end{vmatrix} (\xi' = \Pi''_{i} m_{ii'}^{-1}$, si $n \equiv 0 \pmod{4}$; $\xi' = \gamma \prod_{i} m_{n'}^{-1}$, si $n = 2 \pmod{4}$. Donc $\alpha_{\sigma} \gamma'^{r}$ est quelconque dans $H_z(\xi')$. Donc $\mathcal{H} = (\zeta^{-1} \{ H_z, \xi, \xi' \} \xi)$, ξ' est permutable à H_{φ} , a priori; et l'on a $\xi^2 = 1$, $\xi^{-1}\xi'\xi = \xi'^{\pi}$; enfin $\xi'^{\pi-1} = \Pi_1^{\vee} m_{ii'}^{i-\pi}$ est dans H_z.
- 113. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, on a $\mathcal{H}_{\varphi}^0 = \mathcal{H}_{\varphi}$ (107). Donc, la substitution ξ trouvée au n° 110 étant dans B (n, π^2) , on a $\mathcal{H}_{\varphi}^0 = \mathcal{H}$. Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, on a $\mathcal{H}_{\varphi}^0 = (N_{\varrho})$. Donc $\mathcal{H}_{\varphi}^0 = (\zeta^{-1} H_{\varrho} \zeta)$.

114. Déterminons maintenant P. Soit d'abord $n \equiv 0 \pmod{4}$. Désignons par $m'_1 \rho$ la substitution $\begin{vmatrix} x_1 \rho x_1 \\ \rho^{-\pi} x_2 \end{vmatrix}$. On a (1, 2) $H = \{H^0, m'_{11}\}$, et, tout diviseur d'indice 2 contenant néces-

140 de séguier. — les substitutions d'ordre 2 du groupe galoisien.

sairement H⁰(I, p. 303), le seul diviseur d'indice 2 de H est {H⁰, $m'_{1,i'}$ }. Soit H⁰_{φ} le diviseur de H $_{\varphi}$ qui répond à H⁰. La substitution de H $_{\varphi}$ qui répond à $m'_{i'}$ est $m'''m''_{2,i'} = m'_{1,i_0}m''_{2,i_0}m_{1,i_0}m''_{2,i_0}$; et l'on a

$$m_{1t}^2, m_{2t}^{-2\pi} = m_{1,j}^{-1} m_{2,j}^{-1} m_{1t} m_{2t}^{-1}.$$

Comme $m_{11}m_{21}^{-1}$, qui répond à m'_{11} , est dans H_{φ}^0 , le seul diviseur de H_{φ} est $K_{\varphi} = \{H_{\varphi}^0, m_{1j}m_{2j}\}.$

En posant
$$\alpha = \frac{\iota' + \iota'^{\pi}}{2}$$
, $\beta = \frac{\iota' - \iota'^{\pi}}{2\rho}$ (α et β sont réels), on a

$$\zeta^{-1} m_{1i'} m_{2i'}^{-\pi} \zeta = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_1 - \beta \rho^2 y_2 \\ y_1 & \iota^{-1} (\alpha y_1 + \beta x_2) \\ x_2 & \iota^{-1} (\alpha x_2 + \beta \rho^2 y_1) \\ y_2 & \alpha y_2 - \beta x_1 \end{vmatrix} = m_{2,\alpha/\iota} m_{1\alpha} \mathbf{U}_{2,1,\alpha\beta\rho^2/\iota} \mathbf{W}_{1,2,\beta/\alpha}.$$

Comme α et α ont des caractères quadratiques différents, $m_{2,\alpha/l}m_{1\alpha}$ est hors de $B(n\pi)$. Il en est de même de $\zeta^{-1}m_{ll'}m_{2l'}^{-1}\zeta$. Donc (N, P) qui est ≤ 2 est égal à 2. Donc le p.g.c.d. de $\zeta^{-1}H_{\varphi}\zeta$ avec B est d'indice 2 dans $\zeta^{-1}H_{\varphi}\zeta$. Ce p.g.c.d. est donc $\zeta^{-1}K_{\varphi}\zeta$.

D'autre part $\zeta^{-1}\xi\zeta = d_{24...\nu'}$ (110) est dans B sauf si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ avec $\nu' \equiv 2 \pmod{4}$. Donc $\mathfrak{R} \equiv (\zeta^{-1}K_{\varphi}\zeta + \zeta^{-1}K_{\varphi}\xi\zeta)$ sauf si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ avec $\nu' \equiv 2 \pmod{4}$.

Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ et $\nu' \equiv 2 \pmod{4}$ il suffit de remplacer ξ par son produit ξ_0 par $m_{1i'}m_{2i'}^{-\pi}$, dont la transformée par ζ est dans N hors de B.

Si n=4, $\nu'=2$, les objets qui dans $\left[\mathfrak{C}^{0}(4\pi^{2})\right]$ répondent à H_{z}^{0} , $m_{1i'}m_{2i'}^{-\pi}m_{1j}m_{2j}$, ξ_{0} sont respectivement \mathfrak{U}_{z} , $(\imath z)$, $(j^{-1}u)$, $(j^{2}u)$, $(-\imath z)\left(\frac{-j}{4u}\right)$. On retrouve ainsi les résultats obtenus.

115. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod{4}$. On a $\mathfrak{I}^{\mathfrak{o}}_{\varphi} = (N_{\varphi})(107)$, donc $\mathfrak{I}^{\mathfrak{o}} = (\zeta^{-1}H_{\varphi}\zeta)(113)$, donc $\mathfrak{A} = (\zeta^{-1}K_{\varphi}\zeta)$.