

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DE SÉGUIER

Les substitutions d'ordre 2 des groupes linéaire, hermitien gauche et quadratique dans un champ de galois

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 50 (1933), p. 217-243

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__217_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2

DES

GROUPES LINÉAIRE, HERMITIEN, GAUCHE ET QUADRATIQUE

DANS UN CHAMP DE GALOIS

PAR M. DE SÉGUIER



Introduction.

La structure du groupe linéaire galoisien et de ses diviseurs à invariant hermitien gauche ou quadratique ayant été déterminée, ainsi que leurs constituants transitifs, un des premiers problèmes abordables qui se présente est la détermination de leurs substitutions d'ordre 2 quand le champ est d'ordre pair. On trouvera dans le présent Mémoire la solution complète de ce problème en ce qui concerne les groupes indiqués et les groupes homogènes ou fractionnaires correspondants. On trouvera de plus, pour chacun de ces groupes, la distribution en classes et les normalisants de leurs substitutions d'ordre 2.

Je tiens à exprimer ici, à M. M. Potron, mes plus vifs remerciements, pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction de ce Mémoire, en particulier par ses critiques et ses suggestions.

Pour éviter des redites assez longues, j'avertis de suite le lecteur que je me servirai des mêmes notations et conventions que dans mes Mémoires « sur les Groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois » et « sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois » parus dans le *Journal de Mathématiques* (1916 et 1919). Je désignerai dans ce qui suit le premier Mémoire par I et le second par II.

Je considérerai ici, dans le champ galoisien \mathcal{C} d'ordre impair $\pi = p^k$

(p premier) ⁽¹⁾, les groupes linéaires généraux : $L(n, \pi)$, $U(n, \pi)$, $\mathcal{L}(n, \pi)$, $\mathcal{U}(n, \pi)$, les groupes gauches : $G(n, \pi)$, $G'(n, \pi)$, $\mathcal{G}(n, \pi)$, $\mathcal{G}'(n, \pi)$, et les groupes quadratiques : $Q(n, \pi)$, $Q'(n, \pi)$, $Q^0(n, \pi)$, $R(n, \pi)$, $\mathcal{Q}(n, \pi)$, $\mathcal{Q}'(n, \pi)$, $\mathcal{Q}^0(n, \pi)$, $\mathcal{R}(n, \pi)$; puis, dans le champ \mathcal{C}' obtenu en adjoignant à \mathcal{C} une racine ν d'une équation irréductible, $u^2 + bu + c = 0$, les groupes hermitiens $H(n, \pi)$, $H'(n, \pi)$, $H^0(n, \pi)$, $\mathcal{H}(n, \pi)$, $\mathcal{H}'(n, \pi)$, $\mathcal{H}^0(n, \pi)$.

Je désignerai encore : par ν' et $\nu = \nu'^{\pi+1}$ des éléments primitifs de \mathcal{C}' et \mathcal{C} respectivement, par $[\mu]$ la similitude de multiplicateurs μ , en posant $[-1] = d$, $\{d\} = D$, $\{\{\nu\}\} = 1$, $\{\{\nu'\}\} = I'$. Enfin je poserai $\nu'^{\frac{\pi^2-1}{4}} = \varepsilon$, $\nu'^{\frac{\pi+1}{2}} = \nu_0$, $\nu'^{\frac{\pi-1}{2}} = j_0$, $\nu'^{\pi-1} = j$ ($\nu_0^2 = \nu$, $j_0^2 = j$, $\varepsilon^2 = -1$), et $\{[j]\} = J$.

Je rappelle que, quand la forme invariante de l'un des groupes G , Q , H reste indéterminée (non canonique), je la désigne par a . Je remplace alors la lettre G , Q , H par A , la lettre \mathcal{G} , \mathcal{Q} , \mathcal{H} par \mathcal{A} , la lettre R par B , la lettre \mathcal{R} par \mathcal{B} .

CHAPITRE I.

GRUPE LINÉAIRE.

1. Sauf indication contraire, les variables de $L(n, \pi)$, $U(n, \pi)$ sont désignées par x_1, \dots, x_n . Pour indiquer explicitement que le groupe opère sur des variables z_1, \dots, z_q , j'emploierai les notations $L_{z_1, \dots, z_q}(\pi)$, $U_{z_1, \dots, z_q}(\pi)$, ou simplement L_{z_1, \dots, z_q} , U_{z_1, \dots, z_q} .

Détermination des s_2 de L et de U .

2. Toute s_2 de L a nécessairement la forme canonique monome $(S, 10)$. Si elle a r multiplicateurs -1 et $n-r$ multiplicateurs $+1$, elle y est évidemment conjuguée de la substitution μ_r qui multiplie x_1, \dots, x_r par -1 , et x_{r+1}, \dots, x_n par 1 . Donc $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ *représentent toutes les classes distinctes de s_2 de L* . Les pôles de μ_r sont les points vérifiant $x_1 = \dots = x_r = 0$.

⁽¹⁾ Si $p = 2$, les suites de la forme canonique d'une s_2 ont au plus deux variables, et les multiplicateurs sont tous égaux à $+1$ $(S, 10)$.

3. Le normalisant M de μ_r dans L est le produit direct de $L(r, \pi)$ par $L_{x_{r+1}, \dots, x_n}(\pi)$ (S, 6, 7). Le normalisant N de μ_r dans U est p. g. c. d. de M et U , ou le p. p. c. m. des substitutions de déterminant 1 de M . On a donc, en posant $m_i = |x_i, ix_i|$, les autres variables étant inaltérées, $N = \{U(r, \pi), U_{x_{r+1}, \dots, x_n}(\pi), m_1, m_{r+1}^{-1}\}$. Comme $M = \{U(r, \pi), U_{x_{r+1}, \dots, x_n}(\pi), m_1, m_{r+1}\}$, on a évidemment $M = \{N, m_1\}$, m_1 étant permutable à N et $m_1^{\pi-1} = 1$ étant la première puissance de m_1 dans N , comme dans U . Donc $L = UM$, et U contient un système de restes de $L \bmod M$. Plus précisément, tout système de restes de $U \bmod N$ est système de restes de $L \bmod M$ (E, 67). Donc on obtient toutes les conjuguées de μ_r dans L en transformant μ_r par U .

4. Pour que μ_r soit dans U , il faut et suffit que r soit pair. Il résulte alors de ce qu'on vient de dire que les μ_{2k} représentent toutes les classes de s_2 distinctes de U et que chaque μ_{2k} a autant de conjuguées dans U que dans L .

Détermination des s_2 de $\mathcal{L}(n, \pi)$.

5. Désignons en général par (l) ce que devient une partie l de L quand on y regarde les variables comme homogènes. Soit s une substitution telle que (s) soit d'ordre 2 dans \mathcal{L} , c'est-à-dire que $s^2 = [v^m]$. Deux cas sont à distinguer suivant la parité de m .

Si $m = 2h$, je dirai que (s) et sa classe sont de *première espèce*. Alors $s[v^{-h}]$ est une s_2 de L . Il suffit donc pour obtenir toutes les s_2 de première espèce de \mathcal{L} de regarder les variables comme homogènes dans les s_2 de L (alors $2h = \pi - 1$). Il reste à étudier leur distribution en classes.

Si σ et σ' sont deux s_2 de L , (σ) et (σ') sont conjuguées dans \mathcal{L} toujours et seulement si σ' est conjuguée, dans L , d'une substitution de la forme $\sigma[v^k]$. Cette substitution devant être d'ordre 2, il faut que $v^k = \pm 1$. Donc σ' est conjuguée dans L de σ ou de $d\sigma$. Or, dans L , $d\mu_r$ appartient (2) à la classe de μ_{n-r} . Donc les classes de s_2 de première espèce de L peuvent être représentées par les (μ_r) où $r \leq \frac{n}{2}$. Les pôles

de (μ_r) sont les points vérifiant $x_1 = \dots = x_r = 0$ (qui sont ceux de μ_r) et les points vérifiant $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$.

6. Si $m = 2h + 1$, je dirai que (s) et sa classe sont de *deuxième espèce*. Tout d'abord, une $s_2 (s)$ de seconde espèce ne peut être conjuguée, dans \mathcal{L} , d'une $s_2 (s')$ de première espèce. En effet, s' serait alors (5) conjuguée, dans L , de $[v^k]^s$, donc $s'^2 = [v^{2h}]$ de $[v^{2k}]s^2 = [v^{2(j+k)+1}]$, ce qui est impossible, puisque les multiplicateurs de ces deux similitudes sont différents.

On peut, sans changer (s) , remplacer s par $s[v^{-h}]$, et par suite supposer $s^2[v]$. Comme v est une puissance paire de v' , (s) est de première espèce dans $\mathcal{L}(n, \pi^2)$ donc est (5) la forme homogène d'une $s^2 s'$ de $L(n, \pi^2)$, en sorte que $s = s'[v^{h/k}]$. En élevant au carré, on obtient $v'^{\pi+1} = v'^{2k}$. Il faut donc $2k = \pi + 1 + m(\pi^2 - 1)$, m entier arbitraire, et l'on peut prendre $k = \frac{\pi + 1}{2}$. Alors $s = s'[v_0]$. Les multiplicateurs de s sont donc $\pm v_0$. Or, s étant réelle, ses multiplicateurs doivent être conjugués deux à deux. Il y a donc autant de multiplicateurs $+v_0$ que de multiplicateurs $-v_0$. Donc s' doit appartenir à la classe de $\mu_{2\nu}(n = 2\nu)$. Il existe donc, dans $L(n, \pi^2)$, une substitution ζ telle que $\zeta^{-1}\mu_{2\nu}\zeta = s'$, et, par suite, $\zeta^{-1}[v_0]\mu_{2\nu}\zeta = s$.

Ainsi, on obtient toutes les s_2 de seconde espèce de $\mathcal{L}(n, \pi)$ en cherchant dans $L(n, \pi^2)$ les conjuguées réelles s, s', \dots de $[v_0]\mu_{2\nu}$. La forme semi-canonique (S, 11, 12) de $[v_0]\mu_{2\nu}$ montre *a priori* qu'il y en a; et nous allons d'ailleurs les former. Mais remarquons d'abord qu'il n'y a qu'une classe de s_2 de seconde espèce. Car de $[v_0]\mu_{2\nu} = \zeta s \zeta^{-1} = \zeta' s' \zeta'^{-1}$, on tire $s \zeta^{-1} \zeta' = \zeta^{-1} \zeta' s'$. Donc s et s' étant réelles, les coefficients de $\zeta^{-1} \zeta'$ sont proportionnels à des nombres réels. Donc $\zeta^{-1} \zeta' = [\rho] \alpha$, α étant réelle, et ρ étant un facteur de proportionnalité. On aura donc $s\alpha = \alpha s'$, en sorte que s' est conjuguée de s dans $L(n, \pi)$.

Écrivons maintenant y_i pour $x_{\nu+i}$, et posons

$$s_i = \begin{vmatrix} x_i & v y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}, \quad s = \Pi_1^{\nu} s_i,$$

Comme $s^2 = [v]$, on voit que (s) est une s_2 de seconde espèce. D'autre

part, en posant

$$\zeta_i = \begin{vmatrix} x_i & \frac{1}{2}(x_i + y_i) \\ y_i & \frac{1}{2t_0}(x_i - y_i) \end{vmatrix}, \quad \zeta = \Pi_1^{\nu} \zeta_i,$$

on a

$$\zeta s = \mu_{\nu}[t_0]\zeta.$$

Les pôles de (s) sont les points, tous imaginaires, qui vérifient les équations $t y_i = \varphi x_i$, $x_i = \varphi y_i$ ($i = 1, \dots, \nu$); d'où $\varphi = \pm t_0$.

7. Cherchons les normalisants \mathfrak{N} et \mathfrak{U} dans \mathcal{L} et \mathcal{U} d'une s_2 quelconque \mathfrak{s} de \mathcal{L} . Soient s une substitution de L tel que $(s) = \mathfrak{s}$, et σ une substitution de L non permutable à s , mais telle que $\sigma^{-1} s \sigma = [t^k]s$. En élevant au carré, on voit que $t^{2k} = 1$; d'où $t^k = -1$. Donc $\sigma^{-1} s \sigma = ds$, et σ^2 est permutable en s .

8. Soit \mathfrak{s} de première espèce. Alors, en transformant \mathfrak{s} , et en même temps \mathfrak{s} , par une substitution convenable ζ de L [$\mathfrak{s} = (s)$ est alors transformé par (ζ)], on peut supposer que $s = \mu_r(5)$. On voit directement, en développant la condition $\mu_r \sigma = \sigma d\mu_r$, que, dans les fonctions que σ substitue à x_1, \dots, x_r , les coefficients de ces variables sont nuls, et de même ceux de x_{r+1}, \dots, x_n dans les fonctions que σ leur substitue. Pour que (σ) soit $\neq 0$, il faut donc que $r = n - r$, ou $n = 2r$. Donc σ n'existe que si n est pair $= 2\nu$, et $r = \nu$. On peut toujours choisir σ dans U ; il suffit pour cela, en posant $t = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}$ ($i = 1, \dots, \nu$) de prendre $\sigma = t$, si ν est pair, $\sigma = tm_1^{(\pi-1)/2}(3)$ si ν est impair.

Ainsi, si n est impair, ou si $n = 2\nu$, $r \neq \nu$, on a $\mathfrak{N} = (M)$, $\mathfrak{U} = (N)$. Si $n = 2\nu$ et $r = \nu$, on a $\mathfrak{N} = (\{M, \sigma\})$, $\mathfrak{U} = (\{N, \sigma\})$.

Dans les deux cas on a $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{U}, (m_1)\}$. En effet, on voit d'abord directement [cf. (3)] que (m_1) est dans \mathfrak{N} . Donc, toute puissance de (m_1) qui est dans \mathfrak{U} est dans \mathfrak{U} , et inversement. Or (S, 79) les substitutions de \mathfrak{U} sont celles dont le déterminant est une puissance $n^{\text{ième}}$, c'est-à-dire de la forme $t^{kn+l(\pi-1)}$ (k et l entiers) ou $t^{\theta q}$, θ étant le p. g. c. d.

de n et de $\pi - 1$. Donc la première puissance de (m_i) (de déterminant ι) qui est dans \mathfrak{U} est (m_i^0) . Donc $\mathfrak{N} = \Sigma_1^0 \mathfrak{U}(m_i^0)$. D'autre part $\mathfrak{L} = \Sigma_1^0 \mathfrak{U}(m_i^0)$ (S, 79). Donc $\mathfrak{N}/\mathfrak{U} = \mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{L} = \mathfrak{U}\mathfrak{N}$. Cette relation montre que \mathfrak{U} contient un système de restes de $\mathfrak{L} \bmod \mathfrak{N}$. Plus précisément, (E, 67) tout système de restes de $\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}$ est un système de restes de $\mathfrak{L} \bmod \mathfrak{N}$. Donc on obtient toutes les conjuguées de (s) dans \mathfrak{L} en transformant (s) par \mathfrak{U} , et, si (s) est dans \mathfrak{U} , (s) a les mêmes conjuguées dans \mathfrak{U} et \mathfrak{L} .

9. Soit (s) de deuxième espèce, donc $n = 2\nu$ (6). Reprenons les notations employées, et désignons par M, N les normalisants respectifs, dans L et U , de $s = \begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix} (i = 1, \dots, \nu)$.

En posant $x_i = \frac{1}{2}(x'_i + y'_i)$, $y_i = \frac{1}{2\iota_0}(x'_i - y'_i)$, s prend la forme canonique $\mu_\nu[\iota_0] = \begin{vmatrix} x'_i & -\iota_0 x'_i \\ y'_i & \iota_0 y'_i \end{vmatrix} (i = 1, \dots, \nu)$. Les normalisants M, N sont formés des substitutions réelles des normalisants respectifs M', N' de s dans $L(n, \pi^2), U(n, \pi^2)$ (3). Soient alors A et B les groupes obtenus en multipliant respectivement chaque substitution de $L_{x'_1, \dots, x'_\nu}(\pi^2), U_{y'_1, \dots, y'_\nu}(\pi^2)$ par la substitution à coefficients conjugués de $L_{y'_1, \dots, y'_\nu}(\pi^2), U_{x'_1, \dots, x'_\nu}(\pi^2)$. A et B sont respectivement isomorphes à $L_{x'_1, \dots, x'_\nu}(\pi^2), U_{y'_1, \dots, y'_\nu}(\pi^2)$. Comme (S, 74) $L_{x'_1, \dots, x'_\nu}(\pi^2) = \{U_{x'_1, \dots, x'_\nu}(\pi^2) | x'_i, \iota' x'_i | \}$, en posant $\gamma = \begin{vmatrix} x'_i & \iota' x'_i \\ y'_i & \iota' \pi y'_i \end{vmatrix}$, on a $A = \{B, \gamma\} = \Sigma_1^{\pi^2-1} B \gamma^i$. Comme une substitution, pour être réelle dans les variables x_i, y_i , doit remplacer x'_i, y'_i par des fonctions conjuguées, on aura, d'après l'expression de M' en produit direct, $M = A$. N est p.g.c.d. de M et U . Comme $\gamma^{\pi-1}$ est la première puissance de γ qui soit dans U , on aura $N = \{B, \gamma^{\pi-1}\}$. Donc $M = \{N, \gamma\} = \Sigma_1^{\pi-1} M \gamma^i$. Et l'on a $M/N \equiv L/U$, et $L = UM$.

Pour former \mathfrak{N} et \mathfrak{U} , il suffit maintenant (7) de trouver une substitution σ de U telle que $s\sigma = \sigma ds$. On peut prendre pour σ , si ν est pair, la substitution

$$\iota = \begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ y'_i & x'_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & x_i \\ y_i & -y_i \end{vmatrix}$$

et, si ν est impair, la substitution $\gamma^{\frac{\pi-1}{2}} \iota$.

On voit, comme au n° 8, en remplaçant m_i par γ , que $\mathfrak{M} = \sum_i \mathfrak{U}(\gamma)^i$, en sorte que $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N}, (\gamma)$.

D'ailleurs, $(\gamma)^0$ étant la première puissance de (γ) dans \mathfrak{U} , on a $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{U}, (\gamma)\} = \sum_i \mathfrak{U}(\gamma)^i$. Donc $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N} = \mathfrak{L} \mid \mathfrak{U}$, et $\mathfrak{L} = \mathfrak{U}\mathfrak{M}$.

Cette relation montre que \mathfrak{U} contient un système de restes de $\mathfrak{L} \bmod \mathfrak{M}$. Plus précisément (E, 67), tout système de restes de $\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{N}$ est un système de restes de $\mathfrak{L} \bmod \mathfrak{M}$. Donc, *on obtient toutes les conjuguées de (s) dans \mathfrak{L} en transformant (s) par \mathfrak{U} , et, si (s) est dans \mathfrak{U} , (s) a les mêmes conjuguées dans \mathfrak{U} et \mathfrak{L} .*

Des remarques analogues sont à faire sur les normalisants qui seront considérés dans la suite. Je ne m'y arrêterai plus.

Détermination des s_2 de \mathfrak{U} .

10. Pour qu'une $s_2(s)$ de \mathfrak{L} soit dans \mathfrak{U} , il faut et suffit que $|s|$ soit une puissance $n^{\text{ième}}$ de \mathfrak{C} . Si (s) est de première espèce, donc de la forme (μ_r) , cette condition donne $(-1)^r = \iota^{kn}$ ou

$$\frac{\pi-1}{2}r = kn + l(\pi-1) = h\theta,$$

θ étant le p. g. c. d. de $n, \pi-1$, et h un entier quelconque. Si n est impair, ou d'une parité inférieure ou égale à celle de $\frac{\pi-1}{2}$, cette condition est toujours vérifiée. Si n est d'une parité supérieure à celle de $\frac{\pi-1}{2}$, elle exige que r soit paire. Il résulte du n° 8 que les s_2 de première espèce de \mathfrak{L} qui sont dans \mathfrak{U} y forment les mêmes classes que dans \mathfrak{L} .

11. Si (s) est de deuxième espèce ($n=2\nu$), c'est-à-dire (6) conjuguée réelle de $[\iota_0]\mu_\nu$, la condition indiquée donne $(-1)^\nu = \iota^{kn}$, ou $\frac{\pi-1}{2}\nu = kn + l(\pi-1) = h\theta$. Ici θ est toujours pair, $\theta = 2\theta'$; et si $\nu = \theta'\nu'$, la condition revient à ce que $\frac{\pi-1}{2}\nu'$ soit pair. Si $\frac{\pi-1}{2}$ est pair, cette condition est toujours vérifiée; si $\frac{\pi-1}{2}$ est impair, elle revient à ce que ν' soit pair, c'est-à-dire que n soit divisible par 4.

12. Ainsi, pour $n = 2$, toutes les s_2 de première espèce de \mathcal{L} sont conjuguées de $(-z) \left(z = \frac{x_1}{y_1} \right)$, de pôle $0, \infty$, qui est dans \mathcal{U} toujours et seulement si $\frac{\pi-1}{2}$ est pair. Et toutes les s_2 de deuxième espèce de \mathcal{L} sont conjuguées (6) de $\left(\frac{t}{z} \right)$, de pôles $\pm t_0$, qui est dans \mathcal{U} toujours et seulement si $\frac{\pi-1}{2}$ est impair. Donc \mathcal{U} contient toujours une de ces deux substitutions et une seule.

La substitution $\left(\frac{-k}{z} \right)$ (de première ou deuxième espèce suivant que $-k$ est carré ou non) de déterminant $+k$ représente donc l'unique classe de s_2 de \mathcal{U} ou l'unique classe de s_2 de \mathcal{L} hors de \mathcal{U} , suivant que k est carré ou non.

13. Cherchons directement les normalisants \mathfrak{N}_k et \mathfrak{U}_k de $\left(\frac{-k}{z} \right)$ dans \mathcal{L} et \mathcal{U} . Les pôles de $\left(\frac{-k}{z} \right)$ sont les racines $\pm \varepsilon$ de $z^2 = -k$. La substitution $\xi = \left(\frac{\frac{1}{2\varepsilon}(z-\varepsilon)}{z+\varepsilon} \right)$, $\xi^{-1} = \left(\frac{\varepsilon z + \frac{1}{2}}{-z + \frac{1}{2\varepsilon}} \right)$, transforme ε en 0 , $-\varepsilon$ en ∞ , et $\left(\frac{-k}{z} \right)$ en $(-z)$.

Soit d'abord $-k$ carré, donc ε réel. Si donc $\mathfrak{N}(\pi)$ est le normalisant de $(-z)$ dans \mathcal{L} , et $\mathfrak{U}(\pi)$ son p. g. c. d. avec \mathcal{U} , on a $\mathfrak{N}_k = \xi \mathfrak{N} \xi^{-1}$, $\mathfrak{U}_k = \xi \mathfrak{U} \xi^{-1}$. Or les conditions pour que $\sigma = \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$ soit permutable à $(-z)$, c'est-à-dire pour que $(-z)\sigma = \sigma(-z)$ sont

$$\alpha = \rho\alpha, \quad \beta = -\rho\beta, \quad \gamma = -\rho\gamma, \quad \delta = \rho\delta,$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Comme on tire de là

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \rho^2(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

on a $\rho^2 = 1$. Si $\rho = 1$, on a $\beta = \gamma = 0$, et σ est dans $\{(t z)\}$. Si $\rho = -1$, on a $\alpha = \delta = 0$, et σ a la forme $\left(\frac{t}{z} \right)$. Donc $\mathfrak{N} = \{(t z), \left(\frac{-1}{z} \right)\}$ et $\mathfrak{U} = \{(t^2 z), \left(\frac{-1}{z} \right)\}$. Ces deux groupes sont diédraux.

Soit $-k$ non carré. Alors $\xi^{-1} \mathfrak{M}_k \xi$ est dans $\mathfrak{D}(\pi^2) = \left\{ (t^2 z), \left(\frac{-1}{z} \right) \right\}$ (le déterminant de toute substitution de \mathfrak{M}_k , étant réel, est carré dans \mathcal{C}'). Et toute substitution réelle de $\xi \mathfrak{D}(\pi^2) \xi^{-1}$ est dans \mathfrak{M}_k .

14. Cherchons d'abord les substitutions réelles de $\xi \{ (t^2 z) \} \xi^{-1}$. La substitution générale $\xi (t^2 z) \xi^{-1}$ peut s'écrire, en posant $t' = g$, sous la forme

$$\sigma = \xi \left(\frac{g z}{g^{-1}} \right) \xi^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{g' + g^{-1}}{2} + \varepsilon \frac{g^{-1} - g'}{2} \\ \varepsilon \frac{g^{-1} - g'}{2\varepsilon} + \frac{g' + g^{-1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour que σ soit réel, il faut et suffit qu'il existe un facteur ρ tel que $\rho(g + g^{-1})$ et $\varepsilon \rho(g - g^{-1})$ soient réels, c'est-à-dire que l'on ait

$$\rho^\pi (g + g^{-1})^\pi = \rho (g + g^{-1}), \quad \varepsilon^\pi \rho^\pi (g - g^{-1})^\pi = \varepsilon \rho (g - g^{-1}),$$

ou

$$\frac{g^\pi - g^{-\pi}}{g + g^{-1}} = \rho^{1-\pi}, \quad \frac{g^\pi - g^{-\pi}}{g - g^{-1}} \varepsilon^{\pi-1} = \rho^{1-\pi}.$$

En observant que $\varepsilon^{\pi-1} = (-k)^{\frac{(\pi-1)}{2}} = -1$, on obtient, par soustraction, $g^{2(\pi+1)} = 1$ ou $t'^{2\gamma(\pi+1)} = 1$, ou $\gamma = m \frac{\pi-1}{2}$, donc $g = j_0^m$. On a alors, d'après une propriété usuelle des rapports égaux, $\rho^{1-\pi} = j_0^{m(1+\pi)}$; ou $\rho^{1-\pi} = (-1)^m$. D'où, si $\rho = t'^r$, $r = \mu \frac{\pi+1}{2}$, μ ayant la parité de m . Comme le déterminant de σ est 1, celui Δ de la substitution obtenue en multipliant ses coefficients par ρ est ρ^2 ; et $\Delta^{\frac{\pi-1}{2}} = (-1)^m$. Donc Δ est carré ou non carré dans \mathcal{C} , c'est-à-dire que σ est dans \mathfrak{D}_k ou dans \mathfrak{M}_k hors de \mathfrak{D}_k suivant que m est pair ou impair.

Ainsi les p. g. c. d. respectifs de $\xi \{ (t^2 z) \} \xi^{-1}$ avec \mathfrak{M}_k ou \mathfrak{D}_k sont $\mathcal{O} = \xi \{ (j z) \} \xi^{-1}$, d'ordre $\pi + 1$ et $\mathcal{O}_0 = \xi \{ (j^2 z) \} \xi^{-1}$, d'ordre $\frac{\pi+1}{2}$. $\mathfrak{D}(\pi^2)$ étant diédral, \mathfrak{M}_k et \mathfrak{D}_k seront des groupes diédraux, ayant \mathcal{O} et \mathcal{O}_0 pour groupes cycliques maximums.

Posons $g = \alpha + \beta\varepsilon$ (α et β réels), d'où $g^\pi = \alpha - \beta\varepsilon$, ce qui détermine α et β par g et g^π . Comme $g^\pi = (-1)^m g^{-1}$, on peut exprimer g^{-1} , comme g , en fonction linéaire de α et β , on aura, pour m pair,

$\sigma = \xi \left(\frac{g\alpha}{g^{-1}} \right) \xi^{-1} = \left(\frac{\alpha\beta + \beta k}{-\beta\alpha + \alpha} \right)$, et, pour $g = j$, c'est-à-dire pour $m = 2$,
 $\{\sigma\} = \mathcal{O}^0$; pour m impair (alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}^0 + \mathcal{O}^0\sigma$), $\sigma = \left(\frac{\beta\alpha - \alpha}{\frac{\alpha\alpha}{k} + \beta} \right)$, et,

pour $g = j_0$, c'est-à-dire, pour $m = 1$, $\{\sigma\} = \mathcal{O}$.

A priori, chacune de ces substitutions, ne dépendant que de g^2 , a exactement $\frac{\pi+1}{2}$ déterminations distinctes. On voit d'ailleurs que la première substitution parcourt les $\frac{\pi+1}{2}$ substitutions de \mathcal{O}^0 quand on y donne à $\alpha : \beta$ les $\frac{\pi+1}{2}$ déterminations qui rendent $\alpha^2 + k\beta^2$ carré non nul (E, 44). De même la deuxième substitution parcourt les $\frac{\pi+1}{2}$ substitutions de \mathcal{O} hors de \mathcal{O}^0 quand on y donne à $\alpha : \beta$ les $\frac{\pi+1}{2}$ déterminations qui rendent $\frac{\alpha^2}{k} + \beta^2$ non carré. Chacune des deux formes trouvées pour σ coïncide avec l'autre (et par suite parcourt les $\pi+1$ substitutions de \mathcal{O}) quand on laisse indéterminé le caractère quadratique de son déterminant.

15. Il suffit maintenant de trouver une substitution de \mathcal{O}^0 hors de \mathcal{O}^0 , c'est-à-dire une substitution réelle de $\xi \mathcal{O}(\pi^2) \xi^{-1}$ hors de $\xi \{v^2\alpha\} \xi^{-1}$, et dont le déterminant soit carré dans \mathcal{C} . La forme générale de ces substitutions est $\sigma = \xi \left(\frac{-1}{\alpha} \right) (v^2\alpha) \xi^{-1}$, ou, en posant $v^2\alpha = h$,

$$\sigma = \xi \left(\frac{-h}{h^{-1}\alpha} \right) \xi^{-1} = \left[\frac{\alpha \left(\frac{h^{-1}}{4\varepsilon} - h\varepsilon \right) - \varepsilon \left(h\varepsilon + \frac{h^{-1}}{4\varepsilon} \right)}{\frac{\alpha}{\varepsilon} \left(\frac{h^{-1}}{4\varepsilon} + h\varepsilon \right) - \left(\frac{h^{-1}}{4\varepsilon} - h\varepsilon \right)} \right],$$

ξ et ε étant définis au n° 13.

Pour que σ soit réelle, il faut et suffit qu'il existe un facteur τ tel que $\tau \left(\frac{h^{-1}}{4\varepsilon} - h\varepsilon \right)$ et $\tau\varepsilon \left(\frac{h^{-1}}{4\varepsilon} + h\varepsilon \right)$ soient réels, ou que $\frac{\tau\varepsilon}{h} \left(h^2 + \frac{1}{4k} \right)$ et $\frac{\tau\varepsilon}{h} \varepsilon \left(h^2 - \frac{1}{4k} \right)$ soient réels, c'est-à-dire, en posant $\frac{\tau\varepsilon}{h} = \tau'$ et $\frac{1}{4k} = k'$, que l'on ait

$$\tau'\pi(h^2 + k')\pi = \tau'(h^2 + k')$$

et

$$\tau'\pi\varepsilon\pi(h^2 - k')\pi = \tau'\varepsilon(h^2 - k'),$$

ou, puisque k' est réel et que $\varepsilon^{\pi-1} = -1$,

$$\frac{h^2 \varepsilon^\pi + k'}{h^2 + k'} = - \frac{h^2 \varepsilon^\pi - k'}{h^2 - k'} = \varepsilon'^{1-\pi}.$$

Il faut donc et suffit, pour la réalité de σ , que $h^{2(\pi+1)} = k'^2$. Or k' étant réel, on a $k' = t^z = t'^{z(\pi+1)}$. Donc $\eta = z + m \frac{\pi-1}{2}$, m entier arbitraire, $h^{\pi+1} = (-1)^m k'$, $\varepsilon'^{1-\pi} = (-1)^m h^{\pi-1}$, $\varepsilon \varepsilon' = h \varepsilon' = t'^{\frac{m(\pi+1)}{2} + (\pi+1)} = t'^{\frac{(m+2)\pi+1}{2}}$.

Comme le déterminant de σ est 1, celui Δ de la substitution obtenue en multipliant les coefficients par ε est ε^2 et $\Delta^{\frac{\pi-1}{2}} = \varepsilon^{\pi-1} = (-1)^{m+1}$. Donc Δ est carré ou non carré dans \mathcal{C} , c'est-à-dire que σ est dans \mathcal{D}_k ou hors de \mathcal{D}_k dans \mathcal{N}_k suivant que m est impair ou pair. On a d'ailleurs $\left(\frac{-t'^{2\eta}}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{-t'^{2z+m(\pi-1)}}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{-t'^{2z}}{\varepsilon}\right)(j^m(z))$. Ainsi, $j^m(z)$ étant dans $\{(t'^2 z)\}$, on a $\mathcal{N}_k = \left\{ \mathcal{O}, \xi \left(\frac{-t'^{2z}}{\varepsilon} \right) \xi^{-1} \right\}$, $\mathcal{D}_k = \left\{ \mathcal{O}_0, \xi \left(\frac{-t'^{2z}}{\varepsilon} \right) \xi^{-1} \right\}$.

Prenons donc $m = 1$; d'où $\eta = k + \frac{\pi-1}{2}$, $h^{\pi+1} = -k'$, on a $\mathcal{N}_k = \left\{ \mathcal{O}, \xi \left(\frac{-t'^{2z+\pi-1}}{\varepsilon} \right) \xi^{-1} \right\}$, $\mathcal{D}_k = \left\{ \mathcal{O}_0, \xi \left(\frac{-t'^{2z+\pi-1}}{\varepsilon} \right) \xi^{-1} \right\}$.

Posons $h = \alpha + \beta \varepsilon$ (α et β réels), d'où $h^\pi = \alpha - \beta \varepsilon$, ce qui détermine α et β par h et h^π . Comme $h^\pi = -h^{-1} k'$, on peut exprimer h^{-1} , comme h , en fonction linéaire de α et β , ce qui donne

$$\sigma = \left(\frac{\beta k z + \alpha k}{\alpha z - \beta k} \right).$$

On voit, comme au n° 14, que cette substitution parcourt les $\frac{\pi+1}{2} s_2$ de \mathcal{D}_k hors de \mathcal{O}_0 quand on y donne à $\alpha : \beta$ les $\frac{\pi+1}{2}$ déterminations qui rendent son déterminant carré.

CHAPITRE II.

GROUPES HERMITIEN ET GAUCHE.

I. — Groupe hermitien.

16. Je considérerai à la fois les deux formes canoniques respectives

$$\begin{aligned} h &= \sum_1^{\nu} (x_i y_i - y_i x_i) + \omega \eta x x & (\omega = \nu - \nu; \eta = 0, 1), \\ \varepsilon &= \sum_1^{\nu} z_i \bar{z}_i & (n = 2\nu + \eta). \end{aligned}$$

de ωa et a . La substitution la plus générale qui transforme $h_0 = \omega(xy - yx)$ en $\varepsilon_0 = x\dot{x} + y\dot{y}$ est

$$t = \begin{vmatrix} x & \alpha x + \beta y \\ y & \alpha q x + \beta \dot{q} y \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \omega \alpha \dot{\alpha} &= -(q - \dot{q})^{-1}, \\ \omega \beta \dot{\beta} &= (q - \dot{q})^{-1}. \end{aligned}$$

Remarquons, pour la suite, que si q, α, β vérifient $q = -\omega^{-1}$, $\alpha \dot{\alpha} = \frac{1}{2}$, $\beta \dot{\beta} = -\frac{1}{2}$, t transforme les substitutions

$$\mu = \begin{vmatrix} x & \omega y \\ y & \omega^{-1} x \end{vmatrix}, \quad \mu' = \begin{vmatrix} x & -\omega y \\ y & -\omega^{-1} x \end{vmatrix},$$

respectivement en

$$\lambda_x = \begin{vmatrix} x & -x \\ y & -y \end{vmatrix}, \quad \lambda_y = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}.$$

Nous supposons que les variables de h sont liées à celles de ε par

$$(1) \begin{cases} x_k = \alpha z_{2k-1} + \beta z_{2k}, & q = -\omega^{-1}, & \alpha \dot{\alpha} = \frac{1}{2}, & \beta \dot{\beta} = -\frac{1}{2}, \\ y_k = \alpha q z_{2k-1} + \beta \dot{q} z_{2k}, & k = 1, \dots, \nu, \\ x = z_n & \text{si } \eta = 1. \end{cases}$$

17. Je dis d'abord que toute $s_2 s$ de A est conjuguée d'une s_2 du diviseur Δ correspondant, dans A , au p. p. c. m. (abélien principal d'ordre 2^n) Δ_ε des $|z_i, -z_i| = \lambda_i$ de E , ou au p. p. c. m. Δ_h de H des $\mu_i = \begin{vmatrix} x_i & \omega y_i \\ y_i & \omega^{-1} x_i \end{vmatrix} = \tau_i m_{i, \omega}$, des $\mu'_i = \begin{vmatrix} x_i & -\omega y_i \\ y_i & -\omega^{-1} x_i \end{vmatrix} = \tau_i m_{i, -\omega}$, et de λ_n si n est impair ⁽¹⁾. On remarquera que le changement de variables indiqué à la fin du n° 1 transforme μ_k et μ'_k respectivement en λ_{2k-1} et λ_{2k} (qui ont la forme canonique), et que $\mu_k \mu'_k = m_{k, -1} = d_k$.

En effet, si s déplace tous les points, elle coïncide avec $d = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, puisque sa forme canonique est évidemment d , et que d est normale dans L . Soit donc $s \neq d$, et par conséquent fixant au moins un point. Or, en désignant par q_k l'ensemble des points vérifiant $a = \lambda$, λ parcourant \mathcal{C} (il est clair que la relation $a = \lambda$ reste inaltérée dans tout changement de variables), on a vu (II, 1) que A a π systèmes d'intran-

(1) On a posé (I, 2, 5) $\tau_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}$, et $m_{i, \rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix}$.

sitivité, qui sont les q_λ , le degré de q_0 étant $s_{0n} = [\pi^n - (-1)^n]$ $[\pi^{n-1} - (-1)^{n-1}]$, et celui de q_λ ($\lambda \neq 0$) étant $s_{1n} = \pi^{2n-1} - (-1)^n \pi^{n-1}$. D'après l'énoncé, s fixera au moins un point hors de q_0 ; mais, pour la démonstration, nous devons distinguer deux cas.

Supposons d'abord que s fixe au moins un point hors de q_0 . Comme s est permutable à $[\tau]$ qui permute circulairement les q_λ ($\lambda \neq 0$), s fixe au moins un point de chaque q_λ ($\lambda \neq 0$). En prenant alors les variables qui ramènent a à la forme canonique ε , on peut supposer que s est dans le diviseur X_1 de E qui fixe le point $(1, 0, \dots, 0)$ de q_1 . Dans toute matrice (α_{ki}) de X_1 , les éléments $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}$ sont nuls. Les équations $\sum_i \alpha_{ki} \alpha_{li} = f \varepsilon_{kl} (I, 3)$ montrent donc ici que les matrices de X_1 , si l'on y néglige la première ligne et la première colonne, sont celles du groupe E_1 de la forme $\varepsilon_1 = \varepsilon - z_1 \dot{z}_1$. La sous-matrice s_1 , ainsi déduite de s , est d'ordre 2. Cela résulte des conditions $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \alpha_{jk} = \varepsilon_{ik}$, jointes à $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{n1} = 0$. On peut admettre le théorème pour E_1 , qui comporte une variable de moins. On peut donc, en transformant au besoin s dans E , supposer que s_1 est une matrice diagonale formée d'éléments égaux à ± 1 . Alors les équations $\sum \alpha_{ik} \alpha_{il} = \varepsilon_{kl} (I, 3)$ donnent $\alpha_{1k} = 0$. Le théorème se trouve donc vérifié pour E , et il est évidemment vérifié pour $n = 1$.

Supposons maintenant que s ne fixe aucun point hors de q_0 , donc un point au moins de q_0 . Prenons les variables qui ramènent a à la forme canonique $\omega^{-1} h$, et par suite A à H . Alors on peut supposer que s est dans le diviseur X de H qui fixe le point $(1, 0, \dots, 0)$ de q_0 .

On sait (II, 3) qu'une telle s_2 a la forme $\alpha_1 \varpi$, α_1 étant dans le groupe H_1 de la forme $h_1 = h - (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1)$ (si $n = 2$, on fera $H_1 = 1$), et ϖ étant dans le p. p. c. m. P des substitutions $V_{1k\rho}$, $U_{1k\rho}$, $U_{10\rho}$, $u_{1\lambda}$ ($k = 2, \dots, \nu$; ρ parcourant \mathcal{C}' et λ parcourant \mathcal{C}) (1). Comme

(1) Je rappelle ici les définitions (les variables non écrites restent inaltérées) :

$$\begin{aligned}
 V_{1k\rho} &= \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \rho y_i \end{vmatrix}, & U_{1k\rho} &= \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k + \rho y_i \end{vmatrix}; \\
 U_{k0\rho} &= \begin{vmatrix} x & x + \rho y_k \\ x_k & x_k - \omega \rho x - \rho \dot{\rho} y_k \end{vmatrix}, & \text{si } \eta &= 1; & U_{k0\rho} &= 0, & \text{si } \eta &= 0; \\
 u_{1\lambda} &= \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda y_i \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

$s^2 = \mathbf{1}$, ou $\alpha_1 \varpi = \varpi^{-1} \alpha_1^{-1}$, et que α_1 est permutable à P, α_1^2 est dans P. Or H_1 est premier à P (II, 3). Donc $\alpha_1^2 = \mathbf{1}$, et $\{\alpha_1, \varpi\}$ est diédral, ϖ étant d'ordre impair. Donc $s = \alpha_1 \varpi$ est conjuguée de $\alpha_1 (E, 20)$. Or on peut admettre que α_1 est conjuguée d'une s_2 de $\{\mu_2, \mu'_2, \dots\}$, qui divise Δ_n .

18. Toute s_2 de A^0 est conjuguée, dans A^0 , d'une s^2 du p. g. c. d. Δ_0 de Δ et A^0 . (Le p. g. c. d. Δ_ε^0 de Δ_ε , E^0 dérive évidemment des $\lambda_i \lambda_l$, ou seulement des $\lambda_1 \lambda_k$, car le produit de $\lambda_1 \lambda_2$ par $\lambda_1 \lambda_r$ est $\lambda_2 \lambda_r, \dots$; le p. g. c. d. Δ_n^0 de Δ_n et H^0 dérive donc des $\mu_i \mu_k, \mu_i \mu'_k$.) On le voit de même, pour $n > 2$, en remplaçant X_1 et X par leurs p. g. c. d. respectifs avec E^0 et H^0 , A^0 ayant alors les mêmes systèmes d'intransitivité que A (II, 3).

Pour $n = 2$, la seule différence est que q_0 se partage en $\pi + 1$ systèmes, permutés circulairement par $[j]$.

19. Toute s_2 $s \neq d$ de H' est conjuguée, si n est impair, d'une s_2 de Δ_n (alors H' n'a pas de s_2 hors de H), et, si n est pair, d'une s_2 de $\{\Delta_n, \varphi\}$, en posant $\varphi = \gamma^{\frac{\pi-1}{2}} = \Pi \varphi_k$ où $\varphi_k = \begin{vmatrix} x_k & -x_k \\ y_k & y_k \end{vmatrix}$ (1). On remarquera que le changement de variables (1) transforme φ_k en

$$\psi_k = \begin{vmatrix} \varpi_{2k-1} & -g \varpi_{2k} \\ \varpi_{2k} & -g^{-1} \varpi_{2k-1} \end{vmatrix},$$

où $g = \frac{\beta}{\alpha}$, donc φ en $\psi_1 \dots \psi_\nu = \psi$. Les conditions $\alpha \dot{\alpha} = \frac{1}{2}$, $\beta \dot{\beta} = -\frac{1}{2}$ équivalent à $\alpha \dot{\alpha} = \frac{1}{2}$, $g \dot{g} = -1$. On peut dès lors énoncer le théorème pour le groupe E.

Supposons d'abord que s fixe au moins un point hors de q_0 , c'est-à-dire, comme précédemment, un point de q_1 . En prenant les variables qui ramènent a à ε , on peut supposer que s est dans le diviseur X'_1 de E' qui fixe le point $(1, 0, \dots, 0)$ de q_1 . Comme E est isomorphe à son constituant transitif de champ q_1 et E' à son constituant transitif dont le champ est formé des $\pi - 1$ q_i autres que q_0 (II, 4), on a

(1) Je rappelle que $H' = \{H, \gamma\}$, γ étant la substitution qui multiplie chaque x_i où $i \neq 0$ par $\iota^{\pi+1} (= \iota)$ et $x_0 = x$ par ι sans altérer les y_i (I, 2).

$(E, X_1) = s_{1n}$, $(E', X'_1) = (\pi - 1)s_{1n}$. Comme $(E', E) = \pi - 1$, on voit que $X'_1 = X_1$, en sorte que s est dans E , donc (17) conjuguée d'une s_2 de Δ_ε .

Supposons maintenant que s ne fixe aucun point hors de g_0 . On démontrera le théorème comme au n° 17, en prenant les variables de h , et en remplaçant X par $X' = \{X, \tau_1^{-1} \gamma \tau_1\}$ (II, 3) et A_1 par $\tau_1^{-1} A'_1 \tau_1 = \{A_1, \tau_1^{-1} \gamma \tau_1\}$ (1). Comme $\tau_1^{-1} \gamma \tau_1$ est permutable à A_1 et P (II, 3), l'égalité $X' = \{A_1, P, \tau_1^{-1} \gamma \tau_1\} = \{\tau_1^{-1} A'_1 \tau_1, P\}$ peut s'écrire

$$X' = \tau_1^{-1} A'_1 \tau_1 P = P \tau_1^{-1} A'_1 \tau_1 = A_1 \cdot \tau_1^{-1} \gamma \tau_1 \cdot P.$$

On devra donc remplacer α_1 par $\alpha'_1 = \alpha_1 \tau_1^{-1} \gamma^l \tau_1$, et l'on verra que s est conjuguée de α'_1 . Or, α_1 étant dans A_1 et α'_1 , d'ordre 2, multipliant h par ± 1 , on a $\gamma^l = \varphi^l$, $l = 0$ ou 1 . D'autre part, $\tau_1^{-1} A'_1 \tau_1$ étant isomorphe à son action sur les variables de h_1 , on peut admettre le théorème pour ce dernier groupe, c'est-à-dire que l'action β_1 de α'_1 sur les variables de h_1 est conjuguée, si n est impair, d'une s_2 de Δ_{h_1} , et, si n est pair, d'une s_2 de $\{\Delta_{h_1}, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. Si β_1 conserve h_1 , $l = 0$, $\alpha'_1 = \alpha_1$ est dans H et $\neq d$ (elle laisse x_1 et y_1 inaltérés) donc (17) α_1 , et par suite s , fixe un point hors de g^0 contre l'hypothèse. Donc β_1 multiplie h_1 par -1 et n est pair; donc $l = 1$. Alors β_1 est conjuguée d'une s_2 de $\Delta_{h_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}$ et $\tau_1^{-1} \varphi_1 \tau_1$ d'une s_2 de $\Delta_{h-h_1, \varphi_1}$. Donc α'_1 est conjuguée d'une s_2 de $\Delta_h \varphi$.

20. La conjuguée dans Δ_ε d'une s_2 de E peut, par une permutation des z_r (qui est dans E), être transformée en $\Pi'_1 \lambda_i = l_r$ ($l_n = d$). Comme l_r et $l_{r'}$ n'ont pas la même forme canonique pour $r' \neq r$, les n l_r représentent n classes distinctes dans E' comme dans E ; et ces classes sont toutes les classes de E . Les ν l_{2k} représentent toutes les classes de E^0 .

Les s_2 de H' qui sont hors de H sont conjugués des s_2 de $\Delta_h \varphi$. Or une s_2 s de $\Delta_h \varphi$ est nécessairement le produit par φ d'une substitution de Δ_h permutable à φ , c'est-à-dire dont l'action sur x_k, y_k soit permutable à φ_k . Donc s est dans $D\varphi$, D étant le p. p. c. m. des d_k . Comme $\tau_k^{-1} \varphi_k \tau_k = d_k \varphi_k$, on peut transformer s en φ par un produit convenable des τ_k . Donc, *A' n'a, hors de A, qu'une classe de s_2 , représentée par φ , et qui n'existe que pour n pair.*

(1) Le groupe $A'_1 = \{A_1, \gamma\}$ (II, 3; I, 2) laisse la seconde variable y_1 inaltérée. C'est donc $\tau_1^{-1} A'_1 \tau_1$ qui laisse la seule variable x_1 inaltérée.

21. Cherchons les normalisants N, N', N^0, A, A', A'' d'une s_2 de A' .

Soit $s = l_r (a = \varepsilon)$. N est le produit direct du groupe E^1 de $\Sigma'_i z_i \dot{z}_i$ par le groupe E^2 de $\Sigma''_{r+1} z_i \dot{z}_i$ [cf. (3)]. Il est clair que $N' = \Sigma''_n N[\dot{z}']^k$.

En désignant par E^0 le diviseur de E^1 formé des substitutions de déterminant 1, en posant $|z_r, jz_r| = g_1, |z_n, jz_n| = g_2$, on a (I, 2) $E^1 = \Sigma''_0 E^{i0} g_i^k$. D'où $N^0 = \Sigma''_0 E^{i0} E^{20} g_1^k g_2^{-k}$.

Soit $s = \varphi (a = h, n = 2\nu)$. Dans toute substitution α de $H'(2\nu, \pi)$ permutable à φ , la matrice des α'_{ik} et celle des β_{ik} [avec les notations de I, 3] sont nulles. Soient ρ la matrice des α_{ik} , σ celle des β'_{ik} . L'une des deux matrices ρ, σ peut être prise arbitrairement; l'autre est alors déterminée par les relations (6) de I, 3 qui donnent ici

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} \beta'_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ f \text{ (réel)} & \text{si } j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, \nu)$$

ou bien $\sigma \bar{\rho} = fe$, e étant la matrice-unité d'ordre ν , d'où $\sigma = f\bar{\rho}^{-1}$. Donc N' est isomorphe au produit direct de $L(\nu, \pi^2)$ par un $g_{\pi-1}$ cyclique.

$N, p. g. c. d. de N'$ et H , est formé des α où $\sigma = \bar{\rho}^{-1}$, et est par suite isomorphe à $L(\nu, \pi^2)$. Comme γ est évidemment permutable à φ , on a $N' = \{N, \gamma\} = \Sigma''_0 N \gamma^k$.

$N^0, p. g. c. d. de N$ et H^0 , est formé des α où $|\alpha| = |\rho| |\sigma| = 1$, c'est-à-dire où $|\rho| = |\bar{\rho}|$ est réel. On a évidemment $N = \Sigma''_0 N^0 m_{i\nu}^k$.

Ainsi les systèmes de restes de N et $N' \bmod N^0$ sont aussi des systèmes de restes de A et $A' \bmod A^0$ [I, (2)]. Donc, quel que soit s , ses conjuguées dans A' s'obtiennent en la transformant par A^0 [on le savait déjà quand s est dans A^0 (18)].

22. Détermination des s_2 de $\mathcal{A} (= \mathcal{A}')$. — Soit s une substitution de A telle que (s) soit une s_2 de \mathcal{A} . s^2 est donc dans J , et, si $s^2 = [j^k]$, $s[j_0^{-k}]$ est une s_2 de A' qui multiplie a par $(-1)^k$. Donc les s_2 de \mathcal{A} sont les $s_2 \neq d$ de A' où l'on regarde les variables comme homogènes. Elles sont donc conjuguées des (l_r) si n est impair, des (l_r) et de (ψ) si n est pair. Dans ce dernier cas, on peut remplacer φ par $\mu = \varphi[j_0] = \Pi'_i m_i, -j_0$, qui est dans H et ψ par $\mu_3 = \psi[j_0]$ qui est dans E .

23. Il reste à étudier la distribution en classes de ces s_2 de \mathcal{A} . Or

si σ et σ' sont deux s_2 de A' non conjugués dans A' , (σ) et (σ') ne peuvent l'être dans \mathfrak{A} que si σ' est conjugué dans A' d'une s_2 de la forme $\sigma[i^{2k}]$ qui est nécessairement σd . Il est clair d'ailleurs que $dl_r = \prod_{r+1}^n \lambda_i$ est conjuguée dans A de l_{n-r} . D'autre part, on a vu que ψ n'est conjuguée d'aucune l_r dans A' . Il en résulte que (ψ) ne peut être conjuguée d'une (l_r) dans \mathfrak{A} .

Donc les classes de s_2 de \mathfrak{A} sont toutes représentées, si n est impair, par les (l_r) où $r < \frac{n}{2}$, si n est pair, par les (l_r) où $r \leq \frac{n}{2}$ et (ψ) .

24. Cherchons les normalisants respectifs \mathfrak{N} et \mathfrak{N}^0 dans \mathfrak{A} ($=\mathfrak{A}'$) et \mathfrak{A}^0 d'une $s_2(s)$ de \mathfrak{A} .

Soit α une substitution telle que $\alpha^{-1} s \alpha = [i^{2k}]s$. Comme s^2 est dans I' , on voit, en élevant cette relation au carré, que $i^{2k} = \pm 1$; d'où $i^k = \pm 1$. Si $i^k = 1$, α est dans N . Si $i^k = -1$, α^2 est dans N , et $\alpha^{-1} s \alpha = ds$.

Soit $s = l_r$ ($\alpha = \varepsilon$). Si $\alpha^{-1} l_r \alpha = dl_k$, l_r a autant de multiplicateurs -1 que de multiplicateurs $+1$; d'où $n = 2\nu$, et $r = \nu$, et la relation $l_r \alpha = d \alpha l_r$ exige, on le voit directement, que α remplace les ν premières variables par des fonctions des ν dernières, et inversement. Donc si n est impair, ou si $n = 2\nu$, avec $r \neq \nu$, $\mathfrak{N} = (N)$ et $\mathfrak{N}^0 = (N^0)$. Si $n = 2\nu$ et $r = \nu$, on a $\mathfrak{N} = (N + N\zeta)$, ζ étant la substitution qui échange z_i en $z_{\nu+i}$, pour $i = 1, \dots, \nu$. Si ν est pair, ζ est dans E^0 , et l'on a $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + N^0 \zeta)$. Si ν est impair, ζ est hors de E^0 , et l'on a $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + N^0 g_2^{\frac{\nu+1}{2}} \zeta)$, g_2 ayant le sens indiqué au n° 21 (le carré de $g_2^{\frac{\nu+1}{2}} \zeta$ est dans N_0), et $(^1) \mathfrak{N} = \Sigma_0^{\nu-1} \mathfrak{N}_0(g_2^k)$.

Soit $s = \mu$ ($\alpha = h$, $n = 2\nu$). Si $\alpha^{-1} \mu \alpha = d\mu$, il faut, on le voit directement en écrivant cette relation sous la forme $\mu \alpha = d \alpha \mu$, que α remplace les x_i par des fonctions des seuls y_i , et les y_i par des fonctions des seuls x_i . Donc en posant $\prod_1^\nu \tau_i = \tau \left[\tau_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix} (I, 6) \right]$ on a $\mathfrak{N} = (N + N\tau)$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + N^0 \tau)$, et, comme précédemment, $\mathfrak{N} = \Sigma_0^{\nu-1} \mathfrak{N}^0(m_{1\tau})^k$.

(1) Cf. I, p. 286-287 en remplaçant m par g_2 et, selon les cas, A' par N' , $\{N', \zeta\}$ ou $\{N', d_n \zeta\} = \{N', \zeta\}$, A par N_ζ , $\{N, \zeta\}$ ou $\{N, d_n \zeta\} = \{N, \zeta\}$, A^0 par N^0 , $\{N^0, \zeta\}$ ou $\{N^0, d_n \zeta\}$.

Comme, pour toute détermination de s , le système de restes de $\mathcal{N} \bmod \mathcal{N}^0$ est aussi un système de restes de $\mathcal{C} \bmod \mathcal{C}^0$, on voit que, quelle que soit s , ses conjuguées dans \mathcal{C} s'obtiennent en la transformant par \mathcal{C}^0 .

25. Cherchons enfin ceux des représentants (l_r) et (μ_ε) qui sont dans \mathcal{C}^0 . Pour que $[s]$ soit dans $\mathcal{C}^0 \equiv \mathbf{A}_0 \mathbf{J} / \mathbf{J}$, il faut et suffit que s , supposée dans \mathbf{A} , soit dans $\mathbf{A}^0 \mathbf{J}$, c'est-à-dire qu'il y ait une puissance j^ν de j telle $[[j^\nu]s] = 1$.

Soit d'abord $s = l_r (a = \varepsilon)$, cette condition s'écrit $j^{\nu y + r \frac{\pi+1}{2}} = 1$; d'où $\nu y + r \frac{\pi+1}{2} = z(\pi+1)$, ou $\nu y = (2z - r) \frac{\pi+1}{2}$. Soit n_0 le p. g. c. d. de $n = n_0 n'$ et $\frac{\pi+1}{2} = n_0 \pi'$. L'égalité précédente exige que $2z \equiv r \pmod{n'}$. Si n' est impair, cela est toujours possible. Si n' est pair, il faut que r soit pair. Donc, *si n' est impair, toute (l_r) est dans \mathcal{C}^0 ; si n' est pair, (l_r) est dans \mathcal{C}^0 toujours et seulement si r est pair.*

II. — Groupe gauche.

26. L'étude des s_2 de G et G' est toute semblable à celle des s_2 de H et H' pour $n = 2\nu$, avec cette simplification que, G étant transitif, toute s_2 de G' est conjuguée d'une s_2 de X ou de X' .

On verra donc, par récurrence comme au n° 17 (*cf.* II, 10), que toute s_2 de G est conjuguée d'une s_2 de $D = \{d_1, \dots, d_\nu\}^{(1)}$ (16), et, par suite, que G a ν classes de s_2 représentées par les ν substitutions $d_1 d_2 \dots d_r = d_{12\dots r}$, dont les formes canoniques sont toutes distinctes, et, comme aux n°s 18 et 20, que G' n'a, hors de G , qu'une classe de s_2 représentée par $\varphi = \gamma^{\frac{\pi-1}{2}}$, les classes de s_2 de G étant en même temps des classes de s_2 de G' .

27. Désignons par N et N' les normalisants respectifs d'une s_2 s de G dans G et G' ; par G^1 et G^2 les groupes respectifs des formes

(1) On sait que $G(2, \pi) = U(2, \pi) \equiv H^0(2, \pi)$ (I, 5, 19) n'a pas d'autre s_2 que d .

$\Sigma_i^n(x_i y'_i - y_i x'_i)$ et $\Sigma_{i+1}^n(x_i y'_i - y_i x'_i)$; par G^1 et G^2 les groupes totaux (I, 1) de ces deux formes.

Soit $s = d_{1, \dots, r}$. Alors $N = G^1 G^2$ et $N' = G^1 G'^2 = \Sigma_0^{n-2} N \gamma^k$ (cf. 21) (1).

Soit $s = \varphi$. Alors N' est formé des substitutions α où la matrice des α'_{ik} et celle des β_{ik} (en employant les notations de I, 17) sont nulles, et où celle φ des α_{ik} est liée à celle σ des β'_{ik} par la seule relation $\sigma = f \bar{\varphi}^{-1}$, f étant un élément arbitraire de \mathcal{C} (cf. 21). Donc N' est isomorphe au produit direct de $L(\nu, \pi)$ par un $\bar{g}_{\pi-1}$ cyclique. $N, p. g. c. d.$ de N' et G est formé des α de N' où $\sigma = \bar{\varphi}^{-1}$, et est par conséquent isomorphe à $L(\nu, \pi)$. Ici encore $N' = \Sigma_0^{n-2} N \gamma^k$.

Comme, pour toute détermination de s , le système des restes de $N' \bmod N$ est aussi un système de restes de $G' \bmod G$, les conjuguées dans G' de toute s_2 de G' s'obtiennent en la transformant par G .

Détermination des s_2 de \mathcal{G}' .

28. Soit s une substitution telle que (s) soit d'ordre 2 dans \mathcal{G}' , c'est-à-dire que $s^2 = [1^m]$.

Si $m = 2h$, je dirai que s et sa classe sont de première espèce. Alors $s[1^{-h}]$ est une s_2 de G' . Il suffit donc, pour obtenir toutes les s_2 de première espèce de \mathcal{G}' , de regarder les variables comme homogènes dans les s_2 de G' . Il reste à étudier leur distribution en classes.

Si σ et σ' sont deux s_2 de G' non conjuguées dans G' , (σ) et (σ') sont conjuguées dans \mathcal{G}' toujours et seulement si σ' est conjuguée, dans G' , d'une substitution de la forme $\sigma[1^k]$. Comme les multiplicateurs de σ et σ' sont ± 1 , il faut que $[1^k] = d$; donc il faut et suffit que σ' soit conjuguée de σd dans G' . On peut supposer (26), que σ est une $d_{1, \dots, r}$ ou φ . Comme $d d_{1, \dots, r} = d_{\nu+1, \dots, r}$ est transformée par $\Pi_{r+1}^\nu T_{i, \nu-i+1}$ (2) en $d_{1, \dots, \nu-r}$, celles des classes de s_2 de \mathcal{G}' qui correspondent aux s_2 de G peuvent être représentées par les $(d_{1, \dots, r})$ où $r \leq \frac{\nu}{2}$. D'ailleurs φ et $d\varphi$, ayant ν multiplicateurs égaux à -1 , ne peuvent être conjuguées,

(1) Comparer DICKSON : *Linear Groups*, nos 120-122.

(2) Je rappelle que T_{ik} échange x_i et x_k , y_i et y_k en laissant les autres variables inaltérées (I, 28). Cette substitution est évidemment dans G .

dans G' , d'une $d_{1,\dots,r}$ où $r < \frac{\nu}{2}$ qui en a $2r$. Si $\nu = 2m$, $d_{1,\dots,m}$ a bien ν multiplicateurs égaux à -1 ; mais, comme elle est dans G , elle ne peut être conjuguée ni de φ ni de $d\varphi$ qui sont hors de G . Donc les classes de s_2 de première espèce de \mathcal{G}' peuvent être représentées par les $(d_{1,\dots,r})$ où $r \leq \frac{\nu}{2}$ et (φ) .

On voit de même que (σ) et (σ') sont conjuguées dans \mathcal{G} toujours et seulement si σ' est conjuguée dans G de σ ou de $d\sigma$.

Donc les classes de s_2 de première espèce de \mathcal{G}' qui sont dans \mathcal{G} peuvent être représentées par les $(d_{1,\dots,r})$ où $r \leq \frac{\nu}{2}$, qui sont toujours dans \mathcal{G} et (φ) si (φ) est dans \mathcal{G} . Or pour que (φ) soit dans \mathcal{G} , il faut et il suffit que $\varphi[t^k]$ soit dans G , donc que $t^{2k} = -1$, donc que $k = \frac{\pi-1}{4}$ soit entier. Ainsi (φ) est dans \mathcal{G} ou hors de \mathcal{G} suivant que π est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$.

On remarquera que $\mu = [\varepsilon]\varphi = \Pi'_i m_{i,\varepsilon}$ est conjuguée de $\tau = \Pi'_i \tau_i$ (I, 6) dans $G(n, \pi)$ ou seulement dans $G(n, \pi^2)$ suivant que π est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$. Car, en posant $\beta_i = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \varepsilon y_i \\ y_i & \frac{1}{2}(-\varepsilon x_i + y_i) \end{vmatrix}$, d'où

$$\beta = \begin{vmatrix} x_i & \frac{1}{2} x_i + y_i \\ y_i & \frac{1}{2} \varepsilon x_i + y_i \end{vmatrix}, \quad \beta = \Pi'_i \beta_i \text{ transforme } \tau \text{ en } \mu \text{ (}\mu \text{ est la forme}$$

canonique de τ). Si donc $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, (φ) et (τ) sont deux s_2 de première espèce conjuguées dans \mathcal{G} . Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, (τ) est toujours dans \mathcal{G} , mais n'est pas de première espèce.

29. Si $m = 2h + 1$, je dirai que (s) et sa classe sont de deuxième espèce. Mais, dans $\mathcal{G}'(n, \pi^2)$, (s) est de première espèce. Soit donc σ une des s_2 , $d_{1,\dots,r}$ ou φ , convenablement choisie, considérée comme appartenant à $G'(n, \pi^2)$; (s) sera conjuguée de (σ) dans $\mathcal{G}'(n, \pi^2)$. Il y aura donc, dans $G'(n, \pi^2)$, une substitution ζ telle que, pour une valeur convenable de k , $[t^k] \zeta^{-1} \sigma \zeta$ soit égale à s . D'ailleurs k est $\not\equiv 0 \pmod{\pi + 1}$, sans quoi $s^2 = [t^{2k}]$ serait de la forme t^{2h} , et (s) serait de première espèce dans $G(n, \pi)$. Les multiplicateurs de s sont, comme

ceux de $[i'^k]\sigma$, de la forme $\pm i'^k$. D'ailleurs, s étant réelle, ses multiplicateurs sont conjugués deux à deux. Donc il y a autant de multiplicateurs $+ i'^k$ que de multiplicateurs $- i'^k$, et $- i'^k = i'^{\pi k}$. Donc : 1° σ a autant de multiplicateurs $- 1$ que de multiplicateurs $+ 1$, et, si ν est impair, $\sigma = \varphi$, si $\nu = 2m$, $\sigma = \varphi$ ou $d_{1, \dots, m}$; 2° k a la forme $(2\lambda + 1)\frac{\pi + 1}{2}$, $i'^k = i'^{\lambda \nu_0}$. En prenant au besoin $i'^{\lambda \nu_0} s$ pour s , on peut supposer que $\lambda = 0$.

A chaque détermination de σ répond une classe de (s) . Soient en effet s et s' deux conjuguées réelles, dans $G'(n, \pi^2)$, de $[i_0]\sigma$, en sorte que $\zeta^{-1}\sigma\zeta = s[i_0^{-1}]$, $\zeta^{s-1}\sigma\zeta' = s'[i_0^{-1}]$. D'après ce qu'on a vu (27) $s'[i_0^{-1}]$ est une transformée de $s[i_0^{-1}]$ par $G(n, \pi^2)$ [et non pas seulement par $G'(n, \pi^2)$]. Il y a donc, dans $G(n, \pi^2)$ une substitution α telle que $s\alpha = \alpha s'$. Donc les coefficients de α sont proportionnels à des nombres réels. Soit $\alpha = [\varphi]\alpha'$, α' étant dans \mathcal{C} et φ étant un facteur de proportionnalité. α' multiplie a par φ^{-2} , et, d'après les relations fondamentales (I, 17), φ^2 est réel. Donc α' est dans $G'(n, \pi)$, et, puisque $s\alpha = \alpha s'$, on a aussi $s\alpha' = \alpha' s'$ en sorte que s' est conjuguée de s dans $G'(n, \pi)$, et par suite (s') de (s) dans $\mathcal{G}'(n, \pi)$.

Si $\nu = 2m$, les deux déterminations φ et $d_{1, \dots, m}$ de σ fournissent deux classes distinctes de (s) . Car, sans cela, $d_{1, \dots, m}$ serait conjuguée, dans $G(n, \pi^2)$, d'une s_2 de $I'\varphi$, qui ne pourrait être que $d\varphi$. Or $d_{1, \dots, m}$ est dans $G(n, \pi^2)$ et $d\varphi$ hors de $G(n, \pi^2)$.

Ainsi, si ν est impair, $\mathcal{G}'(n, \pi)$ n'a qu'une classe de s_2 de seconde espèce, représentée dans $\mathcal{G}(n, \pi^2)$ par (φ) ; si $\nu = 2m$, $\mathcal{G}'(n, \pi)$ en a deux classes, représentées dans $\mathcal{G}(n, \pi^2)$ par (φ) et $(d_{1, \dots, m})$.

30. Cherchons maintenant des représentants des classes de s_2 de deuxième espèce (s) de $\mathcal{G}(n, \pi)$ et de $\mathcal{G}'(n, \pi)$.

Soit (s) dans $\mathcal{G} = GI/I$. Alors s est dans GI , et, en prenant au besoin une substitution de Is pour s , on peut supposer s dans G . On a alors $s^2 = d$. Et pour que (s) soit de seconde espèce, il faut que $- 1$ soit non carré, donc que $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. On sait (29) que l'on a $\zeta^{-1}[i^\lambda i_0]\sigma\zeta = s$, σ ayant l'une des déterminations $d_{1, \dots, m}$ (si $\nu = 2m$) et φ . Donc $[i^\lambda i_0]\sigma$ est dans $G(n, \pi^2)$. Comme $[i^\lambda i_0]$, qui multiplie a par $i^{2\lambda+1}$, est hors de G , il faut que σ soit aussi hors de G , donc $\sigma = \varphi$. Comme $s^2 = d$, on

a $(\iota^{\lambda} \iota_0)^2 = -1$, donc $\iota^{\lambda} \iota_0 = \pm \varepsilon$. En prenant au besoin ds pour s , on peut supposer que $\iota^{\lambda} \iota_0 = \varepsilon$, en sorte que (28) on a $\zeta^{-1} \mu \zeta = s$. Or (28) τ est conjugué de μ dans $G(n, \pi^2)$. Il y a donc, dans $G(n, \pi^2)$, une substitution α telle que $s\alpha = \alpha\tau$. Donc, s et τ étant réelles, les coefficients de α sont proportionnels à des nombres réels, et $\alpha = [\varphi] \alpha'$, α' étant dans \mathcal{C} , et φ étant un facteur de proportionnalité. α' multiplie a par φ^{-2} , et, d'après les relations fondamentales, φ^2 est réel. Si φ^2 est carré dans \mathcal{C} , φ est réel, et α dans $G(n, \pi)$. Donc s et τ sont conjuguées dans $G(n, \pi)$. Si φ^2 est non carré dans \mathcal{C} , α' , qui multiplie a par φ^{-2} , est dans $G''(n, \pi) \gamma$ (I, 16), ou, en posant

$$\theta_i = \begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \lambda y_i \\ y_i & \iota(-\lambda x_i + \alpha y_i) \end{vmatrix} \left(x^2 + \lambda^2 = \iota^{-1} \right), \quad \theta = \Pi'_i \theta_i, \quad \gamma' = \theta \gamma,$$

dans $G''(n, \pi) \gamma'$ (θ est dans G). Or γ' est permutable à τ . Si donc $\alpha' = \alpha'' \gamma'$, α'' dans G'' , la relation $s\alpha = \alpha\tau$ devient $s\alpha'' = \alpha''\tau$, c'est-à-dire que s et τ sont conjugués dans $G''(n, \pi)$, donc (s) et (τ) dans $\mathcal{G}(n, \pi)$.

Donc \mathcal{G} a des s_2 de seconde espèce toujours et seulement si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, et elles sont toutes conjuguées de (τ).

31. Soit maintenant (s) dans \mathcal{G}' hors de \mathcal{G} . Alors s est dans G' hors de G'' , donc dans $G'' \gamma$, et, en prenant au besoin une substitution de I_s pour s , on peut supposer que s multiplie a par ι , et est par suite dans $G\gamma$. Alors s^2 , qui est dans I , multiplie a par ι^2 , donc $s^2 = [\pm \iota]$. Mais, si $s^2 = [-\iota]$, pour que s soit de seconde espèce il faut que $\pi \equiv 1 \pmod{4}$.

Or on sait (29) que l'on a $\zeta^{-1} [\iota^{\lambda} \iota_0] \sigma \zeta = s$, σ ayant l'une des déterminations $d_{1, \dots, m}$ (si $\nu = 2m$), et φ . Alors $[\iota^{\lambda} \iota_0] \sigma$ doit aussi multiplier a par ι . Or, si $\sigma = \varphi$, $[\iota^{\lambda} \iota_0] \varphi$ multiplie a par $-\iota^{2\lambda+1}$, qui doit être égal à ι ; donc $\iota^{2\lambda} = -1$, donc $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, et $\iota^{\lambda} = \pm \varepsilon$. La relation considérée donne $s^2 = \zeta^{-1} [\iota^{2\lambda+1}] \zeta = [\iota^{2\lambda+1}] = [-\iota]$. Si $\sigma = d_{1, \dots, m}$, $[\iota^{\lambda} \iota_0] d_{1, \dots, m}$ multiplie a par $\iota^{2\lambda+1}$, qui doit être égal à ι , donc $\iota^{2\lambda} = 1$, $\iota^{\lambda} = \pm 1$. La relation considérée donne $s^2 = [\iota^{2\lambda+1}] = [\iota]$.

Il reste à déterminer, pour chaque classe, les substitutions s dans $G'(n, \pi]$ et ζ dans $G'(n, \pi^2]$.

Soit d'abord $\sigma = \varphi$ (donc $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, $\iota^{\lambda} = [\pm \varepsilon]$, $s^2 = [-\iota]$). Sup-

posons d'abord $n = 2$, et prenons, par exemple, $s = \tau\gamma$. On aura

$$(1) \quad \zeta^{-1}[\iota^\lambda \iota_0] \varphi \zeta = \tau\gamma$$

(ici $\tau = \tau_1$) (28), en posant

$$\zeta = u_{11} v_{1,-1} \tau_1^{-1} \gamma' \tau_1 (\iota' = \iota^{-\lambda} \iota_0^{-1}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_1 & \frac{x_1 - y_1}{\iota^\lambda \iota_0} \end{vmatrix},$$

$$\zeta^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{2}(x_1 + \iota^\lambda \iota_0 y_1) \\ y_1 & \frac{1}{2}(x_1 - \iota^\lambda \iota_0 y_1) \end{vmatrix} \quad (1).$$

Pour $n = 2\nu'$, on obtient la même formule en multipliant les formules analogues relatives à chaque couple où φ , τ , γ , ζ auront été remplacés par φ_i , τ_i , $\gamma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$, $\zeta_i = u_{i1} v_{i,-1} \tau_i^{-1} \gamma_i' \tau_i$. La classe s_2 de seconde espèce correspondant à $\sigma = \varphi$ est donc toujours représentée par $(\tau\gamma)$.

Soit maintenant $\sigma = d_{1, \dots, m}$ (donc $\nu = 2m$, $\iota^\lambda = \pm 1$, $s^2 = [\iota]$). Sup-

posons d'abord $n = 4$. On peut prendre $s = d_1, \mathbf{T}_2 \tau\gamma = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ y_1 & -x_2 \\ x_2 & -\iota y_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \quad (28)$

(ici $\tau = \tau_1 \tau_2$, $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$). On aura $\zeta^{-1}[\iota_0] d_1 \zeta = d_1 \mathbf{T}_{1,2} \tau\gamma$ en posant

$$\zeta = \zeta_{1,2} = \begin{vmatrix} x_1 & 2x_1 + \iota_0 y_2 \\ y_1 & y_1 - 2\iota_0^{-1} x_2 \\ x_2 & 2x_2 + \iota_0 y_1 \\ y_2 & y_2 - 2\iota_0^{-1} x_1 \end{vmatrix} = \gamma' W_{1,2,-\iota_0^{-1}} U_{1,2,\iota_0} \quad (\iota' = 2) \quad (2).$$

Pour $n = 4m$, en multipliant les formules analogues relatives à chaque système de quatre variables x_{2i-1} , y_{2i-1} , x_{2i} , y_{2i} , ou d_1 ,

(1) On peut chercher, par la méthode des coefficients indéterminés, la substitution générale α de G telle que $s^2 = (\alpha\gamma)^2 = [-\iota]$, c'est-à-dire telle que $\alpha\gamma = [-\iota] \gamma^{-1} \alpha^{-1}$. Comme (s) est alors une s_2 de seconde espèce de \mathcal{G}' hors de \mathcal{G} , on sait *a priori* qu'elle est ici conjuguée de (φ) dans $G'(2, \pi^2)$. La forme générale de ζ peut s'obtenir aussi par la méthode des coefficients indéterminés. Les choix faits ici, parmi les formes possibles, de s d'abord, puis de ζ , sont évidemment arbitraires.

(2) On peut, comme précédemment, chercher d'abord la substitution générale α de G telle que $s^2 = (\alpha\gamma)^2 = [\iota]$, puis la substitution ζ . *A priori* (s) est ici conjuguée de (d_1) dans $G'(4, \pi^2)$.

$T_{1,2}$, τ , γ , ζ auront été remplacés par d_{2i-1} , $T_{2i-1,2i}$, $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$, $\gamma_{2i-1}\gamma_{2i}$, $\zeta_{2i-1,2i}[\zeta_{ik} = (\gamma_i\gamma_k)^r W_{i,k,-i}^{-1} U_{i,k,i_0}]$, et posant $d' = \prod_1^m d_{2i-1}$, $T = \prod_1^m T_{2i-1,2i}$, $\zeta' = \prod_1^m \zeta_{2i-1,2i}$, on obtient

$$(2) \quad \zeta'^{-1}[\iota_0] d' \zeta' = d' T \tau \gamma.$$

D'où en désignant par T' une substitution telle que $d' = T'^{-1} d_{1,\dots,m} T'$, et posant $T' \zeta' = \zeta$,

$$(3) \quad \zeta^{-1}[\iota_0] d_{1,\dots,m} \zeta = d' T \tau \gamma.$$

La classe de s_2 de seconde espèce correspondant à $\sigma = d_{1,\dots,m}$ est toujours représentée par $(d' T \tau \gamma)$.

Ainsi, pour ν impair, \mathcal{G}' a une seule classe de s_2 de seconde espèce, qui est dans \mathcal{G} et contient (τ) pour $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, qui est hors de \mathcal{G} et contient $(\tau\gamma)$ pour $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. Pour ν pair, \mathcal{G}' a deux classes de s_2 de seconde espèce. Pour $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, une seule, représentée par (τ) , est dans \mathcal{G} ; l'autre est représentée par $(d' T \tau \gamma)$. Pour $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, ces classes, toutes deux hors de \mathcal{G} , sont représentées par $(\tau\gamma)$ et $(d' T \tau \gamma)$.

Revenons maintenant à \mathcal{G} . Comme $\mathcal{G}' = \mathcal{G} + \mathcal{G}'(\gamma)$ (I, 46) et que (γ) est permutable à $(d_{1,\dots,r})$ et à (τ) , les classes de \mathcal{G}' (de première ou de seconde espèce) qui sont dans \mathcal{G} représentées par $(d_{1,\dots,r})$ et (τ) , sont aussi des classes de s_2 de \mathcal{G} .

32. Cherchons les normalisants \mathcal{N} , \mathcal{N}' dans \mathcal{G} et \mathcal{G}' d'une $s_2(s)$ de \mathcal{G}' .

On ne sait pas *a priori* s'il existe dans G' α non permutable à s telle que $\alpha^{-1} s \alpha = [\iota^k] s$. Comme s^2 est dans I , on a alors, en élevant cette relation au carré, $\iota^{2k} = 1$; d'où $\iota^k = -1$. Si donc α existe elle transforme s en ds , donc α^2 est permutable à s . En sorte que, en désignant ici par N et N' les normalisants de s dans G et G' , si α est dans G , on a $\mathcal{N} = (N + N\alpha)$, $\mathcal{N}' = (N' + N'\alpha)$. Si α est dans G' hors de G , on a $\mathcal{N} = (N)$, $\mathcal{N}' = (N' + N'\alpha)$. Si α n'existe pas, on a $\mathcal{N} = (N)$, $\mathcal{N}' = (N')$.

33. Supposons (s) de première espèce, donc s d'ordre 2 (28). La relation $\alpha^{-1} s \alpha = ds$ exige que s ait autant de multiplicateurs $+1$ que de multiplicateurs -1 . Donc α ne peut exister que si $s = d_{1,\dots,m}$ ($\nu = 2m$) ou φ .

Si $s = d_{1,\dots,m}$, on voit que l'on peut faire $\alpha = \Theta = \prod_1^m T_{i,i+m}$, qui est dans G . On a donc $\mathcal{N} = (N + N\Theta)$, $\mathcal{N}' = (N' + N'\Theta) = \mathcal{N} + \mathcal{N}'(\gamma)$ (E, 67).

Si $s = \varphi$, on peut prendre $\alpha = T$, car $T^{-1}\varphi\tau = d\varphi$. On a donc $\mathcal{N} = (N + N\tau)$, $\mathcal{N}' = (N' + N'\tau) = \mathcal{N} + \mathcal{N}(\gamma)$.

34. Supposons s de seconde espèce. La relation $\alpha^{-1}d\sigma\alpha = s$ exige que les multiplicateurs soient opposés deux à deux : s étant conjuguée de $[i^{\nu}i_0]\sigma$, ($\sigma = d_1, \dots, m$ ou φ) cette condition est toujours vérifiée.

35. Soient $s = \varepsilon$ et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. Désignons par N_φ et N'_φ les normalisants de φ ou de $\mu = [\varepsilon]\varphi$ dans $G(n, \pi^2)$ et $G'(n, \pi^2)$. Comme $\tau = \beta\mu\beta^{-1}$ (28), N et N' seront formés respectivement des substitutions réelles de $\beta N_\varphi\beta^{-1}$, $\beta N'_\varphi\beta^{-1}$. Je désignerai par M et M' les diviseurs correspondants de N_φ et N'_φ . Or, d'après la forme trouvée (27) pour les substitutions α de N'_φ , on a

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \begin{vmatrix} x_i, & \frac{1}{2} \sum_k [(\alpha_{ik} + \beta'_{ik}) x_k - (\alpha_{ik} - \beta'_{ik}) \varepsilon y_k] \\ y_i, & \frac{1}{2} \sum_k [(\alpha_{ik} - \beta'_{ik}) \varepsilon x_k + (\alpha_{ik} + \beta'_{ik}) y_k] \end{vmatrix}.$$

On voit de suite que la réalité de $\beta\alpha\beta^{-1}$ équivaut à la condition $\beta'_{ik} = \alpha_{ik}$. On a donc, avec les notations du n° 27, $\sigma = \rho$. Or, en désignant par ε_ν la matrice unité d'ordre ν , $\sigma\bar{\rho} = f\varepsilon_\nu$, donc $\rho\bar{\rho} = f\varepsilon_\nu$. Donc (I, 3), M et M' sont formés des α où ρ parcourt $E(\nu, \pi)$ et $E'(\nu, \pi)$ (I, 2) respectivement. Donc $N = \beta M\beta^{-1}$ et $N' = \beta M'\beta^{-1}$ sont isomorphes à $E(\nu, \pi)$ et $E'(\nu, \pi)$ respectivement. D'ailleurs, en remplaçant α par $[\theta]\alpha$, $\rho\bar{\rho}$ est remplacé par $\theta\theta\rho\bar{\rho}$, et $\theta\theta$ est quelconque dans \mathcal{C} . Donc $(M') = (M)$, et $(N') = (N)$.

Cherchons maintenant \mathcal{N} et \mathcal{N}' . Comme $\varphi^{-1}\tau\varphi = d\tau$, on a $\mathcal{N}' = (N + N\varphi)$, $\mathcal{N} = (N)$. Donc $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + \mathcal{N}(\varphi)$ (φ est hors de NI).

36. Soit $s = \tau\gamma$. D'après (1), $\tau\gamma$ est, dans $G(n, \pi^2)$, conjugué de $[i^{\nu}i_0]\varphi$ dont les normalisants, dans $G(n, \pi^2)$ et $G'(n, \pi^2)$ sont encore N_φ et N'_φ . On a, comme précédemment $\sigma = \rho$, et N et N' sont isomorphes à $E(\nu, \pi)$, $E'(\nu, \pi)$ respectivement, et $(N') = (N)$, $\mathcal{N}' = (N + N\varphi)$, $\mathcal{N} = (N)$, $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + \mathcal{N}(\varphi)$.

37. Soit $s = d'T\tau\gamma$ (ν pair). Désignons par G^1 et G^2 les groupes res-

pectifs de $\Sigma'_i(x_{2i-1}y'_{2i-1} - y_{2i-1}x'_{2i-1})$ et de $\Sigma'_i(x_{2i}y'_{2i} - y_{2i}xx'_{2i})$, par G^1 et G'^2 les groupes totaux respectifs de ces deux formes. Il est clair que l'on a $G^1 \equiv G^2$, $G'^1 \equiv G'^2$. Les normalisants respectifs de d' dans les groupes $G(n, \pi^2)$, $G'(n, \pi^2)$, $\mathcal{G}(n, \pi^2)$, $\mathcal{G}'(n, \pi^2)$ sont évidemment $N_{d'} = G^1 G^2$, $N'_{d'} = G'^1 G'^2$, et, d'après (32), $\mathcal{N}_{d'} = (N_{d'} + N_{d'} T)$, $\mathcal{N}'_{d'} = (N'_{d'} + N'_{d'} T)$ (on a $T^{-1} s T = ds$, et T est dans G).

Si une substitution de G est permutable à s , elle le sera, d'après (2), à $\zeta'^{-1} d' \zeta'$. Donc elle sera dans $\zeta'^{-1} N_{d'} \zeta'$. De même, si une substitution de G transforme s en ds elle transforme $\zeta'^{-1} d' \zeta'$ en $\zeta'^{-1} d d' \zeta$, donc elle est dans $\zeta'^{-1} N_{d'} T \zeta' = \zeta'^{-1} N_{d'} \zeta' T$ (ζ' est permutable à T). Donc N , N' , \mathcal{N} , \mathcal{N}' sont formés respectivement des substitutions réelles de $\zeta'^{-1} N_{d'} \zeta'$, $\zeta'^{-1} N'_{d'} \zeta'$, $\zeta'^{-1} \mathcal{N}_{d'} \zeta'$, $\zeta'^{-1} \mathcal{N}'_{d'} \zeta'$.

Comme une substitution quelconque $\alpha_{d'}$ de $N_{d'}$ est le produit d'une substitution de G^1 par une substitution de G^2 , on a, i et k parcourant les nombres 1, 3, ..., $2\nu - 1$,

$$\alpha_{d'} = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k) \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) \\ x_{i+1} & \Sigma_k(\alpha_{i+1,k+1} x_{k+1} + \alpha'_{i+1,k+1} y_{k+1}) \\ y_{i+1} & \Sigma_k(\beta_{i+1,k+1} x_{k+1} + \beta'_{i+1,k+1} y_{k+1}) \end{vmatrix}$$

On voit que $\beta_{d'} = \zeta'^{-1} \alpha_{d'} \zeta'$ se déduit de $\alpha_{d'}$ en remplaçant chaque sous-matrice

$$\alpha_{d'}^{(i,k)} = \begin{vmatrix} \alpha_{ik} & \alpha'_{ik} & 0 & 0 \\ \beta_{ik} & \beta'_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & \alpha'_{i+1,k+1} \\ 0 & 0 & \beta_{i+1,k+1} & \beta'_{i+1,k+1} \end{vmatrix}$$

par $\beta_{d'}^{(i,k)} = \zeta'^{-1}_{k,k+1} \alpha_{d'}^{(i,k)} \zeta'_{i,i+1}$. On a, en développant,

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) & \alpha'_{ik} - \frac{1}{4}\beta_{i+1,k+1} & \frac{1}{\iota_0} \left(\alpha'_{ik} + \frac{1}{4}\beta_{i+1,k+1} \right) & -\frac{\iota_0}{2}(\alpha_{ik} - \beta'_{i+1,k+1}) \\ \frac{1}{4}\beta_{ik} - \frac{1}{\iota} \alpha'_{i+1,k+1} & \frac{1}{2}(\beta'_{ik} + \alpha_{i+1,k+1}) & \frac{1}{2\iota_0}(\beta'_{ik} - \alpha_{i+1,k+1}) & -\iota_0 \left(\frac{\beta_{ik}}{4} + \frac{1}{\iota} \alpha'_{i+1,k+1} \right) \\ \iota_0 \left(\frac{\beta_{ik}}{4} + \frac{\alpha'_{i+1,k+1}}{\iota} \right) & \frac{\iota_0}{2}(\beta'_{ik} - \alpha_{i+1,k+1}) & \frac{1}{2}(\beta'_{ik} + \alpha_{i+1,k+1}) & -\frac{\iota}{4}\beta_{ik} + \alpha'_{i+1,k+1} \\ \frac{1}{\iota_0}(-\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) & -\iota_0 \left(\frac{1}{\iota} \alpha'_{ik} + \frac{1}{4}\beta_{i+1,k+1} \right) & -\frac{1}{\iota} \alpha'_{ik} + \frac{1}{\iota} \beta_{i+1,k+1} & \frac{1}{2}(\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) \end{vmatrix}$$

Un calcul direct montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des coefficients sont

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1,k+1} &= \dot{\beta}'_{ik}, & \alpha'_{i+1,k+1} &= -\frac{l}{4} \dot{\beta}_{ik}, \\ \beta_{i+1,k+1} &= -\frac{4}{l} \dot{\alpha}'_{ik}, & \beta'_{i+1,k+1} &= \dot{\alpha}_{ik}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha_{ii}^{(i,k)} = \begin{vmatrix} \alpha_{ik} & \alpha'_{ik} & 0 & 0 \\ \beta_{ik} & \beta'_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\beta}'_{ik} & -\frac{l}{4} \dot{\beta}_{ik} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{l} \dot{\alpha}'_{ik} & \dot{\alpha}_{ik} \end{vmatrix}.$$

Donc, pour que $\alpha = \zeta^{-1} \alpha_{ii} \zeta'$ soit dans N ou N' , il faut et il suffit, si $\alpha_{ii} = \alpha_1 \alpha_2$, α_i étant dans G^i ou G'^i , que $\alpha_2 = \varpi^{-1} \bar{\alpha}_1^{-1} \varpi$ (1, 17), en posant $\varpi = \Pi'_1 m_{2h, i_0/2}$. D'ailleurs $N \equiv G(\nu, \pi^2)$, $N' \equiv G'(\nu, \pi^2) = \Sigma_0^{\pi^2-2} N \gamma_0^k$, γ_0 étant la substitution qui joue dans $G'(\nu, \pi^2)$ le rôle de γ dans G' , et l'on a (32) $\mathcal{N} = (N + NT)$, $\mathcal{N}' = (N' + N'T) = \mathcal{N} + \mathcal{N}(\gamma_0)$.

(A suivre).