ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. LAURENT

Théorie des courbes gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 1 (1872), p. 219-230
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1__219_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COURBES GAUCHES,

PAR M. H. LAURENT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET RÉPÉTITEUR A CETTE ÉCOLE.

Soient

x, y, z les coordonnées d'un point m d'une courbe gauche (A);
s l'arc de cette courbe;
R son rayon de courbure;
T son rayon de torsion.

Par le point m menons trois axes rectangulaires faisant avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus seront désignés par a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''; le premier axe (a, a', a'') sera tangent à la courbe (A), le second (b, b', b'') sera dirigé suivant la normale principale, le dernier (c, c', c'') sera dirigé de telle sorte que le système d'axes passant en m puisse coïncider en direction avec les axes de coordonnées.

On aura le système de formules suivant dû à M. Serret :

$$(1)\qquad \frac{da}{ds}=\frac{b}{R}, \qquad \frac{da'}{ds}=\frac{b'}{R}, \qquad \frac{da''}{ds}=\frac{b''}{R};$$

$$(2)\qquad \frac{db}{ds}=-\left(\frac{a}{R}+\frac{c}{T}\right), \quad \frac{db'}{ds}=-\left(\frac{a'}{R}+\frac{c'}{T}\right), \quad \frac{db''}{ds}=-\left(\frac{a''}{R}+\frac{c''}{T}\right);$$

$$(3)\qquad \frac{dc}{ds}=\frac{b}{T}, \qquad \frac{dc'}{ds}=\frac{b'}{T}, \qquad \frac{dc''}{ds}=\frac{b''}{T}.$$

Si l'on suppose que le point m se déplace, le système des axes passant en m va prendre un mouvement héliçoïdal dont il est facile de calculer les éléments. Si l'on pose en effet

$$(4)\quad \begin{cases} ds\,p = c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -\,b\,dc - b'\,dc' - b''\,dc'', \\ ds\,q = a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -\,c\,da - c'\,da' - c''\,da'', \\ ds\,r = b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -\,a\,db - a'\,db' - a''\,db'', \end{cases}$$

$p\,ds$, $q\,ds$, $r\,ds$ ne seront autre chose que les rotations instantanées qui servent à faire coïncider les directions des axes relatifs au point m avec les directions des axes relatifs au point infiniment voisin pris sur la courbe (A).

En remplaçant da, db, ... par leurs valeurs tirées de (1), (2) et (3), on trouve

$$(4\ bis)\qquad p = -\frac{1}{T}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{R};$$

l'axe instantané de rotation est donc perpendiculaire à la normale principale, et la génératrice de l'hélice osculatrice qui lui est parallèle est située dans le plan de la tangente et de la binormale. Si l'on désigne par i l'angle que la tangente fait avec cette génératrice, on aura

$$(5)\qquad \operatorname{tang} i = -\frac{T}{R},$$

et la rotation instantanée sera donnée par la formule

$$(5\ bis)\qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + T^2}}{RT} = \frac{1}{T}\operatorname{coséc} i.$$

Ceci posé, considérons une droite représentée par les équations

$$(6)\qquad X = \xi + \lambda\rho, \quad Y = \eta + \lambda'\rho, \quad Z = \zeta + \lambda''\rho,$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées courantes, ρ la distance du point X, Y, Z au point ξ, η, ζ situé sur la droite et λ, λ', λ'' les angles que fait la droite ρ avec les axes de coordonnées.

Supposons que ξ, η, ζ, λ, λ', λ'' soient fonctions de l'arc s de la courbe (A). Pour que la droite (6) engendre une développable, il faut que les équations (6) soient compatibles avec leurs différentielles

$$(7)\qquad \begin{cases} 0 = d\xi + \lambda d\rho + \rho d\lambda, \\ 0 = d\eta + \lambda' d\rho + \rho d\lambda', \\ 0 = d\zeta + \lambda'' d\rho + \rho d\lambda''; \end{cases}$$

pour exprimer cette condition, il faut éliminer X, Y, Z, ρ, $d\rho$ entre (6) et (7), ce qui donne

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ d\lambda & d\lambda' & d\lambda'' \\ \lambda & \lambda' & \lambda'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont donnés, (8) est une équation différentielle à laquelle doit satisfaire le point ξ, η, ζ. Cette formule va nous permettre de résoudre quelques questions relatives à la théorie des courbes gauches.

Cherchons, par exemple, en quel point n de la normale principale à la courbe (A) il faut mener une parallèle à l'axe de l'hélice osculatrice pour obtenir une surface développable. [Pour abréger le discours, j'appellerai cylindre osculateur le cylindre sur lequel est tracée l'hélice osculatrice, bien que ce cylindre ne soit pas celui qui a le contact le plus intime avec la courbe (A)].

Appelons l la distance du point n au point m, l sera notre inconnue et l'on aura

$$(9)\qquad \xi = x + lb, \quad \eta = y + lb', \quad \zeta = z + lb'',$$

d'où

$$d\xi = a\,ds + l\,db + b\,dl\ldots,$$

et, remplaçant db par sa valeur (2),

$$(10)\qquad \begin{cases} d\xi = a\,ds - l\,ds\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{c}{T}\right) + b\,dl, \\ d\eta = a'\,ds - l\,ds\left(\dfrac{a'}{R} + \dfrac{c'}{T}\right) + b'\,dl, \\ d\zeta = a''\,ds - l\,ds\left(\dfrac{a''}{R} + \dfrac{c''}{T}\right) + b''\,dl; \end{cases}$$

d'un autre côté, si l'on appelle λ, λ', λ'' les cosinus des angles que fait l'axe de l'hélice osculatrice avec les coordonnées, on aura

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' &= \cos i, \\ b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' &= 0, \\ c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' &= \sin i, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(12) \quad \lambda = a\cos i + c\sin i, \quad \lambda' = a'\cos i + c'\sin i, \quad \lambda'' = a''\cos i + c''\sin i.$$

En différentiant ces formules et en ayant égard à (1), (3), on a

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} d\lambda &= \left(\frac{b}{R}\cos i + \frac{b}{T}\sin i\right) ds + (c\cos i - a\sin i)\, di, \\ d\lambda' &= \left(\frac{b'}{R}\cos i + \frac{b'}{T}\sin i\right) ds + (c'\cos i - a'\sin i)\, di, \\ d\lambda'' &= \left(\frac{b''}{R}\cos i + \frac{b''}{T}\sin i\right) ds + (c''\cos i - a''\sin i)\, di; \end{aligned} \right.$$

portant alors dans (8), à la place de λ, λ', λ'', ξ, η, ζ, leurs valeurs et développant, on trouve d'abord

$$(14) \quad d\lambda(\lambda' d\zeta - \lambda'' d\eta) + d\lambda'(\lambda'' d\xi - \lambda d\zeta) + d\lambda''(\lambda d\eta - \lambda' d\xi) = 0,$$

puis

$$\begin{aligned} \lambda' d\zeta - \lambda'' d\eta = (a'\cos i + c'\sin i)&\left[a'' ds - l\, ds\left(\frac{a''}{R} + \frac{c''}{T}\right) + b'' dl\right] \\ - (a''\cos i + c''\sin i)&\left[a' ds - l\, ds\left(\frac{a'}{R} + \frac{c'}{T}\right) + b' dl\right], \end{aligned}$$

et, en tenant compte des relations connues $b'c'' - c'b'' = a, \ldots,$

$$\lambda' d\zeta - \lambda'' d\eta = b\sin i\, ds - l\, ds\left(\frac{b}{R}\sin i - \frac{b}{T}\cos i\right) + dl(c\cos i - a\sin i),$$

$$\lambda'' d\xi - \lambda\, d\zeta = b'\sin i\, ds - l\, ds\left(\frac{b'}{R}\sin i - \frac{b'}{T}\cos i\right) + dl(c'\cos i - a'\sin i),$$

$$\lambda\, d\eta - \lambda' d\xi = b''\sin i\, ds - l\, ds\left(\frac{b''}{R}\sin i - \frac{b''}{T}\cos i\right) + dl(c''\cos i - a''\sin i);$$

à l'aide de ces formules et de (13), (14) devient

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & dl\,di - l\,ds^2\left[\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{T^2}\right)\sin i\cos i + \frac{1}{RT}(\sin^2 i \cos^2 i)\right] \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{1}{R}\sin i\cos i + \frac{1}{T}\sin^2 i\right)ds^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Éliminant de là l'angle i au moyen de la formule $\tang i = -\frac{T}{R}$, on trouve

$$\cos i = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}},\quad \sin i = -\frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}},\quad di = \frac{T\,dR - R\,dT}{T^2+R^2},$$

et, par suite, (15) devient

$$(16)\qquad dl(R\,dT - T\,dR) = 0.$$

Cette équation, qui n'est autre que la condition (8), peut être satisfaite :

1° En posant

$$dl = 0 \quad \text{ou} \quad l = \text{const.},$$

2° En prenant

$$R\,dT - T\,dR = 0;$$

si l'on prend $l = \text{const.}$ et en particulier $l = 0$, on voit d'abord que *la génératrice du cylindre osculateur décrit une surface développable,* et que si sur la normale principale on prend une longueur constante, si par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à l'axe de l'hélice osculatrice, cette parallèle décrit une surface développable quand le point m se meut sur la courbe (A).

Si la courbe était de telle nature que l'on eût

$$R\,dT - T\,dR = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{R}{T} = \text{const.},$$

la parallèle à l'axe de l'hélice osculatrice menée par un point quelconque de la normale principale décrirait une surface développable, et, en effet, dans ce cas la courbe (A) est une hélice.

L'axe de l'hélice osculatrice ne décrit pas, en général, une surface développable; en effet, si la distance l de cet axe au point m satisfaisait à (16), il faudrait que l fût constant, le rayon de l'hélice osculatrice serait constant, et l'on aurait entre l, la courbure et la torsion les relations

$$R = \frac{l}{\sin^2 i}, \quad T = -\frac{l}{\sin i \cos i}, \quad \tang i = -\frac{T}{R},$$

d'où

$$R = \frac{l}{T^2}(T^2 + R^2),$$

ou enfin

$$\frac{RT^2}{R^2 + T^2} = \text{const.} \tag{17}$$

Cette équation définit évidemment une infinité de courbes; toute surface contiendra évidemment trois systèmes de lignes principales jouissant de la propriété dont nous venons de parler, car l'équation (17) est évidemment du troisième ordre.

L'arête de rebroussement de la surface développable, lieu des génératrices des cylindres osculateurs, est facile à trouver; il suffit, en effet, de chercher le lieu des intersections des droites (6) et (7) en prenant $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$; (6) et (7) deviennent alors

$$X = x + \rho\lambda \ldots, \tag{6 bis}$$

$$0 = a\,ds + \rho\,d\lambda + \lambda\,d\rho \ldots; \tag{7 bis}$$

on élimine facilement $d\rho$ en multipliant la première équation (7 *bis*) par $d\lambda$, la seconde par $d\lambda'$, la troisième par $d\lambda''$, et, en ajoutant, on trouve

$$\rho = -\frac{a\,d\lambda + a'\,d\lambda' + a''\,d\lambda''}{d\lambda^2 + d\lambda'^2 + d\lambda''^2}\,ds;$$

en remplaçant λ, λ', λ'' par leurs valeurs (12), on obtient ρ en fonction de R et T,

$$\rho = \frac{T\sqrt{T^2 + R^2}}{R\,dT - T\,dR}\,ds.$$

La surface développable que nous venons de trouver n'est autre chose que l'enveloppe des plans normaux aux plans osculateurs de la courbe (A) *menés par la tangente à cette courbe, ou, si l'on veut, l'enveloppe des plans qui passent par la tangente et la binormale.*

La courbe (A) *est une ligne géodésique de cette surface,* car son plan osculateur est normal au plan tangent de la surface en question.

Lorsqu'on a un système de droites formant une surface réglée, le premier membre de (8) n'est plus nul, mais il est proportionnel à la plus courte distance h des deux droites infiniment voisines; la distance exacte h est alors donnée par la formule suivante :

$$(18)\qquad h = \frac{d\xi(\lambda' d\lambda'' - \lambda'' d\lambda') + d\eta(\lambda'' d\lambda - \lambda d\lambda'') + d\zeta(\lambda d\lambda' - \lambda' d\lambda)}{\sqrt{(\lambda' d\lambda'' - \lambda'' d\lambda')^2 + (\lambda'' d\lambda - \lambda d\lambda'')^2 + (\lambda d\lambda' - \lambda' d\lambda)^2}};$$

quant à l'équation même de la droite sur laquelle se mesure la plus courte distance, on l'obtient par les considérations suivantes :

$$A(X - \xi) + A'(Y - \eta) + A''(Z - \zeta) = 0$$

est l'équation d'un plan passant par le point ξ, η, ζ; exprimons qu'il est parallèle : 1° à la direction λ, λ', λ'' de la droite (6); 2° à la direction $\dfrac{\lambda'' d\lambda' - \lambda' d\lambda''}{\sqrt{\Sigma(\lambda'' d\lambda' - \lambda' d\lambda'')^2}}, \cdots$ de la droite sur laquelle se mesure la plus courte distance de deux droites (6) infiniment voisines, nous aurons

$$A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda'' = 0,$$

$$A(\lambda' d\lambda'' - \lambda'' d\lambda') + A'(\lambda'' d\lambda - \lambda d\lambda'') + A''(\lambda d\lambda' - \lambda' d\lambda) = 0,$$

et nous aurons, en observant que $\lambda d\lambda + \lambda' d\lambda' + \lambda'' d\lambda''$ est nul,

$$(19)\qquad (X - \xi) d\lambda + (Y - \eta) d\lambda' + (Z - \zeta) d\lambda'' = 0.$$

Voilà l'équation d'un premier plan contenant la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines; on aura l'équation d'un second plan en posant

$$B(X - \xi - d\xi) + B'(Y - \eta - d\eta) + B''(Z - \zeta - d\zeta) = 0,$$

et l'on aura comme tout à l'heure

$$B(\lambda + d\lambda) + B'(\lambda' + d\lambda') + B''(\lambda'' + d\lambda'') = 0,$$

$$B(\lambda' d\lambda'' - \lambda'' d\lambda') + B'(\lambda'' d\lambda - \lambda d\lambda'') + B''(\lambda d\lambda' - \lambda' d\lambda'') = 0,$$

$$\begin{aligned}&(X - \xi - d\xi)(d\lambda - \lambda \Lambda ds^2)\\ &\quad + (Y - \eta - d\eta)(d\lambda' - \lambda' \Lambda ds^2) + (Z - \zeta - d\zeta)(d\lambda'' - \lambda'' \Lambda ds^2) = 0,\end{aligned}$$

où nous posons pour abréger

$$\Lambda ds^2 = d\lambda^2 + d\lambda'^2 + d\lambda''^2.$$

On peut remplacer cette dernière équation par celle que l'on obtient en soustrayant (19) et l'on a

$$(20)\qquad (X-\xi)\lambda + (Y-\eta)\lambda' + (Z-\zeta)\lambda'' + \frac{d\lambda\, d\xi + d\lambda'\, d\eta + d\lambda''\, d\zeta}{d\lambda^2 + d\lambda'^2 + d\lambda''^2} = 0.$$

Appliquons les formules (18), (19), (20) à la normale principale de la courbe (A), nous aurons

$$\lambda = b,\quad \lambda' = b',\quad \lambda'' = b'';$$

quant à $d\lambda$, $d\lambda'$, $d\lambda''$, ils seront donnés par les formules (2). Les formules (18), (19), (20) deviendront alors, en observant que $\xi = x, \ldots$, $d\xi = a\,ds, \ldots$,

$$h = \frac{ds}{T} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + \frac{1}{R^2}}} \quad \text{ou} \quad h = \frac{R\,ds}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

On peut, si l'on veut, introduire l'angle i dans cette formule, et l'on voit que l'on a

$$(21)\qquad h = ds \cos i.$$

Ainsi *la plus courte distance de deux normales principales est égale à la projection de l'arc décrit par le point m sur l'axe de l'hélice osculatrice, ou, si l'on veut, sur la génératrice du cylindre osculateur.*

La formule (19) devient

$$(22)\quad (X-x)\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right) + (Y-y)\left(\frac{a'}{R} + \frac{c'}{T}\right) + (Z-z)\left(\frac{a''}{R} + \frac{c''}{T}\right) = 0,$$

la formule (20),

$$(23)\qquad b(X-x) + b'(Y-y) + b''(Z-z) + \frac{RT^2}{R^2+T^2} = 0.$$

On peut observer que le terme $\frac{RT^2}{R^2+T^2}$ est le rayon k du cylindre osculateur [1]. Les formules (22), (23) reçoivent alors une interprétation géométrique remarquable : supposons que X, Y, Z soient les coordonnées du point où se compte la plus courte distance, en appelant u la distance de ce point au point m de la courbe (A), les formules (22) et (23) donneront

$$(24) \qquad u\left[\frac{1}{R}\cos(u, ds) + \frac{1}{T}\cos(u, N)\right] = 0, \quad u\cos(u, P) = -K,$$

N désignant la binormale, P la normale principale. Or $\cos(u, P) = -1$, donc $u = l$, donc

L'axe de l'hélice osculatrice passe par le point où se compte la plus courte distance des deux normales principales infiniment voisines.

L'équation (24) est une identité, si l'on place le point X, Y, Z à l'endroit où se mesure la plus courte distance en question; mais, si on le place en un point quelconque de la plus courte distance, on voit que : *si sur la tangente et la binormale on porte des longueurs, respectivement proportionnelles à la courbure et à la torsion, les projections de ces longueurs sur le rayon vecteur de la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines, issues du point m, seront égales.*

Enfin il est bon d'observer que les coefficients directeurs de la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines sont :

$$\frac{a}{T} - \frac{c}{R}, \quad \frac{a'}{T} - \frac{c'}{R}, \quad \frac{a''}{T} - \frac{c''}{R}.$$

En appelant ε l'angle que fait la droite en question avec la tangente en m à la courbe (A), on a

$$\cos\varepsilon = \frac{\frac{1}{T}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + T^2}};$$

---

[1] On a en effet

$$\operatorname{tang} i = -\frac{1}{R}, \quad R = \frac{k}{\sin^2 i}, \quad T = \frac{k}{\sin i \cos i},$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 i = \frac{T^2}{T^2 + R^2}, \quad R\sin^2 i = k = \frac{RT^2}{T^2 + R^2}.$$

on trouverait de même pour le cosinus de l'angle ε' que fait la même direction avec la binormale $-\frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}}$; donc l'angle ε n'est autre chose que celui que nous avons désigné par i, et l'on en conclut ce théorème :

L'axe de l'hélice osculatrice est la droite suivant laquelle se mesure la plus courte distance de deux normales principales voisines.

Cherchons maintenant par quels points des binormales il faudrait mener des parallèles aux normales principales, pour que leur lieu fût une surface développable.

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées de l'un de ces points μ situé sur la binormale du point m, on a

$$\xi = x + lc, \quad \eta = y + lc', \quad \zeta = z + lc'', \tag{25}$$

l désignant la distance des points m et μ. La condition pour que le lieu des parallèles aux normales principales passant en μ soit une surface développable s'obtiendra en faisant dans (8)

$$\lambda = b, \quad \lambda' = b', \quad \lambda'' = b'';$$

on trouve alors

$$d\xi\left(\frac{a}{T} - \frac{c}{R}\right) + d\eta\left(\frac{a'}{T} - \frac{c'}{R}\right) + d\zeta\left(\frac{a''}{T} - \frac{c''}{R}\right) = 0. \tag{26}$$

Or de (25) on tire

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= a\,ds + l\,dc + c\,dl = a\,ds + l\frac{b}{T}\,ds + c\,dl, \\ d\eta &= a'\,ds + l\,dc' + c'\,dl = a'\,ds + l\frac{b'}{T}\,ds + c'\,dl, \\ d\zeta &= a''\,ds + l\,dc'' + c''\,dl = a''\,ds + l\frac{b''}{T}\,ds + c''\,dl; \end{aligned}\right. \tag{27}$$

(26) devient alors

$$\frac{ds}{T} - \frac{dl}{R} = 0,$$

ou bien

$$l = \int \frac{R}{T}\,ds = -\int \cot i\,ds. \tag{28}$$

Les points μ forment donc une infinité de courbes toutes tracées sur le lieu des binormales; si nous considérons l'une de ces courbes en particulier, celle qui coupe la courbe (A) en m, l'intégrale $\int \frac{R}{T} ds$ est nulle.

Des équations (27) on tire successivement

$$a\,d\xi + a'\,d\eta + a''\,d\zeta = ds, \tag{29}$$

$$b\,d\xi + b'\,d\eta + b''\,d\zeta = \frac{l}{T}\,ds, \tag{30}$$

$$c\,d\xi + c'\,d\eta + c''\,d\zeta = dl = \frac{R}{T}\,ds. \tag{31}$$

Si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément de la courbe, lieu des points μ, on aura

$$d\sigma^2 = ds^2 + \frac{l^2}{T^2}\,ds^2 + \frac{R^2}{T^2}\,ds^2. \tag{32}$$

Pour abréger le langage, j'appellerai courbes (B) les lieux des points μ. Si l'on considère la courbe (B) qui passe en m, on aura $l = 0$ en ce point et l'équation (30) montre que :

La courbe (B) a pour normale au point m la normale principale de la courbe A, et la formule (32) donne

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{R^2 + T^2}}{T},$$

c'est-à-dire $ds = d\sigma \cos i$ en valeur absolue. Du reste la formule (32) permet de calculer σ au moyen des quadratures; la formule (29) pour $l = 0$ donne

$$\cos(ds,\, d\sigma) = \frac{ds}{d\sigma} = \sin i.$$

On voit donc que *la courbe* (B) *au point m est coupée orthogonalement par la génératrice du cylindre osculateur* ([1]).

Cherchons maintenant les arêtes de rebroussement des surfaces déve-

([1]) Il ne faut pas oublier le sens que j'attache au mot *osculateur*, uniquement en vue de simplifier le langage.

loppables que nous venons de trouver. Les équations d'une génératrice sont

$$X = x + lc + \rho b, \quad Y = y + lc' + \rho b', \quad Z = z + lc'' + \rho b'';$$

les équations de la génératrice infiniment voisine peuvent être remplacées par

$$\begin{aligned}
0 &= a\,ds + c\frac{R}{T}ds + l\frac{b}{T}ds + b\,d\rho - \rho\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right)ds,\\
0 &= a'ds + c'\frac{R}{T}ds + l\frac{b'}{T}ds + b'd\rho - \rho\left(\frac{a'}{R} + \frac{c'}{T}\right)ds,\\
0 &= a''ds + c''\frac{R}{T}ds + l\frac{b''}{T}ds + b''d\rho - \rho\left(\frac{a''}{R} + \frac{c''}{T}\right)ds.
\end{aligned}$$

Pour déduire ρ de là, il suffit de multiplier par a la première équation, par a' la seconde, par a'' la troisième et d'ajouter : on a alors

$$0 = ds - \frac{\rho}{R}ds,$$

ou bien $\rho = R$. Les arêtes de rebroussement cherchées ont donc pour équation

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned}
X &= x + bR + c\int\frac{R}{T}ds,\\
Y &= y + b'R + c'\int\frac{R}{T}ds,\\
Z &= z + b''R + c''\int\frac{R}{T}ds,
\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que le lieu des arêtes de rebroussement des développables en question est une surface réglée obtenue en menant par les centres de courbure des droites parallèles aux binormales. En d'autres termes :

Le lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables, lieux des parallèles aux normales principales menées par les binormales, est la surface polaire de la courbe (A).

On peut encore énoncer ce fait de la manière suivante :

Si par deux points pris respectivement sur deux binormales infiniment voisines on mène des parallèles aux normales principales correspondantes, la rencontre de ces deux droites, si elle a lieu, ne peut avoir lieu que sur la surface polaire.