HENRI MINEUR

La mécanique des masses variables. Le problème des deux corps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LA

MÉCANIQUE DES MASSES VARIABLES

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS

PAR M. HENRI MINEUR

Résumé.

Ce travail se compose de sept parties :

I. Nous montrons que le problème, qui est traité ici, est posé par la nature. La masse des étoiles diminue au cours du temps par suite du rayonnement de ces astres. Nous rappelons ensuite les recherches effectuées jusqu'à présent sur ce problème.

II. Nous cherchons les équations qui définissent le mouvement d'une masse variable dans un champ de gravitation donné. Ce problème admet deux solutions correspondant l'une à l'hypothèse d'un éther fixe, l'autre au principe de relativité.

Si l'on adopte l'hypothèse de l'éther fixe, le mouvement d'une particule de masse constante ou variable m et de vitesse $\vec{V}$ soumis à une

force $\vec{F}$ est défini par

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\vec{F}.$$

Si l'on adopte le principe de relativité, le mouvement est défini par les mêmes équations que si la masse était constante; on a donc en première approximation

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}.$$

III. Dans la troisième Partie nous traitons le problème de deux corps lorsque les masses de ces corps décroissent d'une manière très lente et lorsqu'on adopte la loi de Newton comme loi d'attraction.

Dans ce cas le grand axe de l'orbite augmente en raison inverse de la masse mais la forme de l'orbite ne change pas.

Il importe de remarquer que la méthode développée dans cette troisième Partie s'étend sans modifications à tous les problèmes suivants : soit un système d'équations canoniques dans lequel la fonction d'Hamilton contient une ou plusieurs constantes M, on suppose que l'on a intégré ce système lorsque M est constant et l'on se propose d'intégrer ce même système où l'on suppose cette fois M lentement variable.

IV. Nous formons le ds^2 du champ de gravitation d'une masse variable en prenant pour point de départ la théorie de la relativité d'Einstein.

V. Nous montrons quel est le mouvement d'un point dans le champ de gravitation précédent : à l'augmentation du grand axe se superpose une augmention séculaire de l'excentricité.

VI. Nous étudions la déviation des rayons lumineux au voisinage d'un corps de masse variable et la déviation des raies spectrales vers le rouge. Les grandeurs de ces deux phénomènes sont pratiquement les mêmes que si la masse était constante.

VII. Nous comparons les résultats obtenus aux données de l'observation astronomique. La loi de Newton apparaît comme inopérante pour expliquer la relation période-excentricité des étoiles doubles; la loi d'Einstein comporte comme conséquence une augmentation simultanée de l'excentricité et du demi-grand axe comme on l'a observé statistiquement sur ces astres, mais la variation de masse des étoiles est notoirement insuffisante pour expliquer numériquement la relation période-excentricité. Il paraît nécessaire de continuer ces recherches, ou de chercher ailleurs que dans la variation de masse des étoiles l'explication des faits observés.

PREMIÈRE PARTIE.

L'ÉTAT ACTUEL DU PROBLÈME.

1. *La masse des étoiles décroît.* — La mécanique est une science d'observation, souvent même une science expérimentale; aussi, bien que dans ce Mémoire nous ne nous livrerons qu'à des recherches d'ordre théorique, avons-nous considéré comme nécessaire de montrer que le problème traité ici répond à une nécessité des sciences d'observation et ne constitue pas seulement un jeu de l'esprit.

La masse des étoiles décroît très lentement et se transforme en rayonnement. Rappelons succinctement comment on est parvenu à ce résultat.

2. *Preuve tirée du rayonnement stellaire.* — L'observation des astres le plus éloignés, qui sont de petites nébuleuses spirales, nous montre que ces corps sont dans un état analogue à celui des astres les plus rapprochés; le temps que met la lumière pour venir des confins de l'univers est donc une très petite fraction de la durée de vie d'un astre; ce temps est de plus de deux cent millions d'années pour les astres les plus faibles que l'on connaît actuellement.

D'autre part, la géologie nous apprend que la terre est solidifiée depuis un temps qui est certainement supérieur à un milliard d'années.

Enfin l'étude des mouvements stellaires nous montre que l'équipartition de l'énergie cinétique des étoiles se trouve réalisée dans la Voie lactée : cette équipartition résulte des passages incessants des étoiles au voisinage les unes des autres, et ne peut se réaliser qu'au bout d'un temps assez long appelé temps de relaxation. Les estimations les plus modestes assignent au temps de relaxation de la Voie lactée une durée supérieure à 10^{12} années.

Dès lors apparaît une difficulté qui a embarrassé un moment les astronomes :

Les étoiles rayonnent une énergie lumineuse pendant un temps qui est supérieur a 10^{12} années. Quelle est la source de cette énergie?

Aucune des sources d'énergie auxquelles on pouvait faire appel il y a une vingtaine d'années ne permettait d'expliquer le rayonnement solaire, par exemple, pendant un temps aussi long que 10^{12} années.

On appelle constante solaire l'énergie reçue sur 1^{cm^2} de la surface terrestre en une minute, lorsqu'on a tenu compte de l'absorption atmosphérique. La constante solaire est de 1,938 petites calories.

L'énergie totale rayonnée par le soleil est donc de $1{,}026 \times 10^{41}$ ergs par an; sa masse étant de $2{,}00 \times 10^{33}$ gr, chaque gramme de soleil rayonne 6.10^7 ergs par an.

On a d'abord cherché l'origine de cette chaleur dans des phénomènes simples :

a. Une combinaison chimique telle que celle du carbone et de l'oxygène dégage 10^{11} ergs par gramme de composé; un phénomène de cette nature n'expliquerait donc le rayonnement solaire que pendant 1000 ans environ.

b. On a invoqué la chute des météorites comme une cause d'entretien de la chaleur solaire, un corps de masse m venant de l'infini avec une vitesse nulle atteint la surface solaire avec une vitesse donnée par

$$\frac{1}{2} m v^2 = f \frac{Mm}{R},$$

f étant le coefficient de la loi de Newton, M la masse et R le rayon du soleil.

En unités C. G. S. :

$$M = 2.10^{33}, \qquad R = 6{,}95.10^{10}, \qquad f = 6{,}7.10^{-8}.$$

L'énergie cinétique apportée par un gramme tombant sur le soleil est donc

$$2.10^{15} \text{ ergs}.$$

Pour entretenir le rayonnement solaire par ce processus, il faudrait que le soleil reçoive annuellement une masse de météorites représentant la fraction 3.10^{-8} de sa masse. En 30 millions d'années la masse du soleil aurait doublé. L'énergie de formation du soleil explique son rayonnement pendant un temps qui est du même ordre.

c. La radioactivité expliquerait le rayonnement solaire pendant 10^{10} ans si le soleil était tout entier en radium.

Ces trois sources possibles de l'énergie rayonnante solaire sont donc insuffisantes pour expliquer le rayonnement de cet astre pendant une durée supérieure à 10^{12} années.

L'origine de la chaleur solaire a été suggérée par le principe de relativité restreinte :

Un corps de masse propre m_0 animé d'une vitesse v par rapport aux observateurs a une masse apparente

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

où c désigne la vitesse de la lumière. Développons la quantité mc^2 suivant les puissances de $\frac{v}{c}$:

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \ldots.$$

Le terme $\frac{1}{2} m_0 v^2$ représente l'énergie cinétique du mobile, on est ainsi conduit à interpréter le premier terme $m_0 c^2$ comme une énergie.

La matière ne serait donc qu'une forme de l'énergie. L'hypothèse actuellement admise est que la masse des étoiles se transforme en énergie rayonnante par un processus encore inconnu.

Un gramme de matière équivaut à $9 . 10^{20}$ ergs, donc si le soleil rayonne constamment au taux actuel il est capable de durer 6×10^{13} années en détruisant sa masse. Le taux de cette destruction : 4 millions de tonnes par seconde, nous donne une idée de l'énergie du rayonnement solaire.

L'hypothèse de la destruction de masse explique donc le rayonnement stellaire pendant les durées de temps exigées par l'astronomie.

3. *Preuve tirée de la mesure des masses stellaires et de l'évolution des astres.* — Les astronomes ont pu constater d'une manière presque directe la diminution de la masse des étoiles.

Il ne peut être question de déterminer à diverses époques la masse d'un astre et de comparer les résultats obtenus : la diminution relative de masse en cent ans par exemple est si faible qu'elle restera très longtemps en dehors de nos possibilités de mesure.

Mais on peut procéder autrement :

L'étude spectroscopique des étoiles a permis de les ranger en une suite continue, et les théories de l'évolution stellaire ont montré que cette suite représentait la succession des états par lesquels passe une même étoile au cours de sa vie.

On admet que toutes les étoiles ont la même évolution et sont dans le même état lorsqu'elles ont le même âge, les différences physiques constatées entre les étoiles que nous observons actuellement proviennent donc des différences d'âges de ces astres.

Une étoile commence par être géante du type M, de très grande dimension et de basse température (3000°), puis elle se contracte en augmentant de température jusqu'à atteindre le type B (12000°) parcourant la série spectrale du type M vers le type B. Puis, continuant à se contracter, l'étoile devient une naine, sa température diminue et elle parcourt la série spectrale en sens inverse du précédent de B vers M :

$$\text{M} \quad \text{K} \xrightarrow{} \text{G} \quad \text{F} \quad \text{A} \quad \text{B} \xrightarrow{} \text{B} \quad \text{A} \quad \text{F} \quad \text{G} \xrightarrow{} \text{K} \quad \text{M}$$

Géante. Naine.

Les astronomes sont capables de reconnaître le type spectral et la catégorie (géante ou naine) d'une étoile d'après son spectre.

On sait d'autre part que de nombreuses étoiles sont doubles et que les masses des composantes peuvent être évaluées lorsque l'on connaît les éléments de l'orbite et la distance du couple au soleil. On a pu ainsi évaluer les masses de nombreuses étoiles.

Voici ce que l'on trouve pour la masse moyenne de chaque catégorie d'étoiles :

	Géantes.						Naines.				
Catégorie........	M	K	G	F	A	B	A	F	G	K	M
Masse...........	20	10	8	7	6	5	4	1,5	0,8	0,6	0,5

$\longrightarrow$
Sens de l'évolution.

L'unité de masse est la masse du soleil (qui est une naine du type F8).

Comme nous l'avons dit, toutes les étoiles sont considérées comme identiques mais d'âges différents. Le résultat précédent s'interprète donc de la manière suivante :

Au cours de son évolution une étoile perd sa masse qui décroît de 20 fois la masse solaire pour les géantes M au tiers de cette même masse pour les naines du type M. Il est très naturel d'admettre que la masse détruite est transformée en énergie rayonnante.

4. *Caractères de la décroissance de masse des étoiles.* — L'un des caractères de cette décroissance de masse est son extrême lenteur relative. Les théories concernant l'état intérieur des étoiles nous apprennent que la relation entre la masse M d'une étoile et le temps t est régie par l'équation

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\alpha \mathrm{M}^3,$$

le coefficient α a pour valeur

$$\alpha = 5.10^{-14}\,(\text{masse du soleil})^{-2}\,(\text{année})^{-1}.$$

Aussi ne doit-on pas attendre d'effet mécanique observable résultant de cette décroissance.

Mais un autre caractère de cette variation de masse est sa très grande durée en sorte que de très petits effets mécaniques de ce phénomène peuvent s'accumuler au cours du temps et être observés par comparaison de l'état présent de divers systèmes considérés comme différemment âgés mais initialement identiques.

Aussi l'étude de la mécanique des masses variables nous a-t-elle semblé digne de retenir l'attention comme intéressant la cosmogonie.

Nous nous bornerons ici à l'étude du problème des deux corps lorsqu'une des masses est très petite vis-à-vis de l'autre et lorsque la variation de masse est très lente.

Avant d'aborder cette étude, examinons les résultats que l'observation nous fournit au sujet de l'évolution d'un système de deux corps.

5. *Évolution des étoiles doubles.* — L'hypothèse la plus répandue actuellement au sujet de la formation des étoiles doubles est celle de la scission : une étoile se scinde en deux masses qui constituent ainsi

une étoile double à très courte période (quelques jours) et à orbite presque circulaire.

Puis la période du couple augmente progressivement, les deux étoiles se séparent de plus en plus. En même temps l'excentricité de l'orbite augmente.

Nous verrons que la diminution de masse expliquerait tout au moins qualitativement ce phénomène, mais pour être complet il faudrait faire une étude approfondie de l'influence sur l'évolution du couple, des passages des étoiles dans son voisinage.

Nous nous bornerons à montrer le phénomène le plus net que l'on ait constaté à propos des étoiles doubles :

Si l'on classe les systèmes d'après leurs périodes, et si pour chaque catégorie on calcule l'excentricité moyenne, on trouve un nombre qui croît avec la période comme le montre le tableau ci-dessous :

Période moyenne.	Excentricité moyenne.
2,75 jours	0,047
7,80 »	0,147
23,40 »	0,324
1,5 an	0,350
31,3 »	0,423
74,4 »	0,514
170,0 »	0,539

Ce résultat s'interprète par une augmentation simultanée de la période et de l'excentricité au cours de l'évolution d'un système binaire.

6. *Résumé des recherches effectuées jusqu'à présent sur la mécanique des masses variables* (¹). — *a*. En ce qui concerne la mise en équation du mouvement d'un mobile de masse m_0 variable dans un champ donné, la plupart des auteurs ont adopté l'équation

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \tag{1}$$

(¹) La bibliographie de ce problème est dès maintenant assez étendue. Signalons en particulier les travaux de Jeans (*Astronomy and Cosmogony*, et *Monthly Notices of R. A. S.*, t. 85), de Mac Millan (*Monthly Notices of R. A, S.*, t. 75), des géomètres

$\vec{v}$ désignant la vitesse du mobile et $\vec{F}$ la force agissant sur lui. Mais Levi-Civita a proposé récemment l'équation

$$\frac{d}{dt}(m_0 \vec{v}) = \vec{F}. \tag{2}$$

Il importait de préciser sur quelles hypothèses physiques ces équations sont basées, nous montrerons que (1) correspond au principe de relativité resteinte et (2) à l'hypothèse d'un éther fixe.

b. En ce qui concerne l'expression de F les auteurs ont tous admis jusqu'à présent que la force exercée par une masse M sur une masse m située à une distance r était donnée par la loi de Newton,

$$F = -f \frac{M.m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

M désignant la valeur de la masse centrale à l'époque considérée. Une telle loi de force résulte bien des équations invariantes de la loi d'attraction newtonienne, nous verrons que l'expression de la force est toute différente si l'on prend pour point de départ les équations de la théorie d'Einstein.

Par contre les mathématiciens ont rarement supposé que la masse M variait lentement, ils ont laissé la fonction $M(t)$ arbitraire et ils ont cherché à résoudre le problème de deux corps, ou tout au moins ont cherché des propriétés du mouvement des deux corps, en s'attachant particulièrement au demi-grand axe et à l'excentricité de l'orbite.

Douboschine a montré comment le problème pouvait être résolu par approximations successives. Les géomètres italiens se sont particulièrement attachés à l'étude de l'allure du mouvement lorsque le temps devient infini, en apportant quelques restrictions relatives à $M(t)$.

De ces travaux nous allons extraire trois résultats particulièrement simples.

c. Soient M une masse variable et m une masse négligeable vis-à-vis

---

italiens tels que Armellini, Levi-Civita, etc., (*Rendiconti dei Lincei*, depuis 1913), enfin dernièrement de Stepanoff et Douboschine (*Russian Astrophysical Journal*, vol. IV, V et VI).

de la précédente, en sorte que l'on peut supposer M fixe. Étant donnée une courbe C quelconque tournant sa concavité vers M, on peut toujours choisir pour M une fonction du temps telle que la trajectoire de m soit précisément C.

Il est facile d'indiquer la démonstration. Écrivons en effet la formule de Binet :

$$C^2\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right]=\frac{f.M}{r^2},$$

r étant connu en fonction de θ, cette équation définit $M(\theta)$; d'autre part le théorème des aires

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C$$

définit t en fonction de θ, on peut donc définir M en fonction de t.

d. Un autre résultat simple est le suivant : si la masse M varie lentement l'orbite est une ellipse d'excentricité constante dont le demi-grand axe varie en raison inverse de M.

Écrivons en effet les équations du mouvement en coordonnées polaires :

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-f\frac{M(t)}{r^2},$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}=0.$$

La seconde donne

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C$$

ou

$$M(t)\,a(1-e^2)=\frac{C^2}{f^2}.$$

Formons la combinaison des forces vives :

$$(1^{\text{re}}\text{ équation})\frac{dr}{dt}+(2^{\text{e}}\text{ équation})\,r\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}+r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+r\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-f\frac{M(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{2}v^2-f\frac{M(t)}{r}\right)\right]=-\frac{f}{r}\frac{dM}{dt};$$

or

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{f.M}{r} = -\frac{f.M}{2a},$$

prenons la moyenne du deuxième membre pendant une révolution

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{a}\right) = \frac{2}{a}\frac{dM}{dt}, \quad \text{car} \quad \overline{\frac{1}{r}} = \frac{1}{a},$$

cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dt}(aM) = 0,$$

donc

$$M.a = \text{const.},$$
$$e = \text{const.}$$

L'orbite reste semblable à elle-même ($e = \text{const.}$) mais ses dimensions varient comme $\frac{1}{M}\cdot$ Cette augmentation de a au cours du temps est très lente, par exemple, le rayon de l'orbite terrestre augmente de 1^{m} en cent ans et la durée de l'année diminue de $0^{s},00042$ par siècle.

e. Ainsi dans le problème des deux corps la forme de l'orbite ne change pas et ses dimensions varient comme $\frac{1}{M}\cdot$ On peut dégager de l'ensemble des travaux cités une généralisation partielle de ce résultat.

Si n points s'attirent suivant la loi de Newton et si leurs masses varient très lentement en restant proportionnelles entre elles, le mouvement est le même que si les masses étaient restées constantes, à condition de multiplier à chaque instant les longueurs par un facteur inversement proportionnel aux masses.

Soient n points de masse m_i, de coordonnées $x_i y_i z_i$, s'attirant suivant la loi de Newton.

Puisque les masses m_i varient proportionnellement nous pouvons poser

$$m_i = \lambda(t)\, m_{i,0},$$

où $\lambda(t)$ est une fonction de t variant très lentement, et les $m_{i,0}$ des constantes ne dépendant que de i.

Le mouvement d'un point est défini par

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sum \frac{(x - x_i)\, m_i}{r_i^3}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \mathrm{X}(x, y, z, x_i, y_i, z_i),$$

X est une fonction de x, y, z, x_i, y_i, z_i homogène et de degré -2 par rapport aux x, y, z, x_i, y_i, z_i ou, si l'on préfère, par rapport aux longueurs.

Nous allons chercher le mouvement en substituant aux x_i, y_i, z_i les inconnues ξ_i, η_i, ζ_i définies par

$$x_i = \frac{1}{\lambda}\xi_i,$$

$$y_i = \frac{1}{\lambda}\eta_i,$$

$$z_i = \frac{1}{\lambda}\zeta_i$$

et en substituant à t la variable τ définie par

$$\frac{d\tau}{dt} = \lambda^2,$$

λ étant proportionnel aux masses, les ξ, η, ζ sont les coordonnées des points à condition de prendre à chaque instant une unité de longueur inversement proportionnelle aux masses. On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^3 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \xi\lambda^2 \frac{d^2\lambda}{dt^2}$$

et

$$\mathrm{X}(x, y, z, x_i, y_i, z_i) = \lambda^2 \mathrm{X}(\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i).$$

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \mathrm{X}(\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) + \xi \frac{1}{\lambda} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2}.$$

La variation de masse étant très lente, négligeons le terme $\xi \frac{1}{\lambda} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2}$, il reste

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \mathrm{X}(\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i).$$

C'est l'équation du mouvement si l'on suppose $\lambda = 1$, c'est-à-dire si les masses sont constantes.

Si la variation de masse n'est plus infiniment lente, mais linéaire en fonction de τ, le théorème est encore vrai. Ceci se traduit par

$$\lambda^5 \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda \frac{d^2\lambda}{dt^2} - 2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\lambda}{dt} = \text{const.}\,\lambda^2.$$

Ce théorème n'est qu'une indication, il est insuffisant : dans un système stellaire les masses ne varient pas proportionnellement : λ n'est pas un facteur universel.

Malgré cette restriction on devine qu'un système stellaire au cours de son évolution se dilate à peu près en raison inverse de sa masse totale.

DEUXIÈME PARTIE.

MOUVEMENT D'UNE MASSE VARIABLE DANS UN CHAMP DE GRAVITATION DONNÉ.

7. *Dynamique du principe de relativité restreinte.* — Nous allons résoudre ce problème : une masse m_0 fonction de temps rayonne sphériquement l'énergie $-c^2 \frac{dm_0}{dt} dt$ dans l'intervalle de temps dt, quel est son mouvement?

Supposons d'abord m_0 constant.

Plaçons-nous au point de vue de la relativité restreinte, soient $\vec{G}$ l'impulsion d'univers du mobile; $\vec{F}(T, X_1, X_2, X_3)$ la force d'univers qui agit sur lui, si la masse m est constante, l'équation du mouvement s'obtient en écrivant que

$$\frac{d\vec{G}}{ds} = \vec{F},$$

ds désignant le temps propre du mobile

Si l'on admet le point de vue de la dynamique newtonienne, les équations du mouvement se déduisent des précédentes en faisant $c=\infty$, donc $ds=dt$ et $T=0$. La masse au repos m_0 est liée à m par

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

On sait qu'il est possible de supprimer la notion de force et de la remplacer par celle d'équipollence physique[1]. Comme nous utiliserons ce point de vue rappelons brièvement en quoi il consiste.

En chaque point de l'univers prenons des axes $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, le déplacement $\overrightarrow{dM}$ d'un événement d'univers a pour expression

$$\overrightarrow{dM}=\Sigma\omega^i\vec{e}_i,$$

où ω^0, ω^1, ω^2, ω^3 sont quatre formes linéaires de différentielles par rapport aux coordonnées curvilignes de M.

Supposons que l'intervalle de deux événements ds^2 soit donné par

$$ds^2=c^2(\omega^0)^2-(\omega^1)^2-(\omega^2)^2-(\omega^3)^2.$$

On considère un parallélisme de proche en proche, ou équipollence physique; ce parallélisme se trouve défini si l'on connaît la relation entre les vecteurs $\vec{e}_i$ en M et les mêmes vecteurs en $M+\overrightarrow{dM}$

$$\overrightarrow{de_i}=\Sigma\omega_i^k\overrightarrow{e_k},$$

cette formule signifie que si l'on transporte en M par parallélisme le vecteur $(\vec{e}_i)_{M+dM}$, on a

$$(\vec{e}_i)_{M+dM}-(\vec{e}_i)_M=\Sigma\omega_i^k e_k,$$

les ω_i^k sont les coefficients d'une rotation, fonctions linéaires des ω^i.

Le parallélisme permet de définir une dynamique dans cet univers.

---

(1) E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée* (*Ann. de l'Éc. Norm.*, vol. 40, p. 325, vol. 41, p. 1, et vol. 42, p. 17).

L'impulsion d'univers d'un point de masse propre m_0 est

$$\vec{I} = m_0 \frac{\omega^0}{ds}\vec{e}_0 + m_0 \frac{\omega^1}{ds}\vec{e}_1 + m_0 \frac{\omega^2}{ds}\vec{e}_2 + m_0 \frac{\omega^3}{ds}\vec{e}_3.$$

La mécanique consiste à écrire que le vecteur $\vec{I}$ reste physiquement équipollent à lui-même dans le déplacement du mobile

$$\overrightarrow{dI} = 0.$$

Si l'on a un système formé de plusieurs masses d'impulsions $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \ldots,$ et situées au même point, on aura

$$\overrightarrow{dI_1} + \overrightarrow{dI_2} + \ldots = 0.$$

8. *Impulsion d'univers d'un rayonnement sphérique.* — Pour mettre en équations le mouvement d'une masse variable m_0, nous assimilerons la destruction d'une fraction dm de cette masse par rayonnement à la projection de photons de lumière d'énergie totale $-c^2\,dm_0$ par le point M, avec la vitesse c de la lumière, dans des directions réparties sphériquement.

Lorsqu'on examine la question de près on s'aperçoit que l'essentiel du raisonnement réside dans la définition adoptée pour un rayonnement sphérique.

On peut donner deux définitions du rayonnement sphérique correspondant l'une à l'hypothèse de l'éther fixe, l'autre au principe de relativité, adoptons d'abord celui-ci.

Dans l'hypothèse relativiste on admettra que, par rapport aux axes entraînés avec la masse m_0, la somme des quantités de mouvement des photons projetées sur un axe quelconque est nulle. En d'autres termes l'émission des photons a lieu symétriquement dans le système propre de la masse m_0.

Soient x, y, z, t les axes propres de la masse m, la somme des impulsions d'univers des photons émis pendant le temps dt a pour composantes

$$T' = -\,dm_0, \qquad X' = Y' = Z' = 0,$$

T représente en effet la masse des photons émis, X', Y', Z' sont nuls puisque le rayonnement a lieu symétriquement dans le système propre de la particule.

Cette impulsion totale $\vec{I}'$ est la même que l'impulsion d'un mobile de masse $-dm_0$ au repos par rapport aux axes propres de la particule de masse m_0.

Soient $\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ la vitesse d'univers du mobile et $\vec{I}$ son impulsion d'univers; par rapport aux axes propres de cette masse on a

$$\vec{V} = \vec{e}_0, \qquad \vec{I} = m_0 \vec{V}.$$

Nous venons de montrer que l'impulsion $\vec{I}'$ du rayonnement est

$$\vec{I}' = -\, dm_0 \vec{e}_0,$$

donc

$$\vec{I}' = -\, dm_0 \vec{V}.$$

Cette égalité étant une égalité de vecteurs est vraie par rapport à un système d'axes quelconques.

9. *Mouvement d'une masse variable.* — Adoptons le point de vue de l'équipollence physique, soient

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$$

la vitesse d'univers du mobile, et

$$\vec{I} = m_0 \vec{V}$$

son impulsion d'univers par rapport à des axes quelconques.

Écrivons que la somme des impulsions d'univers du mobile et de son rayonnement est restée physiquement équipollente à elle-même entre les époques t et $t + dt$.

A l'époque t cette somme se réduit à $m_0 \vec{V}$, impulsion du mobile de masse m_0; à l'époque $t + dt$ elle se compose de

$$\left(m_0 + \frac{dm_0}{dt} dt\right) \left(\vec{V} + \overrightarrow{dV}\right),$$

impulsion du mobile, dont la masse propre a augmenté de $\frac{dm_0}{dt}dt$, et de celle $-\frac{dm_0}{dt}dt\vec{V}$ de l'onde rayonnée pendant le temps dt.

Du point de vue de l'équipollence physique on a

$$\left(m_0+\frac{dm_0}{dt}dt\right)\left(\vec{V}+\overrightarrow{dV}\right)-\frac{dm_0}{dt}dt\vec{V}-m_0\vec{V}=0$$

ou

$$\overrightarrow{dV}=0.$$

Si la masse m_0 reste constante, l'équation du mouvement

$$\overrightarrow{dI}=0$$

conduit au même résultat

$$\overrightarrow{dV}=0.$$

Ainsi : au point de vue relativiste, le mouvement d'une masse variable rayonnant sphériquement est le même que celui d'une masse constante. L'équation de ce mouvement s'obtient en écrivant que la vitesse d'univers du mobile reste physiquement équipollente à elle-même.

10. *Cas où l'on admet la théorie de l'éther fixe.* — On considère alors un système de référence particulier x, y, z, t appelé éther, la propriété essentielle de ce système est que les équations de Maxwell-Hertz sont valables par rapport à lui.

On admettra qu'une masse rayonne sphériquement si l'émission des photons d'énergie $-c^2\,dm_0$ est symétrique par rapport à ces axes liés à l'éther, c'est-à-dire que la somme des projections des quantités de mouvement des photons sur des axes liés à l'éther est nulle.

Soit un mobile de masse variable m_0 animé à l'époque t d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'éther et soumis à une force $\vec{F}$, écrivons que la variation totale de la quantité de mouvement de la masse m_0 et de son rayonnement entre les époques t et $t+dt$ est $\vec{F}\,dt$

$$\underbrace{(m_0+dm_0)\left(\vec{v}+\overrightarrow{dv}\right)}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{de mouvement}\\ \text{du mobile à } t+dt}}\quad\underbrace{+\,0}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{de mouvement}\\ \text{du rayonnement}}}\quad\underbrace{-\,m_0\vec{v}}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{de mouvement}\\ \text{du mobile à } t}}=\vec{F}\,dt$$

ou

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm_0}{dt} = \vec{F},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(m_0 \vec{v}\right) = \vec{F}.$$

On voit que dans l'hypothèse de l'éther fixe l'équation du mouvement d'une masse variable n'est pas la même que celle du mouvement d'une masse constante. Elle peut s'écrire

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dm_0}{dt} \vec{v}.$$

Tout se passe comme si m_0 était constant et comme si l'on ajoutait à $\vec{F}$ la force $-\frac{dm_0}{dt}\vec{v}$ proportionnelle à v et analogue à une résistance du milieu proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité ayant un signe quelconque).

TROISIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS DANS L'HYPOTHÈSE NEWTONIENNE.

11. *Généralisation de la méthode de Lagrange.* — Nous allons traiter ce problème par une méthode qui généralise la méthode de la variation des constantes de Lagrange; elle est différente de celle développée par Douboschine.

Nous supposerons qu'une des masses M est prépondérante et peut être considérée comme fixe.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad y' = \frac{dy}{dt}, \qquad z' = \frac{dz}{dt}$$

celles de sa vitesse; si ce point est sollicité par une force centrale $-\frac{fM}{r^2}$ émanant de l'origine, où M est une constante, il décrit une orbite keplerienne et les équations de son mouvement ont la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= f_1(t,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \alpha_4,\, \alpha_5,\, \alpha_6\, \mathrm{M}),\\ y &= f_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\ z &= f_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\ x' &= g_1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\ y' &= g_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\ z' &= g_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \end{aligned}\right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ désignant six constantes d'intégration.

Les expressions précédentes vérifient les équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x', & \dfrac{\partial y}{\partial t} = y', & \dfrac{\partial z}{\partial t} = z'. \\ \dfrac{\partial x'}{\partial t} = -\dfrac{f\mathrm{M}}{r^2}\dfrac{x}{r}, & \dfrac{\partial y'}{\partial t} = -\dfrac{f\mathrm{M}}{r^2}\dfrac{y}{r}, & \dfrac{\partial z'}{\partial t} = -\dfrac{f\mathrm{M}}{r^2}\dfrac{z}{r}. \end{array}\right.$$

Nous allons supposer que M, masse du corps central, est une fonction du temps et chercher le mouvement dans ces conditions. Nous supposerons en outre qu'une force perturbatrice $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$ agit sur le mobile de masse m. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z',$$
$$\frac{dx'}{dt} = -f\frac{\mathrm{M}(t)}{r^2}\frac{x}{r} + \mathrm{X}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -f\frac{\mathrm{M}(t)}{r^2}\frac{y}{r} + \mathrm{Y},$$
$$\frac{dz'}{dt} = -f\frac{\mathrm{M}(t)}{r^2}\frac{z}{r} + \mathrm{Z}.$$

Prenons comme nouvelles inconnues les six constantes α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, considérées comme fonctions du temps t, définies par les formules (3).

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = x' \ldots,$$
$$\frac{\partial x'}{\partial t} + \sum^{\sigma} \frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial \mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -f\frac{\mathrm{M}}{r^2}\frac{x}{r} + \mathrm{X} \ldots;$$

ou en tenant compte des équations (4)

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = 0,$$
$$\sum \frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial \mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathrm{X}.$$

Procédons comme dans la théorie classique des perturbations :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Multiplions la } 1^{\text{re}} \text{ équation par} & & & -\dfrac{\partial x'}{\partial \alpha_i} & \text{ou} & -\dfrac{\partial x'}{\partial \mathrm{M}}, \\
\text{»} & 2^{\text{e}} & \text{»} & -\dfrac{\partial y'}{\partial \alpha_i} & \text{»} & -\dfrac{\partial y'}{\partial \mathrm{M}}, \\
\text{»} & 3^{\text{e}} & \text{»} & -\dfrac{\partial z'}{\partial \alpha_i} & \text{»} & -\dfrac{\partial z'}{\partial \mathrm{M}}, \\
\text{»} & 4^{\text{e}} & \text{»} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_i} & \text{»} & +\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}, \\
\text{»} & 5^{\text{e}} & \text{»} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_i} & \text{»} & +\dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{M}}, \\
\text{»} & 6^{\text{e}} & \text{»} & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_i} & \text{»} & +\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{M}}.
\end{array}$$

Ajoutons les équations ainsi obtenues. Nous obtenons ainsi

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\sigma} [\alpha_j \alpha_i]\frac{d\alpha_i}{dt} + [\alpha_j \mathrm{M}]\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathrm{R}_j \qquad (j = 1,\ 2.\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

En posant

$$[\alpha_i \alpha_j] = \underset{x, y, z}{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i} \right),$$
$$\mathrm{R}_j = \underset{x, y, z}{\mathrm{S}} \mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}$$

et

$$[\alpha_i \mathrm{M}] = \underset{x, y, z}{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x'}{\partial \mathrm{M}} - \frac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i} \right).$$

Ces équations définissent les α_i en fonction du temps.

Si la force perturbatrice dérive d'un potentiel U, on a

$$\mathrm{R}_i = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_i}.$$

12. *Nouveaux crochets de Lagrange.* — Si l'on suppose M constant, le calcul précédent n'est autre que le développement de la méthode classique de la variation des éléments.

M étant variable, il s'introduit des termes nouveaux $[\alpha_i \mathrm{M}]\frac{d\mathrm{M}}{dt}$. Nous allons établir une propriété des nouveaux crochets $[\alpha_i \mathrm{M}]$.

On sait que les $[\alpha_i \alpha_j]$ ne contiennent pas explicitement le temps; pour le démontrer on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha_i \alpha_j] = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left\{ \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left\{ \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\right)\right\}. \tag{6}$$

On pose

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathbf{S}\, x'^2 - \frac{f\mathrm{M}}{r}$$

et l'on remarque que H ne contenant pas explicitement les constantes α_i, les parenthèses qui figurent au second membre de l'équation ont pour expressions $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha_i}$ respectivement, en sorte que ce second membre est nul.

L'équation (6) est encore vérifiée si l'on remplace α_j par M, mais, H contenant explicitement M, on a cette fois

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{M}} = -\frac{f}{r} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \mathrm{M}} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}\right)$$

en sorte que

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha_i \mathrm{M}] = -f\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \alpha_i}. \tag{7}$$

En général, les nouveaux crochets dépendent du temps.

Dans les applications futures de la théorie précédente, le plan de l'orbite reste fixe; nous simplifierons donc le problème en prenant celui-ci pour plan des xy.

Nous n'introduirons ainsi que quatre éléments osculateurs qui seront :

Le demi-grand axe : a;

L'excentricité : e;

La longitude du périhélie : ϖ;

La longitude moyenne de l'époque o : σ.

Le calcul des crochets tels que $[\alpha_i\alpha_j]$ est classique, il reste donc à calculer les crochets $[\alpha_i \mathrm{M}]$.

Nous emploierons des axes intermédiaires $\mathrm{O}\xi$, $\mathrm{O}\eta$; $\mathrm{O}\xi$ est dirigé vers le périhélie et $\mathrm{O}\eta$ est perpendiculaire au précédent.

Les coordonnées x, y, x' et y' sont données par les formules

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{ll} x=\xi\cos\varpi-\eta\sin\varpi, & x'=\xi'\cos\varpi-\eta'\sin\varpi,\\ y=\xi\sin\varpi+\eta\cos\varpi, & y'=\xi'\sin\varpi+\eta'\cos\varpi,\\ \xi=a(\cos u-e), & \xi'=-\dfrac{na\sin u}{1-e\cos u},\\ \eta=a\sqrt{1-e^2}\sin u, & \eta'=\dfrac{na\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u},\\ u-e\sin u=nt+\sigma, & n=\sqrt{f}\,\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}.\end{array}\right.$$

13. *Définition nouvelle de la longitude moyenne.* — Avant d'entreprendre le calcul signalons une difficulté qu'on y rencontre :

La formation des $\dfrac{\partial}{\partial e}$, $\dfrac{\partial}{\partial \sigma}$, $\dfrac{\partial}{\partial \varpi}$ ne présente pas de difficulté, mais il n'est pas de même pour les $\dfrac{\partial}{\partial a}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{M}}$.

Par exemple la dérivée $\dfrac{\partial \xi}{\partial a}$ est la somme de deux termes, obtenus le premier en dérivant par rapport à a explicitement

$$a(\cos u-e),$$

le second en remarquant que u dépend de a par l'intermédiaire de n :

$$u-e\sin u=nt+\sigma,$$

n dépendant lui-même de a par

$$n=\sqrt{f}\sqrt{\mathrm{M}}\,a^{-\frac{3}{2}}.$$

Nous désignerons le premier terme par

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right),$$

le second a pour expression

$$\frac{\partial \xi}{dn}\,\frac{\partial n}{\partial a}$$

or,

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = t\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a},$$

en sorte que

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right) - \frac{3}{2}\frac{n}{a}t\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}.$$

Le second terme est très gênant car il contient t en facteur et donnera des termes en t^2 dans l'intégration des équations (5).

On écrira des formules analogues pour les dérivées de η, ξ', η', formules qu'on peut résumer par

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) - \frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{\partial V}{\partial \sigma}t,$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)$ désignant la dérivée par rapport à a d'une fonction quelconque V de ξ, η, ξ', η', obtenue en laissant de côté les termes qui s'introduisent par

$$\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{dn}{da}.$$

Un raisonnement identique au précédent montre que pour ces mêmes fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \left(\frac{\partial V}{\partial M}\right) + \frac{n}{2M}\frac{\partial V}{\partial \sigma}t,$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial M}\right)$ est la dérivée obtenue en laissant de côté les termes qui proviendraient d'une dérivation par rapport à u

$$\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial M}.$$

Formons les crochets

$$[\alpha_i a],$$

α_i désignant un élément autre que M

$$[\alpha_i a] = \mathbf{S}\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}\right]$$

ou d'après la formule précédente

$$[\alpha_i a] = \mathbf{S}\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial x'}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}\right] - \frac{3}{2}\frac{n}{a}t\,\mathbf{S}\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x'}{\partial \sigma} - \frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}\right].$$

Désignons par $([\alpha_i \alpha])$ le crochet obtenu en observant dans les dérivations la règle précédemment imposée : laisser les termes obtenus en dérivant par rapport à a ou M par l'intermédiaire de u; la formule précédente s'écrit

$$[\alpha_i a] = ([\alpha_i a]) - \frac{3}{2}\frac{n}{a} t[\alpha_i \sigma].$$

De même

$$[\alpha_i \mathrm{M}] = ([\alpha_i \mathrm{M}]) + \frac{1}{2}\frac{n}{\mathrm{M}} t[\alpha_i \sigma].$$

Remarquons que les crochets $[\alpha_i \sigma]$ sont tous nuls à l'exception de

$$[a\sigma] \quad \text{et} \quad [\mathrm{M}\sigma].$$

Il en résulte que

$$[\alpha_i\, a] = ([\alpha_i\, a]),$$
$$[\alpha_i \mathrm{M}] = ([\alpha_i \mathrm{M}]),$$

α_i désignant un élément autre que a et M.

On a évidemment

$$[\sigma\, a] = ([\sigma\, a]),$$
$$[\sigma \mathrm{M}] = ([\sigma \mathrm{M}]).$$

Il ne reste donc à comparer que $[a\mathrm{M}]$ et $([a\mathrm{M}])$.

On obtient par un calcul analogue aux précédents

$$[a\mathrm{M}] = ([a\mathrm{M}]) - \frac{3}{2}\frac{n}{a} t[\sigma \mathrm{M}] + \frac{1}{2}\frac{n.t}{\mathrm{M}}[a\sigma].$$

Ceci posé, substituons à la variable σ la nouvelle inconnue σ_1 définie par

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t\frac{dn}{dt}$$

et cherchons la forme nouvelle des équations. Calculons d'abord $\frac{dn}{dt}$, on a

$$n = \sqrt{f}\sqrt{\mathrm{M}}\, a^{-\frac{3}{2}},$$

donc

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n}{2\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} - \frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt}.$$

Soit α_i une variable autre que σ, α ou M, explicitons l'équation (5) :

$$\sum [\alpha_i \alpha_j] \frac{d\alpha_j}{dt} + [\alpha_i \mathrm{M}] \frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_i},$$

$$[\alpha_i e] \frac{de}{dt} + [\alpha_i \varpi] \frac{d\varpi}{dt} + [\alpha_i a] \frac{da}{dt} + [\alpha_i \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [\alpha_i \mathrm{M}] \frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_i}.$$

Remplaçons $\frac{d\sigma}{dt}$ par son expression au moyen de $\frac{d\sigma_1}{dt}$:

$$\begin{aligned}[\alpha_i e] \frac{de}{dt} + [\alpha_i \varpi] \frac{d\varpi}{dt} &+ \left\{ [\alpha_i a] + \frac{3}{2} \frac{n}{a} t [\alpha_i \sigma] \right\} \frac{da}{dt} \\ &+ \left\{ [\alpha_i \mathrm{M}] - \frac{nt}{2\mathrm{M}} [\alpha_i \sigma] \right\} \frac{d\mathrm{M}}{dt} + [\alpha_i \sigma] \frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_i}\end{aligned}$$

ou d'après le calcul que nous avons fait :

$$[\alpha_i e] \frac{de}{dt} + [\alpha_i \varpi] \frac{d\varpi}{dt} + ([\alpha_i a]) \frac{da}{dt} + [\alpha_i \sigma] \frac{d\sigma_1}{dt} + ([\alpha_i \mathrm{M}]) \frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_i}.$$

Ces équations ont la même forme que les équations primitives, à condition d'y remplacer $[\alpha_i a]$ et $[\alpha_i \mathrm{M}]$ par $([\alpha_i a])$ et $([\alpha_i \mathrm{M}])$.

Ceci pouvait se voir plus rapidement en remarquant que les $[\alpha_i \sigma]$ sont nuls. L'équation

$$\sum_j [\sigma \alpha_j] \frac{d\alpha_j}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}$$

conserve aussi la même forme car elle ne contient pas $\frac{d\sigma}{dt}$ et

$$[\sigma\, a] = ([\sigma\, a]),$$
$$[\sigma \mathrm{M}] = ([\sigma \mathrm{M}]).$$

Puisque les $[\alpha_i \sigma]$ sont nuls, α_i désignant un élément autre que a et M, l'équation en $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}$ s'écrit

$$[\sigma a] \frac{da}{dt} + [\sigma \mathrm{M}] \frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}$$

ou

$$([\sigma a]) \frac{da}{dt} + ([\sigma \mathrm{M}]) \frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \sigma}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\sum [a \alpha_i] \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a},$$

c'est-à-dire

$$[ae]\frac{de}{dt} + [a\varpi]\frac{d\varpi}{dt} + [a\sigma]\frac{d\sigma}{dt} + [a\mathrm{M}]\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a};$$

remplaçons σ en fonction de σ_1 et $[a\mathrm{M}]$ par l'expression obtenue plus haut :

$$\begin{aligned}[ae]\frac{de}{dt} &+ [a\varpi]\frac{d\varpi}{dt} + [a\sigma]\frac{d\sigma_1}{dt} - t[a\sigma]\frac{n}{2\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{3}{2}t[a\sigma]\frac{n}{a}\frac{da}{dt}\\ &+ ([a\mathrm{M}])\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{nt}{\mathrm{M}}[a\sigma]\frac{d\mathrm{M}}{dt} - \frac{3}{2}\frac{n}{a}t[\sigma\mathrm{M}]\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\end{aligned}$$

ou en tenant compte de l'expression de $\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)$:

$$([ae])\frac{de}{dt} + ([a\varpi])\frac{d\varpi}{dt} + ([a\sigma])\frac{d\sigma_1}{dt} + ([a\mathrm{M}])\frac{d\mathrm{M}}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right).$$

L'équation a la même forme, les crochets $[a\alpha_i]$ étant remplacés par les $([a\alpha_i])$ et $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}$ par $\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)$.

On établirait le même résultat pour l'équation où le second membre est $-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{M}}$.

En résumé : Dans le calcul des crochets de Lagrange et dans celui des seconds membres, on laissera les termes qui dans les dérivées par rapport à a et M proviendraient de

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial a} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial \mathrm{M}}$$

et contiendraient t en facteur.

On continuera à définir le mouvement du point par les formules du mouvement elliptique où la longitude moyenne de l'époque σ est remplacée par σ_1.

Examinons σ_1

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t\frac{dn}{dt},$$

donc

$$\sigma_1 = \sigma + \int t\frac{dn}{dt}\,dt = \sigma + nt - \int n\,dt$$

ou

$$\sigma_1 + \int n\,dt = \sigma + nt.$$

La longitude moyenne l est donc

$$l = \sigma_1 + \int n\,dt.$$

Pour calculer l à une époque quelconque il faudra donc faire en deux fois le calcul des éléments : on calculera $a(t)$, on en déduit $n(t)$, puis σ_1, puis l.

14. *Équations qui définissent les éléments osculateurs.* — Le calcul des crochets $[\alpha_i \alpha_j]$ est classique, rappelons les résultats :

$$[a\sigma] = -\frac{1}{2}na, \qquad [a\,e] = 0, \qquad [a\varpi] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2},$$

$$[e\sigma] = 0 \qquad [e\varpi] = \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad [\sigma\varpi] = 0.$$

Le crochet $[\varpi\mathrm{M}]$ se calcule immédiatement en remarquant que

$$[\varpi\mathrm{M}] = \frac{\partial(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\partial\mathrm{M}} = \frac{\partial\left[\sqrt{f}\sqrt{a(1-e^2)}\sqrt{\mathrm{M}}\right]}{\partial\mathrm{M}},$$

c'est-à-dire

$$[\varpi\mathrm{M}] = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2\mathrm{M}}.$$

Il est indépendant du temps; on pouvait prévoir ce résultat en remarquant que $\frac{\partial\eta}{\partial\varpi} = 0$ et en faisant dans l'équation (7) $\alpha_i = \varpi$.

Pour calculer les autres crochets on remarquera par exemple que

$$[a\mathrm{M}] = \frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\xi'}{\partial\mathrm{M}} - \frac{\partial\xi}{\partial\mathrm{M}}\frac{\partial\xi'}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\eta'}{\partial\mathrm{M}} - \frac{\partial\eta}{\partial\mathrm{M}}\frac{\partial\eta'}{\partial a}.$$

Il suffit de calculer ces dérivées au moyen des formules (8) et de les substituer dans cette expression, on trouve ainsi

$$[a\mathrm{M}] = \frac{nae\sin u}{2\mathrm{M}},$$

$$[e\mathrm{M}] = \frac{na^2\sin u}{2\mathrm{M}},$$

$$[\sigma\mathrm{M}] = \frac{na^2}{\mathrm{M}}\,\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}.$$

Les valeurs moyennes dans le temps de ces crochets nous seront nécessaires, elles sont données par la formule

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos u)\,f(u)\,du,$$

on trouve ainsi

$$\overline{[aM]} = 0, \qquad \overline{[eM]} = 0, \qquad \overline{[\sigma M]} = \frac{na^2}{2M}.$$

Il est facile avec ces données d'écrire les équations qui définissent les variations des éléments osculateurs :

$$-\frac{1}{2}na\frac{d\sigma}{dt} - \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\frac{d\varpi}{dt} + \frac{nae}{2M}\sin u\frac{dM}{dt} = R_a,$$

$$\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\varpi}{dt} + \frac{na^2\sin u}{2M}\frac{dM}{dt} = R_e,$$

$$\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{de}{dt} + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2M}\frac{dM}{dt} = R_\varpi,$$

$$\frac{1}{2}na\frac{da}{dt} + \frac{na^2}{2M}\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{dM}{dt} = R_\sigma.$$

Le calcul des seconds membres est classique, on le trouvera au Chapitre XXVII, vol. I, du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand; dans les équations ci-dessous R désigne la composante de la force perturbatrice suivant le rayon vecteur, S sa composante suivant la perpendiculaire à ce rayon et φ l'anomalie vraie :

$$R_a = R\frac{r}{a},$$

$$R_e = -Ra\cos\varphi + S\frac{2+e\cos\varphi}{1-e^2}r\sin\varphi,$$

$$R_\sigma = R\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin\varphi + S\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r},$$

$$R_\varpi = -R_\sigma + Sr.$$

Nous avons signalé que la variation de masse des corps célestes est très lente, aussi les effets de cette variation ne se font-ils sentir qu'au bout d'un temps très long et seuls les termes séculaires des éléments osculateurs nous importent. De plus, comme nous l'avons dit, nous supposons que M décroît très lentement en sorte que nous pouvons supposer dans les équations précédentes $\frac{dM}{dt}$ constant pendant un temps très long.

Pour obtenir les termes séculaires nous pouvons donc prendre les valeurs moyennes des deux membres des équations (5) pendant une révolution. Les mêmes résultats seraient valables si $\frac{dM}{dt}$ variait avec une période différente de celle de la révolution du corps considéré.

On obtient ainsi, en résolvant les équations par rapport aux dérivées des éléments osculateurs,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt}+\frac{a}{M}\frac{dM}{dt}=\frac{2e}{n\sqrt{1-e^2}}R\sin\varphi+\frac{2a\sqrt{1-e^2}}{n}\frac{S}{r},\\ &\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}R\sin\varphi+\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{ne}\frac{S}{r}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}rS,\\ &e\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}R\cos\varphi+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}S\sin\varphi+\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}Sr\sin\varphi,\\ &\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{2}{na^2}Rr+\frac{1-e^2}{nae}R\cos\varphi-\frac{1-e^2}{nae}S\sin\varphi-\frac{1}{na^2e}Sr\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

15. *Problème des deux corps lorsqu'on adopte l'équation* $\vec{F}=m\vec{\gamma}$. — Il suffit de poser dans les équations précédentes

$$R=0,\qquad S=0,$$

les équations donnent immédiatement

$$e=\text{const.},\qquad \varpi=\text{const.},\qquad \sigma=\text{const.},$$
$$aM=\text{const.}$$

L'orbite a une excentricité constante, la direction du périhélie reste fixe ainsi que la longitude moyenne de l'époque zéro. Le demi-grand axe varie proportionnellement à $\frac{1}{M}$.

Ces résultats pouvaient être prévus par application du théorème démontré au paragraphe 6, mais la théorie qui précède nous sera nécessaire dans la cinquième Partie.

16. *Problème des deux corps lorsqu'on adopte l'équation* $\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}$.

— Ce cas se ramène au précédent à condition d'ajouter une force perturbatrice $-\frac{dm}{dt}\vec{v}$; Il suffit donc de poser dans les équations (9)

$$\mathrm{R} = -\frac{dm}{dt} \cdot \frac{dr}{dt},$$
$$\mathrm{S} = -r \cdot \frac{dm}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Nous admettrons encore que pendant un temps très long $\frac{dm}{dt}$ est constant. Le calcul des seconds membres des équations est le même que lorsqu'on étudie le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, la résistance étant proportionnelle à la vitesse. On trouvera ce calcul développé au Chapitre XIII du quatrième volume du *Traité de Mécanique céleste*, de Tisserand. Désignons par α et β les composantes de la vitesse du soleil suivant la direction du périhélie et suivant la direction perpendiculaire, et bornons-nous aux équations qui définissent les variations a et de e,

$$\frac{da}{dt} + \frac{a}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{2a}{m}\frac{dm}{dt} = 0,$$
$$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\beta\frac{dm}{dt}.$$

En pratique la valeur moyenne de β est nulle, en sorte que les seuls termes séculaires que les variations des masses M et m puissent produire sont définis par

$$a.\mathrm{M}.m^2 = \text{const.},$$
$$e = \text{const.}$$

On voit que a augmente en raison inverse de $\mathrm{M}m^2$ et que l'excentricité reste constante.

QUATRIÈME PARTIE.

CHAMP DE GRAVITATION D'UNE MASSE VARIABLE DANS L'HYPOTHÈSE EINSTEINIENNE.

17. *Équations d'Einstein.* — Rappelons brièvement quelles sont les équations de la théorie d'Einstein.

Soient $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ quatre axes rectangulaires choisis arbitrairement en chaque point de l'univers, le vecteur $\overrightarrow{dM}$ qui joint deux événements infiniment voisins a pour expression

$$\overrightarrow{dM} = \Sigma\, \omega^i \vec{e}_i,$$

les ω^i étant quatre formes linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées de M : l'intervalle d'univers correspondant est donné par

$$ds^2 = \left(\overrightarrow{dM}\right)^2 = c^2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2.$$

Si l'on transporte par équipollence physique les axes $\vec{e}_i$ d'origine $M + \overrightarrow{dM}$ au point M, ils diffèrent des axes $\vec{e}_i$ en ce point de quantités

$$\left(\vec{e}_i\right)_{M+dM} - \left(\vec{e}_i\right)_M = \overrightarrow{de_i} = \Sigma\, \omega_i^k \vec{e}_k.$$

Les ω_i^k sont des formes linéaires par rapport aux ω^i, elles définissent l'équipollence physique de proche en proche dans l'univers. Le mouvement d'une particule de masse unité s'obtient en écrivant que son impulsion d'univers $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ reste physiquement équipollente à elle-même.

Si en un point de l'univers on a des corps de masse m_i et de vitesses u_i, v_i, w_i $\left(\text{par rapport aux axes } \vec{e}_i\right)$ on appelle forme élément de matière le vecteur

$$\vec{\Pi} = \Pi^0 \vec{e}_0 + \Pi^1 \vec{e}_1 + \Pi^2 \vec{e}_2 + \Pi^3 \vec{e}_3,$$

où

$$\Pi^0 = \Sigma\, m_i \omega_i \omega^1 \omega^3 - \Sigma\, m_i u_i \omega^2 \omega^3 \omega^0 - \Sigma\, m_i v_i \omega^3 \omega^1 \omega^0 - \Sigma\, m_i w_i \omega^1 \omega^2 \omega^0,$$
$$\Pi^1 = \Sigma\, m_i u_i \omega^1 \omega^2 \omega^3 - \Sigma\, m_i u_i^2 \omega^2 \omega^3 \omega^0 - \Sigma\, m_i u_i v_i \omega^3 \omega_1 \omega^0 - \Sigma\, m_i u_i w_i \omega^1 \omega^2 \omega^0,$$
$$\Pi^2 = \Sigma\, m_i v_i \omega^1 \omega^2 \omega^3 - \Sigma\, m_i u_i v_i \omega^2 \omega^3 \omega^0 - \Sigma\, m_i v_i^2 \omega^3 \omega^1 \omega^0 - \Sigma\, m_i v_i w_i \omega^1 \omega^2 \omega^0,$$
$$\Pi^3 = \Sigma\, m_i w_i \omega^1 \omega^2 \omega^3 - \Sigma\, m_i u_i w_i \omega^2 \omega^3 \omega^0 - \Sigma\, m_i v_i w_i \omega^3 \omega^1 \omega^0 - \Sigma\, m_i w_i^2 \omega^1 \omega^2 \omega^0.$$

On appelle torsion de l'espace temps le vecteur

$$\Sigma\, \Omega^i \vec{e}_i,$$

où

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum \omega^k \omega_k^i.$$

Le bivecteur de courbure

$$\Sigma\Omega^{ij}\left[\vec{e}_i\vec{e}_j\right]$$

est défini par

$$\Omega_i^j = [\omega_i^j]' - [\omega_i^k\omega_k^j].$$

Rappelons la signification géométrique des Ω_{ij}.

Décrivons un contour défini par les produits extérieurs $[\omega^k\omega^l]$, la variation du vecteur $\vec{e}_i$ par équipollence physique pendant ce trajet est

$$\Omega^{ik}\vec{e}_k.$$

On peut définir d'autres formes vectorielles de courbure :

Celle qui nous intéresse est

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} = \; & [\omega_0\Omega_{12} + \omega_1\Omega_{20} + \omega_2\Omega_{01}]\vec{e}_3,\\ & + [\omega_1\Omega_{23} + \omega_2\Omega_{31} + \omega_3\Omega_{12}]\vec{e}_0,\\ & + [\omega_2\Omega_{30} + \omega_3\Omega_{01} + \omega_0\Omega_{23}]\vec{e}_1,\\ & + [\omega_3\Omega_{01} + \omega_0\Omega_{13} + \omega_1\Omega_{30}]\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Géométriquement on la définit de la manière suivante :

Soit un volume limité par une surface Σ, en chaque point M de Σ considérons le bivecteur de courbure appliqué associé à un petit élément entourant M

$$\Sigma\Omega^{ij}\left[\mathrm{M}\,\vec{e}_i\vec{e}_j\right];$$

la somme de ces bivecteurs appliqués est un trivecteur

$$\mathrm{S}[\omega^0\Omega^{12} + \omega^1\Omega^{20} + \omega^2\Omega^{01}]\left[\vec{e}_0\vec{e}_1\vec{e}_2\right].$$

dont le vecteur polaire est précisément $\vec{\Omega}$.

Les équations d'Einstein consistent à écrire que la torsion est nulle

$$\Sigma\Omega^i\vec{e}_i = 0$$

et que

$$\vec{\Omega} = -\frac{8\pi\mathrm{K}}{c^2}\vec{\Pi},$$

K désignant le coefficient de la loi de gravitation.

18. *Calcul de la forme $\vec{\Pi}$ représentant un flux d'énergie lumineuse.* — La première idée qui vient à l'esprit quand on cherche le champ de gravitation d'une masse variable est de procéder de la même manière que pour obtenir le champ d'une masse constante en introduisant simplement le temps comme variable supplémentaire dans le ds^2 cherché :

On partira d'un ds^2 à symétrie sphérique dont les coefficients dépendent du temps et l'on écrira les équations d'Einstein en prenant

$$\vec{\Pi} = 0.$$

Si l'on fait ce calcul on obtient le ds^2 de Schwarzschild et seulement celui-là, comme nous l'avons montré par ailleurs (1).

Il est facile de comprendre *a priori* ce résultat : la masse matérielle équivaut à une énergie, et réciproquement ; en écrivant que $\vec{\Pi} = 0$, nous écrivons qu'il n'y a aucun flux d'énergie autour de la masse centrale, donc que cette masse reste constante.

Il suffit du reste de constater que la conservation de la masse-énergie intérieure à une surface est une conséquence des équations d'Einstein pour conclure que la masse centrale doit être constante en vertu des équations adoptées.

Ainsi apparaît la nécessité d'introduire une forme élément de matière représentant le flux d'énergie rayonnante produit par la masse centrale variable.

C'est ce que nous allons faire d'abord :

Un mobile de masse au repos m_0, animé d'une vitesse v suivant l'axe $\vec{e}_1$, a pour impulsion d'univers

$$\vec{I} = m\vec{e}_0 + mv\vec{e}_1,$$

où

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Son énergie apparente est

$$E = mc^2,$$

(1) H. MINEUR, *Sur les ondes de gravitation* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 56, 1928, fasc. I et II, p. 50).

donc

$$\vec{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}}{c^2}\vec{e}_0 + \frac{\mathrm{E}v}{c^2}\vec{e}_1,$$

si c'est un photon

$$v = c,$$

et

$$\vec{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}}{c^2}\vec{e}_0 + \frac{\mathrm{E}}{c}\vec{e}_1,$$

un flux de photons de densité d'énergie ρ sera donc représenté par une densité matérielle $\frac{\rho}{c^2}$ et une densité de quantité de mouvement $\frac{\rho}{c}$ localisée en chaque point. La forme $\vec{\Pi}$ correspondante se calcule d'une manière identique

$$\vec{\Pi} = \left(\frac{\rho}{c^2}\omega^1\omega^2\omega^3 - \frac{\rho}{c}\omega^2\omega^1\omega^0\right)\vec{e}_0 + \left(\frac{\rho}{c}\omega^1\omega^2\omega^3 - \rho\,\omega^2\omega^3\omega^0\right)\vec{e}_1.$$

On sait que, lorsqu'on cherche les forces exercées par un champ électromagnétique sur les charges situées dans un élément de volume, on est conduit à localiser en chaque point du champ une densité d'énergie E et une densité de quantité de mouvement $\frac{\mathrm{E}}{c}$ dirigée suivant les rayons de l'onde. La forme précédente donnée à $\vec{\Pi}$ est donc encore valable si, abandonnant le point de vue corpusculaire, on se place au point de vue électromagnétique.

19. *Choix des variables et des axes. Calcul de la courbure.* — Soit M une masse variable, nous fixerons un événement P par quatre variables t, r_1, u, v.

L'une d'elles, t, joue le rôle de temps et n'est définie qu'à un changement de variables près de la forme $t' = h(t)$, h étant arbitraire.

La variable r_1 est telle que les surfaces $t =$ const., $r_1 =$ const. soient les sphères de centre M, r_1 n'est défini lui aussi qu'à un changement de variables près; mais une fois t choisi nous prendrons r_1 de telle manière qu'un rayon lumineux suivant la géodésique PM ait pour équation

$$r_1 \mp ct = \text{const.},$$

r_1 se trouve défini à une constante près.

Enfin u et v sont des coordonnées curvilignes sur la sphère de centre M et de rayon PM, telles que, si g est le rayon de cette sphère, son ds^2 exprimé au moyen des variables u et v ait pour expression

$$g^2\frac{-du^2+dv^2}{u^2},$$

quantité qui représente bien le ds^2 d'une sphère de rayon g.

Les axes $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sont respectivement tangents aux courbes obtenues en faisant varier successivement une seule des variables t, r_1, u, v.

D'après cela, l'intervalle d'univers qui sépare deux événements infiniment voisins a pour expression :

$$ds^2 = c^2(\omega^0)^2-(\omega^1)^2+(\omega^2)^2-(\omega^3)^2.$$

Avec

$$\omega^0 = f(r_1, t)\,dt,$$
$$\omega^1 = f(r_1, t)\,dr,$$
$$\omega^2 = g(r_1, t)\frac{du}{u},$$
$$\omega^3 = g(r_1, t)\frac{dv}{u}.$$

ω^2 est imaginaire pur pour des événements réels.

Ce ds^2 s'écrit encore

$$ds^2 = \sum_i g_{ii}(\omega^i)^2,$$

avec

$$g_{00} = c^2, \qquad g_{11} = -1, \qquad g_{22} = +1, \qquad g_{33} = -1.$$

Donc

$$\omega_0 = c^2\omega^0 = c^2 f\,dt,$$
$$\omega_1 = -\omega^1 = -f\,dr_1,$$
$$\omega_2 = \quad \omega^2 = g\frac{du}{u},$$
$$\omega_3 = -\omega^3 = -g\frac{dv}{u}.$$

Pour obtenir les ω_{ij} écrivons que la torsion de l'univers est nulle

$$(\omega_i)' - \Sigma\,\omega_{iK}\omega^K = 0.$$

On a ainsi

$$\omega_{01} = -\frac{c^2}{f^2}\frac{\partial f}{\partial r_1} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial t}\omega^1,$$
$$\omega_{02} = \frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial t}\omega^2,$$
$$\omega_{03} = -\frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial t}\omega^3,$$
$$\omega_{12} = \frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial r_1}\omega^2,$$
$$\omega_{13} = -\frac{1}{fg}\frac{\partial g}{\partial r_1}\omega^3,$$
$$\omega_{23} = -\frac{1}{g}\omega^3,$$

On en déduit les ω_i^k par la formule

$$\omega_i^k = \frac{1}{g_{kk}}\omega_{ik}.$$

Puis les composantes Ω_{ij} du bivecteur de courbure par

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' - \sum_{\mathrm{K}} \omega_i^k \omega_{kj}.$$

Posons

$$\mathrm{A} = \frac{1}{f^2 g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r_1}\frac{\partial g}{\partial r_1}\right],$$
$$\mathrm{B} = \frac{1}{cf^2 g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial r_1\,\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r_1}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial r_1}\right],$$
$$\mathrm{C} = \frac{1}{f^2 g}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \log f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \log f}{\partial r_1}\frac{\partial g}{\partial r_1}\right],$$
$$\mathrm{D} = -\frac{1}{f^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \log f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \log f}{\partial r_1^2}\right],$$
$$d = -\frac{1}{g^2}\left[1 - \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial g}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{1}{c^2 f^2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right].$$

On trouve

$$\Omega_{01} = c^2\mathrm{D}[\omega^0\omega^1],$$
$$\Omega_{02} = \mathrm{B}c[\omega^1\omega^2] + c^2\mathrm{C}[\omega^0\omega^2],$$
$$\Omega_{03} = -\mathrm{B}c[\omega^1\omega^3] - c^2\mathrm{C}[\omega^0\omega^3],$$
$$\Omega_{23} = d[\omega^2\omega^3],$$
$$\Omega_{13} = -\mathrm{A}[\omega^1\omega^3] - \mathrm{B}c[\omega^0\omega^3],$$
$$\Omega_{12} = \mathrm{A}[\omega^1\omega^2] + \mathrm{B}c[\omega^0\omega^2].$$

Désignons par ρ la densité de l'énergie localisée en un point quelconque, la quantité de mouvement de l'énergie en ce point étant dirigée suivant $\vec{e}_1$, les composantes de la forme élément de matière en un point quelconque de notre espace sont

$$\Pi_0 = \frac{\rho}{c^2}\omega^1\omega^2\omega^3 - \frac{\rho}{c}\omega^2\omega^3\omega^0,$$

$$\Pi_1 = \frac{\rho}{c}\omega^1\omega^2\omega^3 - \rho\,\omega^2\omega^3\omega^0,$$

$$\Pi_2 = 0,$$

$$\Pi_3 = 0.$$

On a pour équations d'Einstein

$$\omega_1\Omega_{23} + \omega_2\Omega_{31} + \omega_3\Omega_{12} = -\frac{8\pi K}{c^2}\Pi_0,$$

$$-\omega_0\Omega_{23} + \omega_2\Omega_{03} - \omega_3\Omega_{01} = -\frac{8\pi K}{c^2}\Pi_1,$$

$$-\omega_0\Omega_{31} + \omega_3\Omega_{01} - \omega_1\Omega_{03} = -\frac{8\pi K}{c^2}\Pi_2,$$

$$-\omega_0\Omega_{12} + \omega_1\Omega_{02} - \omega_2\Omega_{01} = -\frac{8\pi K}{c^2}\Pi_0.$$

Ces équations s'écrivent

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} 2A + d &= \frac{8\pi K}{c^4}\rho, \\ d - 2C &= -\frac{8\pi K}{c^4}\rho, \\ 2B &= -\frac{8\pi K}{c^4}\rho, \\ A - C + D &= 0. \end{aligned}\right.$$

20. *Changement de variables.* — Nous remplacerons les variables r_1 et t par

$$x = r_1 - ct,$$

$$y = r_1 + ct,$$

d'où

$$r_1 = \frac{1}{2}[x+y],$$

$$ct = \frac{1}{2}[y-x];$$

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\right];$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_1\,\partial t} = c\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right].$$

Remarquons que

$$\frac{\partial \log f}{dx} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial x^2} = -\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

Nous poserons

$$\varphi = f^{-2},$$

c'est-à-dire

$$f = \varphi^{-\frac{1}{2}}.$$

On a alors

$$A = \frac{\varphi}{g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \log\varphi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \log\varphi}{\partial y}\right],$$

$$B = \frac{\varphi}{g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial \log\varphi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \log\varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right],$$

$$C = \frac{\varphi}{g}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \log\varphi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \log\varphi}{\partial y}\right],$$

$$D = -2\varphi\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

$$d = -\frac{1}{g^2}\left[1 - 4\varphi\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right].$$

Posons

$$\rho' = \frac{4\pi K}{c^4}\rho,$$

Le système (10) s'écrit :

$$(10') \qquad \begin{cases} B = -\rho', \\ A + C = 2\rho', \\ D = d, \\ A - C + D = 0. \end{cases}$$

21. *Application du principe de conservation de la forme élément de matière.* — On peut remarquer que le principe de conservation de l'énergie donne une équation

$$f^2 g^2 \rho' = F(x),$$

c'est-à-dire

$$\rho' = \frac{\varphi}{g^2} F(x)$$

où F est une fonction arbitraire.

On sait en effet que le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, c'est-à-dire les équations de la mécanique, sont des conséquences des équations d'Einstein pour le fluide de densité $\frac{\rho}{c^2}$ qui détermine le champ de gravitation.

Or ces équations expriment que la dérivée extérieure de

$$\vec{\Pi} = \Pi^0 \vec{e}_0 + \Pi^1 \vec{e}_1 + \Pi^2 \vec{e}_2 + \Pi^3 \vec{e}_3$$

est nulle.

Dans le cas présent

$$\vec{\Pi} = \rho\left[\frac{1}{c^2}\omega^1\omega^2\omega^3\vec{e}_0 - \frac{1}{c}\omega^2\omega^3\omega^0\vec{e}_0 + \frac{1}{c}\omega^1\omega^2\omega^3\vec{e}_1 - \omega^2\omega^3\omega^0\vec{e}_1\right]$$

et

$$\vec{\Pi}' = \frac{1}{f^3 g^2}\left(\frac{\partial u}{\partial r_1} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\omega^0\omega^1\omega^2\omega^3\left[\vec{e}_1 + \frac{1}{c}\vec{e}_0\right]$$

où l'on a posé

$$u = f^2 g^2 \rho.$$

Les équations de la mécanique donnent donc

$$\frac{\partial u}{\partial r_1} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

(11) $$f^2 g^2 \rho' = F(x).$$

Du reste on pourrait déduire cette équation du système (10').

22. *Intégration du système* (10'). — *a*. De ce système on déduit la combinaison

$$A + C + 2B = 0$$

qui s'écrit

$$\varphi \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi \frac{\partial g}{\partial y}\right] = 0;$$

d'où

(12) $$\varphi \frac{\partial g}{\partial y} = f_1(x),$$

f_1 étant une fonction arbitraire.

b. La combinaison

$$A - C + D = 0,$$

s'écrit

$$\frac{2}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

Substituons dans cette équation l'expression de φ :

$$\log\varphi = \log f_1(x) - \log \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{2}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}\right] = 0.$$

Écrivons cette équation :

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}} \times \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right] + 2\,\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{g} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\log \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right\} + 2\,\frac{\partial}{\partial y}\{\log g^2\} = 0.$$

On en déduit

$$\frac{g^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\,\mathrm{P}(x),$$

P étant une fonction arbitraire de x.

Écrivons cette équation

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{P}(x)\,\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2} = 0,$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\mathrm{P}(x)}{g}\right] = 0$$

qui donne

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \mathrm{Q}(x) + \frac{\mathrm{P}(x)}{g}, \tag{13}$$

où P et Q sont des fonctions arbitraires de x.

c. La combinaison

$$\mathrm{D} = d$$

s'écrit :

$$2\varphi\,\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{g^2} - \frac{4\varphi}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = -\,\frac{\mathrm{P}}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial y},$$

et comme

$$\log\varphi = -\log\frac{\partial g}{\partial y} + \log f_1(x),$$

on a

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{f_1'}{f_1},$$

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = -\frac{P}{g^2} + \frac{f_1'}{f_1}.$$

Puis

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \varphi = -\frac{2P}{g^3} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

L'équation proposée s'écrit donc

$$-\frac{4P}{g^3} \varphi \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{g^2} - \frac{4}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x} \varphi \frac{\partial g}{\partial y},$$

remplaçons

$$\varphi \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{par} \quad f_1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{par} \quad Q + \frac{P}{g}.$$

Il vient

$$-\frac{4P}{g^3} f_1 = \frac{1}{g^2} - \frac{4}{g^2} f_1 \left[Q + \frac{P}{g} \right],$$

c'est-à-dire

(14) $$4 Q f_1 = 1.$$

d. Il reste enfin la combinaison

$$A + C - 2B = 4\rho$$

qui s'écrit :

$$\frac{\varphi}{g} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} \right] = \rho'$$

en remplaçant ρ' par $\frac{\varphi}{g^2} F$,

$$\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{par} \quad Q + \frac{P}{g}$$

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} \quad \text{par} \quad -\frac{P}{g^2} + \frac{f_1'}{f_1},$$

et

$$f_1 \quad \text{par} \quad \frac{1}{4Q}.$$

Cette équation s'écrit

(15) $$F(x) = Q(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \right].$$

Les équations d'Einstein nous ont donc conduit au système plus simple formé de la réunion des équations (11), (12), (13), (14) et (15):

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x} = Q(x) + \frac{P(x)}{g},\\ &\varphi\frac{\partial g}{\partial y} = f_1(g),\\ &4 f_1(x) Q(x) = 1,\\ &\rho' = \frac{\varphi}{g^2} F(x),\\ &F(x) = Q(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right].\end{aligned}\right.$$

C'est tout ce que ces équations peuvent nous donner.

Remarquons que l'expression du ds^2 au moyen de x et y est

$$ds^2 = -f^2\,dx\,dy + g^2\left[\frac{du^2}{u^2} - \frac{dv^2}{u^2}\right].$$

Les variables x et y sont donc arbitraires dans une certaine mesure: on peut remplacer x par une fonction quelconque de x, et y par une fonction quelconque de y.

Nous choisirons ce changement de variables de manière à simplifier le système.

23. *Cas où la masse centrale est constante.* — On a alors

$$\rho' = 0,$$

d'où

$$F(x) = 0.$$

Faisons sur x un changement de variable

$$u = u(\bar{x}')$$

et soit

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{x}'} = Q(x)\,u'(\bar{x}') + \frac{P(x)\,u'(\bar{x}')}{g},$$

choisissons u de manière que

$$Q(x)\,u'(\bar{x}') = C.$$

C étant une constante; en désignant toujours par x la nouvelle variable on aura cette fois

$$Q = C,$$
$$\frac{dP}{dx} = 0,$$

d'où

$$P = C',$$

et le système se réduit à

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = C + \dfrac{C'}{g}, \\ \varphi = \dfrac{1}{4C\dfrac{\partial g}{\partial y}}. \end{cases}$$

Remarquons également que $g(x, y)$ est défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial g}{\partial x} = C + \frac{C'}{g},$$

dont l'intégrale dépend d'une fonction arbitraire $\theta(y)$, cette intégration est facile à effectuer

$$Cg(x, y) - C' \log\left[g(x, y) + \frac{C'}{C}\right] = C^2 x + \theta(y).$$

Comme on peut remplacer y par une fonction quelconque de cette variable nous pouvons poser

$$\theta(y) = C^2 y,$$

$g(x, y)$ est alors une fonction de r_1 :

$$Cg - C' \log\left(g + \frac{C'}{C}\right) = 2C^2 r_1;$$

il en est de même de φ, donc de tous les coefficients du ds^2, ceux-ci ne dépendent par conséquent que de la seule variable r_1. Nous allons voir que ce ds^2 n'est autre que le ds^2 de Schwarzschild.

Faisons le changement de variables

$$r = g(r_1),$$

on a alors

$$\varphi = \frac{1}{4\,C\,\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{1}{2\,C\,\dfrac{\partial g}{\partial r_1}};$$

or

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial r_1} = C + \frac{C'}{g}.$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial r_1} = 2\,C + \frac{2\,C'}{r}$$

et

$$\varphi = \frac{1}{4\,C^2 + \dfrac{4\,CC'}{r}} = f^{-2},$$

donc

$$f = 2\sqrt{C^2 + \frac{CC'}{r}}.$$

Comme

$$\frac{dr}{dr_1} = 2\,C + \frac{2\,C'}{r},$$

on a finalement :

$$\omega^0 = \sqrt{4\,C^2 + \frac{4\,CC'}{r}}\,dt,$$

$$\omega^1 = \sqrt{C + \frac{C'}{r}}\,dr,$$

$$\omega^2 = r\,\frac{du}{u},$$

$$\omega^3 = r\,\frac{dv}{u},$$

donc

$$ds^2 = c^2\left(4\,C^2 + 4\,\frac{CC'}{r}\right)dt^2 - \frac{C}{C + \dfrac{C'}{r}}\,dr^2 - r^2 \times (ds^2 \text{ d'une sphère de rayon } 1).$$

C'est bien le ds^2 de Schwarzschild si l'on pose

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{lll} 4\,C^2 = 1, & \text{d'où} & C = \dfrac{1}{2}, \\ 4\,CC' = -\dfrac{2\,M}{c^2}\,K, & & C' = -\dfrac{M}{c^2}\,K, \end{array}\right.$$

ce qui est légitime, r n'étant défini qu'à un facteur près, M désigne la masse centrale et K le coefficient de la loi de Newton.

24. *Cas où la masse centrale est variable.* — Par analogie avec les résultats précédents exprimés par les formules (17) et (18) nous choisirons la variable x de manière que

$$Q(x) = \frac{1}{2},$$

et nous poserons

$$P(x) = -\frac{K}{c^2} M(x) = -M_1(x).$$

On déduit alors du système

$$f_1(x) = \frac{1}{2},$$

$$F(x) = -\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dx}$$

et

$$\frac{4\pi K}{c^4}\rho = -\frac{1}{f^2 g^2}\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dx},$$

c'est-à-dire

$$(19) \qquad 4\pi g^2 f^2 \rho = -\frac{d(Mc^2)}{dx}.$$

L'énergie localisée dans un domaine $\omega^0\omega^1\omega^2\omega^3$ est

$$\rho\,\omega^0\omega^1\omega^2\omega^3 = g^2 f^2 \rho\, dr\, dt \frac{du\, dv}{u^2}.$$

Dans le domaine limité par les sphères r_1, $r_1 + dr_1$ et les intervalles de temps t, $t + dt$,

$$4\pi g^2 f^2 \rho\, dr\, dt.$$

Elle est fonction de $x = r_1 - ct$, elle se propage donc suivant les rayons avec la vitesse de la lumière. Comme cette énergie est empruntée à la masse centrale, celle-ci, à l'époque t, est donc

$$M(-ct).$$

Le principe de conservation de la forme $\vec{\Pi}$ nous conduit donc à interpréter M comme la masse centrale variable.

Nous supposerons cette masse donnée, le problème se réduit donc à l'intégration du système

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{M_1(x)}{g}, \\ \varphi = \dfrac{1}{2\dfrac{\partial g}{\partial y}}, \end{cases}$$

en se rappelant qu'on peut remplacer par y une fonction quelconque de cette variable.

La première équation du système ne peut être intégrée quelle que soit la fonction M_1, désignons par $g[x, \psi(y)]$ son intégrale générale, où φ est une fonction arbitraire de y.

Le ds^2 cherché a pour expression

$$ds^2 = f^2\, dx\, dy + g^2 \frac{du^2 - dv^2}{u^2}.$$

Or

$$f^2 = \frac{1}{\varphi} = 2\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Donc

$$ds^2 = 2\frac{\partial g}{\partial y} dx\, dy + g^2 \frac{du^2 - dv^2}{u^2}$$

ou

$$ds^2 = 2\, dx\, dg + g^2 \frac{du^2 - dv^2}{u^2} - 2\frac{\partial g}{\partial x} dx^2.$$

Prenons comme nouvelles variables x et r

$$r = g(x, y),$$

et remarquons que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{M_1(x)}{r}.$$

Il vient

$$(21) \qquad -ds^2 = 2\, dx\, dr + r^2 \frac{du^2 - dv^2}{u^2} - \left(1 - \frac{2M_1(x)}{r}\right) dx^2.$$

Le problème est résolu au point de vue mathématique puisque le ds^2 cherché se trouve exprimé explicitement au moyen de 4 variables :

25. *Introduction du temps comme variable.* — L'expression précédente présente cependant un inconvénient. La variable r s'interprète comme un rayon vecteur, ou plus exactement comme un paramètre permettant de mesurer ce rayon, mais x s'interprète, non pas comme un temps, mais comme un temps retardé.

Cherchons l'expression du temps t, en mettant le ds^2 précédent sous la forme

$$ds^2 = [\varphi\, dx - \varphi^{-1}\, dr]^2 - \varphi^{-2}\, dr^2 - r^2 \frac{du^2 - dv^2}{u^2},$$

où

$$\varphi = \sqrt{1 - \frac{2\mathrm{M}_1(x)}{r}}.$$

La parenthèse $\varphi\, dx - \varphi^{-1}\, dr$ est proportionnelle à la différentielle du temps t, posons

$$c\, dt = \psi[\varphi^{-2}\, dr - dx].$$

Le facteur intégrant ψ vérifie l'équation

$$\varphi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial r} - 2\varphi^{-3}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi = 0, \tag{22}$$

dont l'intégration n'est pas possible en général.

Le temps étant ainsi défini, le ds^2 ainsi considéré prend la forme

$$ds^2 = c^2\varphi^2\psi^{-2}\, dt^2 - \varphi^{-2}\, dr^2 - r^2\frac{du^2 - dv^2}{u^2}, \tag{21 bis}$$

où

$$\varphi = \sqrt{1 - \frac{2\mathrm{KM}(x)}{c^2 r}},$$

Si la masse centrale est constante on a

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

L'équation qui définit φ admet l'intégrale $\psi = 1$ et l'expression du ds^2 se réduit à celle du ds^2 de Schwarzschild.

Ceci est encore partiellement vrai si la masse reste constante seulement dans l'intervalle de temps :

$$t_1 < t < t_2.$$

Le ds^2 se confond avec celui de Schwarzschild dans le domaine

$$-ct_2 < x < -ct_1.$$

Ce domaine est compris entre deux sphères dont les rayons croissent avec la vitesse de la lumière.

CINQUIÈME PARTIE.

MOUVEMENT D'UN POINT DANS LA CHAMP D'UNE MASSE VARIABLE, CAS EINSTEINIEN.

26. *Formules qui définissent l'équipollence physique.* — Nous venons de former le ds^2 qui définit le champ d'une masse variable, nous allons étudier divers phénomènes physiques dans ce champ.

Cherchons d'abord le mouvement d'un point de masse négligeable dans ce champ.

Nous avons montré que le mouvement d'une masse quelconque, constante ou non dans le temps, est indépendant de cette masse et de sa variation. Nous allons donc considérer le mouvement d'une masse unité.

Employons les notations du chapitre précédent.

Soit :

$$\varphi(x, r) = \sqrt{1 - \frac{2\,\mathrm{KM}(x)}{c^2 r}}.$$

Le mouvement a lieu dans un plan passant par la masse centrale, le ds^2 du champ produit par la masse $\mathrm{M}(-ct)$ dans ce plan est donc

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 \tag{22'}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^0 = \varphi\, dx - \varphi^{-1}\, dr \quad \omega_0 = \omega^0, \\ \omega^1 = \varphi^{-1}\, dr \quad \omega_1 = -\,\omega^1, \\ \omega^2 = r\, d\theta \quad \omega_2 = -\,\omega^2. \end{array}\right. \tag{23}$$

On en tire

$$\begin{aligned} dx &= \varphi^{-1}(\omega^0 + \omega^1), \\ dr &= \varphi\,\omega^1, \\ d\theta &= \frac{1}{r}\,\omega^2. \end{aligned}$$

Formons les ω_{ij}, pour cela calculons

$$(\omega_0)' = \left[\varphi^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]\omega^0\omega^1,$$

$$(\omega_1)' = \varphi^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\omega^0\omega^1,$$

$$(\omega_2)' = -\frac{\varphi}{r}\omega^1\omega^2.$$

Comme

$$(\omega_i)' = \Sigma\,\omega_{ik}\omega^k,$$

on en déduit

$$\omega_{01} = \left[\varphi^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]\omega^0 + \varphi^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\omega^1,$$

$$\omega_{02} = 0, \qquad \omega_{12} = -\frac{\varphi}{r}\omega^2$$

ou si l'on préfère

$$\omega_{01} = \left(\varphi^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\varphi\,dx + \varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr,$$

$$\omega_{02} = 0, \qquad \omega_{12} = -\varphi\,d\theta.$$

Lors d'un déplacement infiniment petit on aura

$$\overrightarrow{de_0} = +\omega_0^1\vec{e}_1 = -\omega_{01}\vec{e}_1,$$

$$\overrightarrow{de_1} = +\omega_1^0\vec{e}_0 + \omega_1^2\vec{e}_2 = -\omega_{01}\vec{e}_0 - \omega_{12}\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{de_2} = \omega_2^1\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_1.$$

27. *Équations du mouvement lorsqu'on prend x comme variable.* — L'impulsion d'univers d'une masse unité est

$$\vec{I} = \frac{\omega^0}{ds}\vec{e}_0 + \frac{\omega^1}{ds}\vec{e}_1 + \frac{\omega^2}{ds}\vec{e}_2$$

où

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2.$$

Posons

$$p = \frac{dx}{ds}$$

et écrivons

$$\vec{I} = p\frac{\omega_0}{dx}\vec{e}_0 + p\frac{\omega^1}{dx}\vec{e}_1 + p\frac{\omega^2}{dx}\vec{e}_2$$

ou

$$\vec{I} = p\left[\varphi - \varphi^{-1}\frac{dr}{dx}\right]\vec{e}_0 + p\varphi^{-1}\frac{dr}{dx}\vec{e}_1 + pr\frac{d\theta}{dx}\vec{e}_2.$$

Les équations du mouvement d'un point m s'obtiennent en écrivant

$$d\overrightarrow{\mathrm{I}} = 0.$$

Les termes en $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ donnent :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dx^2} - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\frac{dr}{dx} - \varphi^2\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = 0,\\ &\frac{d^2 r}{dx^2} - \varphi^2 r\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial r} - 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\frac{dr}{dx} = 0,\\ &r\frac{d^2\theta}{dx^2} + 2\frac{dr}{dx}\frac{d\theta}{dx} + r\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\frac{d\theta}{dx} = 0.\end{aligned}\right.$$

On vérifie bien que l'équation $\mathrm{I}^2 = \text{const.}$, qui s'écrit

$$(25)\qquad p^2\left[\varphi^2 - 2\frac{dr}{dx} - r^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right] = \text{const.},$$

est une conséquence des équations précédentes. D'après la définition de p le second membre est égal à 1. On peut remarquer aussi que la troisième équation s'écrit

$$(26)\qquad pr^2\frac{d\theta}{dx} = \text{const.}$$

On tire des trois équations ci-dessus

$$(27)\qquad \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = r\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

puis

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dx^2} = \varphi^2 r\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dx} - r\frac{dr}{dx}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2,\\ &r\frac{d^2\theta}{dx^2} = -2\frac{dr}{dx}\frac{d\theta}{dx} - r^2\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^3 + \varphi r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{d\theta}{dx}.\end{aligned}\right.$$

28. *Équations du mouvement lorsqu'on prend le temps comme variable.* — Ce sont les équations du mouvement. Écrivons-les en introduisant les dérivées de r et θ par rapport à t.

Si l'on se reporte au paragraphe 25 on voit que t est défini par

$$c\,dt = \psi[\varphi^{-2}\,dr - dx].$$

Introduisons d'abord la variable t_1 définie par

$$c\,dt_1 = \varphi^{-2}\,dr - dx,$$

dt_1 n'est pas une différentielle totale, mais la variable t_1 est définie sans ambiguïté le long de la trajectoire du mobile par la formule précédente; elle constitue un intermédiaire de calcul commode, t_1 est lié à t par la relation

$$dt = \psi\, dt_1.$$

Calculons les dérivées de r et θ par rapport à t_1 au moyen de leurs dérivées par rapport à t_1

$$\frac{dx}{dt_1} = \varphi^{-2}\frac{dr}{dt} - c$$

et

$$\frac{dr}{dt_1} = -\frac{c\dfrac{dr}{dx}}{1 - \varphi^{-2}\dfrac{dr}{dx}}.$$

Exprimons $\dfrac{d^2 r}{dt_1^2}$ au moyen de $\dfrac{d^2 r}{dx^2}$,

$$\frac{d^2 r}{dt_1^2} = -\frac{1}{c}\left[\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c^3\right]^3 \left\{\frac{d^2 r}{dx^2} - 2\varphi^{-3}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^{-2}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^2 \right.$$
$$\left. \times\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt_1}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)\right]\right\};$$

remplaçons $\dfrac{d^2 r}{dx^2}$ par sa valeur tirée des équations (28) :

$$\frac{d^2 r}{dx^2} = +\varphi^2 r\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 + \left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^{-2}$$
$$+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt_1}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^{-1}$$
$$- r\frac{dr}{dt_1}\frac{d\theta}{dt_1}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^{-3}.$$

On a ainsi

$$-c\frac{d^2 r}{dt_1^2} = \varphi^2 r\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right) + \left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^3$$
$$+ 3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt_1}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)^2$$
$$- r\frac{dr}{dt_1}\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 - 2\varphi^{-3}\left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\varphi^{-3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^3.$$

D'où

$$(29) \quad \frac{d^2 r}{dt_1^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 = (\varphi^2 - 1) r \left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left[3\varphi^{-1}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^2 - c^2\varphi^3\right]$$
$$+ c^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\varphi - 3\varphi^{-1}\frac{1}{c}\frac{dr}{dt_1} + \varphi^{-3}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^2 + \varphi^{-5}\frac{1}{c^3}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^3\right].$$

De même

$$\frac{d\theta}{dt_1} = \left(\varphi^{-2}\frac{dr}{dt_1} - c\right)\frac{d\theta}{dx}.$$

Par un calcul analogue au précédent on trouve

$$(30) \quad r\frac{d^2\theta}{dt_1^2} = -2\frac{dr}{dt_1}\frac{d\theta}{dt_1} + 2\varphi^{-1}\frac{dr}{dt_1}\frac{d\theta}{dt_1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$
$$+ cr\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\theta}{dt_1}\left[\varphi^{-4}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt_1}\right)^2 - 1\right].$$

Introduisons maintenant le temps t qui est défini par

$$dt = \psi\, dt_1.$$

On a par exemple

$$\frac{dr}{dt_1} = \psi\frac{dr}{dt},$$
$$\frac{d^2 r}{dt_1^2} = \psi^2\frac{d^2 r}{dt^2} + \psi\frac{d\psi}{dt}\frac{dr}{dt}$$

et

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}\frac{dr}{dt}.$$

En désignant par $\overline{\psi}$ l'expression de cette fonction au moyen des variables t et r, et par ψ son expression au moyen de x et r, on a

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t},$$
$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r};$$

or

$$dx = \varphi^{-2}\, dr - \psi^{-1}\, dt$$

et

$$\varphi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial r} - 2\varphi^{-3}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi = 0,$$

D'où

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\psi\varphi^{-3}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dr}{dt} - c\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

En portant dans les équations (29) et (30) celles-ci deviennent

$$(29')\quad \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\varphi^2 - 1)r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left[3\varphi^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - c^2\varphi^3\psi^{-2}\right]$$
$$+ c^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\varphi\psi^{-2} - 3\varphi^{-1}\psi^{-1}\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right.$$
$$\left. - \varphi^{-3}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \varphi^{-5}\frac{\psi}{c^3}\left(\frac{dr}{dt}\right)^3\right] + c\psi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dr}{dt},$$

$$(30')\quad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 2\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$
$$+ cr\varphi^{-1}\psi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{d\theta}{dt}\left[-1 - 2\varphi^{-2}\psi\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \varphi^{-4}\frac{\psi^2}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ cr\psi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d\theta}{dt}.$$

29. *Espace figuratif. Force fictive.* — Ce système n'est pas intégrable, il nous suffit du reste de connaître l'allure du mouvement et les expressions numériques des termes séculaires. Nous emploierons pour cela le procédé suivant :

Le mobile m dont nous étudierons le mouvement se déplace dans un univers dans lequel t, r, θ sont des coordonnées curvilignes.

Imaginons un plan figuratif euclidien et considérons à l'époque t le point P de ce plan dont les coordonnées polaires sont r et θ, c'est-à-dire précisément les coordonnées curvilignes de m dans l'univers réel.

Nous connaîtrons le mouvement de m si nous connaissons celui de P puisqu'il y a correspondance biunivoque entre m et P. Mais il y a plus : Le ds^2 de l'univers est le même que celui du plan figuratif, aux termes près de l'ordre de $\frac{Km}{c^2 r}$, les rayons lumineux de l'univers seront donc très approximativement représentés par des lignes droites du plan figuratif, et pour comparer les résultats de la théorie et de l'observation on pourra considérer que le point P représente à très peu près la position du mobile telle que nous la fournit les observations astronomiques. Au besoin on pourrait tenir compte de la déviation des rayons lumineux.

Nous allons donc chercher le mouvement du point P de l'espace figuratif. Ce mouvement est défini par les équations (29) et (30) où r et θ sont les coordonnées polaires usuelles et t le temps, tout se passe donc comme si P était soumis à une force dont les composantes R suivant le rayon vecteur et S suivant sa perpendiculaire sont

$$R = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad S = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt},$$

c'est-à-dire

$$(29'') \quad R = (\varphi^2 - 1) r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left[3\varphi^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - c^2\varphi^3\psi^{-2}\right]$$
$$+ c^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\varphi\psi^{-2} - 3\varphi^{-1}\frac{\psi^{-1}}{c}\frac{dr}{dt} - \varphi^{-3}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right.$$
$$\left. + \varphi^{-5}\frac{\psi}{c^3}\left(\frac{dr}{dt}\right)^3\right] + c\psi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dr}{dt},$$

$$(30'') \quad S = 2\varphi^{-1} r \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi^{-1}\left[\frac{\psi^2}{c} r\varphi^{-5}\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\varphi^{-3}\psi\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - cr\varphi^{-1}\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$+ cr\psi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{d\theta}{dt}.$$

Rappelons que

$$\varphi = \sqrt{1 - \frac{2KM(x)}{c^2 r}}.$$

Donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{KM}{c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2KM}{c^2 r}}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{KM'(x)}{c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2KM}{c^2 r}}}.$$

On peut écrire

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$
$$S = S_1 + S_2 + R_3,$$

où R_2, S_2 désignent les termes contenant $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ en facteur et R_3, S_3 ceux qui contiennent $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ en facteur :

$$(31)\quad \begin{cases} R_1 = -\dfrac{KM}{r^2}\left(1-\dfrac{2KM}{c^2 r}\right)\psi^{-2} + \dfrac{\dfrac{3KM}{c^2 r}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}{1-\dfrac{2KM}{c^2 r^2}} - \dfrac{2KM}{c^2}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2, \\ S_1 = +\dfrac{2KM}{c^2 r}\,\dfrac{\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}}{1-\dfrac{2KM}{c^2 r}}, \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} R_3 = c\psi^{-2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{dr}{dt}, \\ S_3 = c\psi^{-2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{d\theta}{dt}, \end{cases}$$

$$(32')\quad \begin{cases} R_2 = -\dfrac{KM'(x)}{r}\left[\psi^{-2} - \dfrac{3\psi^{-1}}{1-\dfrac{2KM}{c^2 r}}\dfrac{1}{c}\dfrac{dr}{dt} - \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2KM}{c^2 r}\right)^2}\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \dfrac{\psi}{\left(1-\dfrac{2KM}{c^2 r}\right)^3}\dfrac{1}{c^3}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^3\right], \\ S_2 = +\dfrac{KM'(x)}{r}\left[-\dfrac{\psi^{-1}}{c}r\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{1}{1-\dfrac{2KM}{c^2 r}} - \dfrac{2}{c^2}r\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{\varphi^{-2}}{1-\dfrac{2KM}{c^2 r}} + \dfrac{1}{c}r\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{\psi}{c^2}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2KM}{c^2 r}\right)^3}\right]. \end{cases}$$

Considérons comme dans la troisième Partie le cas où la décroissance de la masse est très lente et admettons que, pendant plusieurs révolutions, M et $\frac{dM}{dt}$ sont des constantes.

Il faut exprimer $M'(x)$ au moyen de $\frac{dM}{dt}$: on a

$$dx = \varphi^{-2}\,dr - c\,dt$$

et

$$M'(x) = -\frac{1}{c}\frac{dM}{dt}\frac{\psi}{1-\frac{\psi}{c}\frac{dr}{dt}}.$$

30. *Expressions approchées de* R_3 *et* S_3. — Jusqu'à présent nous n'avons négligé aucun terme dans les expressions de R et de S; nous allons montrer maintenant que l'on peut dans la pratique se borner à certaines valeurs approchées de ces quantités.

Étudions d'abord la fonction ψ, celle-ci est intégrale de l'équation

$$\varphi^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial r} - 2\varphi^{-3}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi = 0,$$

Si la masse était constante on aurait $\psi = 1$; pour obtenir l'expression approchée de ψ lorsque la masse varie remplaçons dans l'équation précédente φ par 1, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ par $-\frac{K}{c^3 r}\frac{dM}{dt}$ et $\frac{dM}{dt}$ par une constante. Cette équation devient

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r} = 0,$$

en posant

$$\mu = \frac{2K}{c^3}\frac{dM}{dt}.$$

Son intégrale générale est

$$\psi = r^{\mu} f(x-r) = r^{-\mu} f(-ct).$$

Nous adopterons pour ψ l'expression

$$\psi = r^{-\mu},$$

μ est une quantité très petite, puisque M est supposé varier très lentement, ψ est donc très voisin de l'unité quel que soit t, sauf pour les valeurs très grandes ou très petites de r qui n'interviendront que par la suite. On voit de plus que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

On peut donc poser en première approximation

$$R_3 = 0, \qquad S_3 = 0.$$

D'autre part ψ n'intervient dans R_2 et S_2 que comme facteur dans des termes correctifs; on peut donc en première approximation supposer que $\psi = 1$ dans R_2 et S_2.

31. *Expressions approchées de* R_2 *et* S_2. — Remarquons que, abstraction faite du facteur $\frac{KM'(x)}{r}$, R_2 et S_2 sont des fonctions de

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c}r\frac{d\theta}{dt},$$

indépendantes de c; or ces quantités ont même ordre de grandeur que

$$\varepsilon = \frac{\text{vitesse de la planète sur son orbite}}{\text{vitesse de la lumière}};$$

en pratique, ε est toujours inférieur à $\frac{1}{3.000}$ et souvent de l'ordre de 10^{-4}.

Prenons les unités suivantes :

Unité de longueur	Distance Terre-Soleil
» de temps............	Jour solaire moyen
» de masse............	Masse du Soleil

La constante K de la gravitation a pour valeur

$$K = 0,00029$$

et la vitesse de la lumière

$$c = 173.$$

Donc

$$\frac{2KM}{c^2 r} = 2.10^{-8}\frac{M}{r},$$

M ne dépasse pas 100 et $\frac{1}{r}$ ne dépasse pas $\frac{1}{400}$, $\frac{2KM}{c^2 r}$ est donc inférieur à 10^{-4}.

R_2 et S_2 étant développées suivant les puissances des quantités

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}, \quad \frac{1}{c}r\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{2KM}{c^2 r}.$$

On se contentera de prendre dans les développements seulement le premier terme, l'erreur relative ainsi commise sera toujours inférieure à 10^{-4}.

En se bornant à l'approximation susmentionnée on a

$$(32'') \quad \begin{cases} R_2 = \dfrac{K}{c}\dfrac{dM}{dt}\dfrac{1}{r}\left(1 - 2\dfrac{1}{c}\dfrac{dr}{dt}\right), \\ S_2 = \dfrac{K}{c}\dfrac{dM}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

32. *Variations des éléments osculateurs.* — Pour obtenir le mouvement de P, nous utiliserons la méthode développée dans la troisième Partie; les seconds membres des équations qui définissent les dérivées des éléments osculateurs sont linéaires par rapport à R et à S, on peut donc substituer à R et S successivement R_1 et S_1 puis R_2 et S_2 et ajouter les perturbations ainsi obtenues. On sait que la force (R_1, S_1) produit une avance séculaire du périhélie, mais n'introduit aucun terme séculaire dans a ni dans e.

Cherchons les termes séculaires produits par (R_2, S_2).

Les équations qui définissent les termes séculaires des éléments osculateurs sont

$$\frac{da}{dt}+\frac{a}{M}\frac{dM}{dt}=\frac{2e}{n\sqrt{1-e^2}}\overline{R_2\sin v}+\frac{2a\sqrt{1-e^2}}{n}\overline{\frac{S_2}{r}},$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\overline{R_2\sin v}+\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{ne}\left(\overline{\frac{S_2}{r}}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\overline{rS_2},$$

$$e\frac{d\omega}{dt}=\frac{-\sqrt{1-e^2}}{na}\overline{R_2\cos v}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\overline{S_2\sin v}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{nap}\overline{S_2 r\sin v},$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{2}{na^2}\overline{R_2 r}+\frac{1-e^2}{nae}\overline{R_2\cos v}-\frac{1-e^2}{nae}\overline{R_2\sin v}-\frac{(1-e^2)}{naep}\overline{S_2 r\sin v},$$

R_2 et S_2 étant les expressions définies par les formules (32″) et les moyennes étant prises pendant une révolution.

En remplaçant R_2 et S_2 par leurs valeurs on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{R_2\sin v} &= -\frac{2K}{c^2}\frac{dM}{dt}\overline{\frac{\sin v}{r}\frac{dr}{dt}},\\
\overline{\frac{S^2}{r}} &= -\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dt}\overline{\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}},\\
\overline{rS_2} &= -\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dt}\overline{r\frac{dv}{dt}},\\
\overline{R^2\cos v} &= \frac{K}{c}\frac{dM}{dt}\overline{\frac{\cos v}{r}},\\
\overline{S_2\sin v} &= 0,\\
\overline{S_2 r\sin v} &= 0,\\
R_2 r &= \frac{K}{c}\frac{dM}{dt}.
\end{aligned}$$

Pour calculer les moyennes qui figurent au second membre, on exprime r, $v\,\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dv}{dt}$ et dt au moyen de l'anomalie excentrique u :

$$r = a(1 - e\cos u),$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1 - e\cos u},$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nae\sin u}{1 - e\cos u},$$

$$dt = \frac{1 - e\cos u}{n}\,du.$$

On trouve ainsi

$$\overline{\frac{\sin v}{r}\frac{dr}{dt}} = \frac{ne\sqrt{1-e^2}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u\,du}{(1-e\cos u)^2},$$

$$\overline{\frac{1}{r}\frac{dv}{dt}} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1-e\cos u)^2},$$

$$\overline{r\frac{dv}{dt}} = na\sqrt{1-e^2},$$

$$\overline{\frac{\cos v}{r}} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}\,du.$$

En posant

$$x = \operatorname{tang}\frac{u}{2}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}},$$

on est conduit à des intégrales de la forme

$$\mathrm{I}_{m,p} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^m(\alpha^2+x^2)^p},$$

que l'on sait calculer

$$\mathrm{I}_{1,0} = \pi, \qquad \mathrm{I}_{2,0} = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{I}_{3,0} = \frac{3\pi}{8}, \qquad \mathrm{I}_{4,0} = \frac{5\pi}{16},$$

$$\mathrm{I}_{0,1} = \frac{\pi}{\alpha}, \qquad \mathrm{I}_{1,1} = \frac{\pi}{\alpha(1+\alpha)}, \qquad \mathrm{I}_{1,2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+2\alpha}{\alpha^3(1+\alpha)^2},$$

$$\mathrm{I}_{1,3} = \frac{\pi}{8}\,\frac{8\alpha^2+9\alpha+3}{\alpha^5(1+\alpha)^3}, \qquad \mathrm{I}_{0,2} = \frac{\pi}{2\alpha^3}, \qquad \mathrm{I}_{2,1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)^2},$$

$$\mathrm{I}_{3,1} = \frac{\pi}{8}\,\frac{3\alpha^2+9\alpha+8}{\alpha(\alpha+1)^3}, \qquad \mathrm{I}_{0,3} = \frac{3\pi}{8\alpha^5}, \qquad \mathrm{I}_{2,2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha^3(\alpha+1)^3}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\overline{R_2 \sin \varphi} &= -\frac{2K}{c^2}\frac{dM}{dt}\frac{ne\sqrt{1+e}}{1+\sqrt{1-e^2}},\\
\overline{\frac{1}{r}S_2} &= -\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dt}\frac{n}{a}\frac{1}{1-e^2},\\
\overline{rS_2} &= -\frac{K}{c^2}\frac{dM}{dt}na\sqrt{1-e^2},\\
\overline{R_2 \cos \varphi} &= -\frac{K}{c}\frac{dM}{dt}\frac{1}{a}\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},\\
\overline{R_2 r} &= \frac{K}{c}\frac{dM}{dt}.
\end{aligned}$$

En portant dans les équations qui définissent les dérivées des éléments osculateurs, on trouve

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} - \frac{2}{M}\frac{dM}{dt}\frac{n^2a^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[1+\frac{2e^2\sqrt{1+e}}{1+\sqrt{1-e^2}}\right],\\
\frac{1}{e}\frac{de}{dt} &= -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{n^2a^2}{c^2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{1+2\sqrt{1+e}}{1+\sqrt{1-e^2}},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{na}{c}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}},\\
\frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{na}{c}\left[2+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right].
\end{aligned}\right.$$

33. *Termes séculaires dans le cas d'une orbite de faible excentricité.* — Si l'on se limite aux orbites de faible excentricité on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\left[1+2\frac{n^2a^2}{c^2}\right],\\
\frac{1}{e}\frac{de}{dt} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{n^2a^2}{c^2},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{na}{c},\\
\frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{5}{2}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{na}{c}.
\end{aligned}$$

Si l'on emploie les notations classiques

$$h = e \sin\varpi,$$
$$l = e \cos\varpi,$$

on a

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2}\frac{na}{c}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\left[\quad l - 3\frac{na}{c}h\right],$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{2}\frac{na}{c}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\left[-h - 3\frac{na}{c}l\right].$$

Les équations montrent que la décroissance de la masse centrale par rayonnement sphérique a pour conséquence :

1° Une augmentation séculaire du demi-grand axe supérieure à celle que prévoit la loi de Newton;

2° Une augmentation séculaire de l'excentricité;

3° Une rétrogradation du périhélie et une augmentation de la longitude moyenne de l'époque.

Nous étudierons plus loin les valeurs numériques de ces termes.

34. *Remarque au sujet de l'onde de gravitation produite par la variation de la masse.* — Nous avons vu que la force apparente qui agit sur le point figuratif P est la somme de deux forces F_1 et F_2.

F_1 ne contient pas $\frac{dM}{dt}$ en facteur, c'est la force exercée sur un mobile lorsqu'on suppose la masse constante.

F_2 contient au contraire $\frac{dM}{dt}$ en facteur, elle n'existe que si la masse varie.

Bornons-nous au cas où la vitesse du mobile dont on étudie le mouvement est négligeable ; F_1 et F_2 sont deux forces centrales et

$$F_1 = -\frac{KM}{r^2} + \frac{2K^2M^2}{c^2}\frac{1}{r^3},$$

$$F_2 = \quad \frac{K}{c}\frac{dM}{dt}\frac{1}{r},$$

F_1 varie en raison du carré de la distance et F_2 en raison inverse de la distance.

Aux très grandes distances, F_2 est plus important que F_1, on a

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{r}{c}.$$

On voit que $F_1 = F_2$ pour $r = cm \frac{dt}{dM}$; pour le champ de gravitation créé par le soleil, cette distance est de 60000 milliards d'années de lumière, donc très grande par rapport aux distances des astres les plus éloignés.

La remarque précédente sera utile lorsque nous chercherons la déviation d'un rayon lumineux dans ce champ de gravitation, car si l'on suppose que ce rayon vient de l'infini on rencontre des difficultés provenant de la prépondérance de la force F_2 aux très grandes distances.

SIXIÈME PARTIE.

MOUVEMENT DE LA LUMIÈRE DANS LE CHAMP D'UNE MASSE VARIABLE.

35. *Déviation des rayons lumineux.* — Pour trouver la déviation subie par un rayon lumineux dans le champ de gravitation obtenu dans la quatrième Partie, nous emploierons la méthode de l'espace figuratif et nous chercherons le trajet d'un rayon dans cet espace en nous bornant à une approximation.

Soient Ox l'axe polaire du plan figuratif et Oy l'axe perpendiculaire. Nous pouvons supposer qu'à sa plus petite distance de l'origine le rayon est parallèle à Oy et passe au point

$$x = D, \qquad y = 0.$$

La lumière décrit une géodésique de l'univers. Les coordonnées r et θ d'un point du rayon vérifient donc les équations (29) et (30).

Si M et $\frac{dM}{dt}$ étaient nuls, le rayon lumineux serait défini par les formules

$$r = \frac{D}{\cos\varphi}, \qquad \frac{dr}{dt} = c\sin\varphi,$$

$$\theta = \varphi, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{D}\cos^2\varphi,$$

$$t = \frac{D}{c}\operatorname{tang}\varphi,$$

φ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Dans l'équation du mouvement d'un photon, remplaçons r, θ, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ par les expressions précédentes dans tous les termes contenant M ou $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$ en facteur, on trouve ainsi

$$\mathrm{M}'(x) = -\frac{1}{c}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{1}{1-\sin\varphi}$$

et

$$\mathrm{R} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{D}^2}\cos^2\varphi[5\cos^2\varphi - 2]$$
$$-\frac{\mathrm{K}}{c\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\cos\varphi[\sin^2\varphi + 2\sin\varphi - 1] - \frac{2\mathrm{K}}{c}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$\mathrm{S} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\mathrm{KM}}{\mathrm{D}^2}\sin\varphi\cos^3\varphi - \frac{\mathrm{K}}{c\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\cos^2\varphi[1+\sin\varphi]$$
$$-\frac{2\mathrm{K}}{c}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

On en déduit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\varphi - \mathrm{S}\sin\varphi,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{R}\sin\varphi + \mathrm{S}\cos\varphi;$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3\mathrm{KM}}{\mathrm{D}^2}\cos^3\varphi + \frac{\mathrm{K}}{c\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\cos^2\varphi[1+\sin\varphi],$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2\mathrm{KM}}{\mathrm{D}^2}\cos^2\varphi\sin\varphi[1-2\cos^2\varphi]$$
$$+\frac{\mathrm{K}}{c\mathrm{D}}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\cos\varphi[1+\sin^2\varphi] - \frac{2\mathrm{K}}{c}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1-\sin\varphi};$$

comme

$$dt = \frac{\mathrm{D}}{c}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{\mathrm{KM}}{c\mathrm{D}}\int_0^\varphi \cos^3\varphi\,d\varphi + \frac{\mathrm{K}}{c^2}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\int_0^\varphi (1+\sin\varphi)\,d\varphi,$$
$$\frac{dy}{dt} = c + 2\frac{\mathrm{KM}}{c\mathrm{D}}\int_0^\varphi (1-2\cos^2\varphi)\,d\varphi - \frac{\mathrm{K}}{c^2}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\int_0^\varphi \frac{1+\sin\varphi+\sin^2\varphi-\sin^3\varphi}{\cos\varphi(1-\sin\varphi)}\,d\varphi.$$

Pour connaître la direction du rayon lumineux à l'infini il faudrait prendre $\varphi + \frac{\pi}{2}$ pour limite supérieure des intégrales qui figurent aux seconds membres. Mais on voit que l'expression de $\frac{dy}{dt}$ ainsi obtenue est infinie; cela tient à ce que la méthode de calcul approché que nous avons voulu appliquer ici n'est pas valable.

Nous supposons $\frac{dM}{dt}$ constant et nous cherchons la direction limite d'un rayon lumineux lorsque le temps augmente indéfiniment, or nous n'avons le droit de remplacer $\frac{dM}{dt}$ par une constante que pendant un intervalle de temps limité, sinon nous serions conduits à des valeurs de M infinies lorsque le temps est lui-même infini.

Remarquons que les termes en $\frac{dM}{dt}$ qui figurent dans les expressions de R et S sont ceux qui représentent la force F_2 définie dans la cinquième Partie. Pour un rayon lumineux cette force est répulsive lorsque le rayon lumineux s'éloigne et varie comme $\frac{1}{r}$ à l'infini, elle a donc pour effet, de rendre $\frac{dr}{dt}$ infini, ce qui est absurde, et nous montre que notre calcul approché cesse d'être valable si l'on fait tendre φ vers $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons montré que, dans la pratique, les termes en $\frac{dM}{dt}$ de R et de S devenaient comparables aux termes en M à des distances bien supérieures à celle des astres observés. On peut donc laisser ces termes de côté et écrire

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3\,\mathrm{KM}}{c\,\mathrm{D}}\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = c + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c\,\mathrm{D}}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Soit $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2}$ l'angle du rayon lumineux avec Ox à l'infini, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2} = \left(-\frac{dx}{dy}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2\mathrm{D}}.$$

La déviation totale Δ subie par un rayon lumineux passant à la distance D de la masse M est donc en pratique la même que si la masse était constante

$$\Delta = \frac{4KM}{c^2}\frac{1}{D}.$$

36. *Déplacement des raies spectrales vers le rouge.* — La méthode la plus simple pour traiter ce problème consiste à étudier le mouvement d'un photon.

Considérons un photon de fréquence ν s'éloignant de la masse centrale suivant un rayon, son impulsion d'univers est

$$\vec{I} = -h\nu\vec{e}_0 + h\nu\vec{e}_1.$$

En écrivant que $\overrightarrow{dI}$ est nul, $dx = 0$

$$\frac{d\nu}{\nu} + \varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr = 0,$$

comme x est constant on en déduit

$$\varphi\nu = \text{const.}$$

Si ν_0 est la fréquence du photon à l'infini et ν_s sa fréquence à la distance R du centre on a donc

$$\nu_0 = \nu_s\left(1 - \frac{KM(x)}{c^2 R}\right),$$

x désignant la valeur constante de x correspondant à ce photon ; cette formule n'est autre que la formule classique, $M(x)$ désignant la masse centrale au moment où le photon en est parti.

SEPTIÈME PARTIE.

COMPARAISON A L'OBSERVATION.

37. *Application aux planètes.* — La variabilité de la masse du Soleil produit des perturbations dans les mouvements planétaires. Il est facile de voir que ces perturbations sont actuellement inaccessibles à l'observation.

Les termes périodiques des éléments osculateurs sont nuls si l'on se place au point de vue newtonien : si l'on adopte au contraire la loi d'Einstein, ils ne sont pas nuls mais leur amplitude est négligeable. Il suffit de remarquer que le terme $-\frac{K}{c}\frac{1}{r}\frac{dM}{dt}$, qui est le terme prépondérant des composantes R_2 et S_2 de la force provenant de la variation de masse, n'atteint pour les planètes du système solaire que la fraction 10^{-19} de l'attraction newtonienne de l'astre central.

Les termes séculaires provenant de la variation de masse sont également trop petits pour être mis en évidence directement. Mais on peut chercher une vérification de l'existence de ces termes par une voie statistique.

38. *Application aux étoiles doubles.* — Nous avons rappelé dans la première Partie qu'il existe une relation statistique entre les périodes et les excentricités des étoiles doubles; admettons que les étoiles doubles se forment par scission; immédiatement après la séparation, les deux composantes décriront des orbites circulaires à très courte période. Jeans (*Astronomy and Cosmogony*, p. 294) a montré que les marées mutuelles exercées par les deux étoiles ont pour effet d'augmenter la période et l'excentricité de l'orbite mais de quantités insignifiantes. Le passage d'autres étoiles près du couple binaire a un effet qui n'a pas été précisé jusqu'à présent, mais on peut démontrer que dans un système en état stable il n'y a pas de relation statistique entre la période et l'excentricité (Jeans, *Astronomy and Cosmogony*, p. 305).

Nous pouvons donc chercher si les résultats obtenus dans ce travail permettent d'expliquer la relation période-excentricité, en admettant qu'au cours de l'évolution d'un système binaire, il y a une augmentation simultanée de ces deux éléments par suite de leur variation de masse. Les différents systèmes binaires que nous observons ont dû avoir initialement des demi-grands axes du même ordre de grandeur et des excentricités très petites, et, en regardant actuellement les diverses étoiles doubles, nous aurions sous les yeux les étapes de l'évolution d'un système.

Si l'on adopte la loi de Newton et l'équation : $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ pour le mouvement d'un mobile, on obtient une augmentation du grand axe mais l'excentricité reste constante. Il en est de même si l'on adopte l'équation

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right);$$

dans la formule du paragraphe (16) on doit supposer que la valeur moyenne de β est nulle car, par suite de la rotation de la galaxie et par suite du déplacement du périhélie, le vent d'éther prend toutes les orientations possibles par rapport à l'orbite.

Ainsi la loi de Newton ne permet pas d'expliquer la relation période-excentricité.

Il semble à première vue que la loi d'Einstein doive être plus heureuse. Elle comporte en effet, comme conséquence de la décroissance de la masse centrale, une augmentation simultanée du grand axe et de l'excentricité. Mais il est facile de voir que la variation de l'excentricité déduite de la théorie est beaucoup plus petite que celle donnée par l'observation. La formule nous donne en effet

$$\frac{1}{e}\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\left(\frac{na}{c}\right)^2.$$

$\frac{na}{c} = \varepsilon$ est de l'ordre de 10^{-3} au plus, la variation relative de l'excentricité est donc 10^{-6} fois plus petite que la variation relative de la masse, or les masses stellaires observées varient de 30 fois celle du Soleil au $\frac{1}{3}$ de celle-ci, donc dans le rapport de 100 à 1; les excentricités ne devraient donc augmenter que de quelques dixièmes au plus, or l'observation nous montre que l'excentricité moyenne des étoiles doubles augmente de 0 à 0,6 lorsque la période varie de 0 à 200 ans.

La loi d'Einstein ne nous permet donc pas non plus d'expliquer numériquement la relation période-excentricité observée.

Cependant, le fait que la loi d'Einstein introduit un terme séculaire dans l'excentricité peut nous donner quelque espoir, et il importe de continuer ces recherches dans la voie suivante : Les étoiles perdent leur masse par rayonnement mais elles récupèrent de la matière par suite de la chute des météorites et de poussières cosmiques sur leur surface. Ceci nous permet d'entrevoir une perte de masse par rayonnement plus grande que nous l'avions supposée; avant de conclure il importe donc de reprendre ce travail en ajoutant au flux d'énergie rayonnante émané par une masse centrale une chute continue de météorites sur cette masse.

39. *Remarque à propos de l'évolution des systèmes stellaires.* — Signalons enfin que la mécanique des systèmes de masses variables est encore à faire et que le théorème établi dans la première Partie est insuffisant pour interpréter les résultats de l'observation.

D'après ce théorème un système de masse décroissante se dilaterait homothétiquement; l'observation des nébuleuses extragalactiques montre que, fort probablement, les systèmes stellaires partent de l'état sphérique, se dilatent et prennent une forme de plus en plus aplatie, la dilatation dans un certain plan étant plus grande que vers ses pôles. C'est là un fait dont nos recherches ne peuvent rendre compte.