ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur les intégrales dépendant de paramètres arbitraires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 351-382
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__351_0>

SUR LES

INTÉGRALES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES ARBITRAIRES

PAR M. ÉMILE COTTON
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble

Introduction. — On rencontre, dans diverses questions de Mécanique ou de Physique, des intégrales dépendant de paramètres arbitraires qui figurent dans la fonction sur laquelle porte l'intégration et qui interviennent aussi pour définir le domaine auquel elle s'étend.

Le présent travail se rattache au cas le plus simple, celui où la fonction est analytique; la frontière se compose d'un nombre fini d'éléments, eux aussi analytiques. Tant qu'aucune modification ne survient dans la disposition de ces éléments frontières, l'intégrale dépend analytiquement des paramètres (n^os 1 à 4); mais des singularités peuvent se présenter lorsque cette disposition change ou quand un point multiple apparaît dans la frontière.

Ces singularités sont étudiées ici pour les intégrales doubles dépendant d'un paramètre quand, pour une valeur isolée du paramètre, trois courbes frontières viennent à concourir (n° 6) ou que deux de ces courbes viennent à se toucher (n° 7), ou qu'enfin une telle courbe acquiert un point double. Les résultats antérieurement énoncés (*Comptes rendus*, 194, 25 janvier 1932, p. 335) pour le cas où le point double est à tangentes distinctes, sont démontrés (n^os 8, 9). Le théorème de Weierstrass définissant pour une fonction analytique de plusieurs variables, infiniment petite en même temps que ces variables, un élément analogue à la partie principale d'une fonction analytique d'une seule variable joue dans cette démonstration un rôle essentiel; le lemme de M. Goursat, sur lequel il a basé l'importante démonstration élémentaire qu'il a donnée du théorème de Weierstrass, intervient également.

Le cas (non étudié dans la Note précédente) du point double à tangentes confondues, est ensuite examiné, Un théorème sur la convergence de certaines séries entières (n° 11) ramène la question à l'étude au voisinage de $u = 0$ d'un nombre fini d'intégrales hyperelliptiques dépendant de ce paramètre u, les racines du polynome en x, $R(x, u)$ placé sous le radical carré venant toutes se confondre pour cette valeur singulière $u = 0$, et l'une au moins des limites de l'intégrale étant une telle racine.

Cette question est voisine de celle qu'a traitée Fuchs dans un Mémoire célèbre (*Journal de Crelle*, 71, 1870, p. 91), mais se trouve plus étendue en un sens puisque les coefficients du polynome R sont des fonctions analytiques de u (s'annulant pour $u = 0$) et non pas des polynomes en u, comme dans ce Mémoire, et par ailleurs plus restreinte puisqu'on ne s'occupe que d'une seule valeur singulière $u = 0$. Une étude spéciale serait nécessaire pour l'aborder dans toute sa généralité. Cette étude est évitable lorsque R est du second degré en x (ce qui correspond au point double à tangentes distinctes) parce que les intégrales simples peuvent être alors calculées ; elle se fait aisément dans le cas (n° 13) où elle est posée par l'examen du point double à tangentes confondues.

En résumé, la nature des singularités provenant de l'apparition d'un point double dans la frontière du domaine plan d'intégration double est ainsi connue, du moins dans le cas général, celui qu'on peut caractériser de la façon suivante : Les courbes frontières L_u du domaine d'intégration situé dans le plan (x, y) sont les projections sur ce plan de sections planes d'une surface S de l'espace (x, y, u). Le point double qui apparaît pour $u = 0$ sur la ligne correspondante L_0 est la projection d'un point P de la surface S, et P n'est pas point singulier de S.

Un dernier paragraphe (14) est consacré à l'apparition d'un point double (à cône de tangentes non décomposé) dans la frontière d'une intégrale triple.

1. *Intégrales simples.* — Considérons d'abord une intégrale simple

$$I(u, v) = \int_a^b f(x, u, v)\, dx,$$

f étant, dans un domaine D de l'espace (x, u, v) fonction analytique réelle de ces trois variables réelles, les bornes a et b sont aussi fonctions analytiques de u et de v dans le domaine d projection de D sur le plan (u, v). Soit δ un point intérieur à d; nous supposons nulles, pour abréger l'écriture, les coordonnées de ce point; δ est la projection d'une droite Δ de l'espace; nous admettons que le segment AB de Δ obtenu en faisant varier x entre $a(0, 0)$ et $b(0, 0)$ est tout entier intérieur (au sens strict) à D.

Pour tout nombre α compris entre $a(0,0)$ et $b(0,0)$, $f(x,u,v)$, $a(u,v)$, $b(u,v)$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances de $x-\alpha$, u, v convergentes tant que les modules $|x-\alpha|$, $|u|$, $|v|$ sont inférieurs à des nombres positifs que nous pouvons prendre tous trois égaux à ε. Insérons alors dans l'intervalle $a(u,v)$, $b(u,v)$ n nombres x_i indépendants de u et v, tels que les différences x_1-a, x_2-x_1, $\ldots$, x_n-x_{n-1}, $b-x_n$ aient toutes le même signe et soient, en valeur absolue, inférieures à ε. Les intégrales $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx$ sont calculables avec les séries obtenues en intégrant terme à terme par rapport à x les développements de f en séries entières en $x-x_{i-1}$, u, v; ces intégrales sont évidemment des fonctions analytiques de u et de v. Le même procédé s'applique au calcul de $\int_a^{x_1} f\,dx$, et de $\int_{x_n}^{b} f\,dx$; en appliquant aux séries donnant ces intégrales le théorème sur la substitution de séries entières aux variables d'une série entière, on voit que ces deux intégrales sont aussi fonctions analytiques de u et de v.

En définitive, il suffit d'ajouter un nombre fini $(n+1)$ de fonctions analytiques de u et de v pour obtenir $I(u,v)$; *l'intégrale proposée est fonction analytique des paramètres.*

La proposition reste vraie quel que soit le nombre des paramètres dont dépendent la fonction à intégrer et les bornes de l'intervalle d'intégration [1].

---

[1] Il est naturel de rattacher cette proposition aux théorèmes de Poincaré (*Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II) sur les solutions de systèmes différentiels dépendant de paramètres arbitraires. Soit

2. *Intégrales doubles.* — Soit maintenant

$$I(u, v) = \int\int f(x, y, u, v)\, dx\, dy,$$

une intégrale double, f est fonction analytique des variables x, y, u, v tant que le point x, y reste intérieur à un domaine $\mathcal{D}$ du plan (x, y) et que u, v restent voisins de valeurs numériques u_0, v_0, que nous prendrons nulles; le domaine d'intégration $D(u, v)$ varie avec u et v, mais en restant, pour $|u|$ et $|v|$ petits, intérieur à $\mathcal{D}$. $D(u, v)$ ne s'étend pas à l'infini, sa frontière $C(u, v)$ est formée d'un nombre fini d'arcs de courbes données par des équations de la forme

$$\varphi_i(x, y, u, v) = 0,$$

dont les premiers membres sont (pour x, y intérieur à $\mathcal{D}$ et pour $|u|$

---

l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, u, v).$$

On suppose f fonction analytique des variables.

L'équation est équivalente au système

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, u, v), \qquad \frac{dx}{dt} = 1$$

auquel on applique un théorème de Poincaré (*loc. cit.* n° 28) : Les valeurs pour $t = t_0 + \tau$ des solutions y, x de ce système correspondant aux valeurs initiales (pour $t = 0$) y_0, x_0 sont fonctions analytiques de y_0, x_0, u, v et τ. La proposition concernant les intégrales $I(u, v)$ s'en déduit en prenant f indépendant de y, et faisant $x_0 = a(u, v)$, $y_0 = 0$, $t_0 = b(0, 0) - a(0, 0)$,

$$t_0 + \tau = b(u, v) - a(u, v);$$

on peut supposer $a(0, 0) = 0$ en choisissant convenablement l'origine des axes Ox, Oy.

Inversement, on peut aussi appliquer la méthode de subdivision utilisée pour les intégrales pour passer, dans la démonstration du théorème de Poincaré, du cas d'un petit intervalle de variation de la variable indépendante au cas d'un intervalle d'étendue quelconque. Mais on suppose alors que les seconds membres des équations différentielles dépendent analytiquement de la variable indépendante, hypothèse qui n'est pas nécessaire dans les démonstrations habituelles du théorème de Poincaré.

et $|v|$ petits) fonctions analytiques de ces quatre variables. De plus, nous admettons que, pour $u=v=0$, les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1° Il n'y a *pas de contact entre les arcs faisant partie de la frontière;* autrement dit les déterminants fonctionnels

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{ix} & \varphi'_{iy} \\ \varphi'_{jx} & \varphi'_{jy} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro pour tous les sommets de la courbe frontière $C(0,0)$ (nous appelons *sommets* les points de rencontre des arcs dont elle est composée).

2° Il n'y a *pas de points singuliers* de ces courbes, ni sur les arcs frontières ni aux sommets où ils se rencontrent, c'est-à-dire que φ'_{ix}, φ'_{iy} ne s'annulent pas simultanément sur un arc frontière d'équation $\varphi_i=0$.

3° *En chaque sommet aboutissent seulement deux arcs de la frontière.*

Les théorèmes d'existence des fonctions implicites définies par des équations analytiques montrent que le nombre des sommets de $C(u, v)$ ne change pas pour $|u|$, $|v|$ assez petits et que les coordonnées de ces sommets sont fonctions analytiques de u et v. Les arcs de la frontière peuvent être subdivisés en un nombre fini de parties telles que l'une des deux coordonnées x, y soit fonction analytique de l'autre, de u et de v.

Nous diviserons alors le domaine $D(0, 0)$ et la partie avoisinante du plan (x, y) en domaines partiels par des parallèles X, Y aux axes, parallèles qui ne varieront pas avec u et v, ces domaines seront en nombre fini, mais toutefois assez petits pour que les conditions indiquées plus loin soient remplies. Nous prendrons les points de division des arcs frontières de $C(u, v)$ en parties de façon que chacun d'eux se déplace sur l'une de ces parallèles.

Un rectangle R_i tout entier intérieur à $D(0, 0)$ sera encore intérieur à $D(u, v)$ pour $|u|$, $|v|$ assez petits. [On admet que les points de rencontre des droites X et des droites Y ont été choisis de façon à ne pas se trouver sur $C(0, 0)$]. On calcule alors l'intégrale de $f(x, y, u, v)$ étendue à ce rectangle R_i en intégrant d'abord par rapport à x; ce qui donne (n° 1) une fonction analytique g de y, u, v; en intégrant ensuite g par rapport à y, on a une fonction analytique de u et de v.

Nous subdiviserons, s'il le faut, les rectangles R_c traversés par les frontières $C(o, o)$ et $C(u, v)$ par de nouvelles parallèles $X'Y'$ aux axes Ox, Oy:

En un point de $C(u, v)$ où la tangente est parallèle à Ox, nous menons une droite Y' et procédons d'une façon analogue pour les points de contact des tangentes parallèles à Oy. On peut toujours admettre qu'aucune de ces tangentes n'est tangente d'inflexion; s'il en était autrement, on changerait la direction des axes Ox, Oy. Dès lors, les deux coordonnées des points de contact sont fonctions analytiques de u et de v.

Par tout sommet de $C(u, v)$ intérieur à un rectangle R_c, nous mènerons une droite X' ou Y', et de même par les points de rencontre des côtés de R_c et du contour $C(u, v)$; la partie de $I(x, y, u, v)$ correspondant à R_c s'obtient alors par addition ou soustraction d'intégrales doubles de la fonction $f(x, y, u, v)$. Les unes sont étendues à des rectangles R'_c limités par des parallèles aux axes pouvant varier avec u, v, mais pour celles-ci le mode de calcul relatif aux rectangles R_i ne subit que de petites modifications et le résultat reste valable. Les autres correspondant à un domaine d'intégration limité par des parallèles (trois au plus) aux axes et par un arc de $C(u, v)$ où l'une des coordonnées est fonction analytique de l'autre et des paramètres. Supposons que x dépende de cette façon de y, u et v : on intègre d'abord par rapport à x; puis par rapport à y : dans chacune de ces quadratures les hypothèses du n° 1 sont réalisées.

En définitive, on combine par addition ou par soustraction un nombre fini de fonctions analytiques pour obtenir $I(u, v)$; *cette intégrale dépend analytiquement des paramètres*. Ici encore, leur nombre peut être quelconque.

3. *Intégrales triples.* — Une proposition analogue s'applique aux intégrales triples portant sur une fonction analytique $f(x, y, z, u, v)$ des coordonnées et des paramètres, le domaine d'intégration $D(u, v)$, tout entier à distance finie, étant borné par une frontière $S(u, v)$ composée d'un nombre fini de faces déterminées par des équations analytiques $\varphi_i(x, y, z, u, v) = o$. Indiquons rapidement la démonstration.

L'évaluation de l'intégrale triple peut être ramenée à une intégration simple de f par rapport à l'une des coordonnées, z par exemple, suivie d'une intégration double portant sur le résultat de la première. En subdivisant le domaine $D(u, v)$ par les cylindres projetant parallèlement à Oz les arêtes d'intersection des faces de $S(u, v)$, les deux bornes z' z'' de chaque intégrale simple dans un domaine partiel $\delta(u, v)$ sont les cotes de points variant sur deux faces déterminées de $S(u, v)$ (ou sur deux parties d'une même face). Elles dépendent analytiquement de x, y, u, v tant qu'on ne rencontre pas de point de contact d'un plan tangent parallèle à Oz. Nous diviserons donc tout d'abord $D(u, v)$ en deux parties $D_1(u, v)$, $D_2(u, v)$ par des cylindres fixes Γ à génératrices parallèles à Oz; tous les points de $S(u, v)$ où le plan tangent fait (pour des valeurs de u, v voisines de zéro) un très petit angle avec Oz appartenant à la frontière de D_2.

Pour les domaines partiels $\delta_1(u, v)$ de la première partie $D_1(u, v)$ l'intégration simple donne un résultat analytique $i(x, y, u, v)$ qui doit être transformé par intégration double étendue à un domaine $\sigma(u, v)$ du plan xOy. Le contour $C(u, v)$ de ce domaine est composé d'arcs à équations analytiques en x, y, u, v, sections de Γ ou projections des arêtes de $S(u, v)$; nous supposons, à cet effet, que deux faces de S contiguës à une même arête ne sont pas tangentes et que deux arêtes d'une même face ne viennent pas se toucher.

Les sommets de $C(u, v)$ auront leurs coordonnées analytiques si, comme nous l'admettrons, un sommet de $S(u, v)$ n'appartient qu'à trois faces, les plans tangents à ces trois faces formant un véritable trièdre. L'apparition d'un point double sur $C(u, v)$ est écartée par l'hypothèse de l'absence de contact entre faces voisines. La nature analytique de l'intégrale triple est ainsi établie pour la partie D_1.

Quant à l'intégrale étendue à D_2, on l'étudiera comme on vient de le faire pour D_1, mais en remplaçant Oz par Ox ou Oy. On admet ici que le plan tangent à $S(u, v)$ ne peut pas devenir indéterminé, c'est-à-dire que les faces n'ont pas de points multiples.

Mentionnons seulement la possibilité d'étendre les résultats précédents aux intégrales curvilignes, aux intégrales de surfaces, aux multiplicités à plus de trois dimensions.... Nous dirons plus loin (nº 12) quelques mots concernant les variables complexes.

4. *Exemples.* — Donnons un premier exemple suggéré par la question des corps flottants. Considérons un corps (flotteur), à volume connexe, limité par une surface fixe fermée analytique Σ. Le volume $E(u, v, w)$ d'une carène limitée par Σ et par un plan de flottaison variable ayant pour équation

$$ux + vy + wz - 1 = 0,$$

est en général fonction analytique de u, v, w; il en est de même des moments linéaires de la carène par rapport aux trois plans de coordonnées et par suite (tant que E est différent de zéro) des coordonnées a, b, c du centre de carène.

De même, le centre de flottaison [point de contact de ce plan et de son enveloppe quand $E(u, v, w)$ reste constant] a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{E'_u}{uE'_u + vE'_v + wE'_w}, \qquad \beta = \frac{E'_v}{uE'_u + vE'_v + wE'_w},$$
$$\gamma = \frac{E'_w}{uE'_u + vE'_v + wE'_w}.$$

On démontre facilement que le dénominateur commun de ces trois expressions est égal au produit de l'aire de la flottaison par $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$; il est donc différent de zéro et les coordonnées du centre de flottaison sont aussi fonctions analytiques de u, v, w.

Peut-il y avoir des cas d'exception? Puisque Σ et le plan de flottaison ne cessent pas d'être surfaces analytiques, c'est seulement par l'apparition d'un point singulier dans leur courbe d'intersection qu'il peut s'en produire. L'ensemble des plans de flottaison exceptionnels pour lesquels la correspondance entre a, b, c, α, β, γ et u, v, w cesse d'être analytique est donc l'ensemble des plans tangents à la surface Σ. Quand celle-ci n'est pas convexe, il y a des plans de flottaison exceptionnels donnant des carènes dont le volume n'est pas nul.

D'autres ensembles de valeurs singulières se présentent quand la surface du flotteur étant formée de plusieurs morceaux analytiques, le plan de flottaison vient à toucher l'une des arêtes suivant lesquelles ils se rejoignent ou à passer par l'un des sommets auxquels ces arêtes aboutissent.

Revenons aux intégrales doubles. Des exemples très simples montrent que les hypothèses faites au sujet de la frontière du domaine d'intégration sont bien indispensables. Ainsi l'aire de la région intérieure à la parabole $y^2 - 2x = 0$ et comprise entre les droites

$$x = u, \qquad x = 1 \qquad (u < 1),$$

a pour expression

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1 - u^{\frac{3}{2}}\right);$$

c'est une fonction analytique de u pour $u > 0$, mais non pour $u = 0$; quand on suppose ensuite $u < 0$ l'aire en question devient constante.

Pour $u = 0$ l'hypothèse 1° du n° 2 cesse d'être vérifiée.

L'aire de la région déterminée par les inégalités

$$x^2 + y^2 - 1 - u < 0, \qquad x^2 + y^2 - 2u > 0 \qquad (u < 1),$$

est $\pi(1 - u)$ pour $u > 0$ et $\pi(1 + u)$ pour $1 < u < 0$; ce passage d'une fonction analytique à une autre correspond à l'apparition d'un point double à tangentes imaginaires dans une partie de la frontière et à la suppression de cette partie.

Considérons enfin l'aire de la partie du plan comprise entre les droites $x = \pm 1$ et limitée aussi par l'hyperbole $x^2 - y^2 - u = 0$. Cette région connexe pour $u < 0$ se compose de deux parties séparées pour $u > 0$. L'aire a pour valeur, pour $u > 0$

$$2\left[\sqrt{1-u} - u \log \frac{1 + \sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\right].$$

C'est la somme de deux termes dont l'un reste analytique pour $u = 0$, l'autre, $u \log u$, n'étant plus régulier pour cette valeur du paramètre pour laquelle l'hyperbole se décompose. Un résultat analogue se présente quand u tend vers zéro par valeurs négatives,

5. *Théorèmes de Weierstrass et M. Goursat.* — Nous allons étudier les singularités d'une intégrale double $I(u)$ correspondant aux valeurs de u pour lesquelles l'une des conditions du n° 2 cesse d'être vérifiée. Un théorème bien connu de Weierstrass intervient constamment dans cette étude; en voici l'énoncé :

Soit une série entière $f(x, y, u)$ à plusieurs variables s'annulant *lorsque toutes ces variables sont nulles;* $f(0, y, 0)$ *commençant par un terme de degré n en* y. *Cette série peut être mise sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est un polynome de degré n par rapport à la variable* y*; le coefficient de* y^n *est une constante* A *différente de zéro, les coefficients des termes de moindre degré sont des séries entières par rapport aux autres variables s'annulant lorsque toutes ces variables sont nulles. Le second facteur est une série entière par rapport aux variables* x, y, u *avec un terme constant* A' *différent de zéro.*

Cette importante proposition définit (si l'on prend $A' = 1$) pour les fonctions analytiques de plusieurs variables un élément analogue à la partie principale d'une fonction $f(y)$ analytique d'une seule variable y quand $f(0) = 0$, y étant pris comme infiniment petit principal. Toutefois les diverses variables ne jouent plus un rôle symétrique dans la formule de décomposition, l'une d'elles — y dans le cas précédent — étant distinguée des autres.

Supposons qu'on distingue successivement x, y, u et écrivons les trois décompositions

$$\begin{aligned} f(x, y, u) = \mathrm{X}(x; y, u) f_1(x, y, u) &= \mathrm{Y}(y; x, u) f_2(x, y, u) \\ &= \mathrm{U}(u; x, y) f_3(x, y, u), \end{aligned}$$

X, Y, U désignant respectivement les polynomes en x, y, u et les termes constants de f_1, f_2, f_3 étant égaux à l'unité. On a donc

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y}\frac{f_2}{f_1} = \mathrm{U}\frac{f_3}{f_1},$$

et les quotients $\frac{f_2}{f_1}$, $\frac{f_3}{f_1}$ peuvent être regardés comme des séries entières avec des termes constants égaux à l'unité. Les termes de moindre degré $\mathrm{A}x^n$, $\mathrm{B}y^p$, $\mathrm{C}u^q$ des séries $f(x, 0, 0)$, $f(0, y, 0)$, $f(0, 0, u)$ sont aussi les termes de moindre degré de $\mathrm{X}(x; 0, 0)$, $\mathrm{X}(0; y, 0)$, $\mathrm{X}(0; 0, u)$, $\mathrm{Y}(x; 0, 0)$, ... Cette remarque nous sera utile plus loin.

M. Goursat a donné (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVI, 1908, p. 209) une démonstration du théorème de Weierstrass fort intéressante parce qu'elle lui donne un caractère élémentaire. Elle repose sur un lemme dont nous ferons également usage :

Soit $f(y)$ *une série entière en* y *dont le rayon de convergence n'est pas nul; quand on y remplace les puissances de* y *d'exposant supérieur* *à $n-1$ par les polynomes de degré $n-1$ en y déduits de la relation $\varphi(y)=y^n-\mu_{n-1}y^{n-1}-\mu_{n-2}y^{n-2}-\ldots-\mu_0=0$, le résultat de la substitution $r(y)$ est un polynome de degré $n-1$ dont les coefficients sont des séries entières en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ ayant des rayons de convergence différents de zéro.*

En résumé, ce lemme définit pour une série entière en y, $f(y)$ et pour un polynome $\varphi(y)$ de degré n, un nouveau polynome $r(y)$ de degré $n-1$ qui est l'analogue du reste d'une division où $f(y)$ remplacerait le polynome dividende, $\varphi(y)$ étant le diviseur, la division étant ordonnée suivant les puissances décroissantes. L'existence de $r(y)$ suppose toutefois que les coefficients des termes de degré inférieur à n dans $\varphi(y)$ sont en module inférieurs à certaines limites positives. On peut d'ailleurs admettre que ces mêmes coefficients et ceux de la série $f(y)$ sont des séries entières par rapport à des variables autres que y s'annulant en même temps que ces variables; les coefficients du reste $r(y)$ sont alors des séries entières par rapport à ces variables.

6. *Concours de trois arcs frontières.* — Examinons d'abord le cas où pour une valeur particulière de u — que nous supposerons nulle — trois courbes frontières viennent concourir en un même point que nous prendrons comme origine. Leurs équations seront, en mettant en évidence les termes de moindre degré

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, u) &= a_1 x + b_1 y + c_1 u + \ldots = 0,\\
\varphi_2(x, y, u) &= a_2 x + b_2 y + c_2 u + \ldots = 0,\\
\varphi_3(x, y, u) &= a_3 x + b_3 y + c_3 u + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans le cas le plus général et supposons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

différent de zéro ainsi que les coefficients des termes de la troisième colonne; les courbes précédentes, prises deux à deux, donnent au voisinage de l'origine trois points d'intersection P_{23}, P_{31}, P_{12} dont les coordonnées sont fonctions analytiques de u; dans leurs développements les termes du premier ordre en u ne sont pas tous nuls, et se calculent en utilisant les seuls termes du premier degré de φ_1, φ_2, φ_3. Il en est de même des termes du premier degré en u des séries obtenues en portant les coordonnées du point d'intersection des deux courbes dans le premier membre de l'équation de la troisième.

Admettons alors que la position du domaine d'intégration, par rapport aux courbes frontières, soit caractérisée par des inégalités telles que $\varphi_i(x, y, u) > 0$.

D'après ce qui précède, quand on passe d'une valeur infiniment petite de u à la valeur $-u$, chaque sommet du petit triangle curviligne P_{21}, P_{31}, P_{12} traverse la courbe opposée. Si donc un sommet du triangle est pour $u > 0$ sommet de la frontière du domaine, il cesse de l'être pour $u < 0$. Dès lors le calcul de l'intégrale $I(u)$ ne fait plus intervenir les mêmes sommets voisins de O pour $u > 0$ et pour $u < 0$, et bien que les expressions de $I(u)$ soient analytiques pour $u > 0$ et pour $u < 0$ ces deux fonctions analytiques sont distinctes (tout en ayant la même valeur numérique pour $u = 0$).

7. *Contact de deux arcs frontières.* — Étudions, en second lieu, l'apparition d'un contact entre deux arcs frontières pour une valeur particulière de u, que nous supposons nulle, le point de contact étant pris comme origine O des coordonnées, la tangente commune comme axe Oy.

Les équations des arcs frontières peuvent être résolues par rapport à x et donnent

$$x = \varphi_1(y, u) = a_1 u + b_1 y^2 + 2c_1 uy + d_1 u^2 + \ldots,$$
$$x = \varphi_2(y, u) = a_2 u + b_2 y^2 + 2c_2 uy + d_2 u^2 + \ldots,$$

φ_1 et φ_2 sont analytiques; nous admettrons, en nous limitant au cas général, que les expressions $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ sont différentes de zéro.

Pour $u = 0$ les deux courbes $x = \varphi_1(y, 0)$, $x = \varphi_2(y, 0)$ sont tangentes en O; pour u voisin de zéro, les deux courbes ont deux points d'intersection voisins de O dont les ordonnées satisfont à l'équation

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (a_1 - a_2)\, u + (b_1 - b_2)\, y^2 + 2(c_1 - c_2)\, uy + (d_1 - d_2)\, u^2 + \ldots = 0.$$

Le premier membre est analytique en u et y; on peut appliquer à cette équation le théorème de Weierstrass. Il montre que les deux racines y_1, y_2 tendant vers zéro avec u, sont racines d'une équation du second degré à coefficients analytiques

$$y^2 - 2\alpha(u)y + \beta(u) = 0, \tag{1}$$

$\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, et $\beta(u)$ commence (n° 5) par un terme du premier degré en u; soit $-\varepsilon u$ ce terme; supposons pour fixer les idées $\varepsilon > 0$. Dans ces conditions

$$y_1 = \alpha(u) + \sqrt{\alpha^2(u) - \beta(u)}, \qquad y_2 = \alpha(u) - \sqrt{\alpha^2(u) - \beta(u)},$$

sont réelles pour $u > 0$ et sont fonctions analytiques de $\sqrt{u}$. Alors il peut arriver ou bien que les deux points d'intersection P_1, P_2 correspondant à y_1 et y_2 soient sommets de la ligne frontière du domaine d'intégration, ou que l'un seulement de ces points intervienne. Pour étudier la nature de la singularité de l'intégrale pour $u = 0$, il suffit de considérer la partie du domaine d'intégration voisine de O, en isolant, pour plus de commodité, cette partie par un petit rectangle. De toute façon, l'intégrale double $I(u)$ comprend un terme analytique provenant de l'intégration étendue à la partie du domaine extérieure à ce rectangle d'isolement, et une somme de termes de la forme suivante :

$$i(u) = \pm\int_0^{y_1} dy \int_h^{\varphi_1} f(x, y, u)\,dx;$$

h est une constante. On peut prendre le rectangle d'isolement assez petit pour que la première intégrale puisse être calculée en intégrant terme à terme la série entière $f(x, y, u)$; le résultat est une série entière en y et u qui, intégrée par rapport à y, donne encore une série entière; la substitution de y_1, série entière en $\sqrt{u}$ montre que $i(u)$ est une série entière en $\sqrt{u}$; il en est de même de l'intégrale proposée. Celle-ci se comporte d'une façon différente pour u négatif et voisin de zéro, si toutefois elle conserve un sens. Il n'y a plus alors sur la frontière du domaine d'intégration de sommet réel voisin de l'origine. En définitive, *quand un contact apparaît pour* $u = 0$ *entre deux arcs frontières*, $I(u)$ *est pour les valeurs voisines de* u, *d'un signe déterminé, une fonction analytique de* $\sqrt{|u|}$; *quand le signe change*, $I(u)$ *peut cesser d'être définie; si elle le reste, elle est fonction analytique de* u.

Le cas où l'on aurait en O pour $u = 0$ un contact d'ordre p se traite d'une façon analogue. L'équation (1) est remplacée par une équation de même nature mais de degré $p+1$ en y; on cherchera quelles puissances fractionnaires de u interviennent dans les développements des racines réelles infiniment petites de cette équation.

Enfin si deux arcs frontières donnés par des équations différentes se touchent en un sommet pour toutes les valeurs de u et non pour une valeur isolée, l'intégrale I peut rester analytique.

8. *Point double à tangentes réelles.* — Si dans la courbe frontière $\varphi(x, y, u) = 0$, point double apparaît pour une valeur particulière de u, nous supposerons cette valeur nulle, le point double placé en O et les bissectrices de l'angle des tangentes prises pour axes de coordonnées. *Nous admettrons que* $\varphi'_u(0, 0, 0)$ *est différent de zéro.*

Le théorème de Weierstrass montre que, pour x, y, u voisins de zéro, on peut prendre une équation de la courbe frontière du second degré en y :

$$y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = 0,$$

les coefficients $\alpha(x, u)$, $\beta(x, u)$ s'annulent pour $x = 0$, $u = 0$; les développements de $\alpha(x, 0)$, $\beta(x, 0)$ commencent par des termes du second ordre, celui de $\beta(0, u)$ par un terme du premier ordre; ces hypothèses correspondent au cas général : le *point double* est alors à *tangentes distinctes*. On peut par le changement de x en kx, de u en hu. k et h étant des constantes réelles, rendre égaux à $+1$ ou à -1 les coefficients de x^2 et de u dans $\beta(x, 0)$ et $\beta(0, u)$, de façon à simplifier les calculs suivants. Les formes réduites utilisées seront alors, pour un point double à tangentes réelles,

$$y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = y^2 - x^2 + u + \ldots = 0 \tag{2}$$

et pour le point double à tangentes imaginaires,

$$y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = y^2 + x^2 - u + \ldots = 0. \tag{3}$$

Enfin pour un *point double à tangentes confondues*

$$y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = y^2 \pm u + \ldots = 0, \tag{4}$$

on peut mettre x^2 en facteur dans $\alpha(x, 0)$ et une puissance d'exposant au moins égal à 3 dans $\beta(x, 0)$.

Dans le premier cas, la courbe frontière (2) admet pour $u > 0$ deux points réels d'intersection avec Ox voisins de O et aucun pour $u < 0$; pour Oy les points analogues sont réels pour $u < 0$.

Faisons tendre u vers zéro par valeurs positives; il suffit, comme plus haut, d'étudier la partie de l'intégrale $I(u)$ correspondant à la partie du domaine d'intégration intérieure à un petit rectangle isolant l'origine; et nous pouvons tout ramener à l'étude de l'intégrale étendue à un segment $s(u)$ compris entre un arc de la courbe et sa corde $x = h$. Dans ces conditions, x varie entre $X(u)$ et h; $X(u)$ désigne l'abscisse du point de contact de la tangente à l'arc parallèle à Oy et vérifie l'équation

$$\alpha^2(x, u) - \beta(x, u) = x^2 - u + \ldots = 0.$$

Écrivons

$$\iint_{s(u)} f(x, y, u)\, dx\, dy = \int_{X(u)}^{h} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y, u)\, dy$$

où

$$y_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}, \qquad y_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}.$$

On peut supposer h et par suite y_1, y_2 assez voisins de zéro pour pouvoir effectuer l'intégration par rapport à y en intégrant terme à terme le développement de f en série entière, ce qui donne

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y\ u)\, dy = \Sigma a_{mnp} x^m y_2^n u^p - \Sigma a_{mnp} x^m y_1^n u^p,$$

les a étant des constantes. Mais, puisque y_1, y_2 sont racines de l'équation

$$y^2 - 2\alpha y + \beta = 0,$$

appliquons le lemme précédemment signalé de M. Goursat; il nous permet de substituer à la série $\Sigma a_{mnp} x^m y^n u^p$ un polynome du premier degré en y, $\gamma y + \delta$ dont les coefficients $\gamma(x, u)$, $\delta(x, u)$ sont des fonctions analytiques de x et de u. Il vient ainsi

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y, u)\, dy = (y_2 - y_1)\gamma(x, u) = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta}\,\gamma(x, u).$$

Utilisons maintenant le théorème de Weierstrass pour transformer l'expression sous le radical, on a

$$\alpha^2(x, u) - \beta(x, u) = [x^2 - 2\lambda(u)x + \mu(u)]\, g(x, u),$$

$\lambda(u)$ et $\mu(u)$ sont des fonctions analytiques de u s'annulant pour $u = 0$; le terme de moindre degré de μ est $-u$; $g(0, 0) = 1$ et $\sqrt{g(x, u)}$ est, comme g, une fonction $\eta(x, u)$ analytique au voisinage des valeurs 0, 0 des variables; on peut donc écrire

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y, u)\, dy = \sqrt{x^2 - 2\lambda x + \mu}\, \eta(x, u).$$

Nous simplifierons un peu les calculs qui vont suivre en faisant dans l'intégrale restante le changement de variable $x = x_1 + \lambda(u)$, ce qui donne

$$x^2 - 2\lambda(u)\, x + \mu(u) = x_1^2 - \varphi(u),$$

le terme de moindre degré du développement de $\varphi(u)$ est u; $\eta(x, u)$ se transforme en une fonction $\theta(x_1, u)$ développable encore en série entière Nous avons ainsi

$$\int_{X_1}^{h-\lambda} \theta(x_1, u) \sqrt{x_1^2 - \varphi(u)}\, dx_1$$

où $X_1 = X - \lambda$, et $\varphi(u) = X_1^2$; on peut encore écrire cette intégrale

$$\int_{X_1}^{h-\lambda} \frac{\psi(x_1, u)}{\sqrt{x_1^2 - \varphi(u)}}\, dx_1,$$

en posant

$$\psi(x_1, u) = \theta(x_1, u)(x_1^2 - \varphi);$$
$$\psi(0, u) = -\theta(0, u)\, \varphi(u)$$

contient u en facteur.

On peut décomposer l'intervalle d'intégration $X_1(u)$, $h - \lambda(u)$ en deux intervalles partiels par une constante k comprise entre 0 et $h - \lambda(u)$. Pour u positif et voisin de zéro, $X_1(u)$ est compris entre 0 et k, l'intégrale étendue à l'intervalle k, $h - \lambda(u)$ est fonction analytique de u (n° 1); l'intégrale étendue à l'autre intervalle partiel

$$i(u) = \int_{X_1}^{k} \frac{\psi(x_1, u)}{\sqrt{x_1^2 - \varphi(u)}}\, dx_1,$$

peut être obtenue, k étant pris assez voisin de zéro, en remplaçant dans le développement de ψ en série entière

$$\psi(x_1, u) = \Sigma b_{mp} x_1^m u^p,$$

x_1^m par

$$j_m = \int_{X_1}^{k} \frac{x_1^m \, dx_1}{\sqrt{x_1^2 - v(u)}}.$$

L'intégrale indéfinie correspondante a pour expression

$$J_m = \int \frac{x_1^m \, dx_1}{z} = P_m z + Q_m \log(x_1 + z), \qquad z = \sqrt{x_1^2 - v} = \sqrt{x_1^2 - X_1^2}.$$

P_m *est un polynome homogène en* x_1 *et* X_1 dont tous les exposants sont de même parité

$$P_m = \frac{x_1^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x_1^{m-3}}{m(m-2)} X_1^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} x_1^{m-5} X_1^4 + \ldots,$$

Q_m *est nul si m est impair* et a *pour valeur, lorsque m est pair,*

$$Q_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)\ldots 2} X_1^m \qquad (Q_0 = 1).$$

On démontre facilement ([1]) que les séries

$$\chi_1(x_1, X_1, u) = \sum_{m,p} b_{mp} P_m u^p, \qquad \chi_2(X_1, u) = \sum_{m,p} b_{mp} Q_m u^p$$

sont convergentes pour $|x_1| < r$, $|X_1| < r$, $|u| < \rho$, la série ψ l'étant pour $|x_1| < r$, $|u| < \rho$. Pour avoir $i(u)$, on substitue k et X_1 à x_1 dans ces séries et l'on forme la différence des expressions obtenues, ce qui

---

([1]) On s'appuie sur le lemme suivant : Si, dans une série entière

$$\psi(x, u) = \Sigma b_{mp} x^p u^p,$$

on remplace x^m par un polynome homogène de degré $m-1$ par rapport à x et une autre variable X

$$E_m = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ij} x^i X^j \qquad (i + j = m - 1),$$

dont les coefficients sont dominés par un nombre A : $|\alpha_{ij}| < A$, le résultat est donne (puisque z s'annule pour $x_1 = X_1$)

$$i(u) = \chi_1(k, X_1, u)\, z(k, u) + \chi_2(X_1, u) \log[k + z(k, u)] - \chi_2(X_1, u) \log X_1;$$
$$z(k, u) = \sqrt{k^2 - X_1^2}.$$

Les deux premiers termes dépendent analytiquement de u; comme $X_1^2 = \varphi(u)$ est une série entière en u contenant cette variable en facteur, le dernier terme fait apparaître la fonction $\log u$, ou plutôt le produit $u \log u$, car $\psi(0,0) = 0$ et par suite $\chi_2(X_1, u)$ s'annule avec u. La singularité que présentent $i(u)$ et $I(u)$ se trouve ainsi étudiée : *l'intégrale* $I(u)$ *est la somme d'une fonction analytique de* u *et du produit d'une fonction de même nature par* $u \log u$ *lorsque pour* $u = 0$ *se présente un point double à tangentes distinctes réelles dans la frontière.*

9. *Point double à tangentes imaginaires.* — Nous partons de l'équation déduite de la partie de la courbe frontière voisine du point double O, qui apparaît pour $u = 0$,

$$(3) \qquad y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = y^2 + x^2 - u + \ldots = 0,$$

les termes de moindre degré par rapport à chaque variable sont mis

---

une série entière à trois variables

$$\sum_{i,j,p} b_{mp}\alpha_{ij} x^i X^j u^p,$$

ayant un domaine de convergence différent de zéro s'il en est ainsi de la série ψ. En effet, si la première série admet une majorante $\dfrac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{u}{\rho}\right)}$ le coefficient de $x^i X^j u^p$ dans la seconde série est dominé par $\dfrac{MA}{r^m \rho^p} = \dfrac{1}{r} \dfrac{MA}{r^i r^j \rho^p}$; à cette seconde série correspond donc la série majorante

$$\frac{1}{r} \frac{MA}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{X}{r}\right)\left(1 - \dfrac{u}{\rho}\right)}.$$

On peut évidemment généraliser ce lemme en supposant non bornés les coefficients du polynome E_m pourvu qu'ils soient dominés par des fonctions de m à croissance assez lente.

en évidence; $\alpha(x, u) = \alpha_{01}\, u + \ldots$, les termes non écrits étant de degré au moins égal à deux.

Les racines y_1, y_2 de l'équation (3) sont réelles pour

$$X'(u) < x < X''(u);$$

$X'(u)$ et $X''(u)$ étant les racines de l'équation en x

$$\alpha^2(x, u) - \beta(x, u) = u - x^2 + \ldots = 0,$$

qui tendent vers zéro en même temps que u; on peut en effet écrire, d'après le théorème de Weierstrass,

$$\alpha^2(x, u) - \beta(x, u) = [\mu(u) + 2\lambda(u)\, x - x^2]\, g(x, u)$$

$\mu(u) = u + \ldots$, $\lambda(0) = 0$, $g(0,0) = 1$. La partie de la frontière qui nous intéresse n'est réelle que pour $u > 0$; c'est alors une petite courbe fermée, qui disparaît quand u devient négatif.

Procédant comme plus haut, on change x en $x_1 + \lambda$ ce qui donne (en supprimant ensuite l'indice de x_1)

$$\alpha^2 - \beta = [\nu(u) - x^2]\, G(x, u) \qquad G(0, 0) = 1.$$

Tout revient à étudier l'intégrale double

$$i(u) = \int\int f(x, y, u)\, dx\, dy,$$

étendue à l'aire intérieure à la petite courbe fermée. Elle s'évalue comme précédemment en intégrant d'abord par rapport à y entre les limites y_1, y_2 puis par rapport à x, les limites de cette seconde intégrale étant $-X(u)$, $X(u)$ où $X^2(u) = \nu(u)$.

On étudiera donc

$$i(u) = \int_{-X(u)}^{X(u)} \frac{\psi(x, u)}{\sqrt{X^2(u) - x^2}}\, dx,$$

$\psi(x, u)$ est développable en série entière, $\psi(0, u)$ contient u en facteur.

On remplace encore, dans le développement de ψ, x^m par

$$j_m = \int_{-X}^{X} \frac{x^m\, dx}{z}, \qquad z = \sqrt{X^2(u) - x^2}.$$

Les intégrales indéfinies correspondantes ont des expressions analogues à celles du n° 8

$$J_m = \int \frac{x^m\,dx}{z} = P_m z + Q_m \arcsin\frac{x}{X}$$

P_m et Q_m sont formés maintenant avec x et X comme ils l'étaient antérieurement avec x_1 et X_1; mais z s'annulant pour les deux limites $-X(u)$, $X(u)$, les seuls termes restant dans l'intégrale définie proviennent de $Q_m \arcsin\frac{x}{X}$; et comme Q_m est une fonction paire de X on trouve, après substitution des limites, pour j_m une fonction analytique de u.

En définitive, $i(u)$ n'est définie comme intégrale que pour $u > 0$, elle est néanmoins donnée par une série entière en u s'annulant pour $u = 0$. Donc, *dans le cas du point double à tangentes imaginaires*, $I(u)$ *reste analytique pour* $u \geqq 0$; elle l'est aussi si elle conserve un sens pour $u \leqq 0$, mais les deux séries entières en u donnant I pour $u > 0$ et pour $u < 0$ n'ont pas les mêmes coefficients. Il peut arriver aussi que $I(u)$ ne soit définie que pour $u > 0$ et qu'on ait ainsi une seule série entière.

10. *Exemple.* — Nous rencontrerons les circonstances précédentes et les rattacherons à d'autres questions en étudiant l'aire A de la courbe de Cassini, lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes F, F' a une valeur constante $\sqrt{u}$; la fonction dont on prend l'intégrale double est ici égale à l'unité, seule la frontière du domaine d'intégration dépend du paramètre variable u.

En prenant comme pôle le milieu O de FF', comme axe polaire la droite FF' et choisissant $\frac{FF'}{2}$ comme unité de longueur, l'équation de la frontière est

$$\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\omega + 1 - u = 0.$$

Cette frontière est réelle pour u réel et positif, d'un seul tenant pour $u > 1$; quand u tend vers l'unité en décroissant, un étranglement se produit dans la frontière qui acquiert un point double à tangentes réelles pour $u = 1$, on a alors une lemniscate; pour $1 > u > 0$ la frontière se compose de deux courbes fermées distinctes, et pour $u = 0$ on a deux points doubles à tangentes imaginaires.

L'aire A a pour expression pour $u > 1$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 2\omega + u - 1}\, d\omega,$$

ou en prenant pour variable d'intégration $\varphi = 2\omega$,

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u - \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\sqrt{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{u}\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\sqrt{u}\,E,$$

E étant le nombre de Jacobi correspondant au module $k = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

On peut contrôler les résultats que nous avons donnés (n° 8) en utilisant l'équation différentielle (¹) que vérifie E, considéré comme fonction de $x = \frac{1}{u}$

$$x(1-x)\frac{d^2E}{dx^2} + (1-x)\frac{dE}{dx} + \frac{1}{4}E = 0$$

et étudiant, par application du théorème de Fuchs (²), ses intégrales au voisinage du point singulier.

C'est une équation de Gauss que vérifie la série hypergéométrique $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, x\right)$. En posant $x = 1 - x'$, on a une équation de même nature vérifiée par $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, x'\right)$ équation qu'on étudie au voisinage de $x' = 0$ et qui admet une seconde intégrale contenant un terme logarithmique produit d'une série entière en x' par $\log x'$. Comme $x' = 1 - x = \frac{u-1}{u}$ peut être pris pour paramètre à la place de u et s'annule pour $u = 1$, on retrouve bien le résultat antérieur (³).

La même vérification peut être faite, mais plus longuement, en utilisant les formules donnant l'expression de E [Tannery et Molk, *Ouvrage cité*, formules (CXXIV), p. 130-131].

(¹) Tannery et Molk, *Théorie des fonctions elliptiques*, t. IV, p. 157, formules $(CXLV)_5$.

(²) *Voir* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, Chap. XX.

(³) Le facteur $2\sqrt{u} = 2(1-x')^{-\frac{1}{2}}$ donne une série entière en x'.

Quand le paramètre réel u est compris entre zéro et l'unité, l'expression de l'aire est

$$A = 2\int_0^{\alpha} \sqrt{u - \sin^2 2\omega}\, d\omega, \qquad \sin^2 2\alpha = u, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Le changement de variable $\sin 2\omega = \sqrt{u}\sin\varphi$ donne

$$A = u\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - u\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - u\sin^2\varphi}\, d\varphi - (1 - u)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - u\sin^2\varphi}} = E - (1 - u)K,$$

E et K étant les nombres de Jacobi construits maintenant avec le module $k = \sqrt{u}$. En posant $x = u$, une des formules CXLV de l'Ouvrage de Tannery et Molk donne

$$A = E - (1 - x)K = 2x(1 - x)\frac{dK}{dx}.$$

L'étude de A au voisinage des valeurs singulières 0 et 1 de x (ou de u) est ainsi ramenée à celle de K : Une série entière en $x = k^2$ donne K : et par dérivation $\frac{dK}{dx}$; l'aire A est bien aussi donnée par une série entière en u pour u voisin de zéro; et l'on vérifie aussi l'apparition dans l'expression de A d'un terme en $(1 - u)\log(1 - u)$, pour le point singulier $u = 1$, en utilisant les formules CXX.

11. *Formules de réduction pour certaines intégrales.* — Si un point double à tangentes confondues apparaît dans la frontière pour $u = 0$, on peut encore aborder l'étude de cette valeur singulière comme plus haut. On utilise la forme réduite (4) de l'équation de la frontière donnée par le théorème de Weierstrass

$$y^2 - 2\alpha(x, u)y + \beta(x, u) = 0,$$

mais cette fois $\alpha(x, 0)$, $\beta(x, 0)$ commencent par des termes d'ordres respectifs au moins égaux à 2 et 3, et à l'expression $\alpha^2 - \beta$ on substitue une expression $R(x, u)$ polynome en x de degré au moins égal à 3 dont les coefficients, analytiques en u, s'annulent pour $u = 0$, sauf pour le coefficient du terme de plus haut degré qu'on peut prendre égal à $+1$ ou à -1. Le développement de $R(0, u)$ commence par un terme du premier degré.

L'intégrale double étendue à un petit rectangle de centre O est remplacée par une intégrale simple

$$i(u) = \int_{x'}^{x''} \varphi(x, u)\sqrt{R}\,dx = \int_{x'}^{x''} \frac{\psi(x, u)\,dx}{\sqrt{R}},$$

$\psi = \varphi R$ ou par une somme d'intégrales analogues. Les deux bornes x', x'' sont soit deux racines réelles de $R = 0$ soit une telle racine et une constante h voisine de zéro.

Nous avions ramené précédemment le calcul des intégrales $i(u)$ au calcul d'une seule d'entre elles, correspondant à $\psi = 1$, qui nous donnait suivant les cas un logarithme ou un arc sinus; nous allons montrer qu'il *suffit de considérer les intégrales*

$$i_m = \int_{x'}^{x''} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}},$$

où m *est inférieur au degré de* R.

La propriété serait évidente si ψ était un polynome en x, puisqu'il suffirait alors d'utiliser les formules de réduction des intégrales hyperelliptiques; mais ici, où nous avons affaire à une série entière, une première question se pose, comme plus haut, celle de la convergence des séries qu'on rencontre en remplaçant dans la série double ψ pour le calcul de $i(u)$ les termes en x^m par les intégrales correspondantes i_m; le théorème suivant permet d'y répondre :

Une intégrale $I = \int \frac{\psi(x)}{z}$ *où* z^2 *est un polynome de degré* n *en* x *dont le terme de plus haut degré a pour coefficient* ± 1 *et qui n'admet pas de racines multiples, soit*

$$z^2 = \pm(x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n),$$

et où ψ *est une série entière en* x *dont le rayon de convergence n'est pas nul*

$$\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

peut être mise sous la forme

$$\mathrm{I} = \mathrm{Q}_0 \mathrm{I}_0 + \mathrm{Q}_1 \mathrm{I}_1 + \ldots + \mathrm{Q}_{n-1} \mathrm{I}_{n-1} + \mathrm{E} z, \qquad \mathrm{I}_k = \int \frac{x^k\,dx}{z},$$

$\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_{n-1}$ *étant des séries entières en* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et* E *une série entière en* $x, a_1, \ldots, a_n$*; les rayons de convergence associés de ces séries étant différents de zéro.*

La méthode de démonstration étant indépendante de la valeur de n, nous l'exposerons, pour abréger l'écriture, en prenant $n = 4$ et le coefficient de x^n égal à $+1$.

Comme on le sait, l'identité

$$\frac{d}{dx}(x^k z) = \frac{k x^{k-1} z^2 + x^k \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2} z^2\right)}{z}$$

conduit à une formule de réduction qui, avec les notations indiquées, est

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{I}_{k+3} = \frac{2k+3}{2k+4} a_1 \mathrm{I}_{k+2} + \frac{2k+2}{2k+4} a_2 \mathrm{I}_{k+1} + \frac{2k+1}{2k+4} a_3 \mathrm{I}_k + \frac{2k}{2k+4} a_4 \mathrm{I}_{k-1} + \frac{x^k z}{k+2}.$$

et qui donne pour $p \geqq 4$

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{I}_p = \lambda_{p1} \mathrm{I}_3 + \lambda_{p2} \mathrm{I}_2 + \lambda_{p3} \mathrm{I}_1 + \lambda_{p4} \mathrm{I}_0 + \sigma_p z,$$

les coefficients λ_{pi} sont des polynomes en a_1, a_2, a_3, a_4; σ_p est un polynome en a_1, a_2, a_3, a_4, x.

Ces polynomes se calculent immédiatement pour les petites valeurs de p, et, pour $p \geqq 7$ vérifient les formules de récurrence :

$$\text{(7)} \qquad \lambda_{p+1\,i} = \frac{2p-1}{2p} a_1 \lambda_{pi} + \frac{2p-2}{2p} a_2 \lambda_{p-1\,i} + \frac{2p-3}{2p} a_3 \lambda_{p-2\,i} + \frac{2p-4}{2p} a_4 \lambda_{p-3\,i},$$

$$\text{(8)} \qquad \sigma_{p+1} = \frac{2p-1}{2p} a_1 \sigma_p + \frac{2p-2}{2p} a_2 \sigma_{p-1} + \frac{2p-3}{2p} a_3 \sigma_{p-2} + \frac{2p-4}{2p} a_4 \sigma_{p-3} + \frac{x^{p-2}}{p}.$$

Considéré comme fonction des racines e_1, e_2, e_3, e_4 de

$$x^4 = a_1 x^3 - a_2 x^2 - a_3 x - a_4,$$

λ_{pi} est un polynome homogène dont le degré $p+i-4$ est aussi le poids de λ_{pi} considéré comme fonction de a_1, a_2, a_3, a_4 affectés respectivement de poids égaux à leurs indices.

Supposons que les a satisfassent aux inégalités suivantes où ρ est un nombre compris entre zéro et l'unité :

$$|a_1| < \rho, \qquad |a_2| < \rho^2, \qquad |a_3| < \rho^3, \qquad |a_4| < \rho^4$$

et cherchons des expressions dominant les λ_{pi} (c'est-à-dire surpassant leurs valeurs absolues); nous les déterminerons en remplaçant les relations (5) par les suivantes :

$$\mathcal{J}_{k+3} = \rho\,\mathcal{J}_{k+2} + \rho^2\,\mathcal{J}_{k+1} + \rho^3\,\mathcal{J}_k + \rho^4\,\mathcal{J}_{k-1}, \tag{9}$$

obtenues en remplaçant les coefficients des seconds membres des formules (5) par des nombres qui les dominent respectivement et supprimant toutefois le terme indépendant des I qui n'intervient pas dans le calcul des λ. Nous remplacerons de même les formules (6) par

$$\mathcal{J}_p = \mu_{p1}\,\rho^{p-3}\,\mathcal{J}_3 + \mu_{p2}\,\rho^{p-2}\,\mathcal{J}_2 + \mu_{p3}\,\rho^{p-1}\,\mathcal{J}_1 + \mu_{p4}\,\rho^p\,\mathcal{J}_0, \tag{10}$$

μ_{pi} désignant la somme des modules des coefficients des monomes en a_1, a_2, a_3, a_4 dans le polynome λ_{pi} ou un nombre supérieur à cette somme. On peut prendre les μ vérifiant les relations de récurrence

$$\mu_{p+1\,i} = \mu_{pi} + \mu_{p-1\,i} + \mu_{p-2\,i} + \mu_{p-3\,i},$$

analogues à (7), qui donnent aisément

$$\mu_{p+1\,i} - \mu_{pi} = \mu_{pi} - \mu_{p-4\,i}$$

d'où

$$\mu_{p+1\,i} < 2\,\mu_{pi}$$

et, comme

$$\mu_{4i} = 1,$$

$$\mu_{pi} < 2^{p-4}, \qquad |\lambda_{pi}| < 2^{p-4}\,\rho^{p+i-4}.$$

La série $\psi(x)$ admettant une majorante $\dfrac{A}{1-\dfrac{x}{R}}$, le coefficient α_p vérifie l'inégalité

$$|\alpha_p| < \frac{A}{R^p}.$$

A ce même terme $\alpha_p x^p$, nous faisons correspondre dans l'intégrale les termes $\alpha_p \lambda_{pi} \mathrm{I}_{4-i}$ dont les coefficients $\alpha_p \lambda_{pi}$ sont dominés par $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^p} 2^{p-4} \rho^{p+i-4}$ et *a fortiori* (puisque $\rho < 1$) par $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^p}(2\rho)^{p-4}$. *L'intégration terme à terme de la série* $\psi(x)$ *donne donc pour les coefficients de* I_0, I_1, I_2, I_3 *des séries entières en* a_1, a_2, a_3, a_4 *convergentes lorsque*

$$|a_1| < \rho, \qquad |a_2| < \rho^2, \qquad |a_3| < \rho^3, \qquad |a_4| < \rho^4, \qquad \rho < \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

Au terme $\alpha_p x^p$ correspond encore par l'intégration $\alpha_p \sigma_p z$. On démontre facilement avec les formules (8) que σ_p est un polynome en a_1, a_2, a_3, a_4, x homogène et de degré $p-3$ par rapport à e_1, e_2, e_3, e_4, x.

Procédant comme plus haut, nous prendrons comme expression dominant σ_p le monome $\tau_p \rho^{p-3}$, en calculant de proche en proche les coefficients τ_p par les relations suivantes [correspondant à (8)]

$$\tau_{p+1} = \tau_p + \tau_{p-1} + \tau_{p-2} + \tau_{p-3} + 1$$

d'où l'on déduit encore $\tau_{p+1} < 2\tau_p$, et, comme on peut prendre $\tau_3 = 1$, $\tau_p < 2^{p-3}$. Alors $|\sigma_p| < (2\rho)^{p-3}$; les coefficients de z dans l'intégrale forment une série entière en a_1, a_2, a_3, a_4, x convergente dès que

$$(11) \quad |a_1| < \rho, \qquad |a_2| < \rho^2, \qquad |a_3| < \rho^3, \qquad |a_4| < \rho^4, \qquad |x| < \rho, \qquad \rho < \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

Revenons aux intégrales $i(u)$; les coefficients a du polynome $\mathrm{R}(x, u)$ sont des fonctions analytiques de u s'annulant pour $u = 0$; les inégalités (11) peuvent être simultanément satisfaites en prenant $|u|$ et $|x|$ assez voisins de zéro. En substituant aux coefficients a leurs expressions en fonction de u, les coefficients Q deviennent des séries entières en u et E s'exprime de la même façon en fonction de u et de x. Faisant maintenant intervenir les limites des intégrales, x', x'', nous voyons que lorsqu'elles sont racines de $\mathrm{R} = 0$ (et de $z = 0$) E n'intervient pas, et que si l'une de ces limites x' est une constante (de petite valeur absolue) E est fonction analytique de u.

En définitive, l'*étude de la singularité de l'intégrale double revient* à celle des singularités présentées par les intégrales hyperelliptiques $i_m(u)$ considérées comme fonction du paramètre u dont dépendent les coefficients a du polynome et par suite les racines et notamment les limites de l'intégrale, c'est-à-dire *à des questions voisines de celles étudiées par Fuchs* dans un article bien connu sur les « modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. 71, 1870, p. 91). Mais Fuchs supposant que les coefficients a sont des polynomes en u, une étude nouvelle est nécessaire pour le cas où ils sont des séries entières. Cette étude est facile dans le cas actuel où tous les coefficients a de $R(x, u)$ s'annulent pour $u = 0$, et où la série entière $a_n(u)$ commence par un terme du premier degré. Avant de la faire, indiquons comment quelques-unes des questions traitées jusqu'ici se posent quand on cesse de supposer tous les éléments réels.

12. *Variables complexes.* — L'extension des résultats du n° 1 au cas d'une intégrale $\int_a^b f(x, u)dx$, où la variable et le paramètre peuvent être tous deux complexes, peut être faite soit par une méthode de subdivision du chemin d'intégration analogue à celle que nous avons suivie, soit par l'application des théorèmes de Cauchy [1]. Si l'on imagine alors que la fonction $f(x, u)$ est définie comme résultant de la substitution à y dans une fonction $g(x, y, u)$ d'une fonction implicite $y(x, u)$ donnée par une équation $\varphi(x, y, u) = 0$ g et φ étant holomorphes) l'intégrale ainsi définie

$$I(u) = \int_a^b g(x, y, u)\, dx, \qquad \varphi(x, y, u) = 0,$$

est, pour les éléments complexes, l'analogue des intégrales curvilignes et par suite des intégrales doubles relatives aux éléments réels.

Les singularités qui correspondent pour $I(u)$ à un point singulier des limites $a(u)$, $b(u)$ sont faciles à étudier lorsque, pour les valeurs de u voisines de la valeur singulière u_0 considérée, a et b sont donnés par des séries entières procédant suivant les puissances de $(u - u_0)^{\frac{1}{p}}$ (p entier); ceci est l'analogue des singularités des intégrales curvilignes ou des intégrales doubles à éléments réels, provenant de l'appa-

[1] *Voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, Chap. XVII.

rition d'un contact entre deux arcs du chemin d'intégration ou de la frontière.

Enfin pour définir $I(u)$ pour une valeur déterminée de u, il faut connaître sinon exactement le chemin suivi par la variable x pour aller d'une borne $a(u)$ à l'autre, du moins la position de ce chemin, par rapport aux points singuliers $x = e_i(u)$ de la fonction implicite $y(x, u)$. Si u varie peu, cette situation respective ne se modifie pas, sauf lorsque plusieurs de ces points critiques $e_i(u)$ viennent pour une valeur u_0 de u se réunir en un point situé sur le chemin d'intégration : cette valeur singulière u_0 est analogue à celles qui correspondent à l'apparition d'un point multiple dans la frontière d'un domaine d'intégration double à éléments réels.

13. *Point double à tangentes confondues.* — Revenons aux intégrales hyperelliptiques précédemment considérées ; le *dernier coefficient $a_n(u)$ du polynome $R(x, u)$ placé sous le radical carré commençant par un terme du premier degré en u*, le chemin d'intégration est porté par l'axe des quantités réelles, les bornes de l'intégrale sont soit deux racines réelles $e_1(u)$, $e_2(u)$ soit une telle racine et une constante k (lorsque la question se pose, comme plus haut, à propos des intégrales doubles, il n'y a pas lieu de s'occuper du cas où aucune des racines $e_i(u)$ ne serait réelle).

On sait que les racines $e_1(u), e_2(u), \ldots, e_n(u)$ sont données par une seule série entière (ici sans terme constant) où la variable est $u^{\frac{1}{n}}$ quand on donne successivement à cette expression ses n déterminations. Mais, u étant réel et positif, on peut aussi représenter ces racines par n séries entières par rapport à la racine arithmétique

$$\sqrt[n]{u} = \nu ;$$

l'une au moins de ces séries est à coefficients réels, soit $e_1(u)$; il peut en exister au plus une autre qui sera désignée alors par $e_2(u)$.

Prenons ν comme nouveau paramètre, faisons le changement de variable $x = \nu z$, posons $e_s(u) = \nu \varepsilon_s(\nu)$; les nombres $\varepsilon_1(0), \varepsilon_2(0), \ldots, \varepsilon_n(0)$ sont représentés par les sommets d'un polygone régulier dont le centre est à l'origine. Cette transformation isole ainsi les uns des autres les points critiques, car au lieu de $R(x, u)$, nous aurons $S(z, \nu)$ défini par

$$R(x, u) = \pm (x - e_1)(x - e_2)\ldots(x - e_n) = \nu^n S(z, \nu),$$
$$S(z, \nu) = \pm (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2)\ldots(z - \varepsilon_n).$$

L'intégrale

$$i_m = \int_{x'}^{x''} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R(z, u)}} = \nu^{m+1-\frac{n}{2}} j_m$$

où

$$j_m = \int_{z'}^{z''} \frac{z^m\,dz}{\sqrt{S(z, \nu)}};$$

z' et z'' sont soit deux racines $\varepsilon_1(\nu)$, $\varepsilon_2(\nu)$ (correspondant à e_1, e_2), soit une racine $\varepsilon_1(\nu)$ et $\frac{k}{\nu}$. Subdivisons l'intervalle z', z'' par deux bornes intermédiaires z_1, z_2; z_1 étant voisin de $\varepsilon_1(0)$ et z_2, suivant les cas, voisin de $\varepsilon_2(0)$ ou très grand en valeur absolue.

L'intégrale étendue à l'intervalle z_1, z_2 est une fonction analytique de ν (n° 1); pour celle relative à l'intervalle ε_1, z_1 on pose

$$z = \varepsilon_1(\nu) + \zeta^2$$

ce qui donne sous le signe $\int$ une série entière en ν et ζ qu'on intègre par rapport à ζ entre les limites 0 et $\sqrt{z_1 - \varepsilon_1(\nu)}$. Comme

$$\sqrt{z_1 - \varepsilon_1(\nu)} = \sqrt{z_1 - \varepsilon_1(0) - [\varepsilon_1(\nu) - \varepsilon_1(0)]}$$

est une série entière en ν dont le terme constant $\sqrt{z_1 - \varepsilon_1(0)}$ est voisin de zéro, on arrive finalement à une série entière en ν. On procède de même pour le troisième intervalle lorsque $z'' = \varepsilon_2(\nu)$. Enfin quand $z'' = \frac{k}{\nu}$ on observe que $\frac{z^m}{\sqrt{S}}$ est le produit de $z^{m-\frac{n}{2}}$ par une série entière en $\frac{1}{z}$ et ν ou $\frac{1}{\sqrt{z}}$ et ν (suivant la parité de n); l'intégrale indéfinie peut donc comprendre une série de même nature un polynome en z ou $\sqrt{z}$, à coefficients analytiques en ν, et enfin un terme en $\log z$ multiplié par un coefficient analogue. Après substitution de la limite $\frac{k}{\nu}$ on a une série entière en $\sqrt{\nu}$ ou $u^{\frac{1}{2n}}$, un polynome en $\frac{1}{\nu}$

ou $\frac{1}{u^{\frac{1}{n}}}$ et enfin un produit dont les facteurs sont $\log \nu$ $\left(\text{ou } \frac{1}{n} \log u\right)$ et une série entière en $\sqrt{\nu}$ ou $u^{\frac{1}{2n}}$.

Si l'on revient à l'origine de cette question, c'est-à-dire à l'étude des singularités d'une intégrale double correspondant à l'apparition d'un point double sur la frontière du domaine auquel on l'étend, on voit qu'une telle intégrale étant finie, le polynome en $\frac{1}{u^{\frac{1}{2n}}}$ ne peut se présenter et qu'enfin la série qui multiplie le logarithme s'annule pour $u = 0$.

En résumé, *dans le cas du point double à tangentes confondues les résultats ne diffèrent de ceux antérieurement obtenus que par la variable des séries entières figurant dans les deux formes possibles*, *variable qui peut être alors une puissance fractionnaire de u*.

Tout ceci suppose d'ailleurs que la dérivée φ'_u du premier membre de l'équation $\varphi(x, y, u) = 0$ de la famille des courbes frontières ne s'annule pas pour $x = y = u = 0$; hypothèse dont nous avons donné, dans l'introduction, un énoncé géométrique.

14. *Intégrales triples*. — Nous ne nous occuperons pour une telle intégrale $I(u)$ que de l'apparition, pour une valeur isolée ($u = 0$) du paramètre, d'un point double sur l'une des faces analytiques constituant la frontière ([1]). Nous supposons que le cône des tangentes au point double n'est pas décomposé et nous prenons ses axes comme axes de coordonnées. En multipliant les coordonnées et le paramètre par des constantes convenables, l'équation du morceau de frontière considérée se ramène à l'une des formes

$$\varphi(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + \varepsilon z^2 + u + \ldots = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les termes de moindre degré de $\varphi(x, 0, 0, 0)$, $\varphi(0, y, 0, 0)$, ... étant mis en évidence; nous admettrons même, en utilisant le théorème de Weierstrass, que φ est un polynome du second degré en y. En excluant une partie du domaine d'intégration qui donne une fonction analytique

([1]) Les autres singularités sont, en général, faciles.

de u, nous étendrons l'intégrale à un domaine restreint avoisinant l'origine et compris entre deux plans P′, P″ parallèles à xOy très voisins de xOy.

Soit d'abord $\varepsilon = -1$, la section de $\varphi = 0$ par un plan P de cote z situé entre P′ et P″ comprend une petite courbe fermée. Admettons que le domaine restreint d'intégration avoisine l'intérieur de cette courbe, intérieur que nous désignerons par $\sigma(z, u)$; ceci suppose toutefois que z reste compris entre la cote h de l'un des plans P′, P″ et une cote $\zeta(u)$ d'un plan tangent à $\varphi = 0$ parallèle à xOy, sans quoi la petite courbe ne serait pas réelle.

La fonction $\zeta(u)$ est analytique, en $\sqrt{u}$, elle est en effet donnée par les trois équations

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= 2x + \ldots = 0, \\ \varphi'_y &= 2y + \ldots = 0, \\ \varphi\ &= x^2 + y^2 - z^2 + u + \ldots = 0, \end{aligned}$$

les deux premières donnent x, y comme fonctions analytiques de z et de u, et z se calcule après substitution dans la dernière équation, ce qui donne en général deux racines infiniment petites, fonctions de u; $\zeta(u)$ désigne l'une de ces racines.

Nous écrivons l'intégrale à étudier

$$i(u) = \int_h^{\zeta(u)} dz \int\int f(x, y, z, u)\, dx\, dy,$$

f étant analytique, l'intégrale double

$$j(z, u) = \int\int f(x, y, z, u)\, dx\, dy$$

étant étendue au domaine $\sigma(z, u)$, du plan de cote z, est une fonction analytique de z et u. On peut, il est vrai, objecter que le domaine σ n'est défini que si 0, $\zeta(u)$, z, h forment une suite croissante ou une suite décroissante. Mais, en calculant j comme plus haut, en intégrant d'abord par rapport à y puis intégrant le résultat obtenu par rapport à x on démontrera que j est la valeur numérique d'une série entière en z et u, qui est convergente pourvu que $|z|$, $|u|$ soient assez petits.

Regardons z, u comme les coordonnées d'un point M d'un plan; la série est convergente lorsque M est dans une région R du plan; la partie du plan pour laquelle l'intégrale $j(z, u)$ est définie n'empiète que sur une partie R′ de la région R; R′ est séparée de la partie restante R″ par la ligne $z = \zeta(u)$, On peut appliquer alors à l'intégrale simple $\int_h^{\zeta(u)} j(z, u)\,dz$ les résultats du n° 1 en prenant toutefois comme paramètre $u' = \sqrt{u}$ au lieu de u.

En définitive, si, *pour* u *infiniment petit positif, une saillie de la frontière du domaine servant à définir l'intégrale triple s'aiguise jusqu'à former l'une des deux pointes aboutissant à un point double à cône de tangentes réel, l'intégrale* $I(u)$ *est représentée par une série entière en* $\sqrt{u}$.

Au contraire, *si le point double apparaît par étranglement d'une partie tubulaire de cette frontière*, comme il arriverait pour la forme réduite précédente et pour u voisin de zéro et négatif, les limites de l'intégration relative à z seront deux constantes, et $I(u)$ *est alors représentable par une série entière en* u.

Soit enfin $\varepsilon = 1$ et $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - u + \ldots$. *Lorsque le cône des tangentes au point double étant imaginaire, sans être décomposé, une petite partie fermée de la frontière du domaine de l'intégration vient à disparaître quand* u tend vers zéro par valeurs positives, on a de nouveau une série entière en $\sqrt{u}$, car les deux limites de l'intégration par rapport à z sont aussi des séries de cette nature.

15. *Remarque.* — M. Picard a bien voulu nous signaler, au moment de la correction des épreuves de cet article, que plusieurs des résultats qu'il contient s'étaient naturellement présentés à lui dans ses travaux sur les fonctions algébriques de deux variables.

Cette indication nous paraît devoir être très utile pour poursuivre l'étude des questions abordées ici (n^{os} 8 à 13). On se reportera notamment à sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (t. I, Chap. IV, Section IV) et à son Ouvrage récent de la Collection des Cahiers scientifiques de M. Julia : *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Chap. V, Section II).