GEORGES GIRAUD

Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 245-309

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__245_0>

SUR

CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES DE NEUMANN

ET SUR

CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES MIXTES

(suite)

PAR M. GEORGES GIRAUD

CHAPITRE X.

PROBLÈME LINÉAIRE DE DIRICHLET.

1. *Énoncé du problème.* — Considérons l'opération du type elliptique

$$\mathcal{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu \qquad (a_{\alpha,\alpha} > 0),$$

et un domaine borné ouvert dont la frontière $\mathcal{S}$ remplit les conditions (II, 1) et en outre celle que les dérivées des coordonnées de ses points sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$. On suppose que c est continu dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et que les b_α sont lipschitziens d'exposant h dans le même domaine; dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ encore, les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont supposées existantes et lipschitziennes d'exposant h.

Nous pouvons, de différentes manières, prolonger hors de $\mathcal{D}$ les coefficients de $\mathcal{F}$ et choisir dans tout l'espace une fonction χ, nulle hors d'un certain domaine borné, de façon que, dans tout l'espace, les b_α, $c - \chi$ et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ soient lipschitziens d'exposant h et que, hors d'un certain domaine borné, l'opération $\mathcal{F}u - \chi u$ se réduise à $\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u (g > 0)$; de plus $c - \chi$ doit être négatif ou nul partout; c doit avoir une limite continue quand X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, mais il peut y avoir un saut brusque au passage de $\mathfrak{S}$ (le plus simple est de prendre $c = -g^2$ hors de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, avec $c - \chi = -g^2$ dans tout l'espace). Soit $G(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale de l'équation

$$\mathcal{F} u - \chi u = 0.$$

Donnons-nous une fonction continue $f_1(X)$ d'un point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et une fonction continue $\varphi_1(X)$ d'un point de $\mathfrak{S}$. Soit d'autre part $\mathfrak{S}'$ une multiplicité intérieure à $\mathfrak{D}$, infiniment voisines de $\mathfrak{S}$, et formant la frontière d'un domaine ouvert $\mathfrak{D}'$, intérieur à $\mathfrak{D}$. *Nous nous proposons de trouver une fonction u_1 continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, à dérivées continues en tout point de $\mathfrak{D}$, telle que, sur $\mathfrak{S}$, $u_1 = \varphi_1$, et que, d'autre part, quand* X *appartient à $\mathfrak{D}'$,*

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{D}'}^{(m)} G(X, A)[f_1(A) - \chi(A) u_1(A)]\, dV_A$$
$$= \int_{\mathfrak{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u_1(A) - u_1(A)\, ZG(X, A)]\, dS_A - u_1(X).$$

C'est ce qui sera nommé le *problème* (généralisé) *de Dirichlet*, nom qui sera aussi appliqué au problème adjoint énoncé plus loin.

Les dérivées secondes de l'intégrale d'ordre $m - 1$ sont continues en tout point de $\mathfrak{D}'$. Les dérivées du premier membre sont lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1 (I, 1). Donc les dérivées de u_1 doivent être lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1 dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathfrak{D}$.

Si, outre les hypothèses faites, f_1 et χ ou c sont lipschitziens d'exposant h, les dérivées secondes de u_1 doivent être lipschitziennes d'exposant h dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathfrak{D}$, et l'on aura

$$\mathcal{F} u_1 = f_1.$$

Si, f_1 et χ étant supposés seulement continus, cette équation a une solution u_1 prenant les valeurs données sur $\mathfrak{S}$, et dont les dérivées secondes soient bornées dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathfrak{D}$, u_1 est solution de notre problème (VI, 1). Le nom de *problème* (généralisé) *de Dirichlet* convient donc.

On a vu aussi (VI, 10) que, malgré l'apparence, les conditions imposées à u_1 ne dépendent pas du choix du prolongement de $\mathfrak{S}$ dans tout l'espace, ni du choix de χ.

2. *Problème adjoint.* — Nous donnons le nom de *problème adjoint* au précédent, au problème suivant : *étant données une fonction* $f_2(X)$, *continue dans* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ *et une fonction continue* $\varphi_2(X)$ *d'un point de* $\mathcal{S}$, *trouver une fonction* $u_2(X)$, *à dérivées continues en tout point de* $\mathcal{D}$, *telle que, sur* $\mathcal{S}$, $u_2 = \varphi_2$, *et telle que, d'autre part, quand* X *appartient à* $\mathcal{D}'$,

$$(2)\qquad \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G(A, X)[\chi(A)u_2(A) - f_2(A)]\,dV_A,$$
$$= \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [u_2(A)\Theta G(A, X) - G(A, X) Z u_2(A)]\,dS_A + u_2(X).$$

Mettons G(A, X) sous la forme déjà vue (V, 18)

$$G(A, X) = \omega(X) N(A, X),$$

et soit $u_2(X) = \omega(X) v_2(X)$; alors

$$\int_{\mathcal{D}'}^{(m)} \omega(A) N(A, X)\left[\chi(A) v_2(A) - \frac{f_2(A)}{\omega(A)}\right] dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \{ v_2(A)\Theta'[\omega(A) N(A, X)] - \omega(A) N(A, X) Z' v_2(A) \}\, dS_A + v_2(X),$$

avec

$$Z'f = \Sigma_{\alpha\,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \psi' f,$$
$$\Theta' f = \Sigma_{\alpha.\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial(a_{\alpha,\beta} f)}{\partial x_\beta} + \left\{ \psi' + \Sigma_\alpha \varpi_\alpha \left[b_\alpha - \frac{2}{\omega} \sum\nolimits_\beta \frac{\partial(a_{\alpha.\beta}\,\omega)}{\partial x} \right] \right\} f,$$

où ψ' est une fonction arbitraire. On voit que ce problème est de même nature que le précédent : il suffit de se reporter à l'équation dont $\omega(A)N(A, X)$ est la solution élémentaire principale, relativement à X. Les deux problèmes peuvent être dits *adjoints l'un à l'autre.*

3. *Prolongement des coefficients.* — La solution de ces problèmes comporte d'abord l'opération consistant à prolonger les coefficients de $\mathcal{F}$ dans tout l'espace et à choisir χ de façon à remplir certaines conditions. Deux méthodes seront indiquées pour cela ; la première seule est applicable quand on ne fait que les hypothèses énoncées au début (§ 1).

Les deux méthodes ont en commun la façon de prolonger les $a_{\alpha,\beta}$. Nous choisissons d'abord un paramètre s_m (III, 4) pour servir à repérer les points voisins de $\mathcal{S}$; on suppose $s_m > 0$ hors de $\mathcal{D}$. Dans la région $0 < s_m < s'_m$, où s'_m est constant et assez petit, les $a_{\alpha,\beta}$ seront choisis pourvus de dérivées lipschitziennes d'exposant h et de façon à respecter la continuité de ces fonctions et de leurs dérivées au passage de $\mathcal{S}$; sur $s_m = s'_m$, les $a_{\alpha,\alpha}$ devront être égaux à un, les autres $a_{\alpha,\beta}$ à zéro, et les dérivées de ces fonctions devront être toutes nulles. On emploiera la méthode indiquée (IX, 2) mais en la complétant : aux valeurs fournies par la méthode pour les $a_{\alpha,\alpha}$, nous ajoutons $ks_m^2(s'_m - s_m)^2$, k étant une constante indépendante de α, et telle que l'équation soit du type elliptique dans notre région; par exemple k s'obtiendra en ajoutant 1 à la borne inférieure des valeurs pour lesquelles cela a lieu. Hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et de cette région, on prend

$$a_{\alpha,\alpha} = 1, \qquad a_{\alpha,\beta} = 0 \qquad (\beta \neq \alpha).$$

Dans la première méthode, on prolonge les b_α dans la région $0 < s_m < s'_m$ de façon qu'ils soient lipschitziens d'exposant h, nuls sur $s_m = s'_m$, et continus au passage de $\mathcal{S}$. Ensuite on choisit arbitrairement sur $\mathcal{S}$ les valeurs de certaines fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, pourvu que les dérivées de ces valeurs soient lipschitziennes d'exposant h (par exemple $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = 0$). Si l'on astreint $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ à avoir toutes leurs dérivées continues hors de $\mathcal{D}$, la valeur sur $\mathcal{S}$ de

$$(3)\quad 4\left(c - \sum_\gamma \frac{\partial\theta_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}\left(b_\alpha - \sum_\gamma \frac{\partial a_{\alpha,\gamma}}{\partial x_\gamma} - 2\theta_\alpha\right)\left(b_\beta - \sum_\gamma \frac{\partial a_{\beta,\gamma}}{\partial x_\gamma} - 2\theta_\beta\right)$$

se réduit à une fonction connue (en supposant toutefois c continu au passage de $\mathcal{S}$) augmentée de $-4\Sigma_\gamma \frac{\partial\theta_\gamma}{\partial s_m}\frac{\partial s_m}{\partial x_\gamma}$; on prendra, sur $\mathcal{S}$,

$$\frac{\partial\theta_\gamma}{\partial s_m} = t\frac{\partial s_m}{\partial x_\gamma},$$

t étant indépendant de X et de γ et assez grand pour que l'expression ci-dessus soit négative (par exemple, on ajoute 1 à la borne inférieure des valeurs pour lesquelles cela a lieu); sur $s_m = s'_m$, les θ_γ et toutes leurs dérivées devront être nuls; notre procédé (IX, 2) permet de définir les θ_γ complètement. Au delà de $s_m = s'_m$, tous les θ_γ doivent être nuls. Enfin, si l'on veut respecter la continuité de c au passage de $\mathcal{S}$, on fixe sa valeur $-g^2$ sur $s_m = s'_m$ de façon que la méthode indiquée (IX, 1, qui est applicable même si c est seulement *continu* dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$) rende (3) négatif dans tout $0 < s_m < s'_m$; toutefois c n'est lipschitzien que s'il prend sur $\mathcal{S}$ des valeurs lipschitziennes; au delà de $s_m = s'_m$, $c = -g^2$. Si l'on ne désire pas que c soit continu, on peut prendre tous les θ_γ identiquement nuls et prendre pour c, hors de $\mathcal{D}$, la valeur constante $-g^2$ telle que (3) soit partout négatif. La forme quadratique P (II, 3) est alors définie positive hors de $\mathcal{D}$ (II, 8).

La seconde méthode ne s'applique que si les dérivées des

$$b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial x_\beta}$$

existent et sont lipschitziennes (d'exposant h). On prolonge alors ces fonctions de façon (IX, 2) que leurs dérivées restent continues au passage de $\mathcal{S}$ et soient lipschitziennes d'exposant h dans $0 < s_m < s'_m$; sur $s_m = s'_m$, ces fonctions et leurs dérivées doivent s'annuler et être encore nulles au delà de $s_m = s'_m$. Le prolongement des $a_{\alpha,\beta}$ étant déjà trouvé, celui des b_α en résulte. Quand à c, on le prend négatif ou nul partout hors de $\mathcal{D}$, au prix même d'une discontinuité au passage de $\mathcal{S}$; le plus simple est de le prendre égal à $-g^2$ partout hors de $\mathcal{D}(g > 0)$.

Si l'on veut, dans cette seconde méthode, respecter la continuité de c sur $\mathcal{S}$, il faut l'amener d'abord à y être négatif ou nul, ce à quoi l'on parvient facilement en posant $u = vw$ et en choisissant w de façon que, dans une région contenant $\mathcal{S}$, on ait $w > 0$, $\mathcal{F}w < 0$ (b, V, 3e application, p. 223).

Dans les deux méthodes, χ doit être nul au delà de $s_m = s'_m$, et tel que $\chi - c$ soit positif ou nul partout et lipschitzien d'exposant h dans tout l'espace. Par exemple $\chi - c$ sera partout égal à g^2.

Dans la première méthode, pour déterminer Θu, on prend, sur $\mathcal{S}$, $\psi = \Sigma_\alpha \varpi_\alpha \theta_\alpha$, les ϖ_α étant les cosinus directeurs de la normale extérieure. Dans la seconde méthode, on prend ψ négatif continu quelconque, par exemple $\psi = -1$.

4. *Mise en équations de Fredholm.* — Nous prenons pour G la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u = \chi u$. Nous prenons arbitrairement f_1 et f_2 hors de $\mathcal{D}$, pourvu qu'ils soient continus en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et nuls hors d'un domaine borné; le plus simple est de les prendre nuls hors de $\mathcal{D}$ (la continuité au passage de $\mathcal{S}$ n'est pas nécessaire; il suffit que les fonctions soient bornées).

Nous fixons un entier p au moins égal à 2 et nous posons, pour le problème donné,

$$(4)\quad u_1(X) = -\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_p(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A \qquad (p \geqq 2),$$

ρ_1 et σ_1 étant de nouvelles inconnues; l'intégrale d'ordre m est étendue à tout l'espace. Les conditions du problème se traduisent (VI, 11, 16) par le système d'équations de Fredholm

$$(5)\quad \rho_1(X) - \chi(X)\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG^{(p)}(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = f_1(X),$$

$$(6)\quad \sigma_1(X) - \int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_p(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = \varphi_1(X);$$

on vérifie facilement que la dernière équation peut se remplacer par

$$(6\,bis)\quad \sigma_1(X) - \int^{(m)} G^{(p)}(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_{2p-1}(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = \varphi_1(X) + \int^{(m)} G_{p-1}(X, A)\,f_1(A)\,dV_A.$$

De même, le problème adjoint conduit aux équations

$$(7)\quad u_2(X) = -\int^{(m)} G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(A, X)\,\sigma_2(A)\,dS_A,$$

$$(8)\quad \rho_2(X) - \chi(X)\int^{(m)} G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A - 2\chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G^{(p)}(A, X)\,\sigma_2(A)\,dS_A = \varphi_2(X),$$

$$(9)\quad \sigma_2(X) - \int^{(m)} G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(A, X)\,\sigma_2(A)\,dS_A = \varphi_2(X),$$

dont la seconde peut être remplacée par

$$(9\,bis)\quad \sigma_2(X) - \int^{(m)} G^{(p)}(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_{2p-1}(A, X)\,\sigma_2(A)\,dS_A = \varphi_2(X) + \int^{(m)} G_{p-1}(A, X)\,f_2(A)\,dV_A.$$

5. *Problèmes associés.* — Nous considérons encore les deux problèmes suivants : *Trouver des fonctions* u_3, ρ_3, σ_3 *telles que*

$$u_3(X) = -2\int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\rho_3(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\sigma_3(A)\,dS_A, \tag{10}$$

$$\rho_3(X) - \int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\rho_3(A)\,dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(X, A)\sigma_3(A)\,dS_A = 0, \tag{11}$$

$$\sigma_3(X) - 2\int^{(m)} \Theta G(X, A)\chi(A)\rho_3(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(X, A)\sigma_3(A)\,dS_A = 0. \tag{12}$$

La dernière équation peut se remplacer par

$$\sigma_3(X) - 2\int^{(m)} \Theta G^{(p)}(X, A)\chi(A)\rho_3(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_{2p-1}(X, A)\sigma_3(A)\,dS_A = 0. \tag{12 bis}$$

Ces équations entraînent que, hors de $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}u_3 = 0$, et que, si X vient sur $\mathcal{S}$ par points n'appartenant pas à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, $\Theta u_3 = 0$.

Trouver des fonctions u_4, ρ_4, σ_4 *telles que*

$$u_4(X) = -2\int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A, \tag{13}$$

$$\rho_4(X) - \int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A = 0, \tag{14}$$

$$\sigma_4(X) - 2\int^{(m)} ZG(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_p(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A = 0. \tag{15}$$

La dernière équation se transforme comme ci-dessus. Si X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D}$, on a $Zu_4 = 0$. D'autre part, l'équation adjointe existe et a ses coefficients lipschitziens dans tout ensemble fermé extérieur à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; donc, hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, $\mathcal{G}u_4 = 0$.

Nous nommons ces problèmes les *associés* des précédents, parce que le système de Fredholm [(11), (12 *bis*)] est l'associé du système [(8), (9 *bis*)]; de même pour les deux autres systèmes.

6. Lemme. — *Si ρ_1 et σ_1 satisfont au système* [(5), (6)] *homogène (c'est-à-dire avec les données $f_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$), et si u_1 est identiquement nul dans $\mathcal{D}$, ρ_1 est identiquement nul dans tout l'espace et σ_1 identiquement nul sur tout $\mathcal{S}$.*

En effet, ρ_1 étant continu, l'intégrale d'ordre m qui figure dans (6) a ses dérivées lipschitziennes (I, 1). Donc les dérivées de σ_1 existent et sont lipschitziennes (VIII, 6). Donc (VIII, 9) Θu_1 existe et a la même valeur des deux côtés de la double couche; cette valeur est zéro d'après l'hypothèse. D'après une formule de Green (II, 3), appliquée à la région extérieure à $\mathcal{D}$ et intérieure à une hypersphère infiniment grande de centre fixe, u_1 est identiquement nul hors de $\mathcal{D}$, car la forme quadratique P est définie; si l'on a pris la seconde méthode de prolongement, cette raison est à remplacer par celle que u_1 est nul à l'infini et qu'il ne peut avoir de maximum positif ni hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à cause de la condition $c < 0$, ni sur $\mathcal{S}$ à cause de la condition $\psi < 0$ qui empêcherait Θu_1 de pouvoir s'annuler [1]; de même il n'y a pas de minimum négatif; donc $u_1 = 0$ hors de $\mathcal{D}$. Donc u_1 est continu au passage de $\mathcal{S}$ et par suite $\sigma_1 = 0$ (VIII, 2, 10). Alors les équations (4) et (5) donnent $\rho_1 = -\chi u_1 = 0$, et le lemme est démontré.

7. Théorème. — *Si le problème homogène correspondant au problème donné (c'est-à-dire le problème où $f_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$) n'a que la solution zéro, le problème donné et son adjoint ont chacun une solution et une seule.*

Il est évident que le problème donné n'a pas plus d'une solution; il

[1] Raisonnement de M. Gevrey (*Journal de mathémathiques*, t. 9, 1930, p. 1 à 80, spécialement p. 74).

en a une, car, d'après le lemme, le système de Fredholm [(5), (6)] est soluble.

Pour le problème adjoint, on remarque d'abord qu'il a au moins une solution; il suffit pour cela de montrer que le problème associé, ou le système [(11), 12)], n'a que la solution zéro. Or, d'après le raisonnement d'il y a un instant, u_3 est identiquement nul hors de $\mathcal{D}$; donc, dans $\mathcal{D}$, u_3 est une solution du problème homogène correspondant au problème donné; donc $u_3 = 0$ dans $\mathcal{D}$. Donc Θu_3 a la même valeur des deux côtés de $\mathcal{S}$, et par suite $\sigma_3 = 0$ (VII, 3, 6); alors $2\rho_3 = -u_3 = 0$.

Pour achever la démonstration en montrant que la solution du problème adjoint est unique, on forme une fonction de Green, mais nous pouvons pour cela renvoyer à un Mémoire précédent (*b*, V, th. 3, p. 218 à 222) [1].

8. *Application.* — En particulier, le théorème s'applique au cas où $c < 0$ dans $\mathcal{D}$, le problème homogène n'ayant alors que la solution zéro. En effet on a (VI, 1), en étendant l'intégrale à tout l'espace,

$$\int^{(m)} G(X, A)[c(A) - \chi(A)]\, dV_A = -1.$$

Or, pour écrire la condition (1), nous pouvons prolonger $\mathcal{F}$ hors de $\mathcal{D}$ de façon que c soit négatif partout; soit, par exemple, $c \leqq -k < 0$, k étant une constante; χ n'est alors assujetti qu'à être nul hors d'un certain domaine borné et à rendre $c - \chi$ partout lipschitzien et positif; $|\chi|$ peut donc être partout aussi petit qu'on veut; comme d'autre part G est positif ou nul partout, on a, d'après le théorème de la moyenne, si $|\chi| < \varepsilon$,

$$\left| \chi(X) \int^{(m)} G(X, A)\, dV_A \right| < \frac{\varepsilon}{k - \varepsilon}:$$

si $\varepsilon < \frac{k}{3}$, c'est inférieur à $\frac{1}{2}$, et par suite l'équation de Fredholm en $\mu(X)$

$$\mu(X) - \chi(X) \int^{(m)} G(X, A)\, \mu(A)\, dV_A = 1$$

[1] Rapprocher ces raisonnements de ceux de M. Josef Plemelj, *Ueber lineare*

est soluble et sa solution est positive (ce dernier point se voit sur le développement en série). Si l'on fait, dans notre problème, le changement d'inconnue

$$u_1(X) = v(X) \int^{(m)} G(X, A)\,\mu(A)\,dV_A,$$

un raisonnement déjà vu (V, 18) montre qu'on a pour v une question de même nature que pour u_1, mais $\mathcal{F}$ est remplacé par une autre opération, où les coefficients des dérivées secondes n'ont pas changé et où les autres coefficients sont lipschitziens, celui de v, égal au quotient de -1 par $\int^{(m)} G(X, A)\mu(A)dV_A$, étant en outre négatif. Donc, s'il s'agit du problème homogène, on peut employer l'équation aux dérivées partielles relative à v; par suite il n'y a pour v, et pour u_1, que la solution zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Le cas où l'on a, dans $\mathcal{D}$, $c \leqq 0$, et celui où la mesure de $\mathcal{D}$ est assez petite, se ramènent au précédent (b, V, p. 223 à 225).

9. Lemme. — *Les problèmes homogènes correspondant au problème donné et au problème adjoint ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes; chacune de ces solutions est donnée par une solution et une seule du système correspondant d'équations de Fredholm.*

Soient q le nombre des solutions linéairement indépendantes du problème homogène correspondant au problème donné, et r le nombre analogue pour le problème homogène adjoint.

On va d'abord prouver que, si u_1 et u_2 sont des solutions de ces deux problèmes, les dérivées de u_1 et de u_2 sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Il suffira de développer la démonstration pour u_1, et il n'y a de difficulté que pour les points de $\mathcal{S}$. Reprenons le paramètre s_m, nul sur $\mathcal{S}$, négatif dans $\mathcal{D}$ (III, 4), et soient a et b deux nombres tels qu'on ait $0 \leqq a < b$. Si a et b sont assez petits, le problème homogène où $\mathcal{D}$ est remplacé par la région $-a > s_m > -b$, n'a que la solution zéro; on peut donc construire une fonction de Green $F_{a,b}(X, \Xi)$, satisfaisant à

Randwertaufgaben der Potentialtheorie (I. Teil, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd 15, 1904, S. 337-411; II. Teil, id., Bd 18, 1907, S. 180-210). On trouvera dans la suite d'autres raisonnements découlant de ceux de M. Plemelj.

la condition (1) homogène relativement à X, à la condition (2) homogène relativement à Ξ, nulle si pour un des points $(s_m+a)(s_m+b)=0$; cette fonction est telle que la différence

$$u(X, \Xi)=F_{a,b}(X, \Xi)-G_k(X, \Xi)$$

soit partout continue, ainsi que celles de ses dérivées (de tout ordre) dont l'existence est démontrée, pourvu que k soit assez grand. La fonction $u(X, \Xi)$ est donnée par

$$u(X, \Xi)=-\int^{(m)} G(X, A)\rho(A, \Xi)\,dV_A-2\int_{\mathfrak{S}_a+\mathfrak{S}_b}^{(m-1)} ZG_2(X, A)\sigma(A, \Xi)\,dS_A;$$

$\mathfrak{S}_a$ et $\mathfrak{S}_b$ sont les multiplicités $s_m=-a$ et $s_m=-b$, et ρ et σ sont la solution unique du système de Fredholm

$$\begin{aligned}\rho(X, \Xi)-\chi(X)\int^{(m)} & G(X, A)\rho(A, \Xi)\,dV_A\\ & -2\chi(X)\int_{\mathfrak{S}_a+\mathfrak{S}_b}^{(m-1)} ZG^{(2)}(X, A)\,\sigma(A, \Xi)\,dS_A=-\chi(X)\,G^{(k)}(X, \Xi),\\ \sigma(X, \Xi)-\int^{(m)} & G(X, A)\rho(A, \Xi)\,dV_A\\ & -2\int_{\mathfrak{S}_a+\mathfrak{S}_b}^{(m-1)} ZG_2(X, A)\sigma(A, \Xi)\,dS_A=-G_k(X, \Xi);\end{aligned}$$

on constate sur ces équations que les dérivées de σ, relatives à X, existent et sont lipschitziennes, pourvu que Ξ ne soit pas sur $\mathfrak{S}_a$ ni sur $\mathfrak{S}_b$ (VIII, 6); il en est de même (VIII, 7) pour les dérivées de $F_{a,b}$ relatives à X, quand X est sur $\mathfrak{S}_a$ ou sur $\mathfrak{S}_b$ et que Ξ est à l'intérieur du domaine. Les rôles des variables peuvent en outre, dans ce raisonnement, être intervertis. On a donc (VI, 8), si **X** est dans la région $-a>s_m>-b$ et si $a>0$,

$$u_1(X)=-\int_{\mathfrak{S}_a+\mathfrak{S}_b}^{(m-1)} u_1(A)\,ZF_{a,b}(X, A)\,dS_A.$$

Laissons fixes b et le point X, et faisons tendre a vers zéro; on remarquera que $F_{a,b}(X, A)$ et ses dérivées dépendent alors continûment de A et de a, et l'on en déduit que

$$u_1(X)=-\int_{\mathfrak{S}_b}^{(m-1)} u_1(A)\,ZF_{0,b}(X, A)\,dS_A,$$

car u_1 est nul sur $\mathfrak{S}_0$: on voit bien sur cette équation que les dérivées de u_1 sont continues (et mêmes lipschitziennes) mêmes sur $\mathfrak{S}$. Il en est de même de celles de u_2.

Nous avons alors (VI, 8)

$$(16)\qquad \begin{aligned} &-\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p)}(X, A)\,\chi(A)\,u_1(A)\,dV_A \\ &=\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\Theta u_1(A)\,dS_A - \theta(X)\,u_1(X), \end{aligned}$$

θ étant égal à 1 si X est dans $\mathcal{D}$, à 0 si X est hors de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$. Si donc on pose

$$\rho_3(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p-1)}(X, A)\,\chi(A)\,u_1(A)\,dV_A, \qquad \sigma_3(X) = -\frac{1}{2}\Theta u_1(A),$$

la fonction u_3, donnée par (10), est égale à u_1 dans $\mathcal{D}$, à zéro hors de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$, et l'on vérifie que les équations (11) et (12) sont satisfaites [on trouve (11) en récrivant (16) après remplacement de p par $2p-1$, puis en retranchant membre à membre]; ρ_3 et σ_3 ne sont d'ailleurs pas à la fois identiquement nuls, puisque u_1 ne l'est pas. Le nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(8), (9)] homogène, est donc au moins égal à q; mais (§ 6) il est au plus égal à r [le raisonnement du paragraphe 6 s'applique au problème adjoint parce que, hors de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$, l'équation adjointe existe, ce qui permet encore, moyennant un facile passage à la limite, d'employer la formule de Green (II, 6)]; donc $r \geqq q$. Mais on voit de même que $q \geqq r$; donc $q = r$ et l'on voit en outre que q est aussi le nombre des solutions indépendantes des systèmes homogènes de Fredholm. Tout est donc démontré.

10. Théorème. — *Soient u', u'', ..., $u^{(q)}$ les solutions linéairement indépendantes du problème homogène correspondant au problème donné, et v', v'', ..., $v^{(q)}$ celles du problème homogène adjoint. Les conditions nécessaires et suffisantes de possibilité du problème donné sont*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} v^{(n)} f_1\,dV + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \varphi_1 Z v^{(n)}\,dS = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, q);$$

si ces conditions sont remplies, toutes les solutions sont données par le système d'équations [(4) *à* (6)]. *De même, les conditions nécessaires et suffisantes de possibilité du problème adjoint sont*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} u^{(n)} f_2 \, dV + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi_2 \Theta u^{(n)} \, dS = 0,$$

et si elles sont remplies, toutes les solutions sont données par les équations (7) *à* (9).

On peut ajouter que deux solutions (ρ_1, σ_1) différentes conduisent à deux fonctions u_1 différentes (§ 9); de même pour u_2. La démonstration résulte facilement de la théorie de l'équation de Fredholm, en utilisant ce qui précède; on la trouvera dans un Mémoire antérieur (*b*, V, th. 4, p. 229 et 230).

CHAPITRE XI.

PROBLÈME LINÉAIRE DE NEUMANN.

1. *Énoncé d'un premier problème.* — Faisons sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{S}$ les mêmes hypothèses que précédemment (X, 1), mais sur l'opération du type elliptique

$$\mathcal{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} \, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m; \; a_{\alpha,\alpha} > 0),$$

nous supposons seulement que tous les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c sont lipschitziens d'exposant h ($h < 1$, comme précédemment).

On donne une fonction f_1 lipschitzienne d'exposant h dans $\mathcal{D}$. Sur $\mathcal{S}$, on donne deux fonctions continues ψ et φ_1; ψ est la fonction qui intervient dans la définition de Θu (II, 1).

Le problème est de *trouver une fonction* u_1 *dont les dérivées secondes soient continues en tout point de* $\mathcal{D}$ *et qui satisfasse dans* $\mathcal{D}$ *à l'équation*

$$\mathcal{F} u_1 = f_1, \tag{1}$$

et sur $\mathcal{S}$ *à la condition*

$$\Theta u_1 = \varphi_1. \tag{2}$$

2. *Prolongement des coefficients.* — Nous prolongeons hors de $\mathcal{D}$ les coefficients de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ à peu près comme dans la seconde méthode donnée précédemment (X, 3); toutefois, pour les $a_{\alpha,\beta}$, et les b_α, il n'y a à respecter que les conditions de Lipschitz, ce qui est une simplification; c peut être discontinu au passage de $\mathcal{S}$ et doit être négatif hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$; χ doit être tel que $c-\chi$ soit partout négatif ou nul et lipschitzien d'exposant h. Les valeurs de toutes ces fonctions, hors d'un certain domaine borné, doivent être les constantes déjà indiquées ([1]).

3. *Mise en équations de Fredholm.* — Posons

$$(3)\quad u_1(X) = -2\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A \qquad (p \geqq 2),$$

et supposons que ρ_1 soit lipschitzien; on devra avoir

$$(4)\quad \rho_1(X) - \chi(X)\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A + \chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = \frac{1}{2}f_1(X),$$

$$(5)\quad \sigma_1(X) - 2\int^{(m)} \Theta G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = \varphi_1(X).$$

4. Lemme. — *Si une solution du système* [(4), (5)] *homogène* (cas où $f_1=0$, $\varphi_1=0$) *rend* u_1 *identiquement nul dans* $\mathcal{D}$, ρ_1 *et* σ_1 *sont identiquement nuls.*

En effet u_1 est nul à l'infini et sur $\mathcal{S}$, donc identiquement nul hors

---

([1]) Dans d, IV, p. 247, on s'était rapproché de la première méthode de prolongement indiquée ici; mais des erreurs avaient empêché de voir la restriction $h > \frac{1}{2}$, qui aurait dû être faite; de plus ψ aurait dû être supposé lipschitzien. Ces restrictions sont complètement levées ici.

de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, puisque c est alors négatif; donc Θu_1 a la même valeur des deux côtés de $\mathcal{S}$, ce qui entraîne la nullité de σ_1 (VII, 3,6). On a alors, d'après (3) et (4), $2\rho_1 = -\chi u_1 = 0$.

5. Théorème. — *Si le problème homogène correspondant au problème donné n'a que la solution* 0, *le problème donné a une solution et une seule, et cette solution est donnée par les équations* (3) *à* (5).

En effet, d'après le lemme, le système [(4), (5)] a une solution et une seule, et d'autre part, il est évident que le problème n'a pas plus d'une solution [on voit, comme au passage (III, 6), que ρ_1 est lipschitzien].

Avec les hypothèses actuelles sur les coefficients, nous ne poussons pas plus loin l'étude du problème énoncé au paragraphe 1.

6. *Énoncé d'un autre problème.* — Faisons maintenant sur les coefficients de $\mathcal{F}$ les mêmes hypothèses qu'au Chapitre précédent (X, 1). Supposons en outre que f_1 soit continu dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, et ψ et φ_1 continus sur $\mathcal{S}$; ψ est toujours la fonction qui intervient dans la définition de Θ. Nous nous proposons de *trouver une fonction* u_1, *dont les dérivées soient continues en tout point de* $\mathcal{D}$ *et qui satisfasse sur* $\mathcal{S}$ *à la condition* (2); *de plus, en nommant* G(X, A) *la solution élémentaire principale d'une équation* $\mathcal{F}u = \chi u$, *on astreint* u_1, *dans* $\mathcal{D}$, *à la condition*

$$(6)\qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)[f_1(A) - \chi(A)\, u_1(A)]\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u_1(A) - u_1(A)\, ZG(X, A)]\, dS_A - u_1(X),$$

qui remplace l'équation (1).

Ce problème et celui du paragraphe 1, ainsi que le problème adjoint dont il va être question, sont compris sous le nom de *problème* (généralisé) *de Neumann*.

7. *Problème adjoint.* — Donnons-nous maintenant deux autres fonctions f_2 et φ_2 continues, la première dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, la seconde sur $\mathcal{S}$. Le *problème adjoint* au problème donné est de *trouver une fonction* u_2

dont les dérivées soient continues en tout point de $\mathcal{D}$, et qui satisfasse sur $\mathcal{S}$ à la condition

$$Zu_2 = \varphi_2, \tag{7}$$

et dans $\mathcal{D}$ à la condition

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A,X)[\chi(A)\,u_2(A) - f_2(A)]\,dV_A \\ = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [u_2(A)\,\Theta G(A,X) - G(A,X)\,Zu_2(A)] + u_2(X).\end{aligned} \tag{8}$$

On voit comme plus haut (X, 2) que ce problème est de même nature que le précédent. Les deux problèmes seront dits *adjoints l'un à l'autre.*

8. *Prolongement des coefficients.* — On choisit, sur $\mathcal{S}$, des fonctions θ_α lipschitziennes d'exposant h et qui soient telles que [1]

$$\Sigma_\alpha \theta_\alpha \varpi_\alpha < \psi;$$

---

[1] Ce choix des θ_α, qui obligera à introduire une nouvelle fonction G, est amené par l'hypothèse de la continuité à laquelle, sans plus, est astreint ψ. Dans *d*, IV, 6, p. 252, on aurait dû supposer que ψ est lipschitzien.

On peut aussi, sans introduire la nouvelle fonction auxiliaire G, embrasser le cas où ψ est seulement supposé continu; pour cela on prend la fonction φ telle que, pour $0 < s_m < s'_m$, on ait

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} - \varphi = 0,$$

telle d'autre part que $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \psi$ sur $\mathcal{S}$ et que $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0$ sur $s_m = s'_m$; cette fonction φ existe (§5) d'après l'identité

$$\varphi\left(\sum_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} - \varphi\right) = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right) - \left[\sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \varphi^2\right],$$

qui prouve que φ est nul si $\psi = 0$; on pose, pour $0 \leqq s_m \leqq s'_m$,

$$\theta_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + c_\alpha s_m^\lambda (s'_m - s_m) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

les c_α ayant la signification déjà indiquée (III, 4); sur $\mathcal{S}$, $\sum_\alpha \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_\alpha}$ est alors infini par exemple, si μ est une constante inférieure au minimum de ψ, on prend $\theta_\alpha = \mu\varpi_\alpha$; pour définir les θ_α hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, on choisit un nombre positif k inférieur à h et l'on forme les fonctions $g_\alpha = c'_\alpha s'^k_m$, les c'_α étant des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tels que $\Sigma_\alpha c'_\alpha \varpi_\alpha$ soit positif sur $\mathcal{S}$ (b, III, p. 165 et 166), ce qui entraîne

$$\Sigma_\alpha c'_\alpha \frac{\partial s_m}{\partial x_\alpha} > 0 \qquad \text{pour } 0 < s_m < s'_m$$

si s'_m est assez petit et si la direction $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_m)$ est partout assez voisine de la direction de la normale; les conditions imposées sur $\mathcal{S}$ et sur $s_m = s'_m$ fixent sur ces multiplicités les valeurs des $\theta_\alpha - g_\alpha$: on définit alors ces fonctions pour $0 < s_m < s'_m$ par la méthode (IX, 1). Alors $\sum_\gamma \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial x_\gamma}$, pour s_m infiniment petit, est (VIII, 5) infiniment grand équivalent à $k s_m^{k-1} \Sigma_\gamma c'_\gamma \frac{\partial s_m}{\partial x_\gamma}$, donc positif; ainsi l'expression (3)(X, 3) est négative pour s_m assez petit et l'on pourra prolonger c de façon qu'elle soit partout négative. Si ψ était lipschitzien, on pourrait prendre (sur $\mathcal{S}$) $\theta_\alpha = \varpi_\alpha \psi$. A part cette façon de former les θ_α, on définit hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, et dans tout l'espace la fonction χ, exactement comme dans la première méthode donnée plus haut (X, 3).

Si les $b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ ont des dérivées lipschitziennes, on peut aussi employer la seconde méthode, qui dispense d'introduire les fonctions θ_α et la fonction auxiliaire dont on va parler.

9. *Nouvelle fonction auxiliaire* G. — Nous posons, sur $\mathcal{S}$, pour une fonction arbitraire u,

$$(9)\quad \Theta_i u = \Sigma_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi u, \qquad \Theta_e u = \Sigma_\alpha \varpi_\alpha \left(\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \theta_\alpha u \right),$$

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} Z_i u &= \Sigma_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial (a_{\alpha,\beta} u)}{\partial x_\beta} + (\psi - \Sigma_\alpha b_\alpha \varpi_\alpha) u, \\ Z_e u &= \Sigma_\alpha \varpi_\alpha \left[\sum_\beta \frac{\partial (a_{\alpha,\beta} u)}{\partial x_\beta} + (\theta_\alpha - b_\alpha) u \right]; \end{aligned} \right.$$

---

positif et rend l'expression (3) (X, 3) infinie négative car le produit de θ_α par n'importe quelle puissance positive de s_m tend vers zéro avec s_m. En donnant aux θ_α la valeur zéro au delà de $s_m = s'_m$, on a, des deux côtés de $s_m = s'_m$, $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha \theta_\alpha = 0$, ce qui suffit.

quand X viendra sur $\mathcal{S}$ par points de $\mathcal{O}$, on emploiera Θ_i et Z_i; quand X viendra sur $\mathcal{S}$ par points n'appartenant pas à $\mathcal{O}+\mathcal{S}$, on emploiera Θ_e et Z_e. Au point de vue de la convention (II, 7), Θ_i et Θ_e sont traités comme Θ, et Z_i et Z_e comme Z.

Désignons maintenant par $F(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u=\chi u$. La fonction $G(X, \Xi)$ qu'il s'agit d'introduire, sera

$$(11) \qquad G(X, \Xi) = F(X, \Xi) - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, A)\, u(A, \Xi)\, dS_A,$$

u étant choisi de façon que, aux points X de $\mathcal{S}$, $\Theta_i G = \Theta_e G$, quel que soit Ξ différent de X. Cela équivaut, X étant sur $\mathcal{S}$, à l'équation

$$(12) \quad u(X, \Xi) + [\psi(X) - \Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X)] \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, A)\, u(A, \Xi)\, dS_A$$
$$= [\psi(X) - \Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X)] F(X, \Xi);$$

c'est une équation de Fredholm, puisque $\mathcal{S}$ est borné et que

$$F(X, A) = O[L^{2-m}(X, A)].$$

Pour montrer qu'elle a une solution et une seule, considérons l'équation homogène

$$\sigma(X) + [\psi(X) - \Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X)] \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = 0.$$

La fonction

$$u(X) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A$$

satisfait, partout ailleurs que sur $\mathcal{S}$, à l'équation $\mathcal{F}u=\chi u$; elle est continue au passage de $\mathcal{S}$; sur $\mathcal{S}$, on a $\Theta_i u = \Theta_e u$; enfin elle est nulle à l'infini. Il en résulte que u est identiquement nul, comme n'ayant nulle part de maximum positif ni de minimum négatif; l'impossibilité d'un maximum positif, par exemple, résulte de l'inégalité $c-\chi<0$ aux points autres que ceux de $\mathcal{S}$; en cas de maximum positif en un point de $\mathcal{S}$, on aurait, du côté intérieur,

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \geqq 0,$$

et puisque

$$\left(\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)_e = \left(\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)_i + (\psi - \Sigma_\alpha \theta_\alpha \varpi_\alpha)u,$$

on aurait aussi

$$\left(\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)_e > 0,$$

ce qui contredit l'existence du maximum. Donc u est identiquement nul, ce qui entraîne

$$\sigma = (\Sigma_\alpha \theta_\alpha \varpi_\alpha - \psi)u = 0,$$

Par conséquent la fonction $u(X, \Xi)$, assujettie à l'équation (12), existe et est unique.

Posons $F^{(1)} = F$ et

$$F^{(n)}(X, \Xi) = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, A)[\Sigma_\alpha \theta_\alpha(A)\varpi_\alpha(A) - \psi(A)]F^{(n-1)}(A, \Xi)\,dS_A;$$

il est clair que si

$$u(X, \Xi) = [\psi(X) - \Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X)]\sum_{n=1}^{p} F^{(n)}(X, \Xi) + u_p(X, \Xi),$$

le dernier terme est continu pour $p \geqq m$, car l'équation (12), après $p - 1$ itérations, entraîne

$$u_p(X, \Xi) + [\psi(X) - \Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X)]\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^{(p)}(X, A)\, u_p(A, \Xi)\,dS_A$$
$$= [\Sigma_\alpha \theta_\alpha(X)\varpi_\alpha(X) - \psi(X)]\sum_{n=p+1}^{2p} F^{(n)}(X, \Xi),$$

où tout est continu ([1]). Ainsi $u(X, \Xi)$ est continu en tout point X de $\mathfrak{S}$, sauf si Ξ est sur $\mathfrak{S}$, cas où u n'est continu qu'aux autres points de $\mathfrak{S}$. Au reste, que Ξ soit ou non sur $\mathfrak{S}$,

$$u(X, \Xi) = O[L^{2-m}(X, \Xi)], \quad G(X, \Xi) = F(X, \Xi) + O[L^{3-m}(X, \Xi)] \quad (m > 3);$$

ces limitations sont à modifier comme d'habitude si $m = 2$ ou 3. Les

---

(1) Il suffit, pour le voir, d'imiter la démonstration de b, II, th. 1, p. 147; un raisonnement analogue est développé ici un peu plus loin (§10).

nouveaux *potentiels* de simple couche $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\sigma(A)\,dS_A$ sont donc continus même au passage de $\mathcal{S}$.

10. *Discontinuité de* $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(X, A)\sigma(A)\,dS_A$. — Nous pouvons désigner par ΘG la valeur commune de $\Theta_i G$ et de $\Theta_e G$ quand X est sur $\mathcal{S}$; il est à remarquer que les dérivées de G par rapport à X n'existent alors peut-être pas toutes. Nous allons montrer que le résultat antérieur (VII, 3) s'applique aux opérations Θ_i et Θ_e portant sur les nouveaux potentiels de simple couche, c'est-à-dire que, si X est sur $\mathcal{S}$,

$$\Theta_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\sigma(A)\,dS_A = \frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$

$$\Theta_e \int_{\mathcal{S}}^{(m+1)} G(X, A)\sigma(A)\,dS_A = -\frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(X, A)\sigma(A)\,dS_A.$$

Il suffira d'établir la première de ces relations.

On peut étendre la signification de l'opération Θ_i aux points de $\mathcal{D}$, par le procédé (III, 4). Je dis que, alors,

$$\Theta_i[G(X, \Xi) - F(X, \Xi)] = O[L^{2-m}(X, \Xi)] \qquad (m > 2). \tag{13}$$

En effet le premier membre, quand X n'est pas sur $\mathcal{S}$, est

$$-\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta_i F(X, A)\,u(A, \Xi)\,dS_A.$$

Si $\mathcal{S}$ ou Ξ n'est pas dans la région $0 > s_m > -a$, où a est un nombre positif fixe, l'intégrale ci-dessus est bornée; il en est évidemment de même si $L(X, \Xi)$ est supérieur à un nombre positif fixe. Il reste à considérer le cas où $L(X,\Xi)$ peut tendre vers zéro, ainsi que s_m; on ne restreint pas la généralité en admettant alors que X et Ξ sont tous deux dans la région où l'on peut adopter un certain système de variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$; on peut même s'arranger pour que les distances de X et de Ξ à la frontière de cette région restent supérieures à un minimum positif fixe. Soit $\mathcal{S}_1$ la partie de $\mathcal{S}$ comprise dans cette région; on peut supprimer l'intégrale étendue à la partie restante de $\mathcal{S}$, car elle est évidemment bornée. Soit $\mathcal{S}''$ la partie de $\mathcal{S}_1$ telle que

$2L(\Xi, A) < L(X, \Xi)$; dans $\mathcal{S}''$, $\Theta_i F(X, A) = O[L^{1-m}(X, \Xi)]$, et comme $u(A, \Xi) = O[L^{2-m}(A, \Xi)]$, l'intégrale correspondante est $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$ (voir *b*, p. 138, note). Soit maintenant $\mathcal{S}'$ la partie de $\mathcal{S}_1$ définie par $2L(\Xi, A) > L(X, \Xi)$, $L(X, A) < 2L(X, \Xi)$; dans $\mathcal{S}'$, $u(A, \Xi) = O[L^{2-m}(X, \Xi)]$; d'autre part, nous savons que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} |\Theta_i F(X, A)| \, dS_A$$

est borné quand X varie; donc la partie de l'intégrale considérée qui est étendue à $\mathcal{S}'$ est $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$, d'après le théorème de la moyenne. Enfin, dans la région de $\mathcal{S}_1$ telle que $L(X, A) > 2L(X, \Xi)$, la fonction intégrée est $O[L^{3-2m}(X, A)]$, et par suite un raisonnement connu (voir *b*, I, th. 1, p. 139) donne $O[L^{2-m}(X, A)]$ comme intégrale correspondante. On a donc bien l'inégalité (13).

Cette inégalité entraîne que, même si X est sur $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\Theta_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} &[G(X, A) - F(X, A)]\,\sigma(A)\, dS_A \\ &= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta_i[G(X, A) - F(X, A)]\,\sigma(A)\, dS_A;\end{aligned}$$

d'autre part, si X est sur $\mathcal{S}$,

$$\Theta_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} F(X, A)\,\sigma(A)\, dS_A = \frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta_i F(X, A)\,\sigma(A)\, dS_A;$$

en ajoutant membre à membre, on a bien le résultat annoncé.

11. *Fonction* G^*; *son identité avec* G. — En posant

$$G^*(X, \Xi) = F(X, \Xi) - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi(X, A)\, F(A, \Xi)\, dS_A,$$

on construit de même une fonction auxiliaire telle que, quand X vient sur $\mathcal{S}$,

$$Z_i G^*(X, \Xi) = Z_e G^*(X, \Xi);$$

φ est donné par une équation de Fredholm qui se ramène à une équation associée à l'équation (12), par suite φ existe et est unique.

Je dis que $G^\star = G$. En effet (VI, 1, 8, 11) si l'on pose $\theta(X) = 1$ dans $\varpi = 0$, hors de $\varpi + \mathcal{S}$, on a

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G^\star(X, A)\,\Theta_i G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,Z_i G^\star(X, A)]\,dS_A$$
$$= \theta(X)\,G(X, \Xi) - \theta(\Xi)\,G^\star(X, \Xi),$$

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G^\star(X, A)\,\Theta_e G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,Z_e G^\star(X, A)]\,dS_A$$
$$= [1 - \theta(\Xi)]\,G^\star(X, \Xi) - [1 - \theta(X)]\,G(X, \Xi),$$

d'où, puisque les premiers membres sont les mêmes, $G = G^\star$.

13. Corollaire. — Quand X vient sur $\mathcal{S}$, on a [1]

$$Z_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(A, X)\,\sigma(A)\,dS_A = \frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(A, X)\,\sigma(A)\,dS_A,$$
$$Z_e \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(A, X)\,\sigma(A)\,dS_A = -\frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(A, X)\,\sigma(A)\,dS_A.$$

13. *Mise en équation de Fredholm.* — Pour mettre en équations de Fredholm le problème donné, il suffit de reproduire les équations (3) à (5), en attribuant à G la nouvelle signification. L'équation (5) peut être remplacée par

(5 *bis*)
$$\sigma_1(X) - 2\int^{(m)} \Theta G^{(p)}(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A$$
$$- 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_{2p-1}(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A$$
$$= \varphi_1(X) + \int^{(m)} \Theta G_{p-1}(X, A)\,f_1(A)\,dV_A.$$

Pour le problème adjoint, on a des équations analogues, obtenues en échangeant les rôles des variables et en remplaçant Θ par Z; on remplace aussi u_1, ρ_1, σ_1 par u_2, ρ_2, σ_2.

14. *Problèmes associés.* — Nous considérons aussi deux problèmes *associés* aux précédents. L'un est de trouver des fonctions u_4, ρ_4, σ_4

(1) Les résultats (VIII, 2, 9) s'étendent aussi aux nouvelles fonctions G, ainsi qu'à d'autres plus générales (*Comptes rendus*, 191, 1930, p. 478 à 480).

telles que

$$(14)\qquad u_4(X) = -\int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A,$$

$$(15)\qquad \rho_4(X) - \int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G^{(p)}(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A = 0,$$

$$(16)\qquad \sigma_4(X) - \int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A = 0,$$

la dernière équation pouvant aussi se remplacer par

$$(16\,bis)\qquad \sigma_4(X) - \int^{(m)} G^{(p)}(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_{2p-1}(A, X)\sigma_4(A)\,dS_A = 0;$$

en prenant comme inconnue $-\sigma_4$ au lieu de σ_4, on voit que le système [(15), (16 *bis*)] d'équations de Fredholm est associé au système [(4), (5 *bis*)]. On a, hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, $\mathcal{G}u_4 = 0$, et u_4 tend vers zéro si X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs.

L'autre problème associé, dont les inconnues seront nommées u_3, ρ_3, σ_3, se déduit du précédent en échangeant les rôles des deux points et en remplaçant Θ par Z.

15. Lemme. — *Si ρ_1 et σ_1 sont solutions du système* [(4), (5)] *homogène (avec les nouvelles hypothèses), et si u_1 est identiquement nul dans $\mathcal{D}$, ρ_1 et σ_1 sont identiquement nuls.*

Démonstration pareille à celle du paragraphe 4, sauf que la nullité de u_1 hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ résulte de la formule de Green (II, 3).

On peut échanger les rôles des deux points, c'est-à-dire démontrer le théorème semblable relatif à u_2, ρ_2, σ_2, parce que $\mathcal{G}$ existe et a ses coefficients lipschitziens dans tout ensemble fermé sans point commun avec $\mathcal{D}+\mathcal{S}$; on emploie la formule (II, 6), moyennant un passage à la limite.

16. Théorème. — *Si le problème homogène correspondant au problème donné n'a que la solution zéro, le problème donné et le problème adjoint ont chacun une solution et une seule.*

Démonstration identique à celle du paragraphe 5 pour le problème donné, et analogue à celle du paragraphe 7 du Chapitre X pour le problème adjoint, avec la simplification qu'on est certain à l'avance de la continuité de u_2 sur $\mathcal{S}$ (voir *d*, IV, 9, p. 256).

17. *Application.* — Ici et dans le cas du paragraphe 5, si c est négatif dans $\mathcal{D}$ et ψ positif sur $\mathcal{S}$, le problème homogène correspondant au problème donné n'a que la solution zéro. Car si c est lipschitzien, on voit comme plus haut (X, 6) que u ne peut atteindre de maximum positif ni de minimum négatif, ni dans $\mathcal{D}$ ni sur $\mathcal{S}$. Si c n'est pas lipschitzien mais seulement continu, on emploie le même détour que pour le problème de Dirichlet (X, 8); toutefois l'équation en $\mu(X)$ est à remplacer par

$$\mu(X)-\chi(X)\int^{(m)} G(X, A)\,\mu(A)\,dV_A = -c(X)+\chi(X),$$

de façon que, moyennant la condition que $|\chi|$ soit assez petit,

$$\int^{(m)} G(X, A)\,\mu(A)\,dV_A - 1$$

et ses dérivées soient, en valeur absolue, moindres qu'un nombre positif arbitrairement donné; cette modification est destinée à ne pas altérer la condition $\psi > 0$; μ est encore positif si $|\chi|$ est partout assez petit (voir aussi *d*, IV, 5, p. 251).

18. Lemme. — *Les problèmes homogènes correspondant au problème donné et au problème adjoint ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes; chacune de ces solutions est donnée par une solution et une seule du système correspondant d'équations de Fredholm.*

Démonstration analogue à celle qui concerne le problème de Dirichlet (X, 9), avec une simplification déjà signalée (§ 16; voir encore *d*, IV, 9, p. 256).

19. Théorème. — *Soient u', u'', $\ldots$, $u^{(q)}$ les solutions linéairement indépendantes du problème homogène correspondant au problème donné, et v', v'', $\ldots$, $v^{(q)}$ celles du problème homogène adjoint. Les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème donné sont*

$$\int_{\varpi}^{(m)} v^{(n)} f_1 \, dV - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} v^{(n)} \varphi_1 \, dS = 0,$$

et celles du problème adjoint sont

$$\int_{\varpi}^{(m)} u^{(n)} f_2 \, dV - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} u^{(n)} \varphi_2 \, dS = 0;$$

si ces conditions sont remplies, les systèmes de Fredholm correspondants donnent toutes les solutions.

La démonstration est facile en utilisant ce qui précède (voir *d*, IV, 11, p. 257).

CHAPITRE XII.

PROBLÈME LINÉAIRE MIXTE.

1. *Énoncé du problème.* — Dans ce Chapitre, l'analogie avec les précédents permettra de se borner à de rapides indications, qu'il sera d'ailleurs possible de compléter en se reportant à un Mémoire antérieur (*d*, V, p. 258 à 265).

Ici, le domaine ϖ et sa frontière sont soumis aux mêmes hypothèses que pour le problème de Dirichlet (X, 1); en outre on suppose expressément que la frontière n'est pas d'un seul tenant; la réunion d'un certain nombre de parties d'un seul tenant sera nommée $\mathfrak{S}$, et le reste de la frontière sera $\mathfrak{T}$.

On se donne une fonction f_1 continue dans $\varpi + \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$, une fonction φ_1 continue d'un point de $\mathfrak{S}$, et deux fonctions ψ et ω_1 continues d'un point de $\mathfrak{T}$; la fonction ψ est celle qui devra intervenir, sur $\mathfrak{T}$, dans les définitions de Θ et de Z. Désignons encore par $\mathfrak{S}'$ une multiplicité infiniment voisine de $\mathfrak{S}$, mais située dans $\mathfrak{D}$, et par $\mathfrak{D}'$ la partie de $\mathfrak{D}$ qui a pour frontière $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{T}$.

Le problème est de trouver une fonction u_1, continue dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$, à dérivées continues en tout point de $\mathfrak{D}$, satisfaisant sur $\mathfrak{S}$ à la condition

$$u_1 = \varphi_1,$$

sur $\mathfrak{T}$ à la condition

$$\Theta u_1 = \omega_1,$$

et dans $\mathfrak{D}'$ à la condition

$$\int_{\mathfrak{D}'}^{(m)} G(X, A)[f_1(A) - \chi(A)\,u_1(A)]\,dV_A$$
$$= \int_{\mathfrak{S}'+\mathfrak{T}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u_1(A) - u_1(A)\,ZG(X, A)]\,dS_A - u_1(X).$$

2. *Problème adjoint.* — Pour le problème adjoint, on se donne les fonctions f_2, φ_2, ω_2 définies et continues respectivement dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$, sur $\mathfrak{S}$ et sur $\mathfrak{T}$, et il s'agit de trouver une fonction u_2, continue dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$, à dérivées continues en tout point de $\mathfrak{D}$, satisfaisant sur $\mathfrak{S}$ à la condition

$$u_2 = \varphi_2,$$

sur $\mathfrak{T}$ à la condition

$$Z u_2 = \omega_2,$$

et dans $\mathfrak{D}'$ à la condition

$$\int_{\mathfrak{D}'}^{(m)} G(A, X)[\chi(A)\,u_2(A) - f_2(A)]\,dV_A$$
$$= \int_{\mathfrak{S}'+\mathfrak{T}}^{(m-1)} [u_2(A)\,\Theta G(A, X) - G(A, X)\,Z u_2(A)]\,dS_A + u_2(X).$$

3. *Mise en équations de Fredholm.* — On commence par prolonger les coefficients et déterminer les fonctions θ_α et χ au delà de $\mathfrak{S}$ par la méthode du Chapitre X, au delà de $\mathfrak{T}$ par la méthode du Chapitre XI. On introduit la fonction $G(X, \Xi)$ et l'on pose

$$u_1(X) = -\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A$$
$$+ 2\int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} G(X, A)\,\tau_1(A)\,dS_A,$$

ce qui conduit à un système d'équations de Fredholm contenant les inconnues ρ_1, σ_1, τ_1. On procède d'une façon analogue pour le problème adjoint.

Des raisonnements semblables à ceux des Chapitres précédents montrent encore que ces systèmes de Fredholm donnent toutes les solutions des problèmes posés, et chacune une seule fois. Le problème homogène correspondant au problème donné, et celui qui correspond au problème adjoint, ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes. Ce nombre est zéro en particulier si $c < 0$ dans $\mathcal{D}$ et $\psi > 0$ sur $\mathcal{S}$. Si $v', v'', \ldots, v^{(q)}$ sont les solutions linéairement indépendantes du problème adjoint homogène, les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème donné sont

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} v^{(n)} f_1\, dV + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi_1 Z v^{(n)}\, dS - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \omega_1 v^{(n)}\, dS = 0,$$

et l'on a aussi le résultat analogue pour le problème adjoint.

CHAPITRE XIII.

LES DÉRIVÉES SECONDES DU POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE.

1. Lemme. — Soit $G(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale de l'équation

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0 \qquad (a_{\alpha,\alpha} > 0),$$

où les b_α, c et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont lipschitziens d'exposant $h < 1$. Faisons un changement de variable, valables dans un domaine ouvert $\mathcal{D}$, tel que les dérivées secondes des nouvelles variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$ par rapport aux anciennes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, soient lipschitziennes d'exposant h et que le déterminant fonctionnel $\frac{d(s_1, \ldots, s_m)}{d(x_1, \ldots, x_m)}$ soit partout positif. Soit

$$\mathcal{F}'u = \Sigma_{\alpha,\beta} a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha\, \partial s_\beta} + \Sigma_\alpha b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} + c'u,$$

avec

$$a'_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\gamma,\delta} \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\delta}, \qquad b'_\alpha = \mathcal{F}s_\alpha - cs_\alpha, \qquad c' = c,$$

ce que devient $\mathfrak{F}u$ dans ce domaine; prolongeons les coefficients de $\mathfrak{F}'$ dans tout l'espace $(s_1, \ldots, s_m)$, de manière à avoir une solution élémentaire principale $G'(S, T)$, S correspondant à X et T à Ξ. *Je dis qu'on peut écrire dans $\mathcal{D}$*

$$G(X, \Xi) - \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)} G'(S, T) = \lambda(\Xi)\,\varphi(X, \Xi),$$

où λ est une fonction positive dont les dérivées sont lipschitziennes d'exposant h, et où φ peut être dérivé jusqu'à quatre fois, dont deux fois au plus par rapport aux coordonnées de chaque point, les résultats de ces dérivations étant lipschitziens d'exposant h par rapport à l'ensemble des deux points dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{S}$ une multiplicité à $m-1$ dimensions de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, et soient ϖ_α les cosinus directeurs d'une direction choisie de la normale à $\mathcal{S}$; soit $\mathcal{S}'$ la transformée de $\mathcal{S}$ dans l'espace $s_1, s_2, \ldots, s_m$ et soient ϖ'_α les cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{S}'$ dirigée du côté correspondant au côté choisi sur $\mathcal{S}$; soient encore dS et dS' les éléments de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$. On vérifie sans peine que, pour une fonction f arbitraire,

$$(1)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta}\, \varpi'_\alpha \frac{\partial f}{\partial s_\beta}\, dS' = \frac{d(s_1, \ldots, s_m)}{d(x_1, \ldots, x_m)} \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\beta}\, dS.$$

Prenons pour $\mathcal{S}$ la frontière d'une partie bornée de $\mathcal{D}$ et soient X et Ξ deux points de cette partie bornée, dont les transformés sont S et T; soient encore A un point de $\mathcal{S}$, et U son transformé. En prenant nulle la fonction ψ qui intervient dans la définition de Θu, et en regardant $G'(S, T)$ comme fonction implicite de X et de Ξ, nous avons, d'après ce qui précède et d'après un théorème antérieur (VI, 1),

$$\frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G'(U, T) - G'(U, T)\, Z G(X, A)]\, dS_A$$
$$= \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)} G'(S, T) - G(X, \Xi),$$

car le déterminant fonctionnel est positif.

Mais les coefficients de $\mathfrak{F}'$ satisfont aux mêmes hypothèses que ceux de $\mathfrak{F}$, ce qui (V, 18) permet d'écrire

$$G'(S, T) = \omega'(T)\, N'(S, T),$$

où N′ peut être dérivé trois fois, dont deux fois par rapport aux coordonnées de n'importe lequel des deux points, et où les dérivées de ω' sont lipschitziennes d'exposant h. La fonction

$$\lambda(\Xi) = \omega'(\mathrm{T})\frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)}$$

a donc ses dérivées lipschitziennes d'exposant h. D'autre part, la fonction

$$\varphi(\mathrm{X}, \Xi) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [\mathrm{N}'(\mathrm{U}, \mathrm{T})\,\mathrm{Z}\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\Theta\mathrm{N}'(\mathrm{U}, \mathrm{T})]\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$

est telle que les $\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma\, \partial \xi_\delta}$ existent; de plus, si l'on applique le le théorème (IV, 1) d'une part aux $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_\gamma\, \partial \xi_\delta}$ considérés comme fonctions de X, d'autre part aux $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$ considérés comme fonctions de Ξ, on voit que les dérivées quatrièmes en question sont lipschitziennes d'exposant h par rapport à l'ensemble des deux points.

2. *Conditions de Lipschitz pour les dérivées de la densité. — Supposons que la frontière $\mathcal{S}$ du domaine borné ouvert $\mathcal{D}$ satisfasse aux hypothèses* (II, 1) *et en outre à celle que les dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$. Supposons en outre que les coefficients b_α et c et les dérivées des coefficients $a_{\alpha,\beta}$ soient lipschitziens d'exposant h; on suppose enfin que les dérivées de la fonction ψ qui intervient dans la définition de l'opération Θ, existent et sont lipschitziennes d'exposant h. Soit* $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$ *la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u = 0$ et considérons encore le potentiel de simple couche*

$$u = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.$$

Si les dérivées relatives à $s_1, \ldots, s_{m-1}$ de l'une des valeurs limites prises par Θu sur $\mathcal{S}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h, les dérivées de σ existent et sont lipschitziennes d'exposant h.

Il suffit de démontrer que, X étant sur $\mathcal{S}$, les dérivées de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$

existent et sont lipstchitziennes d'exposant h. Mais (VII, 4) σ est lipschitzien d'exposant h; donc (VII, 5) le terme

$$\psi(\mathrm{X})\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},$$

a ses dérivées lipschitziennes d'exposant h. Nous pouvons donc le supprimer, c'est-à-dire admettre que Θ correspond à $\psi = 0$.

Introduisons le paramètre s_m par le procédé ordinaire (III, 4). Les dérivées secondes de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_m$, sont lipschitziennes d'exposant h. D'autre part si, comme d'habitude, $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ correspondent au côté extérieur de $\mathcal{S}$ (a, I, 4, p. 9) et si s_m est positif hors de $\mathcal{D}$, on a

$$\frac{d(s_m, s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)} > 0.$$

Par conséquent, d'après le lemme, si l'on forme une solution élémentaire principale $\mathrm{G}'(\mathrm{S}, \mathrm{T})$ de l'équation transformée, prolongée convenablement dans tout l'espace $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, et si $\mathcal{S}_1$ est la portion de $\mathcal{S}$ qui est donnée par cette représentation paramétrique, les dérivées secondes de

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$
$$-\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{G}'(\mathrm{S}, \mathrm{T})\,\frac{d(t_m, t_1, \ldots, t_{m-1})}{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}\,\sigma(\Xi)\,d(t_1, \ldots, t_{m-1})$$

existent et sont lipschitziennes d'exposant h. D'après la relation (1), en posant

$$u'(\mathrm{S}) = \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{G}'(\mathrm{S}, \mathrm{T})\,\sigma'(\mathrm{T})\,d(t_1, \ldots, t_{m-1}),$$
$$\sigma'(\mathrm{T}) = \frac{d(t_m, t_1, \ldots, t_{m-1})}{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}\,\sigma(\Xi),$$

nous sommes ramenés à démontrer que les dérivées de σ' existent et sont lipschitziennes d'exposant h, sachant qu'il en est ainsi pour les dérivées de

$$\Sigma_\alpha a'_{m,\alpha} \frac{\partial u'}{\partial s_\alpha}.$$

En changeant la notation, nous sommes donc ramenés au cas où $\psi = 0$ et où

$$u(X) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A,$$

$\mathcal{S}$ étant une partie de la multiplicité $x_m = 0$; soit $\mathcal{C}$ la frontière de $\mathcal{S}$ (il est clair en effet qu'on peut supprimer toute partie de la mulipli-cité donnée dont X ne devient pas infiniment voisin) ; la distance de X à $\mathcal{C}$ reste, par hypothèse, supérieure à un minimum positif.

On va voir que les dérivées de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Sigma_\alpha a_{m,\alpha}(X) \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_\alpha = \Theta u - \sigma$$

par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, pour $x_m = 0$, existent et sont lipschitziennes d'exposant h ; la proposition énoncée en résultera.

Tout d'abord (même si $m = 2$)

$$\Sigma_\alpha a_{m,\alpha}(X) \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) = O[L^{2-m}(X, A)];$$

d'autre part, en mettant à part, dans G(X, A), la partie H(X, A ; 0) (V, 4), on voit que

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(X) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A) = O[L^{1-m}(X, A)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \Sigma_\beta a_{m,\beta}(X) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A) = O[L^{1+h-m}(X, A)]$$

(*voir* aussi, pour ce dernier point, *b*, II, théorème 6, p. 156). Donc, puisque σ est lipschitzien d'exposant h, on voit (I, 4, 6) que

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(X) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

existe et est continu.

Nous voyons déjà ainsi que les dérivées de σ existent et sont continues. Ce point acquis permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(A)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right)\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A)\,dS_A$$

$$+\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial \sigma(A)}{\partial a_\alpha}\,\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A)\,dS_A$$

$$-\int_{\mathcal{C}}^{(m-2)} \sigma(A)\,\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A)\,\varpi'_\alpha(A)\,dS'_A,$$

dS'_A étant l'élément de $\mathcal{C}$, et ϖ'_α étant l'un des cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{C}$ située dans $a_m = 0$. Il s'agit maintenant de prouver que le second membre est lipschitzien d'exposant h. Cela est évident pour le dernier terme, qui a même des dérivées continues. C' est immédiat aussi pour le terme précédent (I, 1). Il reste donc seulement à étudier le premier terme.

Soit, avec la signification adoptée depuis le Chapitre V pour $H(X, \Xi; p)$,

$$G(X, \Xi) = H(X, \Xi; p) + v(X, \Xi);$$

d'après ce que nous avons vu (V, 17), si $p > m$, la fonction

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(A)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right)\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial v}{\partial x_\beta}(X, A)\,dS_A$$

est lipschitzienne d'exposant h. Il est donc permis de remplacer $G(X, \Xi)$ par $H(X, \Xi; p)$ dans l'intégrale à étudier. Or, puisqu'on est sur $\mathcal{S}$,

$$\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial H}{\partial x_\beta}(X, A; 0)$$

$$= \Sigma_{\beta,\gamma}[a_{m,\beta}(X) - a_{m,\beta}(A)]\,\frac{A_{\beta,\gamma}(A)\,(x_\gamma - a_\gamma)}{\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(A)\,(x_\delta - a_\delta)\,(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}}$$

$$\times F'\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(A)\,(x_\delta - a_\delta)\,(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}\right];$$

à la suite de l'opération $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}+\dfrac{\partial}{\partial a_\alpha}$, on a le terme

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(A)\,\Sigma_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial a_{m,\beta}(X)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_{m,\beta}(A)}{\partial a_\alpha}\right]\frac{A_{\beta,\gamma}(A)\,(x_\gamma - a_\gamma)}{\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(A)\,(x_\delta - a_\delta)\,(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}}$$

$$\times F'\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(A)\,(x_\delta - a_\delta)\,(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}\right]dS_A,$$

plus d'autres qui sont évidemment lipschitziens d'exposant h; pour être certain que celui qu'on vient d'écrire l'est aussi, il suffit (I, 8) de s'assurer que l'intégrale

$$\int^{(m-1)} \sigma(\mathrm{A}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} \mathrm{A}_{\delta,\varepsilon}(\mathrm{A})(x_\delta - a_\delta)(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}\right] d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

étendue à la partie de $\mathcal{S}$ telle que $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) > \rho > 0$, est bornée quand ρ varie; or cela se voit aisément en remplaçant d'abord $\sigma(\mathrm{A})$ par $\sigma(\mathrm{X})$, puis $\frac{\partial}{\partial x_\beta}$ par $\frac{\partial}{\partial a_\beta}$ (opérations qui retranchent des intégrales bornées), puis en appliquant la remarque (I, 9) si $\beta \neq m$; si $\beta = m$, l'identité

$$\Sigma_\beta a_{m,\beta}(\mathrm{A}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} \mathrm{A}_{\delta,\varepsilon}(\mathrm{A})(x_\delta - a_\delta)(x_\varepsilon - a_\varepsilon)}\right] = 0$$

permet d'arriver au même résultat.

Il reste à considérer ce qui vient des autres termes de $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi; p)$. Considérons

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right) \Sigma_\beta a_{m,\beta}(\mathrm{X}) \int^{(m)} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) \mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_\Xi.$$

Nous pouvons isoler l'expression

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right) \int^{(m)} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(\mathrm{X}) \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)$$
$$\times \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)] \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta}\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_\Xi,$$

où l'on peut écrire (b, II, th. 6, p. 157) le coefficient de $\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi$ sous la forme

$$\sum_\beta \frac{\partial a_{m,\beta}(\mathrm{X})}{\partial x_\alpha} \int^{(m)} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)] \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta}\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$
$$+ \int^{(m)} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(\mathrm{X}) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)] \right.$$
$$\times \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) \left(\frac{\partial}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)$$
$$\left. \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)] \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta} \right\} d\mathrm{V}_\mathrm{A};$$

or, les intégrales de la première somme valent $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$ et leurs dérivées relatives à X existent et valent $O[L^{1-m}(X, \Xi)]$ (*b*, II, th. 5, p. 153); il en est de même de la dernière intégrale (*id.*, *ibid.*, et remarque, p. 156); en multipliant par $\sigma(\Xi)\, dS_\Xi$ et intégrant, on voit bien que le résultat est lipschitzien d'exposant h. Viennent ensuite les termes

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\int^{(m)} \Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\,\frac{\partial H}{\partial x_\beta}(X, A; 0)$$
$$\times\, \Sigma_\gamma\, b_\gamma(A)\,\frac{\partial H(A, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma}\, dV_A\, dS_\Xi;$$

on effectue le coefficient de $\sigma(\Xi)\, dS_\Xi$ en faisant sortir du signe $\int$ les $\frac{\partial a_{m,\beta}(X)}{\partial x_\alpha}$, et l'on voit ainsi que le résultat est encore lipschitzien d'exposant h. Même procédé pour

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)$$
$$\times \int^{(m)} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}(X, A; 0)\,[c(A)+g^2]\, H(A, \Xi; 0)\, dV_A\, dS_\Xi.$$

Si maintenant $n > 1$,

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\Sigma_\beta\, a_{m,\beta}(X)\int^{(m)} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}(X, A; 0)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A\, dS_\Xi$$

s'écrit en faisant sous le signe $\int^{(m)}$ l'opération $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$ et en faisant sortir les $\frac{\partial a_{m,\beta}}{\partial x_\alpha}$; on voit encore que ces termes sont lipschitziens d'exposant h.

La proposition est donc démontrée.

Regardons $\mathcal{S}$ comme fixe, ainsi que l'exposant lipschitzien $h < 1$ des b_α, de c, de ψ et des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$. De plus, on suppose fixes une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$, et des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c, de ψ, des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$, et des limites supérieures des coefficients lipschitziens de toutes ces fonctions pour l'exposant h; le nombre g et le domaine borné hors duquel les coefficients de $\mathcal{F}$ sont constants, sont aussi supposés fixes. Enfin soit M une limite supérieure des valeurs absolues de Θu et de ses dérivées, et du coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h. Enfin nous supposons que la résolvante de l'équation de Fredholm qui donne σ, admet une limitation fixe $O[L^{2-m}(X, A)]$. Il est clair alors [1] que les dérivées de σ sont $O(M)$ et que leur coefficient lipschitzien pour l'exposant h est aussi $O(M)$.

3. *Conditions de Lipschitz pour les dérivées secondes du potentiel. — Si les b_α, c et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont lipschitziens d'exposant $h<1$, et si les dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ et les dérivées de la densité σ sont lipschitziennes d'exposant h, les dérivées secondes du potentiel*

$$u = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$; elles sont aussi lipschitziennes d'exposant h hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$.

D'après le lemme (§ 1), il suffit d'établir le théorème dans le cas particulier où une partie de $\mathcal{S}$ coïncide avec $x_m = 0$, $\mathcal{D}$ étant situé dans la région $x_m > 0$; si $\mathcal{C}$ est la frontière de cette partie de $\mathcal{S}$, on peut en outre supposer que X reste à une distance de $\mathcal{C}$ supérieure à un minimum positif fixe; cette dernière hypothèse permet de ne conserver que la partie de $\mathcal{S}$ située sur $x_m = 0$.

Changeant un peu la notation, nous nommerons $\mathcal{S}$ cette partie conservée de la multiplicité d'intégration, dont la frontière est $\mathcal{C}$. Soit

$$F(X) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A;$$

on a, tant que X n'est pas sur $\mathcal{S}$, et si $\alpha \neq m$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, A)\right]\sigma(A)\,dS_A$$
$$+ \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\frac{\partial \sigma}{\partial a_\alpha}\,dS_A - \int_{\mathcal{C}}^{(m-2)} G(X, A)\,\sigma(A)\,\varpi_\alpha(A)\,dS'_A,$$

---

[1] On omet ici des considérations de continuité semblables à celles qui sont indiquées ailleurs (VIII, 7 et XIV, 2, 5).

dS'_A étant l'élément de $\mathcal{C}$, et ϖ_α étant l'un des cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{C}$ située dans $a_m = 0$.

Dans cette expression, puisque $L(X, A) > \delta > 0$ quand A varie sur $\mathcal{C}$, les dérivées secondes de l'intégrale d'ordre $m-2$ existent et sont continues.

L'intégrale précédant celle-ci est un potentiel de simple couche dont la densité est lipschitzienne d'exposant h; donc (VII, 5) les dérivées de cette intégrale existent dans $\mathcal{D}$ et hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et elles sont lipschitziennes d'exposant h dans chacun de ces domaines.

Il reste à étudier les dérivées de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, A)\right] \sigma(A)\, dS_A$$

et à prouver qu'elles sont lipschitziennes d'exposant h. Pour cela nous remarquons, comme dans la proposition précédente, qu'il suffit de faire la démonstration pour les dérivées de

$$I(X) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left[\frac{\partial H(X, A; p)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\alpha}\right] \sigma(A)\, dS_A.$$

Prenons d'abord la dérivée relative à x_β, pour $\beta \neq m$, de la fonction

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left[\frac{\partial H(X, A; 0)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H(X, A; 0)}{\partial a_\alpha}\right] \sigma(A)\, dS_A;$$

sous le signe d'intégration, on a une somme de termes tels que

$$f(X, A)\, \lambda(A)\, dS_A,$$

où

$$\lambda(A) = \sigma(A) \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\beta},$$

fonction lipschitzienne d'exposant h; d'autre part

$$\frac{\partial f}{\partial x_\beta} = O[L^{1-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{\partial f}{\partial a_\beta} = O[L^{2-m}(X, A)],$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta\, \partial x_\gamma} = O[L^{-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{\partial f}{\partial a_\beta}\right) = O[L^{1-m}(X, A)];$$

par suite (I, 4, 6)

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} f(\mathrm{X}, \mathrm{A})\lambda(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial f}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\lambda(\mathrm{A}) - \lambda(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$
$$+ \lambda(\mathrm{X})\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{\partial f}{\partial a_\beta}\right) d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} - \lambda(\mathrm{X})\int_{\mathcal{C}}^{(m-2)} f(\mathrm{X}, \mathrm{A})\varpi_\beta(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}'_{\mathrm{A}}$$

[pour définir $\lambda(\mathrm{X})$ hors de $\mathcal{S}$, il suffit de prendre $\sigma(\mathrm{X})$ indépendant de x_m]; cette expression est lipschitzienne d'exposant h (I, 11).

Prenons maintenant la dérivée relative à x_β, pour $\beta \neq m$, de la fonction

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\int^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}\, d\mathrm{S}_\Xi.$$

Si d'abord $n = 1$, nous isolons du coefficient de $\sigma(\Xi)d\mathcal{S}_\Xi$, après dérivation sous le signe $\int$, les termes

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\int^{(m)} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\, \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)]\, \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, da_\delta}\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}},$$

qui s'écrivent (*b*, II, th. 6, p. 157)

$$\int^{(m)} \Bigg\{ \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial a_\alpha\, \partial x_\beta}\right] \Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)]$$
$$\times \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\left(\frac{\partial}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)$$
$$\Sigma_{\gamma,\delta}[a_{\gamma,\delta}(\mathrm{A}) - a_{\gamma,\delta}(\Xi)]\, \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\gamma\, \partial a_\delta} \Bigg\}\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}};$$

or ceci est $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{X}, \Xi)]$ et ses dérivées relatives à X existent et sont $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X}, \Xi)]$ (*b*, II, th. 5, p. 153, et remarque, p. 156); donc en multipliant par $\sigma(\Xi)\, d\mathcal{S}_\Xi$ et intégrant, le résultat est lipschitzien d'exposant h. Les autres termes relatifs à $n > 1$ s'étudient de même : ils sont tous lipschitziens d'exposant h.

Il reste à étudier la dérivée par rapport à x_m de $\mathrm{I}(\mathrm{X})$. Il revient au même d'étudier $\Sigma_\beta a_{m,\beta}(\mathrm{X})\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_\beta}$; on voit toujours de la même façon que cette expression est lipschitzienne d'exposant h (*voir* le paragraphe précédent) ; il en est donc de même de $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_m}$.

Nous avons ainsi démontré que les dérivées secondes autres que $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_m^2}$ sont lipschitziennes d'exposant h dans chacun des domaines indiqués; d'après l'équation aux dérivées partielles, il en est de même de $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_m^2}$.

Regardons $\mathfrak{S}$ et h comme fixes ($h < 1$); regardons encore comme fixes une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ et des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c, des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et du coefficient lipschitzien de toutes ces fonctions pour l'exposant h; g et le domaine borné hors duquel les coefficients de $\mathcal{F}$ sont constants, sont aussi supposés fixes. Soit M une limite supérieure des valeurs absolues de σ et ses dérivées, et du coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h. Alors il est évident que les dérivées secondes de u et leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h sont O(M) [1].

4. *Généralisation.* — Si maintenant

$$u(\mathrm{X}) = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}_p(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A} \qquad (p > 1),$$

la différence

$$\sum_{n=2}^{p} \int^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\chi(\mathrm{A}) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\,\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

entre cette fonction et celle qui est relative à $p = 1$, peut être considérée comme un potentiel de domaine avec la densité

$$\chi(\mathrm{A}) \sum_{n=2}^{p} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi$$

qui est évidemment lipschitzienne d'exposant h s'il en est ainsi pour χ; les dérivées secondes de cette différence sont donc lipschitziennes d'exposant h, la frontière n'intervenant pas ici (IV, 1).

---

[1] Même observation qu'au paragraphe 2.

Les propositions des paragraphes 2 et 3 s'appliquent donc à cette nouvelle fonction u.

CHAPITRE XIV.

PROBLÈME NON LINÉAIRE DE NEUMANN.

1. *Énoncé du problème.* — Dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, considérons un domaine $\mathcal{D}$ borné et ouvert. On suppose que les coordonnées des points de la frontière $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$ s'expriment comme il a été dit (II, 1) et que les dérivées secondes de ces coordonnées par rapport aux paramètres existent et sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$.

D'autre part, on considère une équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(u;\, \mathrm{X};\, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha};\, u;\, \mathrm{X};\, t\right) \qquad (a_{\alpha,\alpha} > 0)$$

dépendant d'un paramètre t; $a_{\alpha,\beta}(u;\mathrm{X};t)$ est mis pour

$$a_{\alpha,\beta}(u;\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m;\, t)$$

et $\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha};\, u;\, \mathrm{X};\, t\right)$ est mis pour

$$\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial u}{\partial x_m};\, u;\, x_1,\, \ldots,\, x_m;\, t\right);$$

on a, comme d'habitude, $a_{\alpha.\beta} = a_{\beta,\alpha}$. On suppose que cette équation est satisfaite dans le domaine $\mathcal{D}$ et pour la valeur t_0 du paramètre quand u est remplacé par une fonction connue u_0 dont les dérivées secondes sont lipschitziennes d'exposant h. On suppose encore que, si X appartient à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et si

$$|u - u_0|, \qquad \left|p_\alpha - \frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}\right| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

et $|t - t_0|$ sont assez petits, l'équation est du type elliptique et les fonctions

$$a_{\alpha.\beta}(u,\, \mathrm{X};\, t) \qquad (\alpha,\, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$\Phi(p_\alpha;\, u;\, \mathrm{X};\, t)$$

ont, par rapport aux variables autres que t, des dérivées secondes qui sont fonctions lipschitziennes d'exposant 1 de ces variables, avec un coefficient indépendant de t, et fonctions continues de l'ensemble de ces variables et de t.

Sur $\mathfrak{S}$, on se donne la condition

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}+\psi(u;\,X;\,t)=0, \tag{2}$$

où les ϖ_α sont les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de $\mathfrak{D}$. On suppose que cette condition est satisfaite pour $t=t_0$, $u=u_0$. On suppose que les dérivées troisièmes de $\psi(u;X;\,t)$, relativement aux variables autres que t, existent et sont fonctions lipschitziennes d'exposant 1 de ces variables, avec un coefficient indépendant de t, et fonctions continues de l'ensemble de ces variables et de t, pourvu que X appartienne à $\mathfrak{S}$ et que $|u-u_0|$ et $|t-t_0|$ soient assez petits.

Enfin on suppose que le problème de trouver une fonction v telle que, dans $\mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}(u_0;\,X;\,t_0)\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}&-\sum\nolimits_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta};\,u_0;\,X;\,t_0\right)\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\\&+\left[\sum\nolimits_{\alpha,\beta}\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u}(u_0;\,X;\,t_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta};\,u_0;\,X;\,t_0\right)\right]v=0,\end{aligned} \tag{3}$$

et que, sur $\mathfrak{S}$,

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}(u_0;\,X;\,t_0)\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\\&\quad+\left[\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u}(u_0;\,X;\,t_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0;\,X;\,t_0)\right]v=0,\end{aligned} \tag{4}$$

n'admet que la solution zéro.

On donne à t une valeur autre que t_0 et l'on propose de *trouver une fonction u remplissant dans* $\mathfrak{D}$ *la condition* (1) *et sur* $\mathfrak{S}$ *la condition* (2).

Il sera démontré dans la suite de ce chapitre que, si $|t-t_0|$ est assez petit, ce problème a une solution. Si en outre on exige que les valeurs absolues de $u-u_0$ et de ses dérivées jusqu'au second ordre, ainsi que leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h, n'excèdent pas un maximum assez petit, cette solution est unique [1].

---

[1] La même conclusion subsiste dans des hypothèses plus larges, mais alors les exposants lipschitziens introduits par les approximations successives décroissent en progression géométrique; cela nécessite des raisonnements supplémentaires qui pourront être exposés dans une autre occasion.

2. *Formation des approximations successives.* — En désignant par t la valeur donnée du paramètre et par $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, les approximations successives dont nous allons expliquer la formation, nous posons

$$a_{\alpha.\beta.n} = a_{\alpha.\beta}(u_n; \mathrm{X}; t); \qquad b_{\alpha.n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\beta}; u_n; \mathrm{X}; t\right);$$

$$c_n = \Sigma_{\alpha.\beta}\frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial u}(u_n; \mathrm{X}; t)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha}; u_n; \mathrm{X}; t\right);$$

$$\psi_n = \Sigma_{\alpha.\beta}\varpi_\alpha\frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial u}(u_n; \mathrm{X}; t)\frac{\partial u_n}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_n; \mathrm{X}; t);$$

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha.\beta}a_{\alpha.\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Phi, \qquad \Theta u = \Sigma_{\alpha.\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha.\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi.$$

Nous connaissons déjà u_0. Si nous connaissons u_n, nous chercherons une fonction h_n telle que dans $\mathcal{D}$

$$\Sigma_{\alpha.\beta}a_{\alpha.\beta.n}\frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_{\alpha.n}\frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} + c_n h_n = -\mathcal{F}u_n,$$

et que, sur $\mathcal{S}$,

$$\Sigma_{\alpha.\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha.\beta.n}\frac{\partial h_n}{\partial x_\beta} + \psi_n h_n = -\Theta u_n,$$

et nous poserons

$$u_{n+1} = u_n + h_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Si $u_n - u_0$ et ses dérivées premières et secondes ont, dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, des valeurs absolues assez petites, si le coefficient lipschitzien de ces dérivées secondes, pour l'exposant h, est inférieur à un nombre fixe, et si $|t - t_0|$ est assez petit, je dis que h_n existe, ce qui entraîne que u_{n+1} existe. En effet la valeur absolue de $a_{\alpha,\beta,n} - a_{\alpha,\beta}(u_0; \mathrm{X}; t_0)$ est aussi petite qu'on veut; on voit de même que ses dérivées premières et secondes sont aussi voisines de zéro qu'on veut. De même

$$b_{\alpha.n} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta}; u_0; \mathrm{X}; t_0\right)$$

et ses dérivées sont aussi voisins de zéro qu'on veut. Si nous prenons

$$c_n - \sum_{\alpha.\beta}\frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial u}(u_0; \mathrm{X}; t_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}; u_0; \mathrm{X}; t_0\right),$$

cette fonction, elle aussi, est aussi voisine de zéro qu'on veut, et l'on constate en outre que son coefficient lipschitzien pour l'exposant h est inférieur à un nombre fixe, ce qui entraîne que le coefficient relatif à l'exposant $\frac{h}{2}$ est aussi petit qu'on veut (voir d, III, 1, p. 218). Enfin

$$\psi_n - \Sigma_{\alpha.\beta}\varpi_\alpha \frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial u}(u_0;\, X;\, t_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0;\, X;\, t_0)$$

et ses dérivées par rapport aux paramètres des points de $\mathfrak{S}$ sont aussi voisins de zéro qu'on veut. Pour en déduire l'existence de h_n, il suffit de prouver que le déterminant de Fredholm du système d'équations intégrales, itéré un nombre assez grand de fois, auquel se ramène la recherche de h_n, diffère aussi peu qu'on veut du déterminant correspondant du système auquel se ramène la recherche de la fonction v satisfaisant aux conditions (3) et (4); pour un certain nombre d'itérations, ce déterminant n'est pas nul, d'après l'hypothèse.

Pour prouver ce dernier point, nous adoptons une méthode fixe pour prolonger hors de $\mathcal{D}$ les coefficients de l'équation en h_n, à savoir la deuxième méthode indiquée au Chapitre X, paragraphe 3 (*voir* aussi XI, 8); en effet ici les ψ_n sont lipschitziens (ils ont même des dérivées continues), et les

$$b_{\alpha.n} - \sum\nolimits_\beta \frac{\partial a_{\alpha.\beta.n}}{\partial x_\beta}$$

ont des dérivées lipschitziennes d'exposant h et de coefficient borné. Le nombre s'_m qui intervient dans la méthode de prolongement, sera choisi indépendant de n; le nombre appelé h dans la méthode peut être ici pris quelconque inférieur à 1, par exemple égal au nombre h actuel. La méthode indiquée permet alors de ne plus rien laisser d'indéterminé. Les prolongements des différences

$$a_{\alpha.\beta.n} - a_{\alpha.\beta}(u_0;\, X;\, t_0)$$

et leurs dérivées, ainsi que le coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h, sont aussi petits qu'on veut; de même les prolongements des

$$b_{\alpha.n} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta};\, u_0;\, X;\, t_0\right)$$

et leurs coefficients pour l'exposant h sont aussi petits qu'on veut.

Quant au coefficient de h_n dans l'équation, il devra être dans tout l'espace lipschitzien d'exposant h et en outre négatif hors de $\mathcal{D}$: on y parviendra en transformant d'abord l'équation (1) de façon que le coefficient de v dans (3) devienne négatif sur $\mathcal{S}$; il suffit pour cela d'y remplacer u par uw, en choisissant w convenablement, car on constate que c'est le même calcul que pour une équation linéaire (b, V, 3e application, p. 223); la fonction χ sera, dans tout l'espace, égale à ce coefficient augmenté de la constante g^2 (χ est alors nul hors d'un certain domaine borné).

Pour former la fonction $G(X, \Xi)$, on peut alors utiliser l'équation intégrale (V, 4), g étant supposé assez grand. On en conclura sans peine (a, II, 24, p. 83 à 86), que si G se rapporte ainsi à la détermination de h_n et G′ à celle de v, on a

$$|G(X, \Xi) - G'(X, \Xi)| < \eta L^{\frac{3}{2}-m}(X, \Xi),$$

η étant aussi petit qu'on veut; la différence du premier membre peut être dérivée jusqu'à trois fois, dont deux par rapport aux coordonnées de X et une par rapport à celles de Ξ, et toutes ces dérivées d'ordres divers remplissent des conditions semblables, l'exposant de L au second membre diminuant de 1 à chaque dérivation. Des raisonnements tout pareils (a, II, 24, p. 83 à 86) amènent enfin à la conclusion que les déterminants de Fredholm relatifs à v d'une part, à h_n d'autre part, pour un même nombre d'itérations, sont aussi voisins qu'on veut l'un de l'autre; si la différence est assez petite, la valeur absolue de l'un des déterminants relatifs à h_n a une borne inférieure positive, ce qu'il fallait démontrer.

3. *Convergence des approximations successives.* — Soit M_n une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées premières et secondes, et du coefficient lipschitzien de ces dernières pour l'exposant h. Alors $\mathcal{F} u_n$, Θu_n et les dérivées de Θu_n sont $O(M_{n-1}^2)$ et leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h sont $O(M_{n-1}^2)$ (voir b, VI, 3, p. 238 à 240).

Considérons alors notre système d'équations de Fredholm [*voir* XI, 3, équations (4) et (5)]. Les deux inconnues ρ_1 et σ_1 sont évidemment $O(M_{n-1}^2)$. L'équation qui traduit la condition dans $\mathcal{D}$ prouve que ρ_1 est lipschitzien d'exposant h et de coefficient $O(M_{n-1}^2)$. Si maintenant nous prenons l'équation qui traduit la condition sur $\mathcal{S}$, les dérivées de l'intégrale d'ordre m existent et sont lipschitziennes d'exposant h et de coefficient $O(M_{n-1}^2)$ (IV, 1). Par conséquent (XIII, 2 et 4), les dérivées de σ_1 existent et sont $O(M_{n-1}^2)$, et leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h existent et sont $O(M_{n-1}^2)$. Par conséquent encore (IV, 1; XIII, 3 et 4), les dérivées secondes de h_n existent et sont lipschitziennes d'exposant h; en outre h_n et ses dérivées premières et secondes, et le coefficient lipschitzien de ces dernières pour l'exposant h, existent et sont $O(M_{n-1}^2)$.

Il résulte de là qu'on peut prendre

$$M_n = k M_{n-1}^2,$$

k étant indépendant de n, pourvu que $u_{n-1} - u_0$ et ses dérivées premières et secondes soient assez voisins de zéro, le coefficient lipschitzien des dérivées secondes pour l'exposant h étant borné. Or, toutes ces conditions sont remplies à la fois et il y a convergence, en vertu de la relation précédente, pourvu seulement que M_0 soit assez petit, ce qui a lieu si $|t - t_0|$ est assez petit comme on le vérifie facilement.

Donc u_n tend vers une limite u_∞, et ses dérivées premières et secondes tendent vers les dérivées premières et secondes correspondantes de u_∞ qui sont, de plus, lipschitziennes d'exposant h. Si l'on fait tendre n vers l'infini dans les conditions relatives à h_n, on trouve

$$\mathcal{F} u_\infty = 0, \qquad \Theta u_\infty = 0;$$

le problème posé a donc une solution si $|t - t_0|$ est assez petit.

4. *Unicité de la solution.* — Soit u une solution quelconque relative à une valeur de t assez voisine de t_0. Soit M la borne supérieure des fonctions

$$|u - u_\infty|, \quad \left|\frac{\partial(u - u_\infty)}{\partial x_\alpha}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2(u - u_\infty)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|$$

et des coefficients lipschitziens minima (¹) de ces dernières pour

---

(¹) On peut nommer ainsi, pour la fonction $\varphi(X)$ quelconque, la borne supérieure de $|\varphi(X) - \varphi(Y)| L^{-h}(X, Y)$.

l'exposant $h(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$. On a évidemment

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta,\varkappa} \frac{\partial^2(u-u_\varkappa)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_{\alpha,\varkappa} \frac{\partial(u-u_\varkappa)}{\partial x_\alpha} + c_\varkappa(u-u_\varkappa) = \mathrm{O}(\mathrm{M}^2),$$
$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha a_{\alpha,\beta,\varkappa} \frac{\partial(u-u_\varkappa)}{\partial x_\beta} + \psi_\varkappa(u-u_\varkappa) = \mathrm{O}(\mathrm{M}^2);$$

les dérivées du dernier second membre et leur coefficient lipschitzien pour l'exposant h, et le coefficient lipschitzien du second membre de la première équation pour l'exposant h sont $\mathrm{O}(\mathrm{M}^2)$. De là résulte immédiatement (VII, 4, 5; XIII, 2, 3) l'inégalité

$$\mathrm{M} \leqq \mathrm{O}(\mathrm{M}^2);$$

donc, si M est assez petit, M est rigoureusement nul et $u = u_\varkappa$.

5. *Cas où t n'est pas arbitrairement voisin de t_0. — Si l'on sait seulement limiter u et ses dérivées premières, indépendamment de t, cette limitation étant telle que le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ ait une limite inférieure positive, et si l'on est sûr que l'hypothèse relative à (3) et à (4) est vérifiée pour toute valeur de t (dans un intervalle comprenant t_0), on est sûr de pouvoir, par la répétition du procédé précédent, atteindre n'importe quelle valeur de t (dans cet intervalle).*

Montrons d'abord qu'on sait, dans cette hypothèse, limiter les dérivées secondes de u et leur coefficient lipschitzien relatif à l'exposant h. Nous écrivons pour cela les équations (1) et (2) sous la forme

$$(5) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(u;\, \mathrm{X};\, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - u = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha};\, u;\, \mathrm{X};\, t\right) - u,$$

$$(6) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}(u;\, \mathrm{X};\, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + u = u - \psi(u;\, \mathrm{X};\, t),$$

et nous considérons comme connus les seconds membres et les $a_{\alpha,\beta}(u, \mathrm{X}, t)$. La fonction u est alors la solution d'un problème linéaire de Neumann ayant une solution et une seule (XI, 17). En nommant f_1 et φ_1 les seconds membres des équations (5) et (6), les inconnues ρ_1 et σ_1 du système de Fredholm auquel on est conduit, sont données par des formules telles que

$$\rho_1(X) = f_1(X) + \int^{(m)} M_1(X, A) f_1(A)\, dV_A + \int_{S}^{(m-1)} M_2(X, A) \varphi_1(A)\, dS_A,$$

$$\sigma_1(X) = \varphi_1(X) + \int^{(m)} M_3(X, A) f_1(A)\, dV_A + \int_{S}^{(m-1)} M_4(X, A) \varphi_1(A)\, dS_A,$$

M_1, M_2, M_3, M_4 étant donnés par la théorie de Fredholm; on vérifie facilement que

$$|M_1(X, A) - G(X, A)| \leqq k L^{3-m}(X, A) \qquad (m > 3)$$

(si $m = 3$, on met un exposant compris entre o et -1, limites exclues; si $m = 2$, le second membre est à remplacer par k). Je dis que si l'on prend pour la constante k la borne inférieure des valeurs possibles et si les coefficients de (5) et (6) varient sans cesser de remplir nos hypothèses, k reste borné. Il suffit pour cela de faire voir que (si $m > 3$) $L^{m-3}(X, A)[M_1(X, A) - G(X, A)]$ varie continûment quand X, A et les coefficients varient continûment (ces coefficients appartenant à un champ de fonctions également continues) ([1]); or si, pour un nombre déterminé d'itérations et pour certains coefficients particuliers, la fonction déterminante de Fredholm n'est pas nulle, il est évident qu'une variation infiniment petite des coefficients, de X et de A fait varier infiniment peu l'expression précédente; si la fonction déterminante est nulle, mettons un coefficient λ variable devant toutes les intégrales de notre système d'équations de Fredholm et traçons dans le plan de la variable complexe λ un cercle γ de centre 1 n'ayant à son intérieur pas d'autre racine de cette fonction déterminante que $\lambda = 1$; M_1 dépendant maintenant de X, de A et de λ, nous le nommons $M_1(X, A; \lambda)$; le point $\lambda = 1$ n'est pas un pôle (pour $X \neq A$), de sorte que

$$L^{m-3}(X, A)[M_1(X, A;\, 1) - G(X, A)] \\ = \frac{L^{m-3}(X, A)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M_1(X, A; \lambda) - \lambda G(X, A)}{\lambda - 1}\, d\lambda;$$

la continuité est visible sur cette nouvelle formule. L'existence d'une

([1]) Pour $X = A$, il n'y a pas continuité, mais indétermination dans un intervalle borné.

borne supérieure pour k en résulte. Si le nombre p qui intervient dans le système de Fredholm (XI, 3, 13) est assez grand, on vérifie de même que M_2 et M_3 sont bornés, ainsi que

$$L^{m-3}(X, A)[M_4(X, A) - \Theta G(X, A)].$$

Donc les valeurs absolues de ρ_1 et de σ_1 ont des limites supérieures connues; la seconde équation (passage cité) donne alors une limite supérieure du coefficient lipschitzien de σ_1(VII, 4); on a donc (VII, 5) une limite supérieure du coefficient lipschitzien des dérivées de u pour l'exposant h. Par suite les coefficients lipschitziens du second membre de (5), des dérivées du second membre de (6) et des dérivées des $a_{\alpha,\beta}(u, X, t)$ pour l'exposant h ont des limites supérieures connues; on en déduit une limite supérieure du coefficient lipschitzien des dérivées de

$$\int^{(m)} \Theta G(X, A) \rho_1(A) \, dV_A$$

pour l'exposant h (I, 11, 13). Par suite (XIII, 2, 4) on a une limite supérieure du coefficient lipschitzien des dérivées de σ_1 pour l'exposant h. Donc enfin (XIII, 3, 4) on a une limite supérieure des dérivées secondes de u et de leur coefficient lipschitzien pour l'exposant h.

L'hypothèse sur les équations (3) et (4) entraîne alors pour les noyaux résolvants des systèmes correspondants de Fredholm des limitations semblables à celles qui ont été établies il y a un instant à propos des équations (5) et (6). En effet toute suite infinie de fonctions u, relatives à des valeurs de t tendant vers une limite t', a au moins une fonction limite pourvue de dérivées secondes lipschitziennes d'exposant h et satisfaisant au problème relatif à $t = t'$ (1). On en conclut aisément que t peut atteindre n'importe quelle valeur de l'intervalle, car si, pour chaque valeur de t, on prend le nombre minimum d'itérations tel que la fonction déterminante ne soit pas nulle, ce nombre minimum est supérieurement semi-continu; si donc il existait une valeur t' de t vers laquelle on puisse tendre sans pouvoir l'atteindre,

(1) *Voir* Paul Montel, *Sur les suites infinies de fonctions*. Thèse, Paris, 1907, p. 21 (cette thèse a aussi paru dans les *Annales de l'École Normale*, t. 24, 1907).

ce nombre minimum d'itérations serait borné supérieurement, et l'on pourrait ne raisonner que sur les fonctions déterminantes, en nombre fini, correspondant à un nombre d'itérations inférieur à cette borne supérieure; la plus grande des valeurs absolues de ces fonctions déterminantes n'est pas nulle, et comme elle varie continûment, elle a un minimum positif; ceci contredit évidemment l'hypothèse qu'on ne peut atteindre la valeur t'; donc cette hypothèse est fausse et le résultat annoncé en résulte [1].

CHAPITRE XV.

AUTRE PROBLÈME NON LINÉAIRE DE NEUMANN.

1. *Énoncé du problème.* — Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné et ouvert; en plus des conditions (II, 1), nous supposons que les dérivées secondes des coordonnées des points de sa frontière $\mathcal{S}$ sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$. Soient $a_{\alpha,\beta}(X; t)\,(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\, a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha})$ des fonctions dont les dérivées existent et sont lipschitziennes d'exposant h relativement à X (avec un coefficient indépendant de t), ces fonctions étant continues par rapport à l'ensemble de X et de t quand X est dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et t dans un certain intervalle (t_1, t_2); on suppose que si $|t' - t''|$ est assez petit, le coefficient lipschitzien des

$$a_{\alpha,\beta}(X;\, t') - a_{\alpha,\beta}(X;\, t'')$$

pour l'exposant h est aussi petit qu'on veut. Soit encore $\Phi(p_\alpha;\, u;\, X;\, t)$ une fonction continue quand X est dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et t dans (t_1, t_2) et que les différences

$$u - u_0(X) \quad \text{et} \quad p_\alpha - \frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

(1) Les mêmes considérations peuvent être employées pour justifier ce qui a été dit à propos du problème non linéaire de Dirichlet (b, VI, p. 242; d, III, 14, p. 245).

sont assez voisines de zéro, u_0 étant une certaine fonction dont les dérivées secondes existent en tout point de $\mathcal{D}$ et dont les dérivées premières sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$; on suppose, en outre, que, pour ces systèmes de valeurs des variables, les dérivées de Φ par rapport aux variables autres que t existent et sont continues par rapport à l'ensemble de ces variables et de t. Enfin soient $\varphi(x)$ et $\psi(X)$ deux fonctions définies quand X appartient à $\mathcal{S}$ et dont les dérivées existent et sont lipschitziennes d'exposant h.

On considère les deux équations

$$(1)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(X;\, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha};\, u;\, X;\, t\right),$$

$$(2)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} + u\psi(X) = \varphi(X),$$

qui doivent être satisfaites, la première dans $\mathcal{D}$, la seconde sur $\mathcal{S}$ et qui par hypothèse sont satisfaites pour

$$t = t_0\,(t_1 \leqq t_0 \leqq t_2) \qquad \text{et} \qquad u = u_0(X).$$

On suppose que les deux équations en v

$$(3)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(X;\, t_0)\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha};\, u_0;\, X;\, t_0\right)\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha};\, u_0;\, X;\, t_0\right)v = 0,$$

$$(4)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(X;\, t_0)\varpi_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\beta} + v\psi(X) = 0,$$

où X varie dans $\mathcal{D}$ pour la première, sur $\mathcal{S}$ pour la seconde, ne sont satisfaites simultanément que pour $v = 0$.

t ayant une valeur quelconque dans (t_1, t_2), le problème est de trouver une fonction u remplissant les conditions (1) et (2). Ce problème a des cas particuliers communs avec celui du Chapitre précédent, mais si l'on compare les hypothèses de régularité, on verra que ce n'en est pas un simple cas particulier.

Nous allons démontrer que si t est assez voisin de t_0, ce problème a une solution. Si l'on exige en outre que $u - u_0$ et ses dérivées soient assez voisins de zéro, la solution est unique.

2. *Formation des approximations successives.* — Posons

$$b_\alpha = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial x_m}; u_0; \mathrm{X}; t\right),$$
$$c = -\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_0}{\partial x_m}; u_0; \mathrm{X}; t\right),$$
$$\Psi(p_\alpha; u; \mathrm{X}; t) = \Phi(p_\alpha; u; \mathrm{X}; t) + \Sigma_\alpha b_\alpha p_\alpha + cu.$$

Si $t - t_0$, $u - u_0$, et les $p_\alpha - \frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}$ sont assez voisins de zéro, les dérivées de Ψ par rapport aux variables u et p_α sont aussi voisines qu'on veut de zéro.

En prenant pour t la valeur donnée (assez voisine de t_0), nous prenons comme approximations successives les fonctions u_n définies de proche en proche par la condition dans $\mathcal{D}$

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\alpha} + c u_{n+1} = \Psi\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha}; u_n; \mathrm{X}; t\right)$$

et par la condition sur $\mathcal{S}$

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\beta} + u_{n+1}\psi(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{X}).$$

Il faut d'abord montrer que, si $t - t_0$ est assez voisin de zéro, tous les u_n existent. Or, dans ce cas, les

$$a_{\alpha,\beta}(\mathrm{X}; t) - a_{\alpha,\beta}(\mathrm{X}; t_0),$$

les

$$b_\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\beta}; u_0; \mathrm{X}; t_0\right),$$

et enfin

$$c + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}; u_0; \mathrm{X}; t_0\right)$$

sont aussi voisins de zéro qu'on veut; comme, d'autre part, tous ces coefficients sont lipschitziens d'exposant h, il en résulte que la fonction déterminante de Fredholm, pour n'importe quel système itéré d'équations de Fredholm correspondant à notre problème, varie aussi peu qu'on veut si t varie assez peu; or, pour $t = t_0$, certaines de ces fonctions déterminantes ne sont pas nulles (XI, 5); une de celles-ci n'est donc pas non plus nulle pour t assez voisin de t_0. Donc tous les u_n existent [1].

A vrai dire, ce raisonnement est incomplet parce qu'il ne prouve pas que les fonctions u_n successives, données par des équations intégrales telles que les équations (3) à (5) du Chapitre XI (§ 3) ont des dérivées secondes. Mais ce point peut s'établir ainsi qu'il suit. Tout d'abord les dérivées de u_0 sont lipschitziennes d'exposant h; donc le second membre de l'équation à laquelle u_1 satisfait dans $\mathcal{D}$ est lipschitzien d'exposant h; donc les dérivées secondes de u_1 existent en tout point de $\mathcal{D}$; mais de plus, $\varphi(X)$ étant lipschitzien d'exposant h, ainsi que $\psi(X)$, la fonction σ_1 [XI, 3, équations (4) et (5)] est lipschitzienne d'exposant h (VII, 4); par suite (VII, 5) les dérivées de u_1 sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. On prouve de même que si les dérivées de u_n sont lipchitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, il en est de même de celles de u_{n+1}, et les dérivées secondes de u_{n+1} existent en tout point de $\mathcal{D}$. Ces deux faits ont donc lieu pour tous les u_n.

3. *Convergence des approximations successives.* — Soit

$$u_{n+1} = u_n + h_n;$$

alors

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} + c h_n = \Psi\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha};\, u_n;\, X;\, t\right) - \Psi\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_\alpha};\, u_{n-1};\, X;\, t\right), \tag{5}$$

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial h_n}{\partial x_\beta} + \psi(X) h_n = 0. \tag{6}$$

Soit M_n une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées. Alors le second membre de (5) a une valeur absolue moindre que $k_1 M_{n-1}$, k_1 étant aussi petit qu'on veut pourvu que les valeurs absolues de $t - t_0$, des $u_q - u_0$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$ et de leurs dérivées restent assez petites. Si k est un nombre donné, $0 < k < 1$,

[1] Pour les équations dont l'inconnue est un nombre, l'analogue de la méthode du Chapitre précédent est la méthode de Newton, et l'analogue de la présente méthode est la méthode de fausse position.

on aura, dès que k_1 sera assez petit,

$$M_n < k M_{n-1}. \tag{7}$$

Cette dernière inégalité est valable pourvu que

$$M_0 + M_1 + \ldots + M_{n-1} < a,$$

a pouvant se calculer en fonction de k; or M_0 est aussi petit qu'on veut si t est assez voisin de t_0 [pour $n = 0$, le second membre de (5) est à remplacer par

$$\Phi\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha};\, u_0;\, X;\, t\right) - \Phi\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha};\, u_0;\, X;\, t_0\right)$$
$$+ \Sigma_{\alpha.\beta}[a_{\alpha,\beta}(X;\, t_0) - a_{\alpha.\beta}(X;\, t)]\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

et celui de (6) par

$$\Sigma_{\alpha.\beta}[a_{\alpha.\beta}(X;\, t_0) - a_{\alpha.\beta}(X;\, t)]\varpi_\alpha \frac{\partial u_0}{\partial x_\beta};$$

or, il résulte facilement du Chapitre XIII que les dérivées secondes de u_0 sont bornées dans $\mathcal{D}$]. Si t est assez voisin de t_0 pour que $M_0 < a(1 - k)$, l'inégalité (7) a donc lieu quel que soit n, et par suite, les fonctions u_n tendent vers une fonction u_∞ dont les dérivées existent et sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Si l'on calcule h_n par des équations du type des équations (3) à (5) du Chapitre XI, on constate que la fonction σ_1 correspondante est lipschitzienne d'exposant h avec un coefficient $O(M_{n-1})$ (VII, 4), et par suite que les dérivées de h_n sont lipschitziennes d'exposant h avec un coefficient $O(M_{n-1})$. Mais alors le second membre de (5) est lipschitzien d'exposant $\frac{h}{2}$ avec un coefficient $O(\sqrt{M_{n-2}})$ (*d*, III, 4, p. 222); on en conclut que ρ_1 est lipschitzien d'exposant $\frac{h}{2}$ et de coefficient $O(\sqrt{M_{n-2}})$ et que par suite, dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$, les dérivées secondes de h_n valent $O(\sqrt{M_{n-2}})$ et sont lipschitziennes d'exposant $\frac{h}{2}$ et de coefficient $O(\sqrt{M_{n-2}})$. Donc les dérivées de u_∞ sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et les dérivées secondes existent dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$. On conclut enfin du Chapitre XIII que ces dérivées secondes sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$.

La fonction u_∞ répond donc à la question.

4. *Unicité de la solution.* — Soit u une solution quelconque de la question. Je dis que, si $u-u_0$ et ses dérivées sont, ainsi que $t-t_0$, suffisamment voisins de zéro, $u=u_\infty$. En effet, en conservant la même signification pour les b_α et pour c,

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2(u-u_n)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial(u-u_n)}{\partial x_\alpha} + c(u-u_n)$$
$$= \Psi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}; u; X; t\right) - \Psi\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_\alpha}; u_{n-1}; X; t\right),$$

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial(u-u_n)}{\partial x_\beta} + \psi(X)(u-u_n) = 0;$$

si M'_n est une limite supérieure des valeurs absolues de $u-u_n$ et de ses dérivées, et si k est un nombre donné $(0<k<1)$, on en conclut, sous les hypothèses faites,

$$M'_n < k M'_{n-1},$$

d'où

$$u = \lim u_n = u_\infty.$$

5. *Cas où t n'est pas arbitrairement voisin de t_0.* — Si l'on sait, pour toute solution correspondant à une valeur de t comprise entre t_1 et t_2, limiter indépendamment de t la fonction u et ses dérivées, on est certain de pouvoir, de proche en proche, résoudre le problème pour une valeur quelconque de t dans cet intervalle. En effet les calculs précédents conduisent à des fonctions dont les dérivées sont lipschitziennes d'exposant h; alors, en considérant comme connu le second membre de (1), on peut, à l'aide des équations (3) à (5) du Chapitre XI, trouver une limite supérieure du coefficient lipschitzien des dérivées de u pour l'exposant h. Le raisonnement s'achève alors comme au Chapitre XIV.

CHAPITRE XVI.

LES DÉRIVÉES SECONDES DU POTENTIEL DE DOMAINE.

1. Théorème. — *Si l'opération $\mathcal{F} u$ satisfait aux hypothèses* (V, 11) *et si en outre la fonction* c, *les dérivées des b_α et les dérivées secondes des*

$a_{\alpha,\beta}$ *sont lipschitziennes d'exposant* $h < 1$; *si, outre les hypothèses* (II, 1), *les dérivées des coordonnées des points de* $\mathcal{S}$ *sont lipschitziennes d'exposant* h; *si enfin* ρ *est lipschitzien d'exposant* h *dans le domaine* ϖ *de frontière* $\mathcal{S}$, *les dérivées secondes de*

$$u(\mathrm{X}) = \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}},$$

où G *est la solution élémentaire principale de* $\mathcal{F}\mathrm{G} = 0$, *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h *dans* $\varpi + \mathcal{S}$.

Si l'on considérait un ensemble fermé intérieur à ϖ, les dérivées secondes de u y seraient lipschitziennes d'exposant h même si les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c étaient seulement lipschitziens d'exposant h.

Dans les hypothèses énoncées, on peut écrire

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \omega_1(\mathrm{X}) \mathrm{N}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \omega(\mathrm{A}),$$

où N peut être dérivé jusqu'à cinq fois, dont trois fois par rapport à l'un quelconque des deux points, et où ω_1 et ω sont des fonctions positives dont les dérivées secondes existent et sont lipschitziennes d'exposant h (V, 20).

Calculons une dérivée seconde, en supposant que X est dans ϖ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = &\int_{\varpi}^{(m)} \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [\rho(\mathrm{A}) - \rho(\mathrm{X})]\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \\ &+ \rho(\mathrm{X}) \int_{\varpi}^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \\ &- \rho(\mathrm{X}) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\beta}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \varpi_\alpha(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

L'intégrale d'ordre $m - 1$ est une dérivée d'un potentiel de simple couche dont la densité $\varpi_\alpha(\mathrm{A})$ est lipschitzienne d'exposant h; elle est donc (VII, 5) lipschitzienne d'exposant h.

La seconde intégrale d'ordre m porte sur

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \mathrm{N}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \omega(\mathrm{A}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_\beta} \frac{\partial \omega}{\partial a_\alpha} \mathrm{N}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_\beta} \omega(\mathrm{A}) \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial a_\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_\alpha} \omega(\mathrm{A}) \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_\beta} + \omega_1(\mathrm{X}) \frac{\partial \omega}{\partial a_\beta} \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_\beta} + \omega_1(\mathrm{X}) \omega(\mathrm{A}) \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_\beta};\end{aligned}$$

l'intégrale correspondant à chacun des termes est lipschitzienne d'exposant h (I, 1).

2. *Caractères lipschitziens d'une intégrale.* — Il reste donc à examiner seulement la première intégrale qui figure dans notre expression de la dérivée seconde, et à prouver qu'elle est lipschitzienne d'exposant h.

Pour cela (I, 8, 10), il suffit de prouver que, si δ est positif et si l'on considère l'intégrale

$$\int^{(m)} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}(X, A) \, dV_A$$

étendue aux points de $\mathcal{D}$ tels que $L(X, A) > \delta$, cette intégrale est bornée quand δ varie.

Or l'intégrale

$$\int^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A) \, dV_A,$$

étendue à la même région, est bornée comme portant sur $O[L^{1-m}(X, A)]$.

Il reste donc à considérer

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A) \varpi_\alpha(A) \, dS_A,$$

étendue aux points de $L(X, A) = \delta$ situés dans $\mathcal{D}$ et aux points de $\mathcal{S}$ tels que $L(X, A) > \delta$. Or l'intégrale étendue à n'importe quelle partie de $L(X, A) = \delta$ est bornée comme portant sur $O(\delta^{1-m})$, pendant que la mesure du domaine d'intégration est $O(\delta^{m-1})$.

D'autre part l'intégrale étendue à $\mathcal{S}$ entier est bornée comme dérivée d'un potentiel de simple couche à densité lipschitzienne (VII, 5). Il suffit donc d'établir que l'intégrale étendue à la partie de $\mathcal{S}$ telle que $L(X, A) < \delta$, est bornée.

On peut supposer δ assez petit pour que toute cette région de $\mathcal{S}$ ait une même représentation paramétrique. Introduisons les paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_m$ de X ($s_m = 0$ sur $\mathcal{S}$). On a sous le signe d'intégration une combinaison linéaire des $\frac{\partial G}{\partial s_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), les coefficients étant lipschitziens. En retranchant l'intégrale étendue à la même région

$$\int^{(m-1)} \Theta G(X, A) \lambda(A) \, dS_A,$$

intégrale qui est bornée, le terme en $\frac{\partial G}{\partial s_m}$ disparaît si $\lambda(A)$ est une fonction lipschitzienne convenablement choisie. En remplaçant, dans ce qui reste, le coefficient $\mu_k(A)$ de $\frac{\partial G}{\partial s_k} d(t_1, \ldots, t_{m-1})$ $(t_1, \ldots, t_{m-1}$ étant les paramètres de A) par $[\mu_k(A) - \mu_k(X)] + \mu_k(X)$, on est ramené à prouver que

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial s_k} d(t_1, \ldots, t_{m-1}) \qquad (k \neq m)$$

est borné, ou encore qu'il en est ainsi de

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial t_k} d(t_1, \ldots, t_{m-1}).$$

Or cette dernière intégrale est

$$\int^{(m-2)} G(X, A) \varpi'_k(T)\, dS_T,$$

étendue à la frontière de notre région de $\mathfrak{S}$; dS'_T est l'élément de l'image de cette frontière dans l'espace $(t_1, \ldots, t_{m-1})$ et les $\varpi'_k(T)$ sont, dans cet espace, les cosinus directeurs de la normale extérieure à cette image de frontière. Or, sur cette frontière,

$$G(X, A) \varpi'_k(T) = O(\delta^{2-m}).$$

Il nous suffit donc de prouver que l'image de cette frontière a une mesure $O(\delta^{m-2})$.

Or soit $t_\alpha = s_\alpha + \rho\nu_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1)$, avec $\Sigma_\alpha \nu_\alpha^2 = 1$, $\rho > 0$. Pour chaque système de valeurs des ν_α, ρ est donné par une équation

$$\Sigma_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha,\beta}(s_\alpha - t_\alpha)(s_\beta - t_\beta) + O[L^{2+h-m}(S, T)] = \delta^2 \qquad (t_m = 0),$$

dont le premier membre représente $L^2(X, A)$; les $\lambda_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions de S, et ces fonctions sont lipschitziennes d'exposant h; la forme quadratique qui a les $\lambda_{\alpha,\beta}$ pour coefficients, est définie et positive. Dès que ρ est assez petit, la dérivée du premier membre par rapport à ρ est comprise entre $a\rho$ et $b\rho$, a et b étant positifs et fixes; donc, dès que δ est assez petit, notre équation en ρ a une racine positive et une seule inférieure à une certaine limite; cette racine est comprise entre $\frac{\delta}{a}$ et $\frac{\delta}{b}$. D'autre part si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-2}$ sont des paramètres à l'aide desquels on exprime les ν_α de façon que $\Sigma_\alpha \nu_\alpha^2 = 1$, on a

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial \mu_k} = \rho \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \mu_k} + \nu_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial \mu_k};$$

mais de l'équation qui donne ρ, on déduit

$$\Sigma_{\gamma,\alpha} \nu_\alpha (a_\gamma - x_\gamma) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\alpha} d\rho + \rho \Sigma_{\gamma,k,\alpha} (a_\gamma - x_\gamma) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\alpha} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \mu_k} d\mu_k = 0,$$

d'où évidemment

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu_k} = O(\delta),$$

et par suite

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial \mu_k} = O(\delta).$$

Il en résulte bien que la mesure de notre image de frontière est $O(\delta^{m-2})$ et le théorème énoncé est complètement démontré.

CHAPITRE XVII.

LES DÉRIVÉES SECONDES DU POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE.

1. *Condition de Lipschitz pour les dérivées secondes de la densité. — Si, outre les hypothèses* (II, 1), *la frontière* $\mathcal{S}$ *du domaine borné ouvert* $\mathcal{D}$ *est telle que les dérivées secondes des coordonnées de ses points existent et sont lipschitziennes d'exposant* $h < 1$; *si les dérivées de la fonction* ψ (*intervenant dans la définition des opérations* Θ *et* Z) *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h; *si, outre les hypothèses* (V, 11), *la fonction* c *et les dérivées premières des* b_α *et secondes des* $a_{\alpha,\beta}$ *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h; *si enfin les dérivées secondes de la fonction* u *d'un point de* $\mathcal{S}$ *définie par*

$$u(X) = \sigma(X) \pm 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A) \sigma(A)\, dS_A$$

existent et sont lipschitziennes d'exposant h, *les dérivées secondes de* σ *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h.

Cela revient à prouver que les dérivées secondes de

$$\int_{S}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A$$

existent et sont lipschitziennes d'exposant h. Nous savons d'ailleurs déjà (VIII, 6) que les dérivées de σ existent et sont lipschitziennes d'exposant h; cela permet de supprimer de ZG le terme en G, c'est-à-dire de prendre $\psi = \Sigma_\alpha b_\alpha \varpi_\alpha$ (XIII, 3).

Or (V, 20) on peut écrire

$$G(X, A) = \omega_1(X) N(X, A) \omega(A);$$

les fonctions ω et ω_1 sont positives et leurs dérivées secondes existent et sont lipschitziennes d'exposant h; N peut être dérivé jusqu'à cinq fois, dont trois fois par rapport à l'un quelconque des deux points. Par suite

$$ZG(X, A) = \omega_1(X)[N(X, A) Z\omega(A) + \omega(A) ZN(X, A)].$$

Mais les dérivées de $Z\omega(A)$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h; en considérant $\omega_1(X)\omega(X)N(X, A)$ comme la solution élémentaire principale d'une certaine équation du type elliptique, on en conclut (XIII, 5) que les dérivées secondes de

$$\omega_1(X)\int_{S}^{(m-1)} N(X, A)\sigma(A) Z\omega(A)\, dS_A$$

existent et sont lipschitziennes d'exposant h. Il reste donc à étudier les dérivées secondes de

$$\int_{S}^{(m-1)} ZN(X, A)\omega(A)\sigma(A)\, dS_A,$$

ou de

$$\int_{S}^{(m-1)} Z[N(X, A)\omega(A)\omega_1(A)] \frac{\sigma(A)}{\omega_1(A)}\, dS_A,$$

car cette intégrale ne diffère de la précédente que par une fonction dont les dérivées secondes sont lipschitziennes d'exposant h. Or la fonction entre crochets est la solution élémentaire principale d'une équation qui satisfait aux mêmes hypothèses que l'équation donnée et où de plus le coefficient correspondant à c a ses dérivées lipschitziennes d'exposant h : nous ferons donc cette nouvelle hypothèse et nous appellerons G cette fonction entre crochets, et nous poserons $\sigma = \mu\omega_1$; nous sommes ainsi ramenés à étudier les dérivées secondes de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mu(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},$$

où μ a ses dérivées lipschitziennes d'exposant h et où G est dérivable cinq fois, dont trois fois par rapport à X et deux fois par rapport à A.

Or (VIII, 6)

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mu(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha}\mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} + \mu(\mathrm{X})\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.$$

Mais il résulte des calculs déjà faits (VIII, 6; *voir* aussi XIII, 3) que les dérivées secondes de $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h; il suffit donc d'étudier les dérivées de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha}\mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.$$

Nous savons d'ailleurs, toujours par les calculs du passage cité, qu'ici

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})].$$

En appliquant, à l'expression alors trouvée du premier membre, de nouvelles dérivations, on trouve que

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_\beta} + \frac{\partial}{\partial t_\beta}\right)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathrm{O}\,[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})];$$

cela suffit (I, 4, 6) pour que, en nommant $\mathcal{S}_1$ la partie de $\mathcal{S}$ repérable à l'aide de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, et en nommant $\mathcal{C}$ la frontière de $\mathcal{S}_1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s_\beta}\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \\
&\quad = \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial}{\partial s_\beta} + \frac{\partial}{\partial t_\beta}\right) \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \\
&\quad + \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \left(\frac{\partial \mu}{\partial t_\beta} - \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta}\right) d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \\
&\quad + \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})] \frac{\partial \lambda}{\partial t_\beta}\, d(t_1, \ldots, t_{m-1}) \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}}^{(m-2)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})] \lambda(\mathrm{T}) \varpi'_\beta(\mathrm{T})\, d\mathrm{S}'_{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

relation où λ est supposé défini par $d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} = \lambda(\mathrm{T})\, d(t_1, \ldots, t_{m-1})$. L'intégrale d'ordre $m - 2$ a ses dérivées bornées (si X reste à une distance de $\mathcal{C}$ dont la borne inférieure est positive, et nous savons que cette hypothèse est légitime). L'avant-dernière intégrale est lipschitzienne d'exposant quelconque inférieur à 1 (I, 1). La précédente est lipschitzienne d'exposant h (I, 7, 8). Reste la première intégrale où l'on constate aisément qu'en dehors de

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{F}'\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}\right] \frac{\Sigma_\gamma \varpi_\gamma(\mathrm{A}) \left(\dfrac{\partial^2 x_\gamma}{\partial s_\alpha\, \partial s_\beta} - \dfrac{\partial^2 a_\gamma}{\partial t_\alpha\, \partial t_\beta}\right)}{\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}} \\
&\quad \times \frac{\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{X})}{\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{A})}}\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},
\end{aligned}$$

tout le reste est lipschitzien d'exposant h (I, 1); le terme même qui vient d'être écrit est également lipschitzien d'exposant h, comme on le voit en reproduisant les calculs déjà faits (VIII, 6). Le théorème est donc démontré.

Si l'on a une borne inférieure positive pour le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ et si les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α, c et celles de leurs dérivées d'ordres divers qui figurent dans les hypothèses, ainsi que leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant $h < 1$ sont bornés (g étant fixe ainsi que le domaine borné hors duquel ces coefficients sont constants), et si M est une borne supérieure de u, de ses dérivées premières et secondes, et du coefficient lipschitzien de ces dernières pour l'exposant h, si enfin le noyau résolvant de l'équation de Fredholm en σ admet une limitation fixe $O[L^{2-m}(X, A)]$, il est évident que les dérivées secondes de σ et leur coefficient lipschitzien pour l'exposant h sont $O(M)$.

La même propriété a lieu si l'on remplace G par G_p dans l'expression de u, et cela même si χ éprouve un saut brusque au passage de $\mathcal{S}$, χ étant lipschitzien dans $\mathcal{D}$ et lipschitzien hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, avec l'exposant h.

2. *Condition de Lipschitz pour les dérivées secondes du potentiel. — Si, avec les mêmes hypothèses que précédemment* (§ 1) *pour* $\mathcal{S}$ *et* ψ *et pour les* $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, *on suppose que les dérivées secondes de* σ *sont lipschitziennes d'exposant* h, *les dérivées secondes de*

$$u(X) = -2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A$$

sont lipschitziennes d'exposant h *dans* $\mathcal{D}$; *elles sont aussi lipschitziennes d'exposant* h *hors de* $\mathcal{D}+\mathcal{S}$.

Il suffit de faire la démonstration pour $\mathcal{D}$. On peut définir une fonction σ dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, de façon qu'elle coïncide sur $\mathcal{S}$ avec la densité donnée et que ses dérivées secondes existent et soient lipschitziennes d'exposant h; en effet, dans une partie de $\mathcal{D}$ où notre paramètre s_m existe, on peut définir σ comme indépendant de s_m quand on l'exprime à l'aide des s_α; dans le reste de $\mathcal{D}$, on peut prolonger cette fonction par un procédé connu (d, I, 10, p. 206, 207). Cela permet d'écrire, quand X est dans $\mathcal{D}$,

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\Theta\sigma(A)\,dS_A - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\mathcal{F}\sigma(A)\,dV_A - \sigma(X);$$

or les dérivées secondes de tous les termes du second membre sont lipschitziennes d'exposant h (XIII, 3; XVI, 1).

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus pour les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, si M désigne une limite supérieure des valeurs absolues de σ, de ses dérivées premières et secondes, et du coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h, il est évident que les dérivées secondes de u et leur coefficient lipschitzien pour l'exposant h sont $O(M)$.

La même propriété a lieu si l'on remplace G par G_p dans l'expression de u, et cela même si χ éprouve un saut brusque au passage de $\mathcal{S}$, dans les mêmes conditions que plus haut.

3. *Remarque.* — Moyennant les mêmes hypothèses pour $\mathcal{S}$ et ψ et pour les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c (et peut-être moyennant des hypothèses plus larges, mais nous n'en aurons pas besoin), on démontre que :

1° Si σ est lipschitzien d'exposant h, les dérivées secondes de $s_m^2 u$ sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$;

2° Si les dérivées de σ sont lipschitziennes d'exposant h, les dérivées secondes de $s_m u$ sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$.

Cela permet de construire dans $\mathcal{D}$ une fonction v quand on donne sur $\mathcal{S}$ les valeurs de v, $\dfrac{\partial v}{\partial s_m}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s_m^2}$, pourvu que les valeurs données de $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s_m^2}$, les dérivées de celles de $\dfrac{\partial v}{\partial s_m}$ et les dérivées secondes de celles de v soient lipschitziennes (*voir* le Chapitre IX et *d*, II, 5, 6, p. 214 à 216).

CHAPITRE XVIII.

PROBLÈME NON LINÉAIRE MIXTE.

1. *Énoncé du problème.* — Nous considérons un domaine borné et ouvert $\mathcal{D}$ dont la frontière satisfait aux hypothèses du Chapitre XIV (§ 1) et en outre à celle de se composer d'au moins deux parties sans points communs deux à deux; l'ensemble de quelques-unes de ces parties sera nommé $\mathcal{S}$ et l'ensemble des autres sera nommé $\mathcal{T}$. D'autre part, nous reprenons l'équation

$$(1) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(u;\, X;\, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha};\, u;\, X;\, t\right)$$

qui remplit les mêmes conditions qu'au Chapitre XIV. Sur $\mathcal{S}$, on s'impose la condition

$$(2) \qquad u = \varphi(X;\, t),$$

où les dérivées secondes, par rapport aux paramètres des points X de $\mathcal{S}$, de la fonction φ, existent et sont lipschitziennes d'exposant h par rapport à ces paramètres et continues par rapport à l'ensemble de ces paramètres et de t; de plus le coefficient lipschitzien des dérivées secondes de $\varphi(X; t) - \varphi(X; t_0)$ est supposé infiniment petit avec $t - t_0$. Sur $\mathcal{C}$, on s'impose la condition

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi(u; X; t) = 0, \tag{3}$$

avec les mêmes hypothèses qu'au Chapitre XIV. On suppose que ces conditions (1), (2), (3) sont satisfaites pour $t = t_0$ par la fonction u_0 dont les dérivées secondes sont lipschitziennes d'exposant h. Enfin on suppose que le problème de trouver une fonction v, nulle sur $\mathcal{S}$, et satisfaisant dans $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{C}$ aux conditions (3) et (4) du Chapitre XIV, n'admet que la solution zéro.

La question est de trouver une fonction u satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3). On va voir que si t est assez voisin de t_0, cette fonction u existe.

2. *Formation des approximations successives.* — Les approximations successives sont formées par le même procédé qu'au Chapitre XIV (§ 2), à ceci près que, sur $\mathcal{S}$, la condition à la frontière est ici

$$h_0 = \varphi(X; t) - \varphi(X; t_0), \qquad h_n = 0 \, (n > 0).$$

L'existence des h_n, tant que $u_n - u_0$, ses dérivées et le coefficient lipschitzien de celles-ci pour un exposant donné, sont assez voisins de zéro, se démontre comme dans le passage cité. Toutefois, en vue de ce qui va suivre, le prolongement des $a_{\alpha,\beta,n}$ hors de $\mathcal{D}$ se fera de façon que les dérivées secondes de ces fonctions soient lipschitziennes d'exposant h dans tout l'espace (XVII, 3).

3. *Convergence des approximations successives.* — Soit M_n une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées premières et secondes et du coefficient lipschitzien de ces dernières pour l'exposant h. Nous nommons ρ_1, σ_1, τ_1 les inconnues du système d'équations de Fredholm qui sert à trouver h_n (XII, 3).

Nous raisonnons comme au Chapitre XIV (§ 3). Ici encore $\mathcal{F} u_n$, Θu_n, les dérivées de Θu_n et les coefficients lipschitziens de ces fonctions pour l'exposant h sont $O(M_{n-1}^2)$. Par suite, ρ_1, σ_1 et τ_1 sont $O(M_{n-1}^2)$. L'équation qui traduit la condition dans $\mathcal{D}$ prouve que ρ_1 est lipschitzien d'exposant h avec le coefficient $O(M_{n-1}^2)$. L'équation qui traduit la condition sur $\mathcal{S}$ prouve ensuite que les dérivées secondes de σ_1 existent et sont lipschitziennes d'exposant h (XVII, 1) : ce coefficient et les valeurs des dérivées premières et secondes sont $O(M_{n-1}^2)$. L'équation qui traduit la condition sur $\mathcal{T}$ prouve enfin que les dérivées de τ_1 existent et sont lipschitziennes d'exposant h (XIII, 2 et 4) : ces dérivées et ce coefficient lipschitzien sont $O(M_{n-1}^2)$.

Par suite (XIII, 3 et 4; XVII, 2)

$$M_n = k M_{n-1}^2,$$

tant que $u_n - u_0$ et ses dérivées restent assez voisins de zéro (t étant assez voisin de t_0). La convergence en résulte si t est assez voisin de t_0. La limite u_∞ de u_n répond à la question.

4. *Unicité de la solution.* — On prouve comme au Chapitre XIV (§ 4) que si $t - t_0$, $u - u_0$, ses dérivées premières et secondes et le coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h sont simultanément assez voisins de zéro, on a $u = u_\infty$.

5. *Cas où t n'est pas arbitrairement voisin de t_0.* — Si l'on sait borner u, ses dérivées premières et secondes et le coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant h, indépendamment de t, et si l'on est sûr que l'hypothèse sur le problème relatif à v est satisfaite pour toute valeur de t d'un intervalle comprenant t_0, on est sûr que le problème est possible pour toute valeur de t dans cet intervalle.

C'est à cause de $\mathcal{S}$ qu'on suppose ici connus une limitation et un coefficient lipschitzien des dérivées secondes de u, dont on n'avait pas besoin plus haut (XIV, 5); ces quantités n'ont besoin d'être connues qu'aux points de $\mathcal{D}$ assez voisins de $\mathcal{S}$. Pour les détails de la démonstration, il suffit de renvoyer au passage cité (XIV, 5) [1].

---

[1] D'autres considérations pourront permettre d'améliorer ce résultat (*Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 613).

ERRATA.

MÉMOIRE DE M. GEORGES GIRAUD : Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. XLIX, 1932, p. 1 à 104).

	Au lieu de :	*Lire :*
Page 14, ligne 7 en remontant..	$\lambda + h = 1$	$\lambda + h - 1$
Page 17, ligne 10 en remontant.	b_β	b_α
Page 94, ligne 2..............	$(k1 - k)$	$k(1 - k)$
Page 98, ligne 9..............		$\left[\frac{\partial ZG(X, A)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha}\right]$