ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Cercles tangents dans le plan ou paratactiques dans l'espace. Pyramide inscrite et circonscrite à une quadrique de l'espace à quatre dimensions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 223-243

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__223_0>

CERCLES TANGENTS DANS LE PLAN
OU PARATACTIQUES DANS L'ESPACE.

PYRAMIDE INSCRITE ET CIRCONSCRITE A UNE QUADRIQUE
DE L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS

Par M. GAMBIER

1. *Introduction.* — Dans un Mémoire imprimé au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2^e série, t. LV, mars 1931) j'ai fait connaître en France des propriétés curieuses obtenues par MM. Tzitzéica et Barbilian en Roumanie (*Bulletin de Mathématique et de Physique de l'École polytechnique de Bucarest*, 1re année, 1929, p. 1-17 et 17-21). Je résume le résultat :

Sur une variété quadratique à n dimensions V_n^2, non singulière, plongée dans un espace linéaire L_{n+1} à $n+1$ dimensions, on prend le point α et l'on mène l'espace linéaire à n dimensions A tangent en α à V_n^2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des points linéairement indépendants, pris sur des génératrices rectilignes de V_n^2 passant en α (génératrices visiblement contenues dans A). On considère les points de V_n^2, distincts de α, conjugués aux points a_i pris n à n : soient $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ces nouveaux points; *il se produit deux cas et deux seulement* (*du moins pour* $n \neq 4$) :

1° *Cas normal.* — L'espace linéaire à n dimensions déterminé par les points b_i ne touche pas V_n^2; dans ce cas, chaque groupement de n points b_i admet un seul point c_j conjugué des points de ce groupement, distinct du point a_j correspondant, et appartenant à V_n^2. Les points c_0, $c_1, \ldots, c_n$ ainsi obtenus déterminent un espace linéaire C qui touche la variété V_n^2 en un point γ.

2° *Cas exceptionnel.* — L'espace linéaire déterminé par les b_i touche V_n^2 en un point β.

M. Barbilian a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalisation du cas exceptionnel, pour n entier positif quelconque, différent de 4, *Pour* $n = 4$, *M. Barbilian obtient ce résultat inattendu qu'il n'y a qu'un cas possible, à savoir celui qui est déclaré exceptionnel pour les autres valeurs de* n.

En général, les conditions du cas exceptionnel entraînent que la configuration soit *imaginaire :* ainsi pour $n = 3$, on a une quadrique V_3^2 plongée dans l'espace à 4 dimensions; *la condition de réalisation du cas exceptionnel est que les génératrices* $\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3)$ *aient sur le cône des tangentes en* α *à* V_3^2 *un rapport équianharmonique*. Mais en réunissant une configuration imaginaire à la configuration imaginaire conjuguée, on réalise un ensemble représentatif d'une configuration *réelle* convenablement choisie. Ainsi pour $n = 3$, les points de V_3^2 peuvent servir de représentation chacun à un cycle du plan euclidien et l'on obtient une configuration *imaginaire* de 10 cycles dont chacun est tangent à 4 autres; sur chaque cycle, on trouve donc 4 points de contact de birapport équianharmonique. Or un *cycle réel* C de l'espace euclidien à 3 dimensions peut être représenté par deux cycles *imaginaires* c', c'' du plan : on prend en effet les deux foyers F', F'' de C; la projection de C à partir de F' sur un plan P est un *cycle* c' du plan P ayant pour *unique foyer* F'; de même la projection de C à partir de F'' sur P est un *cycle* c'' ayant pour *unique foyer* F''; les deux cycles c' et c'' sont *imaginaires conjugués*. De la sorte si l'on adjoint à la configuration de M. Barbilian la configuration conjuguée, on obtient dans l'espace — et non plus dans le plan — une configuration *réelle* de dix cycles dont chacun est *paratactique à quatre autres de la configuration*.

Mon mémoire n'avait d'autre but que de résumer les résultats de MM. Barbilian-Tzitzéica; pour $n = 3$, j'ai donné une démonstration géométrique directe distincte de la méthode analytique des géomètres roumains et enfin j'y ai ajouté l'interprétation par cycles paratactiques. En même temps je répondais implicitement à certaines critiques : quelques auteurs auraient pu reprocher à la théorie de n'avoir d'interprétation qu'en éléments imaginaires; d'autres pourraient reprocher à ce genre de questions de n'être qu'une branche de la géométrie projective et par suite d'avoir moins d'intérêt que telle autre branche des mathématiques. Or Poincaré présente la recherche scientifique comme plus intéressante par le développement de l'esprit que par les applications pratiques (qui viennent d'ailleurs par surcroît, et souvent d'une façon inattendue).

Depuis l'impression de mon mémoire, j'ai été mis au courant d'une circonstance que ni MM. Barbilian et Tzitzéica, ni moi ne connaissions : M. Beniamino Segre avait déjà résolu la question — du moins pour $n = 3$, variété V_3^2 plongée dans un espace linéaire L_4 — en 1927, dans un mémoire de titre :

Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 *et una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario* imprimé dans le recueil italien : *Memorie della R. Accademia nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, mathematiche et naturali*, serie sesta volume II, 1927, p. 204-229.

M. B. Segre n'a pas abordé l'étude de n quelconque; mais, pour la valeur précise $n = 3$, il donne des résultats qui dépassent de beaucoup en précision ceux de MM. Barbilian-Tzitzéica. Il s'agit moins ici d'une question, au fond accessoire, de priorité, que de propager des résultats intéressants. C'est ce que je vais faire, en résumant rapidement le Mémoire de M. B. Segre.

Cette rencontre de géomètres sur un même sujet suffirait, elle aussi, à prouver l'intérêt de la question; en dehors de la partie commune aux deux travaux, chaque auteur a eu un mérite qui lui est propre :

M. B. Segre, de montrer qu'en réalité on trouve une *configuration de trente cycles du plan (paratactiques de l'espace avec l'extension réelle que j'ai signalée) tels que chaque cycle soit tangent (paratactique) à* 8 *autres et que les cycles puissent être répartis en* 6 *configurations de* 10 *cycles comme nous l'avons vu, chaque cycle appartenant à deux configurations.*

M. Barbilian, de donner le résultat pour n quelconque et surtout d'avoir mis en évidence la valeur *remarquable et exceptionnelle* $n = 4$.

2. *Pyramide inscrite et circonscrite à une quadrique* V_3^2 *de l'espace* S_4. — Il s'agit de trouver une pyramide $A_1A_2A_3A_4A_5$ telle que chaque sommet A_i soit sur une quadrique V_3^2 donnée, pendant que la face opposée α_i (espace à 3 dimensions déterminé par $A_jA_kA_lA_m$) est tangente à V_3^2 au point B_i. Il résulte immédiatement de là que les deux pyramides $A_1A_2A_3A_4A_5$ et $B_1B_2B_3B_4B_5$ sont polaires réciproques vis-à-vis

de V_3^2 : l'espace linéaire β_i tangent en A_i à V_3^2 contient $B_jB_kB_lB_m$ tandis que l'espace α_i tangent à V_3^2 en B_i contient A_j, A_k, A_l, A_m. Chaque droite A_jB_k $(j \neq k)$ est sur la quadrique V_3^2; les 5 droites A_iB_i forment une configuration remarquable à laquelle on doit associer la configuration des 5 plans (variété linéaire à deux dimensions) ρ_i, ρ_i étant l'intersection des deux espaces α_i, β_i.

Si l'on prend la pyramide (A_i) comme pyramide fondamentale de coordonnées dans S_4, l'équation de V_3^2 devient

$$(1) \qquad \sum_{i,k=1}^{5} \beta_{ik}^2 x_i x_k = 0 \qquad [\beta_{ii} = 0,\ \beta_{ik} = \beta_{ki},\ i \neq k],$$

et M. B. Segre prouve que les 10 β_{ik} vérifient le système nécessaire et suffisant

$$(2) \qquad \begin{cases} \phantom{\beta_{34}\beta_{15} + {}} \beta_{34}\beta_{25} + \beta_{24}\beta_{35} + \beta_{23}\beta_{45} = 0, \\ \beta_{34}\beta_{15} + \phantom{\beta_{14}\beta_{25} + {}} \beta_{14}\beta_{35} + \beta_{13}\beta_{45} = 0, \\ \beta_{24}\beta_{15} + \beta_{14}\beta_{25} + \phantom{\beta_{12}\beta_{35} + {}} \beta_{12}\beta_{45} = 0, \\ \beta_{23}\beta_{15} + \beta_{13}\beta_{25} + \beta_{12}\beta_{35} \phantom{+ \beta_{12}\beta_{45}} = 0, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \beta_{12}\beta_{34} + \beta_{13}\beta_{24} + \beta_{14}\beta_{23} = 0.$$

Les quatre équations (2) contiennent β_{15}, β_{25}, β_{35}, β_{45} sous forme linéaire et homogène, de sorte que les six β_{ik} ne contenant pas l'indice 5 sont assujettis simplement à vérifier l'équation (3) et l'équation suivante

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\beta_{12}^2\beta_{34}^2 + \beta_{13}^2\beta_{24}^2 + \beta_{14}^2\beta_{23}^2 - 2\beta_{13}\beta_{23}\beta_{14}\beta_{24} \\ &\qquad - 2\beta_{12}\beta_{14}\beta_{32}\beta_{34} - 2\beta_{12}\beta_{13}\beta_{42}\beta_{43} = 0, \end{aligned}$$

obtenue en annulant le déterminant des équations linéaires (2) par rapport aux inconnues β_{j5}. Si l'on pose

$$x = \beta_{12}\beta_{34}, \qquad y = \beta_{13}\beta_{24}, \qquad z = \beta_{14}\beta_{23},$$

les équations (3) s'écrivent

$$x + y + z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0,$$

et entraînent aussitôt $yz + zx + xy = 0$; de la sorte il est nécessaire et suffisant que x, y, z soient racines d'une équation $X^3 - A^3 = 0$ où

A est une indéterminée; autrement dit

(5) $$x,\quad y,\quad z :: A,\quad Aj,\quad Aj^2,$$

où j est l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité : l'interprétation géométrique de (5) est évidente : *sur le cône quadrique ordinaire de sommet* B_5 *formé par les génératrices de* V_3^2 *issues de* B_5, *le rapport anharmonique* $B_5(A_1A_2A_3A_4)$ *des génératrices de* V_3^2 *est équianharmonique, égal à* $-j^2$. On forme donc le tableau

A_1	$B_2\ B_3\ B_4\ B_5$	$-j$	B_1	$A_2\ A_3\ A_4\ A_5$	$-j^2$
A_2	$B_1\ B_3\ B_4\ B_5$	$-j^2$	B_2	$A_1\ A_3\ A_4\ A_5$	$-j$
A_3	$B_1\ B_2\ B_4\ B_5$	$-j$	B_3	$A_1\ A_2\ A_4\ A_5$	$-j^2$
A_4	$B_1\ B_2\ B_3\ B_5$	$-j^2$	B_4	$A_1\ A_2\ A_3\ A_5$	$-j$
A_5	$B'_1\ B_2\ B_3\ B_4$	$-j$	B_5	$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$	$-j^2$

indiquant, dans la configuration des 10 points, les 4 points contigus à chacun et le rapport anharmonique que font les génératrices correspondantes sur le cône section de V_3^2 par l'espace tangent en ce point.

Sur une quadrique V_3^2 *donnée*, les configurations de cette espèce dépendent de 10 paramètres; sur une même V_3^2 ou sur deux quadriques V_3^2, $(V_3^2)'$, deux configurations de cette espèce s'échangent par homographie ou dualité.

Il est précisément intéressant de se borner à une même quadrique V_3^2 de S_4 et à un même couple de deux pyramides associées

$$A_1\quad A_2\quad A_3\quad A_4\quad A_5,$$
$$B_1\quad B_2\quad B_3\quad B_4\quad B_5.$$

Deux tels couples *pris dans leur ensemble* (ce qui revient à étudier la configuration des 10 points et des 10 espaces tangents) sont échangés *en eux-mêmes* (dans leur *ensemble*) par un groupe de 240 projectivités comprenant 120 homographies et 120 réciprocités dualistiques; ces 240 projectivités changent V_3^2 en elle-même. *Ce groupe* G_{240} *contient comme sous-groupe invariant d'indice* 2 *le groupe* G_{120} *des* 120 *homographies;* les autres transformations projectives de G_{240} s'obtiennent en multipliant les 120 homographies par la polarité relative à V_3^2. *Le groupe* G_{120} *contient à son tour comme sous-groupe invariant d'indice* 2 *le groupe* G_{60} *des homographies de* G_{120} *qui changent la pyramide* (A_i) *en elle-même, et la pyramide* (B_i) *en elle-même; ceci suffit pour pouvoir* *affirmer que ce groupe* G_{60} *est holoédriquement isomorphe au groupe alterné de* 5 *lettres*. Les homographies du groupe G_{60} produisent sur les sommets $A_iA_jA_kA_lA_m$ de l'une des deux pyramides toutes les substitutions possibles de *classe paire*. Les 60 homographies de G_{120}, non comprises dans G_{60}, échangent la pyramide (A_i) en la pyramide (B_j); l'une d'elles fait correspondre à

$$\begin{array}{lccccc} & A_i & A_k & A_l & A_m & A_n \\ \text{les sommets} & & & & & \\ & B_{i'} & B_{k'} & B_{l'} & B_{m'} & B_{n'}. \end{array}$$

Finalement, si nous considérons les 120 substitutions possibles

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} i' & k' & l' & m' & n' \\ i & k & l & m & n \end{pmatrix},$$

on voit que si Γ est de classe *paire* elle échange

$$A_i \quad A_k \quad A_l \quad A_m \quad A_n \qquad \text{en} \qquad A_{i'} \quad A_{k'} \quad A_{l'} \quad A_{m'} \quad A_{n'}$$

(en même temps que les sommets B respectivement *opposés* au sommet A de même indice) et si elle est de classe *impaire*, elle échange

$$A_i \quad A_k \quad A_l \quad A_m \quad A_n \qquad \text{en} \qquad B_{i'} \quad B_{k'} \quad B_{l'} \quad B_{m'} \quad B_{n'}.$$

Si l'on appelle r_i le rayon rectiligne A_iB_i, on voit que le groupe G_{120} échange les droites r_i entre elles.

Il est important pour la suite d'étudier en détail le groupe G_{120}; le groupe G_{60} comprend :

$$G_{60}\left\{\begin{array}{l} \textit{L'identité}, \\ 15 \textit{ homographies involutives } [ik][lm], \\ 20 \textit{ homographies cycliques d'ordre } 3 \; [ikl], \\ 24 \textit{ homographies cycliques d'ordre } 5 \; [iklmn]. \end{array}\right.$$

Le reste des homographies, que nous pouvons appeler $G_{120} - G_{60}$, comprend :

$$G_{120} - G_{60}\left\{\begin{array}{l} 10 \textit{ homographies involutives } [ik], \\ 30 \textit{ homographies cycliques d'ordre } 4 \; [iklm], \\ 20 \textit{ homographies cycliques d'ordre } 6 \; [ik][lmn]. \end{array}\right.$$

Si nous considérons les trois homographies involutives $[ik][lm]$,

$[il][mk]$, $[im][kl]$ réunies à l'identité, elles forment un groupe *trirectangle;* elles changent V_3^2 en elle-même; dans chacune les points A_n ou B_n, les espaces α_n ou β_n, la droite r_n, le plan ρ_n (intersection des espaces α_n et β_n) sont des *éléments invariants*. Sur le plan ρ_n, les homographies subordonnées sont trois *homologies involutives*, dont les centres et les axes sont les trois couples d'éléments opposés d'un triangle γ_n autopolaire relativement à la section de V_3^2 par ρ_n. Les trois homographies de S_4 sont les *homographies biaxiales harmoniques*, dont les axes sont les côtés du triangle γ_n, et dont les plans sont ceux qui joignent les sommets opposés de γ_n à la droite r_n. On en conclut *qu'en projetant les points* $A_iA_kA_lA_m$ et $B_iB_kB_lB_m$ *respectivement de* B_n *et* A_n *sur le plan* ρ_n, *on obtient deux quadruples équianharmoniques de points d'une même conique et que les deux quadrangles plans complets ainsi obtenus ont le triangle* γ_n *comme triangle diagonal commun.* Les deux tétraèdres $A_iA_kA_lA_m$ et $B_iB_kB_lB_m$ *coupent le plan* ρ_n *d'intersection de leurs espaces suivant deux quadrilatères plans complets qui ont encore pour triangle diagonal commun le triangle* γ_n.

En étudiant de même les homographies subordonnées dans β_n aux précédentes, on voit que *dans un couple de pyramides associées de la quadrique* V_3^2, *deux sommets opposés* A_n, B_n *ont un même plan polaire* ρ_n *relativement aux tétraèdres des quatre sommets qui sont dans les espaces* β_n, α_n *respectivement tangents à* V_3^2 *en* A_n *et* B_n, *et ce plan* ρ_n *n'est autre que l'intersection de* α_n *et* β_n (A_n et ρ_n sont respectivement polaires relativement au tétraèdre $B_iB_kB_lB_m$).

L'homographie involutive $[ik]$ *est une homographie harmonique* biaxiale qui change V_3^2 en elle-même; nous appellerons $r_{ik} \equiv r_{ki}$ et $\rho_{ik} \equiv \rho_{ki}$ la droite et le plan *axes* de cette homographie; ils sont polaires réciproques par rapport à V_3^2. Nous indiquons, en outre, par π_{ki} l'espace qui contient simultanément r_i, r_k et par P_{ik} le point (pôle de π_{ki}) commun aux plans ρ_i, ρ_k. Les droites r_l, r_m, r_n, A_iB_k, A_kB_i qui joignent chacune un couple de deux points correspondants de cette homographie $[ik]$ sont donc sécantes à l'axe r_{ik}; l'espace π_{ik}, qui contient les droites A_iB_k, A_kB_i doit contenir la droite r_{ik}; *les* 5 *droites* r_i *de* S_4 *sont donc telles que la droite qui s'appuie sur trois d'entre elles est contenue dans l'espace qui contient les deux autres : ce sont donc* 5 *droites associées de cet espace*. Les 5 plans ρ_i sont polaires des droites r_i par rapport à V_3^2 et sont donc 5 *plans associés* de cet espace.

C'est à partir de ce moment que M. Beniamino Segre va utiliser des résultats importants dus à son illustre parent, feu Corrado-Segre, qui a étudié en détail ces associations de plans ou de droites dans l'espace à 4 dimensions ([1]) et à M. G. Castelnuovo.

On remarque, par exemple, que les plans ρ_l, ρ_m, ρ_n sont invariants dans l'homographie biaxale harmonique $[ik]$, donc coupent l'axe r_{ik}, qui est là droite s'appuyant sur r_l, r_m, r_n; de même, le plan ρ_{ik}, transformé par polarité de la droite r_{ik}, coupe suivant une droite chacun des plans ρ_l, ρ_m, ρ_n. Par suite, *l'un quelconque* ρ_n *des 5 plans associés en jeu coupe suivant une droite chacun des 6 plans* ρ_{ik}, *coupe en un point chacune des droites* r_{ik}, *où les indices i, k sont différents de n : les 6 droites d'intersection sont, dans le plan* ρ_n, *les côtés d'un quadrangle plan complet de sommets* P_{in}, P_{kn}, P_{ln}, P_{mn}, *et les 6 points de rencontre cités plus haut sont les sommets d'un quadrilatère plan complet (polaire du précédent quadruple dans l'homographie subordonnée à* $[ik]$ *dans* ρ_n); *ce quadrilatère et ce quadrangle ont le triangle* γ_n *pour triangle diagonal commun.*

Les 6 plans qui coupent ρ_n chacun suivant une droite peuvent être associés en trois couples :

$$(\rho_{ik}, \rho_{lm}), \quad (\rho_{il}, \rho_{mk}), \quad (\rho_{im}, \rho_{kl})$$

de plans situés, pour chaque couple, dans un même espace avec ρ_n. Considérons alors dans S_4 l'homographie cyclique $[klm]$; elle admet ρ_n comme plan invariant, et, dans le faisceau d'espaces admettant ce plan ρ_n pour axe, opère une projectivité cyclique d'ordre 3 ayant α_n et B_n comme éléments invariants, tandis que les 3 espaces considérés

(1) C. Segre, *Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a 4 dimensioni* (*Rendiconti di Circ. Mat. di Palermo*, t. II, 1888, n° 4); *Sulle varieta cubiche dello spazio a quattro dimensioni* (*Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino*, 2e série, t. XXXIX, n° 25). — G. Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni* (*Atti. R. Ist. Ven.*, 6e série, t. VI, 1888, n° 16; 7e série, t. II, 1891, p. 881 et suiv.). — C. Segre, *Sulla varieta cubica con 10 punti doppi dello spazio a quattro dimensioni* (*Atti. R. Acc. della Scienze di Torino*, t. XXII, 1887, n° 4).

à l'instant forment un cycle; il en résulte que *l'espace α_n forme avec ces 3 espaces un quadruple équianharmonique;* ce quadruple est projectivement échangeable avec ceux qui s'obtiennent par substitution paire sur les indices *iklmn*. Tout cela prouve que deux quintuples différents de plans associés d'un S_4 sont projectifs entre eux. En définitive :

Cinq plans ρ_n associés d'un espace S_4 *déterminent* 10 *autres plans ρ_{ik}, dont chacun coupe suivant une droite les* 3 *plans ρ_n d'indice n différent de i, k. Chaque plan ρ_n donne* 6 *plans ρ_{ik} correspondants, et ces derniers peuvent être distribués en* 3 *couples de plans situés avec ρ_n dans un même espace; ces* 3 *espaces déterminent dans leur faisceau* 2 *espaces α_n et β_n constituant chacun avec eux un quadruple équianharmonique. Les* 10 *espaces α_n et β_n ainsi obtenus forment le biquintuple d'espaces de* S_4, *tangents à une même* V_3^2 *et fournissent les deux pyramides associées que nous avons étudiées.*

3. *Rappel de résultats concernant la géométrie des cycles d'un plan.* — Si l'on introduit dans le plan la notion de *coordonnées tétracycliques*, nous savons que chaque cercle du plan peut être représenté par une droite issue de l'origine dans un espace à 4 dimensions S_4, de sorte que l'angle de deux cercles soit égal à celui des droites images. On fixe alors un sens sur le cercle en coupant la droite image par la sphère $x^2+y^2+z^2+t^2=1$ et choisissant l'un des deux points d'intersection plutôt que l'autre. Cela fait, rien n'empêche de faire une transformation homographique sur l'espace S_4; *on a, pour représenter les cycles du plan une quadrique* V_3^2, *à laquelle on a adjoint un point ω et l'espace polaire Ω correspondant* (*transformés de l'origine primitive et de l'espace polaire*) de façon à pouvoir définir l'angle de deux cycles par un rapport anharmonique. Si les questions d'angles n'entrent pas en jeu, si l'on se contente d'étudier comme ici des cycles tangents (ayant pour image sur V_3^2 deux points situés sur une même génératrice), on peut négliger la position précise de ω d'une part, puis (quand ω est fixé) le glissement sur lui-même de l'espace Ω : on trouve ainsi les 10 paramètres qui entrent en jeu dans la transformation la plus générale qui change deux cycles tangents du plan en deux cycles tangents. Fixer ω et faire glisser Ω sur lui-même revient à

ne faire usage que des 6 paramètres relatifs au groupe formé par les *symétries planes*, les *homothéties*, les *déplacements* et les *inversions;* on sait que ce groupe, combiné avec les *dilatations*, fournit le groupe à 10 paramètres en jeu.

Cela posé, un point de V_3^2 représente un cycle; à une droite r de l'espace S_4 correspondent deux points de V_3^2, donc deux cycles du plan; le plan ρ (polaire de r) coupe V_3^2 suivant une conique dont les points ont pour image les cycles tangents au couple de cycles d'image r.

Si l'on prend un point A *de* S_4, *ou son espace polaire* α, *nous définissons* ∞^2 *cycles qui coupent sous un angle constant un même cercle* Γ; *le cercle* Γ *s'obtient en joignant* α *à* ω; *la droite* $\alpha\omega$ *perce* V_3^2 *en deux points, images de deux cycles ayant même support; la variation du point* α *sur une droite donnée, issue de* ω, *correspond à la variation de l'angle.*

Nous pouvons donc reprendre les raisonnements qui précèdent en opérant directement sur des cycles d'un même plan au lieu de faire de la géométrie dans l'espace S_4 où baigne V_3^2; mais il est clair que l'espace S_4 prolonge en quelque sorte V_3^2, et par suite, permet d'opérer plus rapidement que la seule V_3^2

Pour donner un exemple précis, reprenons l'homographie involutive $[ik][lm]$; les cycles A_n et B_n sont inchangés (les points de chaque cycle étant soumis à une certaine involution sur le cycle); sur le cycle A_n, le point de contact (A_n, B_i) est remplacé par le point de contact (A_n, B_k), et de même le point (A_n, B_l) par (A_n, B_m) et *réciproquement;* donc, l'involution produite sur A_n est déterminée par deux couples; les deux droites joignant les points homologues d'un même couple se coupent en un point d'où l'on mène les deux tangentes à A_n, et l'on a ainsi les deux points invariants sur A_n; on opère de même sur B_n, et l'on constate qu'il existe un cycle C_1 tangent à A_n et à B_n en deux convenablement choisis de points invariants trouvés sur A_n et B_n, et de même un cycle C_2 tangent à A_n et B_n aux deux autres points; *l'homographie involutive* $[ik][lm]$ *respecte ces deux cycles* C_1, C_2 *point pour point; tous les cycles tangents à* C_1 *et* C_2 *sont donc chacun transformés en soi-même et sur chaque cycle il y a une involution dont on connaît les points doubles*, points de contact avec C_1 et C_2; soit maintenant un cycle *quelconque* D : on mène les deux cycles E, F tangents à D, C_1, C_2; E, F se transforment en eux-mêmes, mais leurs points de contact avec D se transforment en deux points faciles à marquer en tenant compte de l'involution tracée sur E d'une part, F de l'autre; le transformé de D est donc le cycle tangent à E, F aux points obtenus ainsi. Cet exemple suffit à prouver combien les raisonnements géométriques directs, sans être impossibles, sont pénibles; nous ne continuerons donc pas.

Ces considérations ne sont pas inutiles, car elles vont nous permettre de découvrir la raison profonde qui devait conduire M. B. Segre à utiliser les résultats de feu Corrado Segre en adoptant la méthode qui consiste à écrire l'équation de S_3^2 sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

les variables surabondantes x_i étant liées par la relation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

La notion de cycles paratactiques dans l'espace, au lieu de cycles simplement tangents dans un même plan, nous montre que la transformation la plus générale de l'espace qui transforme des cycles en cycles et conserve la parataxie s'obtient en combinant une transformation conforme (*ponctuelle*) sur l'espace complexe à 3 dimensions complexes qui contient les foyers *primes* de ces cycles de l'espace, et ensuite la transformation conforme *conjuguée* sur l'espace qui contient les foyers *secondes*. Chaque foyer pouvant d'ailleurs être remplacé par un cycle du plan, nous retombons sur la transformation *de contact* (et non plus *ponctuelle*) qui transforme dans un plan des cycles tangents en cycles tangents. Mais alors la transformation conforme de l'espace oblige implicitement à considérer, dans l'espace S_5 à 5 dimensions, la représentation des sphères de l'espace ordinaire : nous retrouvons une quadrique V_4^2 avec un point $\overline{\omega}$ et l'espace linéaire (à 4 dimensions) $\overline{\Omega}$ polaire de $\overline{\omega}$ relativement à V_4^2 : les transformations conformes sont donc représentées par les transformations homographiques de S_5 qui laissent invariants $\overline{\omega}$, V_4^2 et $\overline{\Omega}$; l'espace $\overline{\Omega}$ subit un glissement sur lui-même, ce qui introduit bien les 10 paramètres.

Ceci explique pourquoi Corrado Segre a introduit pour représenter V_3^2 dans l'espace S_4 non pas 5 coordonnées homogènes strictement, mais 6 $x_1, \ldots, x_6$ liées par la relation

$$\sum_1^6 x_i = 0,$$

tandis que V_3^2 est représentée par l'équation

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0.$$

En réalité, la figure est contenue dans l'espace à 6 dimensions, avec une quadrique V_4^2,

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0$$

et l'on considère les transformations homographiques qui laissent invariantes V_4^2 et l'espace $\overline{\Omega}$,

$$\sum_1^6 x_i = 0.$$

Ayant ainsi apporté ma modeste contribution à cette étude, je vais maintenant présenter rapidement les derniers résultats déduits par M. B. Segre des résultats dus à l'étude que Corrado Segre a faite de la variété cubique V_3^3 définie par les deux équations

$$\sum_1^6 x_i^3 = 0, \qquad \sum_1^6 x_i = 0.$$

4. *Variété cubique à* 10 *points doubles de l'espace à* 4 *dimensions. Systèmes de* 30 *cercles.* — La variété cubique

$$\sum_1^6 x_i^3 = 0, \qquad \sum_1^6 x_i = 0$$

de Corrado Segre admet 10 points doubles dont je dresse le tableau en les appelant $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$; en face de chaque point F_i j'écris ses coordonnées homogènes :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
F_1	1	1	1	-1	-1	-1
F_2	1	1	-1	1	-1	-1
F_3	1	1	-1	-1	1	-1
F_4	1	1	-1	-1	-1	1
F_5	1	-1	1	1	-1	-1
F_6	1	-1	1	-1	1	-1
F_7	1	-1	1	-1	-1	1
F_8	1	-1	-1	-1	1	1
F_9	1	-1	-1	1	-1	1
F_{10}	1	-1	-1	1	1	-1

Elle contient 15 plans que j'appellerai $\omega_i (i = 1, \ldots, 15)$:

ω_1	$x_1 + x_2 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$	$x_5 + x_6 = 0$
ω_2	$x_1 + x_2 = 0$	$x_3 + x_5 = 0$	$x_4 + x_6 = 0$
ω_3	$x_1 + x_2 = 0$	$x_3 + x_6 = 0$	$x_4 + x_5 = 0$
ω_4	$x_1 + x_3 = 0$	$x_2 + x_4 = 0$	$x_5 + x_6 = 0$
ω_5	$x_1 + x_3 = 0$	$x_2 + x_5 = 0$	$x_4 + x_6 = 0$
ω_6	$x_1 + x_3 = 0$	$x_2 + x_6 = 0$	$x_4 + x_5 = 0$
ω_7	$x_1 + x_4 = 0$	$x_2 + x_3 = 0$	$x_5 + x_6 = 0$
ω_8	$x_1 + x_4 = 0$	$x_2 + x_5 = 0$	$x_3 + x_6 = 0$
ω_9	$x_1 + x_4 = 0$	$x_2 + x_6 = 0$	$x_3 + x_5 = 0$
ω_{10}	$x_1 + x_5 = 0$	$x_2 + x_3 = 0$	$x_4 + x_6 = 0$
ω_{11}	$x_1 + x_5 = 0$	$x_2 + x_4 = 0$	$x_3 + x_6 = 0$
ω_{12}	$x_1 + x_5 = 0$	$x_2 + x_6 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$
ω_{13}	$x_1 + x_6 = 0$	$x_2 + x_3 = 0$	$x_4 + x_5 = 0$
ω_{14}	$x_1 + x_6 = 0$	$x_2 + x_4 = 0$	$x_3 + x_5 = 0$
ω_{15}	$x_1 + x_6 = 0$	$x_2 + x_5 = 0$	$x_3 + x_4 = 0$

On a 15 homographies biaxiales harmoniques changeant V_3^3 en elle-même, ainsi que la quadrique V

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0, \quad \sum_1^6 x_i = 0,$$

en considérant successivement chaque plan ω_i; ainsi l'homographie d'axes

$$\omega_1 \ldots\ldots \quad x_1+x_2=0, \quad x_3+x_4=0, \quad x_5+x_6=0 \quad (\text{plan}),$$
$$\delta_1 \ldots\ldots \quad x_1=x_2, \quad x_3=x_4, \quad x_5=x_6 \quad (\text{droite}),$$

a pour équations

$$X_1=x_2, \quad X_2=x_1, \quad X_3=x_4, \quad X_4=x_3, \quad X_5=x_6, \quad X_6=x_5.$$

Nous allons maintenant considérer 30 espaces que j'appellerai I_1, I_2, II_1, II_2, ..., XV_1, XV_2, tangents à V_3^2, avec les coordonnées de leur point de contact correspondant

I_1	$x_1+x_2=j\,(x_3+x_4)$	1	1	j^2	j^2	j	j
I_2	$x_1+x_2=j^2(x_3+x_4)$	1	1	j	j	j^2	j^2
II_1	$x_1+x_2=j\,(x_3+x_5)$	1	1	j^2	j	j^2	j
II_2	$x_1+x_2=j^2(x_3+x_5)$	1	1	j	j^2	j	j^2
III_1	$x_1+x_2=j\,(x_3+x_6)$	1	1	j^2	j	j	j^2
III_2	$x_1+x_2=j^2(x_3+x_6)$	1	1	j	j^2	j^2	j
IV_1	$x_1+x_3=j\,(x_2+x_4)$	1	j^2	1	j^2	j	j
IV_2	$x_1+x_3=j^2(x_2+x_4)$	1	j	1	j	j^2	j^2
V_1	$x_1+x_3=j\,(x_2+x_5)$	1	j^2	1	j	j^2	j
V_2	$x_1+x_3=j^2(x_2+x_5)$	1	j	1	j^2	j	j^2
VI_1	$x_1+x_3=j\,(x_2+x_6)$	1	j^2	1	j	j	j^2
VI_2	$x_1+x_3=j^2(x_2+x_6)$	1	j	1	j^2	j^2	j
VII_1	$x_1+x_4=j\,(x_2+x_3)$	1	j^2	j^2	1	j	j
VII_2	$x_1+x_4=j^2(x_2+x_3)$	1	j	j	1	j^2	j^2
$VIII_1$	$x_1+x_4=j\,(x_2+x_5)$	1	j^2	j	1	j^2	j
$VIII_2$	$x_1+x_4=j^2(x_2+x_5)$	1	j	j^2	1	j	j^2
IX_1	$x_1+x_4=j\,(x_2+x_6)$	1	j^2	j	1	j	j^2
IX_2	$x_1+x_4=j^2(x_2+x_6)$	1	j	j^2	1	j^2	j
X_1	$x_1+x_5=j\,(x_2+x_3)$	1	j^2	j^2	j	1	j
X_2	$x_1+x_5=j^2(x_2+x_3)$	1	j	j	j^2	1	j^2
XI_1	$x_1+x_5=j\,(x_2+x_4)$	1	j^2	j	j^2	1	j
XI_2	$x_1+x_5=j^2(x_2+x_5)$	1	j	j^2	j	1	j^2
XII_1	$x_1+x_5=j\,(x_2+x_6)$	1	j^2	j	j	1	j^2
XII_2	$x_1+x_5=j^2(x_2+x_6)$	1	j	j^2	j^2	1	j
$XIII_1$	$x_1+x_6=j\,(x_2+x_3)$	1	j^2	j^2	j	j	1
$XIII_2$	$x_1+x_6=j^2(x_2+x_3)$	1	j	j	j^2	j^2	1
XIV_1	$x_1+x_6=j\,(x_2+x_4)$	1	j^2	j	j^2	j	1
XIV_2	$x_1+x_6=j^2(x_1+x_4)$	1	j	j^2	j	j^2	1
XV_1	$x_1+x_6=j\,(x_2+x_5)$	1	j^2	j	j	j^2	1
XV_2	$x_1+x_6=j^2(x_2+x_5)$	1	j	j^2	j^2	j	1

On voit que chaque espace correspond, dans ce tableau, au plan ω de même numéro. J'appelle les points de contact correspondants 1_1, 1_2, ..., 15_1, 15_2. Je donne maintenant en regard de chaque point les 8 points qui sont avec lui sur une même génératrice de V_3^2; on remarquera d'ailleurs que de chaque point partent simplement 4 génératrices de V_3^2. Pour simplifier, je ne fais le tableau que pour les points d'indice inférieur égal à 1 dans la première colonne : pour les autres, il suffit de changer tous les indices inférieurs 1 en 2 et inversement.

On obtient ainsi :

1_1	5_2	6_2	8_2	9_2	10_1	11_1	13_1	14_1
2_1	4_2	6_2	7_1	8_1	11_2	12_2	13_1	15_1
3_1	4_2	5_2	7_1	9_1	10_1	12_1	14_2	15_2
4_1	2_2	3_2	8_1	9_1	10_1	12_2	13_1	15_2
5_1	1_2	3_2	7_1	9_2	11_1	12_1	13_1	14_2
6_1	1_2	2_2	7_1	8_2	10_1	11_2	14_1	15_1
7_1	2_1	3_1	5_1	6_1	11_1	12_2	14_1	15_2
8_1	1_2	2_1	4_1	6_2	10_1	12_1	13_2	14_1
9_1	1_2	3_1	4_1	5_2	10_2	11_1	13_1	15_1
10_1	1_1	3_1	4_1	6_1	8_1	9_2	14_2	15_1
11_1	1_1	2_1	5_1	6_2	7_1	9_1	13_2	15_1
12_1	2_2	3_1	4_2	5_1	7_2	8_1	13_1	14_1
13_1	1_1	2_1	4_1	5_1	8_2	9_1	11_2	12_1
14_1	1_1	3_2	5_2	6_1	7_1	8_1	10_2	12_1
15_1	2_1	3_2	4_2	6_1	7_2	9_1	10_1	11_1

L'inspection du tableau prouve que la génératrice $1_1 5_2$ porte 14_1 encore car les lignes 1_1 et 5_2 ont en commun 14_1.

Nous avons maintenant 6 biquintuples de points : pour simplifier je ne vais, dans la colonne de gauche, que donner les points sommets d'une même pyramide : on compléterait en changeant ensuite tous les indices inférieurs.

1_1	5_2	9_2	11_1	13_1
5_1	1_2	9_2	11_1	13_1
9_1	5_2	1_2	11_1	13_1
11_2	5_2	9_2	1_2	13_1
13_2	5_2	9_2	11_1	1_2
1_1	6_2	8_2	10_1	14_1
6_1	1_2	8_2	10_1	14_1
8_1	6_2	1_2	10_1	14_1
10_2	6_2	8_2	1_2	14_1
14_2	6_2	8_2	10_1	1_2
5_1	3_2	7_1	12_1	14_2
3_1	5_2	7_1	12_1	14_2
7_2	3_2	5_2	12_1	14_2
12_2	3_2	7_1	5_2	14_2
14_1	3_2	7_1	12_1	5_2
9_1	3_1	4_1	10_2	15_1
3_2	9_2	3_2	10_2	15_1
4_2	3_1	9_2	10_2	15_1
10_1	3_1	4_1	9_2	15_1
15_2	3_1	4_1	10_2	9_2
11_2	2_1	6_1	7_2	15_2
2_2	11_1	6_1	7_2	15_2
6_2	2_1	11_1	7_2	15_2
7_1	2_1	6_1	11_1	15_2
15_1	2_1	6_1	7_2	11_1
13_2	2_2	4_2	8_1	12_2
2_1	13_1	4_2	8_1	12_2
4_1	2_2	13_1	8_1	12_2
8_2	2_2	4_2	13_1	12_2
12_1	2_2	4_2	8_1	13_1

Étudions maintenant la pyramide I et celle qui lui est associée :

Biquintuple I.

(1_1)	A_1	1	1	j^2	j^2	j	j
	B_1	1	1	j	j	j^2	j^2
(5_1)	A_2	1	j^2	1	j	j^2	j
	B_2	1	j	1	j^2	j	j^2
(9_1)	A_3	1	j^2	j	1	j	j^2
	B_3	1	j	j^2	1	j^2	j
(11_2)	A_4	1	j	j^2	j	1	j^2
	B_4	1	j^2	j	j^2	1	j
(13_2)	A_5	1	j	j	j^2	j^2	1
	B_5	1	j^2	j^2	j	j	1

Les plans désignés plus haut par ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 et les droites désignées par r_1, r_2, r_3 sont : d'abord les plans

(ρ_1) $\quad x_1+x_2=0, \quad x_3+x_4=0, \quad x_5+x_6=0,$

(ρ_2) $\quad x_1+x_3=0, \quad x_2+x_5=0, \quad x_4+x_6=0,$

(ρ_3) $\quad x_1+x_4=0, \quad x_2+x_6=0, \quad x_3+x_5=0,$

(ρ_4) $\quad x_1+x_5=0, \quad x_2+x_4=0, \quad x_3+x_6=0,$

(ρ_5) $\quad x_1+x_6=0, \quad x_2+x_3=0, \quad x_4+x_5=0;$

et puis les droites

(r_1) $\quad x_1=x_2, \quad x_3=x_4, \quad x_5=x_6,$

(r_2) $\quad x_1=x_3, \quad x_2=x_5, \quad x_4=x_6,$

(r_3) $\quad x_1=x_4, \quad x_2=x_6, \quad x_3=x_5,$

(r_4) $\quad x_1=x_5, \quad x_2=x_4, \quad x_3=x_6,$

(r_5) $\quad x_1=x_6, \quad x_2=x_3, \quad x_4=x_5.$

Nous allons vérifier ici que les 5 plans asssociés du biquintuple I ont, non pas simplement ∞^1 droites les rencontrant (ce qui est le cas normal pour 5 plans quelconques) mais ∞^2 droites et que ces droites engendrent V_3^3. Ici ces droites ont pour équations [ρ, σ paramètres variables]

$$x_1 + x_4 + \frac{1-\rho}{(\sigma-1)\rho}(x_2 + x_6) = 0,$$
$$x_1 + x_5 + \rho\,(x_2 + x_4) = 4,$$
$$x_1 + x_6 + \sigma\,(x_2 + x_3) = 0,$$

et ces équations entraînent

$$x_1 + x_2 + \frac{\sigma\rho - 1}{\sigma\rho}(x_3 + x_4) = 0,$$
$$x_1 + x_3 + \frac{(1-\rho)\sigma}{\sigma - 1}(x_2 + x_5) = 0.$$

Ces formes d'équations montrent bien que chaque droite rencontre les plans ρ_i.

Nous allons maintenant indiquer les 10 plans ρ_{ik} de la théorie générale, pour le biquintuple 1. Nous avons vu l'identification de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5. On trouve aisément les coïncidences

ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}	ρ_{15}	ρ_{23}	ρ_{24}	ρ_{25}	ρ_{34}	ρ_{35}	ρ_{45}
ω_1	ω_5	ω_9	ω_{11}	ω_{13}	ω_{14}	ω_{10}	ω_6	ω_8	ω_3	ω_7	ω_{12}	ω_{15}	ω_4	ω_2

de sorte que les plans ρ_i et ρ_{ik} sont le total des 15 plans de V_3^3.

On constate aisément, toujours en étudiant le biquintuple 1, que le plan ρ_1 coupe bien chaque plan ρ_{23}, ρ_{24}, ρ_{25}, ρ_{34}, ρ_{35}, ρ_{45} suivant une droite. Les droites (ρ_1, ρ_{34}), (ρ_1, ρ_{35}), (ρ_1, ρ_{45}) ont en commun le point P_{12} qui n'est autre que F_{10}; de même on trouve les points

$$[(\rho_1, \rho_{24}), (\rho_1, \rho_{25}), (\rho_1, \rho_{45})] = P_{13} = F_7,$$
$$[(\rho_1, \rho_{23}), (\rho_1, \rho_{25}), (\rho_1, \rho_{25})] = P_{14} = F_9,$$
$$[(\rho_1, \rho_{23}), (\rho_1, \rho_{24}), (\rho_1, \rho_{34})] = P_{15} = F_6,$$
$$[(\rho_2, \rho_{14}), (\rho_2, \rho_{15}), (\rho_2, \rho_{45})] = P_{23} = F_8,$$
$$[(\rho_2, \rho_{13}), (\rho_2, \rho_{15}), (\rho_2, \rho_{35})] = P_{24} = F_4,$$
$$[(\rho_2, \rho_{13}), (\rho_2, \rho_{14}), (\rho_2, \rho_{34})] = P_{25} = F_2,$$
$$[(\rho_3, \rho_{12}), (\rho_3, \rho_{15}), (\rho_3, \rho_{25})] = P_{34} = F_1,$$
$$[(\rho_3, \rho_{12}), (\rho_3, \rho_{14}), (\rho_3, \rho_{24})] = P_{35} = F_3,$$
$$[(\rho_4, \rho_{12}), (\rho_4, \rho_{13}), (\rho_4, \rho_{23})] = P_{45} = F_5.$$

On n'oubliera pas d'ailleurs que chaque point ainsi obtenu peut être défini d'une seconde manière en échangeant les rôles de i et k. Ainsi on a aussi

$$F_{10} = P_{12} = [(\rho_2, \rho_{34}), (\rho_2, \rho_{35}), (\rho_2, \rho_{45})].$$

Ceci suffit pour montrer que l'un quelconque des 6 biquintuples associés suffit pour retrouver les 5 autres et que ce sont toujours les 10 points doubles de V_3^3 et les 15 plans de V_3^3 que l'on retrouve, avec une interprétation différente.

On vérifiera aisément que l'homographie [23][45] est l'homographie involutive harmonique ayant pour axes

la droite :	$x_1 = 0$,	$x_2 = 0$,	$x_4 + x_3 = 0$,	$x_5 + x_6 = 0$,
le plan :	—	—	$x_4 = x_3$,	$x_5 = x_6$,

et a pour équations

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_4, \quad X_4 = x_3, \quad X_5 = x_6, \quad X_6 = x_5.$$

D'autre part, en appelant 1, 2, 3, 4, 5, 6 les 6 biquintuples de points, une pyramide du biquintuple i a ses sommets représentés par (ik), (il), (im), (in), (ip) où k, l, m, n, p sont avec i les 6 entiers de 1 à 6 et la pyramide associée a ses sommets représentés par (ki), (li), (mi), (ni), (pi). Je forme alors le tableau qui indique les sommets des 6 biquintuples

$(12) = 1_1$,	$(13) = 5_1$,	$(14) = 9_1$,	$(15) = 11_2$,	$(16) = 13_2$,
$(21) = 1_2$,	$(31) = 5_2$,	$(41) = 9_2$,	$(51) = 11_1$,	$(61) = 13_1$.
	$(23) = 14_1$,	$(24) = 10_1$,	$(25) = 6_2$,	$(26) = 8_2$,
	$(32) = 14_2$,	$(42) = 10_2$,	$(52) = 6_1$,	$(62) = 8_1$,
		$(34) = 3_2$,	$(35) = 7_1$,	$(36) = 12_1$,
		$(43) = 3_1$,	$(53) = 7_2$,	$(63) = 12_2$,
			$(45) = 15_1$,	$(46) = 4_1$,
			$(54) = 15_2$,	$(64) = 4_2$,
				$(56) = 2_1$,
				$(64) = 2_2$.

On a ainsi 30 points deux à deux opposés; nous pouvons appeler $\bar{r}_{ts}$ la droite qui joint les sommets opposés (ts) et (st) et $\bar{\rho}_{ts}$ le plan polaire de $\bar{r}_{ts}$ par rapport à V_3^2; t et s prennent toutes les valeurs de 1 à 6, avec $t \neq s$. L'homographie harmonique biaxiale d'axes $\bar{r}_{ts}$ et $\bar{\rho}_{ts}$ échange le biquintuple s avec le biquintuple t et échange chacun des autres avec lui-même. Les 15 plans $\bar{\rho}_{ts}$ sont les 15 plans de V_3^3.

Si l'on prend 3 nombres s, t, u différents, les 3 points (st), (tu), (us) sont sur une même génératrice de V_3^2 que nous appellerons

$$(stu) = (tus) = ust).$$

Les 30 *points* (st) *sont distribués sur* 40 *droites de* V_3^2; *chacune de ces droites contient* 3 *points et de chacun d'eux sont issues* 4 *droites formant sur* V_3^2 *un quadruple équianharmonique.*

La figure formée par les 30 *points* (st) *est changée en elle-même par un groupe de* 720 *homographies, holoédriquement isomorphe au groupe des substitutions sur les nombres* 1, 2, ..., 6.

Dans un plan nous avons donc un premier biquintuple de cycles tels que chacun soit tangent à 4 *cycles contigus, les points de contact formant sur lui un quadruple équianharmonique. Ce biquintuple détermine* 5 *biquintuples nouveaux : on a ainsi* 30 *cycles dont chacun touche* 8 *autres; les* 30 *cycles peuvent être répartis en* 6 *biquintuples, chaque cycle appartenant à* 2 *biquintuples; trois par trois les cycles se touchent en un même point; chaque cycle ne porte que* 4 *points de contact*, et ces points réunis sont au nombre de 40.

Dans l'espace on obtient 30 *cycles réels dont chacun est paratactique à* 8 *autres* $\left(\text{l'angle de parataxie étant égal à } \frac{\pi}{3}\right)$; *ces* 30 *cycles sont répartis en* 6 *biquintuples*, ...

J'ajoute à ces propriétés un dernier mot : de même que si nous avons une quadrique V_2^2 plongeant dans l'espace euclidien ordinaire S_3, nous pouvons par perspective stéréographique, réduire l'étude de V_2^2 à celle d'un plan euclidien S_2 ordinaire (les génératrices de V_2^2 étant remplacées par les droites issues dans S_2 de l'un ou l'autre de deux points fixes I, J), de même dans l'espace S_4 où baigne la quadrique V_3^2, nous pouvons effectuer une perspective stéréographique qui remplace V_3^2 par un espace euclidien ordinaire S_3, les génératrices de V_3^2 étant remplacées par des droites qui rencontrent toutes une conique fixe. Cette propriété signalée par M. B. Segre est précisément celle qui remplace l'étude faite du point de vue de M. B. Segre par l'étude que j'ai adoptée dans mon Mémoire cité plus haut du *Bulletin des Sciences mathématiques*. On a des droites rencontrant toutes une même conique (le cercle de l'infini, mais par homographie le choix de la conique est indifférent). Sur cette conique les 40 droites trouvées plus haut forment, par leur trace, une configuration curieuse de 40 points, chacun pouvant de 3 façons différentes être associé à 3 autres donnant avec lui un quadruple équianharmonique. En remplaçant les points par leur paramètre (complexe), et marquant dans le plan complexe le point (réel) qui a pour affixe ce paramètre, on a donc une configuration remarquable de 40 points.

Rappelons encore qu'à chaque cycle d'un plan on peut faire correspondre une droite d'un complexe linéaire *donné*, deux cycles tangents ayant pour éléments homologues deux droites *sécantes*.