ERVAND KOGBETLIANTZ

Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 137-221

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__137_0>

RECHERCHES

SUR

LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES D'HERMITE

PAR M. E. KOGBETLIANTZ

(Paris).

SOMMAIRE : I. Inégalités fondamentales pour les polynomes d'Hermite et de Laguerre. — II. Conditions de convergence de la série d'Hermite. Sa sommation par le procédé d'Euler. — III. Moyennes arithmétiques de la série-noyau. Majorantes de Lebesgue. — IV. Sommation (C, δ) de la série d'Hermite. Superposition du procédé d'Euler sur celui (C, δ). — V. Phénomène de Gibbs. Théorème de Parseval. — VI. Sommabilité (C, δ) de la série de Laguerre au point $x = 0$.

Introduction.

Les polynomes d'Hermite

(H) $\quad H_0(x) \equiv 1, \quad H_1(x) \equiv -2x, \quad H_2(x) \equiv 4x^2 - 2, \quad \ldots, \quad H_n(x), \quad \ldots$

sont définis par la fonction génératrice e^{-z^2-2xz} :

$$e^{-z^2-2xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

Ils sont orthogonaux dans l'intervalle infini $(-\infty, \infty)$ avec le poids $p(x) = e^{-x^2}$:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (n = m), \end{cases}$$

ce qui donne pour $f(x)$ le développement formel suivant :

$$(2) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_n(u)\, du.$$

Ce développement joue un rôle important dans les études statistiques, tant théoriques ([1]) qu'appliquées ([2]).

L'étude de conditions suffisantes de *convergence* de (2) a fait l'objet de nombreux travaux (voir la liste de ces travaux à la fin du Mémoire). Elle se heurtait toujours aux difficultés que comportent les régions à l'infini de l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Au contraire, si l'on suppose la fonction développée $f(x)$ identiquement nulle en dehors d'un intervalle fini, soit pour $|x| \geqq a$ où a est aussi grand qu'on veut, mais *fixe*, le problème se simplifie considérablement, et déjà, en 1906, Adamoff a démontré que, dans ce cas particulier, la série (2) est équiconvergente à la série trigonométrique de Fourier d'une fonction qui coïncide avec $f(x)$ au voisinage immédiat $(x_0 - h, x_0 + h)$ de la valeur considérée x_0 de x.

Ce résultat d'Adamoff a été généralisé vingt ans après par Szegö pour une fonction $f(x)$ définie dans $(-\infty, \infty)$, mais Szegö a été obligé d'imposer à l'allure de $f(x)$ à l'infini la condition $f(x) = O[|x|^{O(1)}]$ pour $|x| \to \infty$. Or, on verra dans la suite (§ 2) qu'il suffit de supposer

$$f(x) = O\left[|x|^{-\varepsilon} e^{\frac{x^2}{2}}\right] \qquad \text{pour} \qquad |x| \to \infty,$$

où $\varepsilon > 0$ est aussi petit qu'on veut mais fixe, pour assurer, quant à l'allure de $f(x)$ à l'infini, la convergence du développement (2). En général, on peut dire que la formule approchée de $H_n(x)$ donnée par Adamoff a permis (Szegö, Cramer, Uspensky) de résoudre définitivement la question de condition de convergence en ce qui concerne l'allure de $f(x)$ dans tout intervalle *fini*, $-a \leqq x \leqq +a$, et ce qui va nous intéresser dans ce travail, c'est l'étude des conditions relatives à l'allure de $f(x)$ à l'*infini*, suffisantes pour assurer la convergence ou la sommabilité de son développement (2).

Les meilleures conditions de *convergence* ont été formulées par

---

([1]) H. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*, p. 115 et 118 (Leipzig, Teubner, 1906).

([2]) E. Czuber, *Mitteil. Œst.-Hung. Verband der Privat-Versich.-Anst.*, t. 3, 1907, p. 1.

C.-V.-L. Charlier, *Traité du Calcul des Probabilités*, par E. Borel, t. II, fasc. IV, Chap. III, p. 41-92 (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

Cramer (1925) et Uspensky (1927). D'après Uspensky, l'existence des deux intégrales

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2}[f(u)]^2\,du < G \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-u^2}[f(u)]^2\,du < G$$

suffit pour assurer la convergence, tandis que chez Cramer elles sont remplacées par celles

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\,du < G \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\,du < G,$$

où a et G sont deux constantes positives arbitraires.

En 1926, Hille a sommé la série (2) par le procédé d'Abel-Poisson sous l'unique condition d'intégrabilité dans $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) du produit $e^{-u^2}|f(u)|$.

On voit combien large est la condition de Hille comparativement à celle (4). A l'aide des inégalités fondamentales établies dans la suite, on constate facilement que la condition

$$f(x) = O\left[e^{x^2\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right] \qquad \text{pour } |x| \to \infty$$

assure (faisant abstraction de l'allure de $f(x)$ dans les intervalles finis) la convergence absolue et uniforme de (2) si $\varepsilon > 0$.

Au contraire, le développement (2) de la fonction e^{qx^2} avec $q > \frac{1}{2}$ diverge pour toute valeur de x comme la progression géométrique à l'extérieur de l'intervalle $(-1, +1)$. Ainsi, le problème de conditions de *convergence* et, comme on le verra dans la suite, de *sommabilité* (C, δ) par les moyennes arithmétiques correspond aux fonctions $f(x)$ du type $O\left[e^{\frac{x^2}{2}}\varphi(x)\right]$, où $\varphi(x)$ croît comme une puissance de x. A ce point de vue, les conditions (3) ou (4) ne sont pas adéquates à la structure du système orthogonal (H), et le fait que la série (2) de $f(x) = x^{-\varepsilon}e^{\frac{x^2}{2}}$, par exemple, est convergente malgré la divergence des intégrales (3) et (4) le fait voir clairement. Pour les fonctions $f(x)$ du type $O(e^{qx^2})$ pour $|x| \to \infty$ avec $\frac{1}{2} < q < \frac{3}{4}$, on doit recourir au procédé d'Euler pour sommer la série (2) comme nous l'avons démontré au paragraphe 2. Il est très probable que le cas $q = \frac{3}{4}$, pour lequel le procédé d'Euler est à son tour trop faible, sera vaincu à l'aide du procédé de Borel, et nous posons ici ce problème, ainsi que le problème général de sommation des séries (2) pour $\frac{3}{4} \leqq q < 1$ par des procédés autres que le procédé d'Abel-Poisson, très peu commode en pratique.

Revenant aux conditions de convergence, observons que l'inégalité bien connue

$$(5) \qquad H_n(x) = O\left\{ \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}} \right\} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

qui n'était démontrée que pour $|x| \leqq \sqrt{\frac{n}{2}}$, est valable comme nous le prouvons au paragraphe 1 pour x *quelconque* dans $(-\infty, \infty)$. Or, pour $|x| \geqq \sqrt{\frac{n}{2}}$, on n'avait jusqu'à présent que l'inégalité moins précise (Cramer)

$$H_n(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}\right).$$

Cette simple remarque, basée sur le fait que pour $|x|\sqrt{2} \geqq \sqrt{n}$ le polynome $H_n(x)$ satisfait à l'inégalité

$$|H_n(x)| \leqq (2|x|)^n \sqrt{2^n} \qquad \left(|x| \geqq \sqrt{\frac{n}{2}}\right),$$

nous a permis de prouver que la convergence de (2), ainsi que son équiconvergence à la série trigonométrique de Fourier, sont assurées par l'existence des deux intégrales suivantes :

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{|u|} < G \quad \text{et} \quad \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{u} < G.$$

L'exemple de la fonction (*voir* § 4)

$$(7) \qquad F_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{H_{n!}(x)\sqrt{n!}}{\sqrt{2^{n!} n!}}$$

qui est continue partout et $O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ pour $|x| \to \infty$ grâce à l'inégalité (5), prouve que le fait $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ ne peut assurer plus que la convergence, car la série (2) de $F_0(x)$, qui est celle (7), n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta < 0$. D'autre part, $F_0(x)$ satisfait pour tout ordre positif $\delta > 0$ aux conditions suffisantes :

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{|u|^{1+2\delta}} < G, \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{u^{1+2\delta}} < G$$

de sommabilité $(C, \delta \geqq 0)$ de (2), établies au paragraphe 4. Sa série (7) est non seulement sommable $(C, \delta > 0)$, mais elle converge partout absolument et uniformément.

La question, si la condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ est suffisante pour la convergence de (2), reste ouverte. A notre avis, la réponse à cette question serait plutôt négative, et la construction d'un exemple prouvant cette assertion, présente un grand intérêt ([1]). De même, la fonction

$$(9) \qquad F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (n!)^{\alpha+\frac{1}{2}} L_{n!}^{\left[-\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}(x^2)$$

(*voir* § 4), définie par la série (9) absolument et uniformément convergente pour toute valeur de x dans $(-\infty, \infty)$, où $L_n^{(\beta)}(x)$ désigne le polynome de Laguerre

$$\sum_0^\infty L_n^{(\beta)}(x) z^n = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\beta+1}},$$

possède le développement (2) qui n'est nulle part sommable $(C, \delta < \alpha)$, malgré le fait que pour $|x| \to \infty$, on a

$$(10) \qquad F_\alpha(x) = O\left[|x|^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right] \qquad (|x| \to \infty).$$

On voit que $F_\alpha(x)$ vérifie la condition (8) pour $\delta > \alpha$, donc son développement (2) est partout sommable $(C, \delta > \alpha)$. Ainsi, la condition du type (10),

$$(11) \qquad f(x) = O\left(|x|^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right),$$

([1]) Voir *C. R. Acad. Sc.*, séance du 11 janvier 1932, t. 194, p. 161, ainsi que la Note ajoutée à la fin de ce travail.

ne peut pas assurer $(C, \delta < \alpha)$, tout en assurant la sommabilité $(C, \delta > \alpha)$. La question, si (11) suffit pour assurer $(C, \delta = \alpha)$, reste ouverte, et il serait intéressant de prouver qu'elle est suffisante pour $(C, \delta = \alpha)$, comme cela nous paraît probable si $\alpha > 0$.

En ce qui concerne l'allure de $f(x)$ dans tout intervalle fini, il suffit de supposer $f(x)$ intégrable $(\mathcal{L})$ dans $(-a, a)$ pour assurer la sommabilité de (2) par les moyennes arithmétiques de tout ordre positif δ.

On a ainsi le théorème général suivant :

I. *Partout à l'intérieur de* $(-\infty, \infty)$, *le développement* (2) *d'une fonction* $f(x)$, *intégrable* $(\mathcal{L})$ *dans tout intervalle fini, est sommable* $(C, \delta > 0)$ *avec la somme* $\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$, *pourvu que l'ordre* δ *de moyennes soit suffisamment grand pour rendre le produit*

$$(12) \qquad |x|^{-(1+2\delta)} e^{-\frac{x^2}{2}} |f(x)|$$

intégrable dans $(-\infty, -a)$ *et* (a, ∞), *a étant quelconque mais fini.*

Le procédé d'Euler, dont la supériorité par rapport à celui (C, δ) au point de vue des conditions imposées à l'allure de $f(x)$ à l'infini, a été déjà précisée plus haut, est inférieur à (C, δ) en ce qui concerne l'allure de $f(x)$ dans un intervalle fini. On établit, en effet (§ 2), qu'à ce dernier point de vue, la transformation d'Euler est inopérante, et les conditions de convergence de la série transformée sont les mêmes que celles de la série (2) elle-même en ce qui concerne l'allure de $f(x)$ dans $-a < x < a$.

On a plus précisément le théorème suivant :

II. *La série d'Hermite d'une fonction* $f(x)$, *vérifiant dans tout intervalle fini* $-a \leqq x \leqq a$ *les conditions assurant la convergence de cette série* (2), *est sommable* (E, k) *pour* $k \log 2 \geqq \log\left(\frac{1}{3-4q}\right)$, *pourvu que les deux intégrales*

$$(13) \qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{|u|} < G \quad \text{et} \quad \int_{a}^{\infty} e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{u} < G \qquad \left(q < \frac{3}{4}\right)$$

soient finies.

La superposition des deux procédés (C, δ) et (E, k) permet de sommer (2) si $f(x)$, intégrable ($\mathfrak{L}$) dans tout intervalle fini, vérifie les conditions

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{-a} e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{|u|^{1+2\delta}} < G \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{u^{1+2\delta}} < G,$$

l'ordre des moyennes d'Euler, k, étant non inférieur au quotient de $\log\left(\frac{1}{3-4q}\right)$ par $\log 2$. Cette superposition des deux procédés de sommation n'est utile pour élargir la classe de fonctions $f(x)$ à développement (2) sommable par le procédé d'Euler qu'au point de vue de conditions relatives à l'intervalle fini $-a < x < a$.

En effet, si pour $q = q_0 \left(q_0 < \frac{3}{4}\right)$ et δ suffisamment grand $f(x)$ vérifie (14) sans vérifier (13), ces dernières conditions (13) sont *a fortiori* vérifiées pour $q = q_0 + \varepsilon < \frac{3}{4}$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

Les résultats énoncés plus haut sont obtenus grâce à l'étude de la série-noyau

$$(15) \qquad 0 \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, H_n(u)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \qquad (x \neq u)$$

du développement (2) qui représente, malgré sa divergence, zéro pour $x \neq u$, sommée par tel ou tel autre procédé de sommation. En général, on peut dire que la méthode directe basée sur l'étude de la série-noyau

$$(16) \qquad \sum_{0}^{\infty} \varphi_n(x)\, \varphi_n(u) \qquad (x \neq u)$$

est préférable, si l'on veut établir les conditions suffisantes minimales de sommabilité du développement formel de $f(x)$,

$$(17) \qquad f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_n\, \varphi_n(x) \qquad \text{où } c_n = \int_a^b f(u)\, \varphi_n(u)\, du$$

suivant les fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ d'un système normé.

En procédant ainsi, on atteint le but avec des conditions beaucoup plus larges que celles fournies par la méthode d'équiconvergence et les résultats obtenus sont applicables à une classe de fonctions $f(x)$

plus étendue. L'étude de différents systèmes orthogonaux indique que les séries-noyaux (16), généralement divergentes, sont sommables pour $x \neq u$ avec une somme nulle, sauf pour $x = u$ quand elles divergent essentiellement, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n} \varphi_m^2(x) \doteq +\infty.$$

Cette représentation du zéro par les séries-noyaux est à la base même de la possibilité du fait qu'un développement tel que (17) puisse ne représenter pour $x = x_0$ qu'une *seule* valeur $f(x_0)$ de $f(x)$ dans (a, b), tandis que ses coefficients c_n dépendent de *toutes* les valeurs que prend la fonction développée $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

Dans ce travail nous commençons par établir précisément ce fait fondamental, que la série-noyau (15) représente zéro, étant sommable $(C, \delta > 0)$ avec une somme nulle pour $x \neq u$. Pour $|x - u| \geqq \varepsilon$, la sommabilité de la série-noyau, multipliée par $e^{-\frac{x^2+u^2}{2}}$, est uniforme dans $(-\infty, \infty)$. Il est important de signaler que la série-noyau (15) n'est pas sommable par les procédés d'Euler et de Borel à cause de la lenteur d'oscillations de la suite de ses sommes partielles quand n croît. Nous constatons ensuite que *les majorantes de Lebesgue* $\rho_n^{(\delta)}(x)$ *d'ordre* δ *relatives au système orthogonal* (H) :

$$\rho_n^{(\delta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)| \, du \qquad (\delta \geqq 0),$$

où $S_n^{(\delta)}(x, u)$ désignent les moyennes arithmétiques d'ordre δ des sommes partielles $S_n^{(0)}(x, u)$ de la série-noyau (15), *sont bornées dans leur ensemble pour* $\delta > 0$, *mais augmentent comme* $2\pi^{-2} \log n$ *pour* $n \to \infty$, *si l'on a* $\delta = 0$.

A la base de ces résultats est l'inégalité

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \tag{18}$$

pour le polynome de Laguerre, valable pour toute valeur de α et quel que soit x dans $(0, \infty)$. Elle est démontrée au paragraphe 1, ainsi que l'inégalité

$$n! \, |L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq (2x)^n \qquad (x \geqq n + \alpha), \tag{19}$$

qui n'est valable que pour $x \geqq n+\alpha$ et qui entraîne (18) *a fortiori* pour $x > kn$, k désignant la racine de l'équation

$$k = 2(1+\log 2+\log k),$$

c'est-à-dire $k = 7,3\ldots < e^2$.

L'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur l'ordre de sommabilité (C, δ) de sa série d'Hermite (2), mise en évidence par la condition d'intégrabilité du produit (12) dans $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) est le phénomène de Darboux très bien connu pour d'autres systèmes orthogonaux (¹). Le fait que cette influence ne se fait point sentir pour les fonctions $f(x)$ telles que l'on ait pour $|x| \to \infty$

$$f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right),$$

le développement (2) étant dans ce cas sommable (C, δ) pour *toute* valeur positive de δ, s'explique ainsi : la série d'Hermite est le cas limite pour $\lambda \to \infty$ du développement ultrasphérique de $\varphi(x)$ dans l'intervalle fini $(-1, +1)$

$$(20)\qquad \varphi(x) \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_0^\infty (n+\lambda)\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{A_n^{(2\lambda)}} \times \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(u)\varphi(u)\,du,$$

où $P_n^{(\lambda)}(x)$ est le polynome ultrasphérique défini par

$$(1-2xz+z^2)^{-\lambda} = \sum_0^\infty P_n^{(\lambda)}(x).z^n,$$

car on a

$$H_n(x) = (-1)^n n! \lim_{\lambda=\infty}\left\{\lambda^{-\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}.$$

On n'a qu'à transformer d'abord l'intervalle $(-1, +1)$ en celui $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$ par la substitution de $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ à la place de la variable x. Les

(¹) E. Kogbetliantz, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XLIX, janvier 1925.

régions à l'infini de l'intervalle $(-\infty, \infty)$ correspondent aux points frontières $x = \pm 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$. Or, dans le système ultrasphérique, le phénomène de Darboux se manifeste dans la non-sommabilité $(C, \delta \leqq 2\gamma - \lambda - 1)$ du développement (20) en un point intérieur de $(-1, +1)$, la fonction développée $\varphi(x)$ étant infinie d'ordre γ pour $x = -1$ ou $x = +1$ [1]. Si l'on pose $\gamma = \frac{\lambda+1}{2}$ les infinitudes de $\varphi(x)$ aux points frontières $x = \pm 1$ n'exercent aucune influence sur la sommabilité $(C, \delta > 0)$ de la série (20) à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$. Or, si pour $|x| \to 1$ on a

$$\varphi(x, \lambda) = O\left[\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^{\lambda+1}}}\right]$$

la substitution de $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ au lieu de x nous donnant à la limite $f(x)$, on en déduit

$$f(x) = \lim_{\lambda=\infty} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\right) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

et la série d'Hermite d'une fonction vérifiant la condition

$$f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

doit aussi être sommable $(C, \delta > 0)$ partout à l'intérieur de $(-\infty, \infty)$. On voit maintenant d'où provient le fait que l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur la série d'Hermite de $f(x)$ ne commence à se faire sentir qu'à partir du type de croissance $O\left(x^{\varepsilon} e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ avec $\varepsilon > 0$.

Les moyennes $S_n^{(\delta)}(x, u)$ de la série-noyau (15) se distinguent de celles des autres séries-noyaux étudiées jusqu'à présent telles que

$$(21) \qquad 0 \sim \frac{1}{2} + \cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos n\gamma + \ldots \qquad (0 < \gamma < 2\pi),$$

par exemple, ou

$$(22) \qquad 0 \sim \lambda + (1+\lambda) P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad (-1 \leqq x < 1),$$

en ceci qu'elles changent de signe un nombre infini de fois pour $n \to \infty$,

---

(1) E. Kogbetliantz, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LI, 1923, p. 244-295 (voir p. 293).

quelque grand que soit leur ordre δ, tandis que pour toutes les autres séries-noyaux connues on peut toujours indiquer un nombre δ_0 suffisamment grand et tel que pour $\delta \geqq \delta_0$ leurs moyennes ne sont jamais négatives. Ainsi, par exemple, pour les séries (21) et (22) on a respectivement $\delta_0 = 1$ (Féjer) et $\delta_0 = 2\lambda + 1$ [1].

Cette circonstance entraîne une conséquence bien curieuse et qui concerne le phénomène de Gibbs dans le système orthogonal (H). Ce phénomène, qui pour la convergence ordinaire est identique dans la série d'Hermite au même phénomène dans les séries de Fourier, se présente tout autrement pour les moyennes arithmétiques de la série (2), qu'on peut désigner par $f_n^{(\delta)}(x)$. On a notamment pour $\delta \geqq 0$

$$\lim_{n=\infty} f_n^{(\delta)}\left[x \pm \frac{(2+\delta)\pi}{2\sqrt{2n}}\right] = f(x\pm 0) \pm \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}\, l(\delta),$$

où la longueur du « segment de Gibbs », $l(\delta)$ est donnée par

$$l(\delta) = \frac{2^{\delta+1}\Gamma(\delta+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\, du}{\left[u+\pi\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right]^{\delta+1}} \qquad (\delta \geqq 0).$$

Or, $l(\delta)$ n'est jamais nulle quelque grand que soit δ, ce qui prouve que dans le système orthogonal (H) le phénomène de Gibbs persiste malgré la sommation de la série d'Hermite par les moyennes arithmétiques. Quand δ augmente $l(\delta)$ diminue rapidement et pour $\delta \to \infty$ on trouve

$$l(\delta) \sim \frac{\pi^2}{4+\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{8\delta}}\left(\frac{4}{\pi e}\right)^{\delta+2} \qquad (\delta \to \infty).$$

Ainsi, la sommation (C, δ) affecte la longueur $l(0)$ du segment de Gibbs d'autant plus que δ est plus grand, mais le segment ne s'annule jamais quelque grand que soit l'ordre δ des moyennes contrairement à ce que l'on observe dans d'autres systèmes orthogonaux.

Il est intéressant d'observer que la longueur $l(0)$ du segment de Gibbs ne varie point, si l'on somme la série d'Hermite par le procédé d'Euler.

---

[1] E. Kogbetliantz, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, 1924, p. 107-187, § 6.

Dans le dernier paragraphe nous appliquons les résultats obtenus à la série de Laguerre

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} f(t) \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(t)\, dt$$

considérée au point-frontière $x = 0$, c'est-à-dire à la série numérique

$$f(+0) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} f(u) \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(u)\, du. \tag{23}$$

Szegö a montré sa sommabilité $\left(\mathrm{C}, \delta > \alpha + \frac{1}{2}\right)$, si $f(x)$, intégrable (L) dans tout intervalle fini, vérifie, pour $x \to \infty$, la condition

$$f(x) = \mathrm{O}[x^{\mathrm{O}(1)}].$$

Il a montré aussi que les constantes de Lebesgue

$$\rho_n^{(\delta)} = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} | \mathrm{S}_n^{(\delta)}(0, u) |\, du$$

relatives à la série (23) sont bornées seulement pour $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$, mais augmentent indéfiniment quand $n \to \infty$, si $\delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}$. Ainsi, le problème de l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur la sommabilité (C, δ) de (23) ne se pose que pour $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$. Nous avons démontré le théorème suivant :

III. *La série de Laguerre de $f(x)$ est sommable* (C, δ) *au point-frontière $x = 0$ avec la somme $f(+0)$ pour $\delta > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, si l'on a pour $x \to \infty$*

$$f(x) = \mathrm{O}\left(x^{\beta} e^{\frac{x}{2}}\right).$$

En particulier, le résultat de Szegö subsiste pour toutes les fonctions $f(x)$, dont l'allure à l'infini est conditionnée par

$$f(x) = \mathrm{O}\left(e^{\frac{x}{2}}\right).$$

Tous ces résultats ont été exposés dans les Notes des *C. R. Acad. Sc.* (t. 192, 1931, p. 662, 1696, et t. 193, p. 386).

I. — Inégalités fondamentales pour les polynomes d'Hermite et de Laguerre

Les polynomes d'Hermite sont des cas particuliers de ceux de Laguerre, définis par la fonction génératrice suivante :

$$\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = L_0^{(\alpha)}(x) + z\,L_n^{(\alpha)}(x) + \ldots + z^n\,L_n^{(\alpha)}(x) + \ldots$$

En effet, $L_n^{(\alpha)}(x^2)$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ est lié aux polynomes $H_{2n}(x)$ et $H_{2n+1}(x)$ par les relations bien connues

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} H_{2n}\ \ (x) = (-1)^n . 2^{2n} n!\,L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2), \\ H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} . 2^{2n+1}\,n!\,x\,L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2), \end{cases}$$

qu'on vérifie facilement en comparant les expressions explicites des deux polynomes, à savoir

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} (-1)^n\,L_n^{(\alpha)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(n-k+\alpha+1)}\,x^{n-k}, \\ (-1)^n\ \ H_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-2k+1)}\,(2x)^{n-2k}. \end{cases}$$

Par conséquent, il suffit d'étudier le polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$. Féjer a donné en 1909 une formule approchée pour $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$\text{(26)} \quad L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,e^{\frac{x}{2}}\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left\{ \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \right\}$$

uniformément valable dans tout intervalle *fini*, $0 < a \leqq x \leqq b$.

Le raisonnement de Perron permettrait d'en étendre la validité, à l'intervalle $x \leqq n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ et l'inégalité qu'on en déduit

$$\text{(27)} \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right]$$

peut ainsi être démontrée pour $x \leqq n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Mais, nous en aurons besoin dans un intervalle $|x| \leqq k.n$, le nombre positif k étant quelconque mais fini.

Pour établir la validité de cette inégalité fondamentale quel que soit x dans l'intervalle $(0, n)$, partons de la formule connue

$$x^{\alpha} e^{-x} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}]$$

qui donne

$$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^{x}}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{z^{n+\alpha} e^{-z} \, dz}{(z-x)^{n+1}},$$

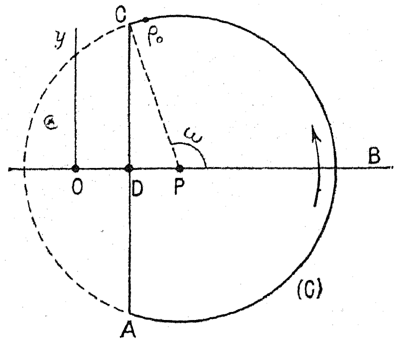

Fig. 1.

le chemin d'intégration étant une courbe fermée C entourant dans le plan complexe z le point P sur l'axe $\overline{\mathrm{OX}}$ d'abscisse positive x, $0 < x < n$. Prenons comme contour d'intégration C l'arc ABC du cercle de rayon $r = \sqrt{nx} > x$ et de centre P et la corde CDA de cet arc, défini par la condition que l'abscisse OD du milieu D de cette corde soit égale à $\frac{x}{2}$. Désignons par ω l'angle obtus BPC, d'où

$$\cos\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}};$$

donc $\omega < \frac{2\pi}{3}$. Sur l'arc ABC on a $z = re^{i\varphi}$, φ variant de $-\omega$ à $+\omega$, et sur la corde $z = \frac{x}{2} + it$, où t varie de $-r\sin\omega$ à $r\sin\omega = \sqrt{nx - \frac{x^2}{4}}$. Calcul fait, on trouve

$$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\pi r^n} \int_0^{\omega} e^{-r\cos\varphi} [r^2 + 2xr\cos\varphi + x^2]^{\frac{n+\alpha}{2}} \cos[\Omega(\varphi)] \, d\varphi$$
$$+ (-1)^n \frac{x^{-\alpha} e^{\frac{x}{2}}}{\pi} \int_0^{r\sin\omega} \left(\frac{x^2}{4} + t^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cos[\mathrm{A}(t)] \, dt = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2,$$

où les arguments $\Omega = \Omega(\varphi)$ et $A = A(t)$ des cosinus sont égaux à

$$\Omega = (n+\alpha)\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{r\sin\varphi}{x + r\cos\varphi}\right) - r\sin\varphi - n\varphi$$

et

$$A = (2n+1+\alpha)\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2t}{x}\right) - t.$$

Étudions les intégrales T_1 et T_2. Dans la première, T_1, la fonction

$$F(\varphi) = e^{-r\cos\varphi}.[r^2 + 2rx\cos\varphi + x^2]^{\frac{n+\alpha}{2}}$$

croît d'abord jusqu'à $\varphi = \varphi_0$, où

$$\cos\varphi_0 = -\frac{x-\alpha}{2\sqrt{nx}} > -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}} = \cos\omega,$$

donc (¹) $\varphi_0 < \omega$, atteint son maximum pour $\varphi = \varphi_0$ et décroît ensuite, tandis que $\Omega(\varphi)$ diminue tant que $\varphi < \varphi_0$, atteint son minimum également pour $\varphi = \varphi_0$ et croît ensuite. Cela prouve que $|T_1|$ est inférieure à l'intégrale de $F(\varphi)$ étendue à l'intervalle $(\varphi_0 - h', \varphi_0 + h'')$, les nombres positifs h' et h'' étant définis par les conditions

$$\Omega(\varphi_0 - h'_n) = \Omega(\varphi_0 + h''_n) = \Omega(\varphi_0) + \pi.$$

Or, cette intégrale est inférieure à $F(\varphi_0).(h'_n + h''_n)$ et

$$|T_1| < \frac{x^{-\alpha}F(\varphi_0)}{r^n}\,\frac{h'_n + h''_n}{\pi}.$$

Pour estimer l'ordre de grandeur de h'_n et h''_n il suffit d'observer que $\Omega'(\varphi_0) = 0$, $\Omega'''(\varphi_0) = O(r) = O(\sqrt{nx})$ et

$$\frac{1}{2}\sqrt{3nx} < \Omega''(\varphi_0) = \left(2 - \frac{x+\alpha}{n+\alpha}\right)\sqrt{nx - \frac{(x-\alpha)^2}{4}} < 2\sqrt{nx} \qquad (x \leqq n),$$

ce qui entraîne pour $\Omega(\varphi_0 + h) - \Omega(\varphi_0) = \pi$

$$h^2 = O\left(\frac{2\pi}{\Omega''(\varphi_0)}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{nx}}\right)$$

(¹) Pour $\alpha \geqq 0$. Pour $\alpha < 0$ le même résultat final subsiste et l'on n'a qu'à raisonner avec $\varphi = \omega$, car alors $\varphi_0 > \omega$.

et par conséquent

$$\frac{h'_n + h''_n}{\pi} = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{nx}}\right).$$

Or

$$x^{-\alpha} r^{-n} F(\varphi_0) = x^{-\alpha}(nx)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{x-\alpha}{2}} [x(n+\alpha)]^{\frac{n+\alpha}{2}},$$

d'où

$$T_1 = O\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right\}.$$

En appliquant le même raisonnement à T_2, on trouve d'abord pour $\alpha \leqq 1$, la fonction monotone $(x^2 + 4t^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ étant dans ce cas décroissante :

$$|T_2| \leqq \frac{x^{-\alpha} e^{\frac{x}{2}}}{\pi} \int_0^{O\left(\frac{x}{n}\right)} \left(\frac{x^2}{4} + t^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} dt = O\left(\frac{1}{n} e^{\frac{x}{2}}\right),$$

car l'argument $A = (2n + 1 + \alpha)\operatorname{Arctang}\frac{2t}{x} - t$ est également une fonction monotone dans l'intervalle $(0, r\sin\omega)$ et croît de zéro à

$$n\left[\pi - \sqrt{\frac{x}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

quand t va de 0 à $r\sin\omega$.

Pour $\alpha > 1$ on doit, au contraire, considérer le voisinage de la limite supérieure d'intégration, où $A'(t)$ est très voisine du zéro, mais reste encore positive. On a

$$A'''(r\sin\omega) = O\left(\frac{1}{nx}\right)$$

et

$$A'(r\sin\omega) = \frac{1+\alpha}{2n}, \qquad A''(r\sin\omega) = -\frac{32}{\sqrt{nx}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

Posons, pour $h > 0$,

$$A(r\sin\omega - h) = A(r\sin\omega) - \pi;$$

on trouve

$$h = O(\sqrt[4]{nx})$$

et, vu que $\alpha > 1$,

$$|T_2| \leqq \frac{x^{-\alpha} e^{\frac{x}{2}}}{\pi}\left(\frac{x^2}{4} + r^2\sin^2\omega\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} h.$$

Or

$$\frac{x^2}{4} + r^2 \sin^2 \omega = nx;$$

donc on trouve finalement

$$T_2 = O\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right\}.$$

Cette inégalité est satisfaite aussi pour $\alpha \leqq 1$, car dans ce cas

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} = o\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right],$$

pourvu que l'on ait $\alpha > -\frac{3}{2}$. La preuve de l'inégalité (27) est ainsi achevée [1]. Son cas particulier

$$L_n^{(0)}(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[4]{nx}}\right)$$

a été donné en 1926 par Hille [*b*, p. 348], mais sans démonstration, que Hille qualifie « rather long and complicated ». Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

(28) $$L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x) = O\left(n^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right), \qquad L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = O\left(x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right).$$

On en déduit, grâce aux relations (24), l'inégalité bien connue pour le polynome d'Hermite

(29) $$H_n(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{2^n n!}\right)$$

démontrée ainsi pour $x^2 \leqq n$, ou $|x| \leqq \sqrt{n}$.

Il n'est pas facile d'étendre l'inégalité (27) à l'intervalle $x \leqq kn$, k étant un nombre positif fixe quelconque, et pour le faire nous commençons par l'inégalité (29). L'identité

$$e^{-2z^2-2(x+h)z} \equiv e^{-z^2-2xz}\, e^{-z^2-2hz},$$

---

(1) Pour $\alpha \leqq -\frac{3}{2}$ il suffit d'intégrer T_2 par parties $E\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)$ fois pour compléter la preuve de l'inégalité (27), valable quel que soit α.

donne le théorème d'addition (Runge) pour le polynome $H_n(x)$, car on peut l'écrire

$$\sum_0^\infty H_n\left(\frac{x+h}{\sqrt{2}}\right)\frac{(z\sqrt{2})^n}{n!} \equiv \left(\sum_0^\infty \frac{z^p}{p!} H_p(x)\right)\left(\sum_0^\infty \frac{z^q}{q!} H_q(h)\right)$$

et par conséquent

$$\sqrt{2^n}\, H_n\left(\frac{x+h}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)} H_m(x)\, H_{n-m}(h),$$

où $C_m^{(n)}$ est le coefficient du binome :

$$n!\, C_m^{(n)} = m!\, \overline{n-m}\,!$$

En particulier, pour $h = x$, on trouve :

$$H_n(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_0^n C_m^{(n)} H_m(x)\, H_{n-m}(x).$$

Soit maintenant $|x| \leqq \sqrt{n}$, donc $|x\sqrt{2}| \leqq \sqrt{2n}$. En posant $y = x\sqrt{2}$, on a pour $|y| \leqq \sqrt{2n}$, grâce à l'inégalité (29),

$$H_n(y) = O\left\{\frac{e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2^n}} \sum_0^n C_m^{(n)} \frac{\sqrt{2^m\, m!\, 2^{n-m}\, \overline{n-m}\,!}}{\sqrt[4]{(m+1)(n-m+1)}}\right\}$$

et l'inégalité (29) sera démontrée pour $|x| \leqq \sqrt{2n}$, c'est-à-dire la longueur de l'intervalle de sa validité sera multipliée par $\sqrt{2}$, si l'on prouve que la limite pour $n \to \infty$ de l'expression

$$\gamma_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n}\sqrt{n!}} \sum_0^n C_m^{(n)} \frac{\sqrt{m!\, \overline{n-m}\,!}}{(\sqrt[4]{m+1)\,(n-m+1)}} = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n}} \sum_0^n \frac{\sqrt{C_m^{(n)}}}{\sqrt[4]{(m+1)(n-m+1)}}$$

est finie. Or, pour $n \to \infty$ et $m = nt$,

$$\gamma_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-n\psi(t)}\, dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

où

$$\psi(t) = \frac{1}{2}[t \log t + (1-t)\log(1-t) + \log 2].$$

Vu que

$$2\psi'(t) = \log t - \log(1-t)$$

la fonction $\psi(t)$ a un minimum pour $t = \frac{1}{2}$ et l'on a, si $\left|t - \frac{1}{2}\right| \geqq \varepsilon_n$,

$$\psi(t) \geqq \psi\left(\frac{1}{2} \pm \varepsilon_n\right) = \varepsilon_n^2[1 + O(\varepsilon_n)].$$

Posons $\varepsilon_n = n^{-\frac{1}{3}}$ et l'on a

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} e^{-n\psi(t)} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = O(e^{-\sqrt[3]{n}}\sqrt{n}) = \sqrt{n}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon_n}^{1} e^{-n\psi(t)} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

ce qui entraîne, en posant $t = \frac{1}{2} + \frac{u}{\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}+\varepsilon_n} e^{-n\psi(t)} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2\pi}} \lim_{n=\infty} \int_{-\sqrt[6]{n}}^{\sqrt[6]{n}} e^{-u^2}\,du = 2\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}.$$

En répétant ce raisonnement un nombre *fini* de fois, on prouve l'inégalité (29) pour tout intervalle $|x| \leqq k\sqrt{n}$, où k est fini. Pour en conclure que l'inégalité (27) est valable pour $n \leqq x \leqq k^2.n$ nous allons exprimer $L_n^{(\alpha)}(x)$ sous forme d'une intégrale définie, où sous le signe somme figure le polynome $H_{2n+1}(\sqrt{x})$ ou, ce qui est la même chose, le polynome $L_n^{(\frac{1}{2})}(x)$ multiplié par $\sqrt{x}$. En effet, les relations (24) prouvent que les inégalités (28) sont valables aussi pour $n \leqq x \leqq k^2 n$, k étant aussi grand qu'on veut mais fixe. Or, comme nous allons le montrer à la fin de ce paragraphe, on a pour $\alpha > \frac{1}{2}$

$$(30)\quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} x^{-\alpha} D_x^{-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\left\{\sqrt{x}\, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\right\} \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right),$$

où $D_x^{-\beta}$ est une dérivée d'ordre négatif $-\beta$ quelconque définie par

$$\Gamma(\beta)\, D_x^{-\beta} f(x) = \int_0^x (x-u)^{\beta-1} f(u)\,du \qquad (\beta > 0).$$

L'inégalité (28) entraîne pour $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-\frac{3}{2}}\sqrt{u}\, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(ux)\,du$$

$$= O\left\{\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-\frac{3}{2}} e^{\frac{ux}{2}}\,du\right\} \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right).$$

Or, pour $x \to \infty$, on a

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-\frac{3}{2}} e^{\frac{ux}{2}}\,du = \Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{\frac{x}{2}}\{1+O[e^{-(1-\varepsilon)x}]\};$$

donc

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}}\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{x^{\alpha}}\right) \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right).$$

Cette inégalité est sans valeur pour $x \leqq n$, mais si l'on considère l'intervalle $(n, k^2 n)$, $n \leqq x \leqq k^2 n$, où le rapport $\frac{n}{x}$ est fini, on en déduit

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right] = O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right],$$

c'est-à-dire on achève la preuve de l'inégalité (27) pour $x \leqq k^2 n$. On a supposé $\alpha > \frac{1}{2}$. Il est facile de montrer en employant la relation analogue

$$(31) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-\alpha} D_x^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left\{x^{-\frac{1}{2}} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x)\right\}$$

valable pour $\alpha > -\frac{1}{2}$ que (27) est exacte pour $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $x \leqq k^2 n$ quelque grand que soit le nombre fixe réel k^2. Les relations (30) et (31) sont des cas particuliers de la formule générale

$$x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} D_x^{-(\alpha-\beta)}[x^{\beta} L_n^{(\beta)}(x)] \qquad (\alpha > \beta)$$

qu'on peut aussi écrire

$$(32) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1} u^{\beta} L_n^{(\beta)}(u)\,du,$$

et qui est nouvelle à notre connaissance. On la prouve ainsi : le produit $z = x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$xz'' - (x + \alpha - 1)z' + (n + \alpha)z = 0 \tag{33}$$

que l'on déduit facilement de celle des polynomes $y = L_n^{(\alpha)}(x)$

$$xy'' - (x - \alpha - 1)y' + ny = 0. \tag{34}$$

Si l'on cherche les solutions de (33) de la forme

$$z = D_x^{-\alpha}[\xi(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - u)^{\alpha-1} \xi(u)\, du,$$

on constate que (33) équivaut à l'équation

$$D_x^{-\alpha}\{x\xi'' + (1 - x)\xi' + n\xi\} = 0.$$

Par conséquent

$$z_1 = D_x^{-\alpha}\xi_1(x) = D_x^{-\alpha}[L_n^{(0)}(x)]$$

est une des solutions de (33) et

$$y_1 = x^{-\alpha} z_1 = x^{-\alpha} D_x^{-\alpha}[L_n^{(0)}(x)]$$

est une solution de (34). Comme y_1 est un polynome de $n^{\text{ième}}$ degré, on en conclut que $y_1 = L_n^{(\alpha)}(x)$. $C'_{n\alpha}$ et la constante $C_{n\alpha}$ dans

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = x^\alpha y_1 = z_1 = C_{n\alpha} \int_0^x (x - u)^{\alpha-1} L_n^{(0)}(u)\, du$$

se laisse déterminer en faisant tendre x vers zéro. Vu que $L_n^{(0)}(0) = 1$ et $L_n^{(\alpha)}(0) = A_n^{(\alpha)}$, où dans tout ce qui suit $A_n^{(\alpha)}$ désigne le coefficient de z^n dans le développement du binome $(1 - z)^{-(\alpha+1)}$

$$\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1) A_n^{(\alpha)} = \Gamma(n + \alpha + 1),$$

on trouve ainsi $C_{n\alpha} = \alpha A_n^{(\alpha)}$, c'est-à-dire

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} D_x^{-\alpha}[L_n^{(0)}(x)].$$

On en déduit, en prenant les dérivées d'ordre α des deux membres

$$\Gamma(n + \alpha + 1) L_n^{(0)}(x) = \Gamma(n + 1) D_x^\alpha[x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)],$$

et de même

$$\Gamma(n+\beta+1)\,L_n^{(0)}(x)=\Gamma(n+1)\,D_x^\beta[x^\beta L_n^{(\beta)}(x)],$$

d'où

$$\Gamma(n+\beta+1)\,D_x^\alpha[x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)]=\Gamma(n+\alpha+1)\,D_x^\beta[x^\beta L_n^{(\beta)}(x)]$$

et ensuite la relation (32) qui était à prouver. On achève la preuve de (27) pour $n \leqq x \leqq k^2 n$, en observant que pour $m=E(m)\geqq 0$ on a

$$4^n L_n^{\left(-m-\frac{1}{2}\right)}(x^2)=(-1)^n\sum_{k=0}^{m}\frac{4^k C_k^{(m)}}{\overline{n-k}!}\,H_{2n-2k}(x),$$

donc, moyennant (29),

$$L_n^{\left(-m-\frac{1}{2}\right)}(x)=O\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{n}}\right),$$

d'où, pour $n \leqq x \leqq k^2 n$, l'égalité (27) avec $\alpha=-m-\frac{1}{2}\cdot$ Ensuite, pour $0>\alpha>-\left(m+\frac{1}{2}\right)$, on applique (32), ce qui complète la preuve de (27) pour $n \leqq x \leqq k^2 n$ quel que soit α.

Passons maintenant à l'intervalle infini $x \geqq n+\alpha$. Dans cet intervalle l'expression explicite (25) de $L_n^{(\alpha)}(x)$ suffit pour notre étude, car on en déduit

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,\overline{n-k}!}\,x^{n-k}(n+\alpha)^k=\frac{(n+x+\alpha)^n}{n!},$$

d'où, pour $x \geqq n+\alpha$, l'inégalité

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \frac{(2x)^n}{n!} \qquad (x \geqq n+\alpha). \tag{35}$$

Vu les relations (24), elle nous fournit cette autre inégalité relative au polynome $H_n(x)$

$$|H_n(x)| \leqq 2^{\frac{3n}{2}}\,|x|^n \qquad \left(|x| \geqq \sqrt{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{36}$$

valable pour $|x| \geqq \sqrt{n+\frac{1}{2}}\cdot$ Ajoutons enfin que dans tout intervalle *fini* (¹) on peut représenter $H_n(x)$ sous la forme d'une série asympto-

(¹) Tout récemment M. S. C. van Veen a donné (*Math. Annalen*, 1931, tique semi-convergente donnée par Faber en 1922 et qui s'écrit

$$(37)\qquad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} \sim \sqrt[4]{\frac{2}{n\pi}}\,\mathrm{R}\left\{e^{i\left(x\sqrt{2n+2}+n\frac{\pi}{2}\right)}\left[1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_m}{2^m}\mathrm{H}_m\left(\frac{ix}{2}\right)\right]\right\}$$

avec $\mathrm{C}_m\sqrt[6]{n^m} = \mathrm{O}(1)$. Elle généralise la formule approchée

$$(38)\qquad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} = \sqrt[4]{\frac{2}{n\pi}}\left[\cos\left(x\sqrt{2n}+\frac{n\pi}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

donnée en 1905 par Adamoff. Uspensky a démontré que dans la formule approchée pour la $n^{\text{ième}}$ somme partielle $\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)$ qu'on en déduit

$$(39)\qquad \pi\,\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u) = e^{-\frac{x^2+u^2}{2}}\left\{\frac{\sin\left[(u-x)\sqrt{2n}\right]}{u-x}+\frac{\theta_n(u, x)}{(u-x)\sqrt{n}}\right\}$$

avec $\theta_n(u, x) = \mathrm{O}(1)$ uniformément quand x et u sont dans un intervalle *fini*, on a $\theta_n(x, x) = 0$ et en outre

$$(40)\qquad \frac{\partial\theta_n(u, x)}{\partial u} = \mathrm{O}(\sqrt{n}).$$

L'expression $\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série-noyau et l'on a

$$(41)\qquad \mathrm{S}_n^{(0)}(x, u) = \sum_0^n \frac{\mathrm{H}_m(x)\,\mathrm{H}_m(u)}{2^m\,m!\,\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{H}_{n+1}(x)\,\mathrm{H}_n(u)-\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{H}_{n+1}(u)}{2^n\,n!\,(u-x)\sqrt{\pi}}$$

comme on le vérifie facilement à l'aide de la relation bien connue

$$\mathrm{H}_{n+1}(x)+2x\,\mathrm{H}_n(x)+2n\,\mathrm{H}_{n-1}(x) = 0.$$

II. — Conditions de convergence. Sommation par le procédé d'Euler.

La $n^{\text{ième}}$ somme partielle $f_n(x)$ du développement

$$(2)\qquad f(x) \sim \sum_0^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(x)}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-u^2}\,\mathrm{H}_n(u)\,du$$

B. 105, p. 408-436) une formule approchée pour $\mathrm{H}_n(x)$ valable dans l'intervalle $0 \leqq |x| \leqq \sqrt{2(n+1)}$, l'indice n pouvant prendre aussi des valeurs non entières.

s'exprime à l'aide de celle $S_n^{(0)}(x, u)$ de la série-noyau

$$(15)\quad 0 \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{1 + \frac{H_1(x)H_1(u)}{2.1!} + \frac{H_2(x)H_2(u)}{2^2.2!} + \ldots + \frac{H_n(x)H_n(u)}{2^n n!} + \ldots\right\}$$

par l'intégrale définie suivante

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du.$$

L'expression (41) de $S_n^{(0)}(x, u)$ et l'inégalité (29) pour le polynome $H_n(x)$ donnent pour $x \neq u$, si x et u sont $O(\sqrt{n})$ en valeur absolue :

$$(42)\quad S_n^{(0)}(x, u) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|}\right) \qquad [|x|, |u| \leqq O(\sqrt{n}), |x-u| > 0].$$

D'un autre côté l'inégalité (36), valable pour $|u| \geqq \sqrt{n + \frac{1}{2}}$, nous donne, x étant fixe et fini :

$$S_n^{(0)}(x, u) = O\left\{\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{|x-u|} \cdot \frac{2^{2n}|u|^{n+1}\sqrt{\overline{n+1}\,!}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right\} = O\left\{\left(2|u|\sqrt{\frac{e}{n}}\right)^n\right\}.$$

Posons

$$\varphi_n(u) = |u|^{n+1} e^{-\frac{u^2}{2}}\left(2\sqrt{\frac{e}{n}}\right)^n$$

et considérons la fonction paire $\varphi_n(u)$ pour $u > 0$. Elle atteint son maximum pour $u = \sqrt{n+1}$, donc pour $u \geqq k\sqrt{n}$ avec $k > 1$ on a

$$\varphi_n(u) \leqq \varphi_n(k\sqrt{n}).$$

Soit k_0 la racine de l'équation $\xi^2 - 2\log(2\xi e) = 0$, donc $k_0 = 2,2.. < 2,3$. On a $\varphi_n(k_0\sqrt{n}) < k_0 = O(1)$, donc on parvient à la conclusion suivante :

$$(43)\quad |u|e^{-\frac{u^2}{2}}|S_n^{(0)}(x, u)| = O[\varphi_n(u)] = O(1) \qquad (|u| \geqq k_0\sqrt{n}).$$

Supposons maintenant l'existence des deux intégrales

$$(6)\quad \int_{-\infty}^{-a} |f(u)|\, e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{|u|} < G \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{\infty} |f(u)|\, e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{u} < G.$$

On a

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{-k_0\sqrt{n}}+\int_{-k_0\sqrt{n}}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_{A}^{k_0\sqrt{n}}+\int_{k_0\sqrt{n}}^{\infty}=\sum_{i=1}^{5}J_{ni},$$

la fonction sous les signes somme étant $e^{-u^2}f(u)S_n^{(0)}(x, u)\,du$.
On a grâce à (43)

$$J_{n1}=O\left[\int_{-\infty}^{-k_0\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{|u|}\right],\qquad J_{n5}=O\left[\int_{k_0\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{u}\right]$$

et de même à l'aide de (42) vu que x est fixe :

$$J_{n2}=O\left[\int_{-k_0\sqrt{n}}^{-A} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{|u|}\right],\qquad J_{n4}=O\left[\int_{A}^{k_0\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{u}\right].$$

Par conséquent, on peut choisir un nombre positif fixe A_0 assez grand pour avoir si $A\geqq A_0$

$$|J_{n1}|+|J_{n2}|+|J_{n4}|+|J_{n5}|<\eta\qquad (A\geqq A_0),$$

quelque petite que soit la quantité positive η donnée à l'avance. Cette conclusion élimine toutes les difficultés causées par les parties infinies de l'intervalle $(-\infty, \infty)$ grâce à l'unique hypothèse d'intégrabilité du produit $u^{-1}e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|$ dans les intervalles $(-\infty, -a)$ et (a, ∞). Quant à l'intégrale J_{n3}, étendue à l'intervalle *fini* $(-A, A)$, on sait depuis longtemps que l'on a

$$\lim_{n=\infty} J_{n3}=\lim_{n=\infty}\int_{-A}^{A} e^{-u^2}f(u)\,S_n^{(0)}(x, u)\,du=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

sous les mêmes conditions suffisantes (Galbrun, Cramer, Szegö, Uspensky) que celles que l'on connaît pour les séries trigonométriques de Fourier. Le théorème sur l'équiconvergence de la série (2) et de la série trigonométrique d'une fonction qui est identique à $f(x)$ au voisinage immédiat du point x considéré, démontré par Szegö sous l'hypothèse gênante $F(x)=O[x^{0(1)}]$ pour $|x|\to\infty$ et à l'exclusion du point $x=0$, est ainsi établi pour toutes les valeurs de x et sous la condition beaucoup plus large (6). Cette condition est moins restrictive que celles de Cramer et d'Uspensky qui exigent l'intégrabilité dans

$(-\infty, -a)$ et (a, ∞) des produits $e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|$ et $e^{-u^2}[f(u)]^2$ respectivement tandis que notre condition (6) n'exige que celle du produit $u^{-1}.e^{-\frac{u^2}{2}}.|f(u)|$.

Les inégalités (42) et (43) permettent aussi d'étudier la sommabilité de (2) par le procédé d'Euler. Nous allons voir que *la transformation d'Euler peut réussir dans le cas de divergence de la série* (2) *et en préciser la cause*. Commençons par montrer que *la série-noyau transformée à l'aide du procédé d'Euler possède, au voisinage d'un point fixe x, sensiblement la même allure qu'avant la transformation.*

La transformation d'Euler consiste dans la formation de la série $\Sigma u_n^{(1)}$ en partant d'une série donnée Σu_n, où le terme général $u_n^{(1)}$ de la « transformée d'Euler » est défini par

$$2^{n+1}\, u_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)}\, u_m. \qquad \left(C_m^{(n)} = \frac{n\,!}{m\,!\;\overline{n-m}\,!}\right).$$

Pour calculer la $n^{\text{ième}}$ somme partielle $\mathcal{S}_n^{(1)}(x, u)$

$$\mathcal{S}_n^{(1)}(x, u) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{p=0}^{m} C_p^{(m)} \frac{H_p(x)\, H_p(u)}{2^p\, p\,!\sqrt{\pi}}$$

de la transformée d'Euler de la série-noyau, nous partons de la relation suivante

$$2^n\, H_n\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}\right) H_n\left(\frac{u+t}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} C_p^{(n)}\, C_q^{(n)}\, H_p(x)\, H_q(u)\, H_{n-p}(t)\, H_{n-q}(t)$$

qui découle du théorème d'addition établi au paragraphe 1. En multipliant par $e^{-t^2}\,dt$ et en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, on en déduit, grâce à l'orthogonalité des polynomes d'Hermite dans $(-\infty, \infty)$:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_p^{(n)} \frac{H_p(x)\, H_p(u)}{2^p\, p\,!\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \frac{H_n\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}\right) H_n\left(\frac{u+t}{\sqrt{2}}\right)}{2^n\, n\,!\sqrt{\pi}}\, dt,$$

car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, H_{n-p}(t)\, H_{n-q}(t)\, dt = 0 \qquad \text{pour } p \neq q$$
$$= 2^{n-p}\, \Gamma(n-p+1)\sqrt{\pi}, \qquad \text{si } p = q.$$

En sommant, on trouve ainsi la relation fondamentale

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} S_n^{(0)}\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}, \frac{u+t}{\sqrt{2}}\right) dt. \tag{44}$$

Pour u et x finis et $|t| \leqq A$ on a, d'après la formule approchée (39),

$$\pi S_n^{(0)}\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}, \frac{u+t}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{t^2}{2} + \frac{(u+x)t}{2} + \frac{(u+x)^2}{4}} \left\{ \frac{\sin[(u-x)\sqrt{n}]}{u-x} + \frac{\theta_n(t)}{(u-x)\sqrt{n}} \right\} \tag{45}$$

avec $\theta_n(t) = \theta_n(x, u, t) = O(1)$. Mais, la formule d'Adamoff (38) dont la formule (39) est le corollaire, n'est qu'un cas particulier $\left(\text{pour } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } \alpha = +\frac{1}{2}\right)$ de la formule approchée (26) donnant le polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ et valable dans l'intervalle $|x| \leqq n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$. Par conséquent la formule d'Adamoff et avec elle la formule (39) sont valables pour $x| \leqq n^{\frac{1}{6}-\varepsilon}$ à condition d'écrire le reste de la formule (39) sous la forme $O\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right)$ au lieu de $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qui entraîne pour notre formule (45) $\theta_n(t) = o(\sqrt{n})$ si l'on a $|t| = o(\sqrt[6]{n})$. Ceci dit, nous pouvons appliquer cette formule pour $|t| \leqq o(\sqrt[6]{n})$, u et x étant finis, avec $\theta_n(t) = o(\sqrt{n})$.

On trouve ainsi pour $|t| \leqq \sqrt[7]{n}$ par exemple en posant $\sqrt[7]{n} = A_n$,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-A_n}^{A_n} e^{-t^2} S_n^{(0)}\, dt = \frac{e^{\frac{u^2+x^2}{2} - \frac{(u-x)^2}{8}}}{\pi} \frac{\sin(u-x)\sqrt{n} + o(1)}{u-x}. \tag{46}$$

Or, à l'aide des inégalités (42) et (43) on établit facilement que les intégrales étendues de $-\infty$ à $-A_n$ et de A_n à $+\infty$ sont toutes les deux de l'ordre du reste dans (46) c'est-à-dire pour $n \to \infty$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{+A_n}^{\infty} e^{-t^2} S_n^{(0)}\, dt = e^{\frac{u^2+x^2}{2} - \frac{(u-x)^2}{8}}\, o\left(\frac{1}{|u-x|}\right)$$

et de même pour l'intégrale étendue à l'intervalle $(-\infty, -A_n)$. Ainsi, on a pour x et u finis

$$\pi \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = e^{\frac{u^2+x^2}{2} - \frac{(u-x)^2}{8}} \frac{\sin(u-x)\sqrt{n} + o(1)}{u-x}, \tag{47}$$

ce qui prouve la divergence de la série-noyau transformée par le procédé d'Euler. Au voisinage du point $u = x$ sa somme partielle $\mathcal{E}_{2n}^{(1)}$ a la même partie principale

$$\frac{1}{\pi} e^{\frac{u^2+x^2}{2}} \frac{\sin(u-x)\sqrt{2n}}{u-x}$$

que $S_n^{(0)}$ ce qui entraîne la conclusion qu'au point de vue de conditions suffisantes de convergence *relatives à l'allure de $f(x)$ au voisinage du point x*, où l'on considère son développement (2) et ce dernier transformé par le procédé d'Euler, les deux séries sont équiconvergentes. Il se peut bien néanmoins qu'au point de vue de conditions *relatives à l'allure de $f(x)$ à l'infini* le procédé d'Euler se révèle plus puissant que la convergence ordinaire. En effet, dans (47) pour x fixe et $u \to \infty$ on a le facteur exponentiel $e^{\frac{3u^2}{8}}$ au lieu de $e^{\frac{u^2}{2}}$ pour $S_n^{(0)}(x, u)$ et ceci semble indiquer que pour le procédé d'Euler les conditions (6) sont surabondantes. On peut d'ailleurs évaluer l'ordre de grandeur de $\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)$ pour $u \to \infty$. La formule de Mehler

$$H_n(x) = \frac{e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4}+iux} (iu)^n \, du \tag{48}$$

permet de trouver l'expression explicite de la fonction génératrice

$$\Phi_{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(u)}{2^n n! \sqrt{\pi}} z^n,$$

car les deux intégrations sont aisées à effectuer, et l'on aboutit au résultat suivant (Mehler) :

$$\Phi_{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2z^2-2xuz+u^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{1-z^2}}.$$

En divisant par $1-z$, on en déduit la fonction génératrice $\Phi_0(z)$ des sommes partielles $S_n^{(0)}(x, u)$ de la série-noyau (15)

$$\Phi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)}(x, u) . z^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2z^2-2xuz+u^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{1+z}\,(1-z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, celle des transformées d'Euler $\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)$ est d'après (44)

$$\sum_0^\infty z^n \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - \varphi\left(\frac{x+t}{\sqrt{2}}, \frac{u+t}{\sqrt{2}}, z\right)} \frac{dt}{(1-z)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+z}},$$

où $(1 - z^2)\varphi(x, u, z) = x^2 z^2 - 2xuz + u^2 z^2$. En prenant comme nouvelle variable d'intégration $\frac{2t - (u+x)z}{\sqrt{1+z}}$, on calcule facilement l'intégrale définie et l'on a le résultat cherché

$$\sum_0^\infty \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) z^n = \frac{e^{z\left(\frac{u+x}{2}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{z}{1-z}\left(\frac{u-x}{2}\right)^2}}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'unique point singulier du second membre est le point $z = 1$, donc on a pour $\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)$ la formule approchée suivante :

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = \frac{e^{\left(\frac{u+x}{2}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}} L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\left(\frac{u-x}{2}\right)^2\right](1 + \varepsilon_n). \tag{49}$$

Pour $|u - x| = o(\sqrt[6]{n})$ on retrouve à l'aide de la formule (26) le résultat (47), mais on a aussi grâce aux inégalités (28) et (35) les évaluations suivantes :

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = O\left\{\frac{e^{\frac{(u+x)^2}{4} + \frac{(u-x)^2}{8}}}{|u - x|}\right\} = O\left(\frac{e^{\frac{3u^2}{8}}}{|u|}\right) \tag{50}$$

pour $|u| \leqq O(\sqrt{n})$, (x étant fixe) ainsi que

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(x, u) = O\left(\frac{|u - x|^{2n}}{n!\,2^n} e^{\frac{(u+x)^2}{4}}\right) = O\left(\frac{|u|^{2n}}{n!\,2^n} e^{\frac{u^2}{4}}\right) \tag{51}$$

pour $|u| \geqq 2\sqrt{n}$. Vu que la $n^{\text{ième}}$ somme partielle du développement (2) de $f(x)$, transformé par le procédé de sommation d'Euler, disons $f_n^{(E)}(x)$, s'écrit

$$f_n^{(E)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)\, du,$$

on trouve facilement à l'aide des deux inégalités (50) et (51) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{-A} e^{-u^2} f(u) \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)\, du \qquad \text{et} \qquad \int_A^\infty e^{-u^2} f(u) \mathcal{E}_n^{(1)}(x, u)\, du$$

peuvent être rendues aussi petites qu'on veut en valeur absolue par le choix du nombre positif A assez grand, *pourvu que les intégrales*

$$(52)\qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{5u^2}{8}} |f(u)| \frac{du}{|u|} < G \quad \text{et} \quad \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{5u^2}{8}} |f(u)| \frac{du}{u} < G$$

soient finies. Ainsi, nous avons mis en évidence la condition suffisante assurant, quant à l'allure de la fonction développée $f(x)$ à l'infini, la sommabilité de sa série (2) par le procédé d'Euler. On voit maintenant quand peut-on sommer la série divergente (2) par le procédé d'Euler. Si la divergence est causée par l'allure de $f(x)$ à l'intérieur d'un intervalle fini, rien à faire, la transformée d'Euler de la série (2) diverge aussi. Mais, si $f(x)$ satisfait pour les valeurs finies de x aux conditions suffisantes de *convergence* et la série (2) diverge uniquement à cause des particularités de son allure à l'infini, le procédé réussit, si $f(x)$ vérifie les conditions (52). Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = e^{qx^2}$, où $q < 1$ est un nombre constant, est à variation bornée dans tout intervalle fini, donc la convergence ou divergence de sa série (2) ne dépendent que de son allure à l'infini. Cette série

$$(53)\qquad e^{qx^2} \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x)}{2^{2n}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2(1-q)} \frac{H_{2n}(u)}{2n!} du$$

diverge, si $q > \frac{1}{2}$. En effet, en désignant par c_n l'intégrale définie

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2(1-q)} H_n(u)\, du,$$

on trouve

$$\sum_{0}^{\infty} c_n z^n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2(1-q)} \left[\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n H_n(u)}{n!} \right] du = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}}\, e^{\frac{qz^2}{1-q}},$$

d'où $c_{2n+1} = 0$ et

$$c_{2n} = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{1-q}} \left(\frac{q}{1-q} \right)^n.$$

A l'aide de la formule approchée (38) pour le polynome d'Hermite on déduit celle pour le terme général $u_n(x)$ du développement (53) de la fonction $f(x) = e^{qx^2}$ pour tout x fini

$$u_n(x) = \frac{c_{2n} H_{2n}(x)}{2^{2n}\sqrt{\pi}} = \left(\frac{q}{1-q}\right)^n (-1)^n \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi(1-q)}} \left\{ \frac{\cos(2x\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Ce résultat prouve la convergence absolue et uniforme de la série étudiée dans tout intervalle fini pour $0 < q < \frac{1}{2}$. Elle continue à converger encore pour $q = \frac{1}{2}$, mais devient divergente et non sommable par le procédé des moyennes arithmétiques (C, δ) quel que soit l'ordre de moyennes δ, si $q > \frac{1}{2}$.

C'est ici qu'intervient le procédé d'Euler. En effet, pour $\frac{1}{2} < q < \frac{5}{8}$ la condition (52) est vérifiée et le développement (53) de $f(x) = e^{qx^2}$ est donc sommable par la transformation d'Euler. Pour $q \geqq \frac{5}{8}$ la fonction étudiée cesse de vérifier la condition (52) et pour $q \geqq \frac{3}{4}$ la série (53) n'est pas sommable par le procédé d'Euler, mais si l'on répète la transformation d'Euler deux fois la série est sommée pourvu que l'on ait $q < \frac{7}{8}$ [1]. La question se pose : quel est l'ordre limite de croissance de $f(x)$ au delà duquel la série (2) ne peut plus être sommée par l'application répétée de la transformation d'Euler, bref sommée (E, k), où k est un nombre entier fini. Rappelons la définition du procédé (E, δ), δ étant un nombre positif quelconque : la transformée d'Euler d'ordre δ a par définition sa somme partielle $n^{\text{ième}}$ $\mathcal{E}_n^{(\delta)}$ égale à

$$\mathcal{E}_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)} (1-\theta)^{n-m} \theta^m s_m \qquad [\theta = 2^{-\delta}],$$

où $\theta = 2^{-\delta} < 1$, car $\delta > 0$; de même son terme général $u_n^{(\delta)}$ est donné par la relation

$$u_n^{(\delta)} = \theta \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)} (1-\theta)^{n-m} \theta^m u_m.$$

---

[1] La condition nécessaire de sommabilité (E, k) s'énonce $u_n = o[(2^{k+1}-1)^n]$ ce qui prouve la non-sommabilité (E, 1) de (53) pour $q \geqq \frac{3}{4}$ ainsi que celle (E, 2) pour $q \geqq \frac{7}{8}$.

Pour évaluer $\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u)$ de la série-noyau (15), formons la fonction génératrice de la suite $\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u)$

$$\Psi_\delta(z) = \sum_0^\infty z^n \mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{1}{1-z} \sum_0^\infty z^n . u_n^{(\delta)}$$

$$= \frac{1}{1-z} \sum_0^\infty z^n \theta \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)} (1-\theta)^{n-m} \theta^m \frac{H_m(x)\, H_m(u)}{2^m\, m!\, \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\theta}{1-z} \sum_0^\infty \left(\frac{\theta z}{2}\right)^m \frac{H_m(x)\, H_m(u)}{m!\, \sqrt{\pi}} \sum_{n=m}^\infty C_m^{(n)} [z(1-\theta)]^{n-m}.$$

Or

$$\sum_{n=m}^\infty C_m^{(n)} [z(1-\theta)]^{n-m} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\overline{n+m}!}{n!\, m!} [z(1-\theta)]^n = \frac{1}{[1 - z(1-\theta)]^{m+1}},$$

d'où

$$\Psi_\delta(z) = \frac{\theta}{(1-z)(1-z+z\theta)} \sum_0^\infty \frac{H_m(x)\, H_m(u)}{2^m\, m!\, \sqrt{\pi}} \left(\frac{\theta z}{1+\theta z - z}\right)^m.$$

On reconnaît dans le second membre la fonction génératrice Φ_{-1} de la série-noyau (15), d'où après transformations algébriques l'expression explicite de la fonction $\Psi_\delta(z)$:

$$\Psi_\delta(z) = \sum_0^\infty \mathcal{E}_n^{(\delta)} z^n = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{\theta z (u+x)^2}{2(1-z+2\theta z)}}}{\sqrt{1 - z(1-2\theta)}} \frac{e^{-\frac{z}{1-z}\left[\frac{\theta}{2}(u-x)^2\right]}}{\sqrt{(1-z)^3}}. \tag{54}$$

Des deux points singuliers $z = 1$ et $z = \frac{1}{1-2\theta}$ $\left(\theta \neq \frac{1}{2}\right)$ le plus rapproché à l'origine est le premier. Soit $\theta \lesseqgtr \frac{1}{2}$, ce qui correspond au cas $\delta \gtrless 1$. Dans le cas $\delta > 0$ on ne doit tenir compte, en écrivant la formule approchée pour $\mathcal{E}_n^{(\delta)}$, que du point singulier $z = 1$ ce qui nous donne

$$\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u) = e^{\frac{(u+x)^2}{4}} \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, L_n^{(\frac{1}{2})}\left[\frac{\theta}{2}(u-x)^2\right](1+\eta_n) \tag{55}$$
$$(\delta \gtrless 1,\ \theta = 2^{-\delta}).$$

Cette formule déduite dans l'hypothèse $\delta \neq 1$ est valable aussi pour $\delta = 1$ car dans ce cas elle se réduit à (49) établie déjà indépendamment. L'inégalité (28) prouve que l'on a pour $|u| \leqq O(\sqrt{n})$, tandis que x est fixe

$$\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u) = O\left(e^{\frac{(u+x)^2}{4}}\sqrt{\theta}\,\frac{e^{\theta\left(\frac{u-x}{2}\right)^2}}{|u-x|\sqrt{\theta}}\right) = O\left(\frac{e^{\frac{u^2}{4}(1+\theta)}}{|u|}\right), \tag{56}$$

ce qui prouve que pour $\delta \to \infty$, donc $\theta = 2^{-\delta} \to 0$, l'ordre de croissance de $\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u)$ avec $|u| \to \infty$ diminue mais reste toujours supérieur à $\frac{u^2}{4}$. Sans développer les détails de la démonstration, basée sur l'inégalité (56) ainsi que sur celle

$$\mathcal{E}_n^{(\delta)}(x, u) = O\left\{e^{\frac{u^2}{4}}\left(\frac{e\theta u^2}{n}\right)^n\right\}\sqrt{\frac{\theta}{n}} \qquad \left(|u| \geqq \sqrt{\frac{2n}{\theta}}\right), \tag{57}$$

valable pour $|u| \geqq \sqrt{\frac{2n}{\theta}}$ et qui est le corollaire de l'inégalité (35), énonçons le résultat définitif :

Théorème I. — *Le développement (2) d'une fonction $f(x)$, vérifiant dans tout intervalle fini $-a \leqq x \leqq a$ les conditions assurant la convergence de cette série (2), est sommable* (E, δ) *pour δ assez grand s'il existe un nombre positif ε aussi petit qu'on veut mais fixe et tel que les deux intégrales*

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}|f(u)|\frac{du}{|u|} < G \quad \text{et} \quad \int_{a}^{\infty} e^{-u^2\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)}|f(u)|\frac{du}{u} < G \tag{58}$$

soient finies. Plus précisément, la condition

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-qu^2}|f(u)|\frac{du}{|u|} < G \quad \text{et} \quad \int_{a}^{\infty} e^{-qu^2}|f(u)|\frac{du}{u} < G \qquad \left(q < \frac{3}{4}\right)$$

assure la sommabilité (E, δ) *de* (2) *pour* $\delta \geqq \dfrac{\log\left(\frac{1}{3-4q}\right)}{\log 2}$.

Il est probable que les conditions relatives à l'allure de $f(x)$ à l'infini et assurant la sommabilité de son développement par le procédé de Borel se réduisent à l'intégrabilité dans $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) du produit $e^{-\frac{3}{4}u^2}\left|\frac{f(u)}{u}\right|$, étant donné que le procédé de Borel est le cas limite du procédé (E, δ) pour $\delta \to \infty$, c'est-à-dire pour $\theta = 2^{-\delta} \to 0$.

Nous signalons ce problème intéressant. Il serait intéressant également d'indiquer un procédé de sommation plus puissant que celui de Borel et qui permettrait de sommer la série (2) des fonctions $f(x)$ telles que e^{qx^2} par exemple pour $q > \frac{3}{4}$ et vérifiant pour $|x| \to \infty$ la condition $f(x) = O(e^{qx^2})$ avec $\frac{3}{4} < q < 1$ sans être monotones.

III. — Les moyennes $S_n^{(\delta)}$ de la série-noyau dans les intervalles $(-\infty, -a)$ et (a, ∞).

La condition nécessaire de sommabilité (C, δ) d'une série de terme général u_n étant $n^{-\delta} u_n = o(1)$ pour $n \to \infty$, on constate facilement que le développement (2) de $f(x)$ n'est pas sommable (C, δ) quelque grand que soit δ, si $f(x)$ croît avec x comme e^{qx^2}, où $q > \frac{1}{2}$. D'autre part, pour $q < \frac{1}{2}$ ce développement converge absolument et uniformément dans tout intervalle fini et la question de sommabilité (C, δ) ne se pose même pas.

Dans ce qui suit nous allons étudier le lien qui existe entre l'indice δ de sommabilité (C, δ) de (2) et l'ordre de croissance du produit $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$ comparé, pour $x \to \infty$, à celui d'une puissance x^γ $(\gamma > 0)$.

Par définition, on a

$$A_n^{(\delta)} S_n^{(\delta)}(x, u) = \sigma_n^{(\delta)}(x, u) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} \frac{H_m(x) H_m(u)}{2^m m! \sqrt{\pi}},$$

où, comme toujours,

$$\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)A_n^{(\delta)} = \Gamma(n+\delta+1).$$

On en déduit

$$\sum_0^\infty \sigma_n^{(\delta)}(x, u) z^n = \Phi_\delta(z) = (1-z)^{-(\delta+1)} \Phi_{-1}(z) = \frac{e^{-\frac{x^2z^2 - 2uxz + u^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+z}(1-z)^{\delta+\frac{3}{2}}}.$$

Soit a un nombre positif aussi grand qu'on veut mais fixe et considérons $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$ dans l'intervalle $a < u < O(\sqrt{n})$, x étant un nombre fini, fixe. Pour estimer l'ordre de grandeur de $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$ dans cet intervalle, observons que

$$(59)\qquad \sqrt{\pi}\sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{e^{-\frac{d^2 z}{1-z}}}{(1-z)^{\delta+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{e^{+\frac{s^2 z}{1+z}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}},$$

où $2d^2 = x^2 - 2xu + u^2 = (u-x)^2$ et $2s^2 = x^2 + 2ux + u^2 = (u+x)^2$. L'ordre de grandeur du coefficient $\sigma_n^{(\delta)}$ de la fonction $\sqrt{\pi}.\ \Phi_\delta(z)$ dépend de son allure au voisinage des deux points singuliers essentiels $z = 1$ et $z = -1$. Or, au voisinage du point $z = 1$, $\Phi_\delta(z)\sqrt{\pi}$ se présente comme

$$\frac{e^{+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{d^2 z}{1-z}}}{(1-z)^{\delta+\frac{3}{2}}} = \frac{e^{+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2}} \sum_0^\infty L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) z^n,$$

tandis qu'au voisinage du point $z = -1$, nous avons

$$\frac{e^{+\frac{d^2}{2}}}{2^{\delta+\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{s^2 z}{1+z}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{+\frac{d^2}{2}}}{2^{\delta+\frac{3}{2}}} \sum_0^\infty (-1)^n L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) z^n.$$

Ainsi, on obtient pour $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$ la formule approchée suivante :

$$(60)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\pi}\,\sigma_n^{(\delta)}(x, u) = {} & \frac{e^{+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2}} L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2)(1+\varepsilon'_n) \\ & + (-1)^n \frac{e^{+\frac{d^2}{2}}}{2^{\delta+\frac{3}{2}}} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2)(1+\varepsilon''_n), \end{aligned}$$

où $\varepsilon'_n\sqrt{n} = O(|d|)$ et $\varepsilon''_n\sqrt{n} = O(|s|)$.

Les inégalités

$$L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) = O\left[\frac{e^{\frac{d^2}{2}} n^{\frac{\delta}{2}}}{|d|^{\delta+1}}\right] \qquad \text{et} \qquad L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) = O\left[\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{n}}\right]$$

valables pour $d^2 = O(n)$ et $s^2 = O(n)$ donc pour $|u| = O(\sqrt{n})$, car x est fixe, nous donnent maintenant l'inégalité fondamentale pour $\sigma_n^{(\delta)}$:

$$(61)\qquad \sigma_n^{(\delta)}(x, u) = O\left[\frac{e^{\frac{s^2+d^2}{2}}\sqrt{n^\delta}}{|u-x|^{\delta+1}}\right] \qquad [|u| \leqq O(\sqrt{n})].$$

D'ailleurs rien n'empêche la validité de cette inégalité pour x variable pourvu que $|u \pm x|$ ne dépasse pas $O(\sqrt{n})$. Or, $2(s^2+d^2)=2(x^2+u^2)$, donc on trouve pour la moyenne $S_n^{(\delta)}(x, u)$, en divisant $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$ par $A_n^{(\delta)}$

$$S_n^{(\delta)}(x, u)=O\left\{\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}}\right\} \qquad [|u| \leqq O(\sqrt{n})]. \tag{62}$$

Cette inégalité prouve la convergence de la suite des moyennes $S_n^{(\delta)}(x, u)$ vers zéro pour $\delta > 0$ et cela quels que soient u et x fixes et inégaux, $u \neq x$. On voit ainsi que la série-noyau représente bien zéro malgré sa divergence, car elle est sommable $(C, \delta > 0)$ avec la somme nulle, si $u \neq x$, la sommabilité étant uniforme dans tout intervalle fini pourvu que $|u-x| \geqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Observons que pour x fixe on déduit de (61) vu que a est aussi grand qu'on veut et que u est compris dans l'intervalle $[a, O(\sqrt{n})]$

$$S_n^{(\delta)}(x, u)=O\left\{\frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{|u|^{2\delta+1}}\right\} \qquad [a \leqq |u| \leqq O(\sqrt{n})]. \tag{63}$$

Passons maintenant à l'intervalle $(\sqrt{n}, \infty)$. La même formule (59) nous donne l'expression exacte de $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$

$$\sqrt{\pi}\,\sigma_n^{(\delta)}(x, u)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m} L_m^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2)\, L_{n-m}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2).$$

Or, pour $(u \pm x)^2 \geqq 2\left(n+\delta+\frac{1}{2}\right)$, on a s^2, $d^2 \geqq n+\delta+\frac{1}{2}$ et l'inégalité (35) devient applicable. Pour réaliser cette condition, il suffit de supposer que l'on a

$$|u| \geqq |x| + \sqrt{2n+2\delta+1},$$

ce qui revient pour $n \to \infty$ sensiblement à $|u| > \sqrt{2n}$ vu que x est fini. Ainsi, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\,|\sigma_n^{(\delta)}(x, u)| &\leqq \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)}(2d^2)^m(2s^2)^{n-m} \\ &= \frac{2^n}{n!}(d^2+s^2)^n = \frac{2^n}{n!}(u^2+x^2)^n \qquad (|u| \geqq \sqrt{2n}).\end{aligned}$$

Vu que x est fixe et que $|u| \geqq \sqrt{2n}$, on en conclut

$$S_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}(x, u)}{A_n^{(\delta)}} = O\left[\frac{(2u^2)^n}{n!\,n^\delta}\right]$$
$$(|u| \geqq \sqrt{2n},\ x \text{ fixe}).$$

Nous allons transformer ce résultat en vue d'application ultérieure. Considérons le produit

$$\varphi_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} u^{2\delta+1} S_n^{(\delta)}(x, u) = O[\psi_n(u)],$$

où

$$\log \psi_n(u) = -\frac{u^2}{2} + (2n + 2\delta + 1)\log u + n(\log 2 + 1) - \left(n + \delta + \frac{1}{2}\right)\log n.$$

Le maximum de $\psi_n(u)$ est atteint pour $u = \sqrt{2n + 2\delta + 1}$ et si l'on choisit $k > \sqrt{2}$, on a sûrement

$$\psi_n(u) < \psi_n(k\sqrt{n})$$

pour $u > k\sqrt{n}$. Or,

$$\log \psi_n(k\sqrt{n}) = n\left[-\frac{k^2}{2} + 2\log k + \log 2 + 1\right] + (2\delta + 1)\log k.$$

Nous choisissons k égal à la racine de l'équation

$$2\log k + \log 2 + 1 = \frac{k^2}{2},$$

d'où $k = 2{,}7\ldots < e$ et ainsi $\psi_n(k\sqrt{n}) = (2{,}7\ldots)^{2\delta+1} = O(1)$.

Nous avons démontré ainsi que pour $|u| \geqq e\sqrt{n}$, on a l'inégalité

$$e^{-\frac{u^2}{2}} |u|^{2\delta+1} |S_n^{(\delta)}(x, u)| = O(1) \tag{64}$$

et cela quel que soit l'ordre des moyennes δ.

En réunissant les deux inégalités (63) et (64) on peut dire que dans les intervalles infinis $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) on a, x étant fixe,

$$e^{-\frac{u^2}{2}} S_n^{(\delta)}(x, u) = O\left(\frac{1}{|u|^{2\delta+1}}\right) \qquad (0 < a \leqq |u|). \tag{65}$$

Observons que le même résultat (61) peut être atteint beaucoup plus facilement, si $\delta = E(\delta)$, et voici comment. La relation connue

$$H_{n+1}(x) + 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$$

donne pour la première moyenne $S_n^{(1)}$ ou sigma-somme $\sigma_n^{(1)}$

$$S_n^{(1)}(x, u) = \frac{1}{n+1}\sum_0^n S_m^{(0)}(x, u) = \frac{\sigma_n^{(1)}(x, u)}{n+1},$$

l'expression explicite suivante

$$(66) \qquad \sigma_n^{(1)}(x, u) = \frac{G_n^{(2)}(x, u)}{[2(u-x)]^2} + \frac{\sigma_n^{(0)}(x, u)}{(u-x)^2},$$

où $\sigma_n^{(0)}(x, u) = S_n^{(0)}(x, u)$ et où l'on a posé, pour $k = E(k)$,

$$G_n^{(k)}(x, u) = \frac{1}{2^n\, n!\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_i^{(k)} H_{n+k-i}(x)\, H_{n+i}(u).$$

Grâce à l'inégalité

$$(29) \qquad H_n(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{2^n\, n!}\right],$$

on a évidemment

$$(67) \qquad G_n^{(k)}(x, u) = O\left(e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n^{k-1}}\right) \qquad [k = E(k) \geqq 1].$$

En particulier, on en déduit pour $k = 1$ et $k = 2$

$$(68) \qquad \sigma_n^{(0)}(x, u) = S_n^{(0)}(x, u) = \frac{G_n^{(1)}(x, u)}{2(u-x)} = O\left[\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|}\right]$$

et ensuite, à cause de (66),

$$\sigma_n^{(1)}(x, u) = O\left\{\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n}}{|x-u|^2}\left[1 + \frac{1}{|u-x|\sqrt{n}}\right]\right\}.$$

Supposons dans tout ce qui suit $|u-x|\sqrt{n} \geqq 1$. Alors

$$\sigma_n^{(1)}(x, u) = O\left[\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|x-u|^2}\sqrt{n}\right].$$

L'inégalité à démontrer s'écrit

$$(69) \qquad \sigma_n^{(k)}(x, u) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|^{k+1}}\sqrt{n^k}\right) \qquad [k = E(k) \geqq 0],$$

et elle est établie pour $k = 0$ et $k = 1$. On l'étend à toutes les valeurs entières de k au moyen de la relation de récurrence

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{G_n^{(k+1)}}{[2(u-x)]^{k+1}} + \sum_{m=1}^{E\left(\frac{k+1}{2}\right)} \frac{c_{km}}{(u-x)^{2m}} \sigma_n^{(k-m)}$$

que nous allons démontrer. A l'aide de la formule de Mehler (48), on trouve pour $G_n^{(k)}$ l'expression

$$G_n^{(k)}(x, u) = \frac{i^k e^{x^2+u^2}}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2+b^2}{4}+i(ax+bu)} (a-b)^k \frac{(-ab)^n}{2^n n!} \, da \, db,$$

d'où, en posant $a + b = \xi\sqrt{2}$, $a + b = \eta\sqrt{2}$ et ensuite $\eta\sqrt{1-z} = \zeta$:

$$F_k(z) = \sum_0^\infty G_n^{(k)} z^n = \frac{e^{x^2+u^2-\frac{(x+u)^2}{2(1+z)}}}{2\pi\sqrt{1+z}} \sqrt{\frac{2^k}{(1-z)^{k+1}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4}+i\zeta\frac{(x-u)}{\sqrt{2(1-z)}}} (i\zeta)^k \, d\zeta,$$

c'est-à-dire à cause de la formule de Mehler (48)

$$F_k(z) = \frac{e^{-\frac{x^2z^2-2xuz+u^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-z^2}} \sqrt{\frac{2^k}{(1-z)^k}} \, H_k\left(\frac{x-u}{2\sqrt{1-z}}\right).$$

Ainsi $F_{k+1}(z)$ est lié à la fonction $\Phi_k(z)$ génératrice de la suite $\sigma_n^{(k)}(x, u)$ et, en remplaçant k par $k+1$ et en développant le polynome d'Hermite, on a

$$F_{k+1}(z) = \Phi_k(z)[2(u-x)]^{k+1} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{(-2)^m \Gamma(k+2)}{m!\,\Gamma(k-2m+2)} \left[\frac{\sqrt{1-z}}{2(u-x)}\right]^{2m}$$

ou encore

$$F_{k+1}(z) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_{km} \Phi_{k-m}(z)[2(u-x)]^{k+1-2m}.$$

En comparant les coefficients de z^n dans les deux membres, on trouve la relation de récurrence annoncée

$$G_n^{(k+1)}(x, u) = \sum^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_{km}[2(u-x)]^{k+1-2m} \sigma_n^{(k-m)}(x, u),$$

où $c_{km}.\Gamma(m+1).\Gamma(k-2m+2)=(-2)^m.\Gamma(k+2)$. Résolue par rapport à $\sigma_n^{(k)}(x, u)$ elle nous donne, vu que $c_{k_0}=1$,

$$(70)\qquad \sigma_n^{(k)}(x, u)=\frac{G_n^{(k+1)}}{[2(u-x)]^{k+1}}-\sum_{m=1}^{\left[\frac{k_0+1}{2}\right]}\frac{c_{km}\sigma_n^{(k-m)}(x, u)}{[2(u-x)]^{2m}}.$$

Supposons maintenant que (69) soit établie pour $k=1, 2, \ldots, k_0-1$ et vérifions à l'aide de (70) qu'alors elle est exacte aussi pour $k=k_0$. On trouve, vu (67)

$$\sigma_n^{(k_0)}(x, u)=O\left\{\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n^{k_0}}}{|x-u|^{k_0+1}}\left[1+\sum_{m=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\frac{1}{[|u-x|\sqrt{n}]^m}\right]\right\},$$

ce qui suffit pour la vérification, car on suppose $|u-x|\sqrt{n}\geqq 1$. Or, on a vu que (69) est vraie pour $k=0$ et $k=1$. Donc elle est établie pour toutes les valeurs entières de $k=E(k)\geqq 0$, si $|u-x|.\sqrt{n}\geqq 1$. Si l'on a $|x-u|\sqrt{n}\leqq 1$ elle est aussi exacte, car de l'inégalité

$$(68)\qquad \sigma_n^{(0)}(x, u)=O\left(\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|}\right),$$

on déduit d'abord pour δ quelconque positif

$$\sigma_n^{(\delta)}(x, u)=\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta-1)}\sigma_m^{(0)}(x, u)=O\left[\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|u-x|}n^\delta\right],$$

vu que

$$\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta-1)}=A_n^{(\delta)}\sim\frac{n^\delta}{\Gamma(\delta+1)},$$

et ensuite pour $|x-u|\sqrt{n}\leqq 1$:

$$\sigma_n^{(\delta)}(x, u)=O\left[\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n^\delta}}{|u-x|^{\delta+1}}(|u-x|\sqrt{n})^\delta\right]=O\left[\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n^\delta}}{|u-x|^{\delta+1}}\right].$$

On constate ainsi avec quelle facilité on établit l'inégalité fondamentale (61) pour $\delta=E(\delta)$.

La formule approchée pour la moyenne $S_n^{(\delta)}(x, u)$ se laisse déduire de celle de Fejér pour $L_n^{(\alpha)}(x)$ à l'aide de la formule (60). On obtient ainsi

$$\sqrt{\pi}\,\sigma_n^{(\delta)}(x,u) = 2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} \left\{ \frac{e^{\frac{d^2}{2}}\sqrt{n^\delta}}{|d|^{\delta+1}\sqrt{\pi}} \left[\cos\left(2|d|\sqrt{n} - \frac{\delta\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$+ (-1)^n 2^{-\delta-\frac{3}{2}} e^{\frac{d^2}{2}} \left\{ \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{n\pi}} \left[\cos(2|s|\sqrt{n}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

c'est-à-dire, vu que $|d|.\sqrt{2} = |u - x|$ et $|s|\sqrt{2} = |u + x|$, pour u et x finis :

$$(71)\quad S_n^{(\delta)}(x,u) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi} e^{\frac{x^2+u^2}{2}}$$
$$\times\left\{ \frac{2^{\frac{\delta}{2}}}{|u-x|^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}} \left[\sin\left(|u-x|\sqrt{2n} - \frac{\delta\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(2n)^{\delta+\frac{1}{2}}} \left[\cos[(u+x)\sqrt{2n}] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\}.$$

On peut maintenant facilement établir que *les majorantes de Lebesgue $\rho_n^{(\delta)}(x)$ de tout ordre positif δ sont bornées dans leur ensemble.*

On a

$$\rho_n^{(\delta)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x,u)|\,du = \int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} + \int_{-e\sqrt{n}}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{e\sqrt{n}} + \int_{e\sqrt{n}}^{\infty}.$$

L'inégalité (64) applicable pour $|u| \geqq e\sqrt{n}$ prouve immédiatement que l'on a, pour $n \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x,u)|\,du = O\left(\int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{12}}\,du\right) = o(1),$$

et de même pour l'intégrale étendue de $e\sqrt{n}$ à ∞.

Dans les intervalles $(-e\sqrt{n}, x-\varepsilon)$ et $(x+\varepsilon, e\sqrt{n})$ nous pouvons appliquer l'inégalité (62) et prouver ainsi que la deuxième et la quatrième intégrales sont également $o(1)$; par exemple

$$\int_{x+\varepsilon}^{e\sqrt{n}} e^{-u^2}|S_n^{(\delta)}(x, u)|\,du = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}}\int_{x+\varepsilon}^{e\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right) = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right) = o(1).$$

Ainsi

$$\rho_n^{(\delta)}(x, u) = o(1) + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2}|S_n^{(\delta)}(x, u)|\,du.$$

Il serait facile maintenant de donner une expression approchée de $\rho_n^{(\delta)}(x, u)$, la question étant ramenée à l'étude de l'intégrale dans l'intervalle $|x - u| \leqq \varepsilon$, où ε est aussi petit que l'on veut. Il nous suffit de montrer que cette intégrale est $O(1)$. En effet, l'inégalité (29) pour $H_n(x)$

$$H_n(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{2^n n!}\right)$$

prouve que

$$S_n^{(0)}(x, u) = O\left\{\sum_{m=0}^{n} \frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{\sqrt{m+1}} \frac{(\sqrt{2^m m!})^2}{2^m m!}\right\} = e^{\frac{x^2+u^2}{2}} . O\left(\sum_0^n \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right),$$

c'est-à-dire

(72) $$S_n^{(0)}(x, u) = e^{\frac{x^2+u^2}{2}} O(\sqrt{n}).$$

Par conséquent

$$\int_{x-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{n}}} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\,du = O\left(\sqrt{n}\int_{x-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{n}}} du\right) = O(1).$$

Quant à l'intervalle $\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}, x + \varepsilon\right)$ l'inégalité (62) permet de conclure ainsi :

$$\int_{x+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\varepsilon} e^{-u^2}|S_n^{(\delta)}(x, u)|\,du = O\left[\frac{1}{\sqrt{n^\delta}}\int_{x+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\varepsilon} \frac{du}{(u-x)^{\delta+1}}\right] = O(1),$$

ce qui achève la preuve du fait que $\rho_n^{(\delta)}(x) \leqq R(\delta)$, où la constante R ne dépend que de δ, $\delta > 0$.

Il est important de montrer que, pour $\delta = 0$, les majorantes de

Lebesgue $\rho_n^{(0)}$ ne sont plus bornées et que l'on a notamment pour $n \to \infty$

$$\rho_n^{(0)}(x) = \frac{2}{\pi^2}\log(n+1) + \mathrm{O}(1).$$

Décomposons $\rho_n^{(0)}(x)$ en sept termes

$$\rho_n^{(0)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,|\,\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)\,|\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} + \int_{-e\sqrt{n}}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x-\frac{\pi}{\sqrt{2n}}} + \int_{x-\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{+\frac{\pi}{\sqrt{2n}}} + \int_{x+\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{e\sqrt{n}} + \int_{e\sqrt{n}}^{\infty}.$$

On montre immédiatement, en s'appuyant sur les inégalités (68) et (72),

$$\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u) = \mathrm{O}\left(\frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{|\,u-x\,|}\right) \tag{68}$$

$$\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u) = \mathrm{O}\left(e^{\frac{x^2+u^2}{2}}\sqrt{n}\right) \tag{72}$$

que le premier et le septième termes sont $o(1)$, tandis que ceux deuxième, quatrième et sixième sont $\mathrm{O}(1)$ de façon que

$$\rho_n^{(0)}(x) = \mathrm{O}(1) + \int_{x-\varepsilon}^{x+\frac{\pi}{\sqrt{2n}}} + \int_{x+\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{x+\varepsilon} = \mathrm{O}(1) + j_1 + j_2.$$

Pour évaluer les termes qui restent, nous employons la formule approchée (71) avec $\delta = 0$:

$$\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u) = \frac{e^{\frac{x^2+u^2}{2}}}{\pi}\left[\frac{\sin(u-x)\sqrt{2n}}{u-x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|\,u-x\,|\sqrt{n}}\right)\right].$$

On a, pour l'intervalle $\left(x+\frac{\pi}{\sqrt{2n}},\, x+\varepsilon\right)$ par exemple

$$j_2 = \int_{x+\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{x+\varepsilon} e^{-u^2}\,|\,\mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)\,|\,du = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} \left|\sin\left(t\sqrt{2n}\right)\right| \frac{dt}{t}\left\{1+\mathrm{O}(t)\right\} + \mathrm{O}(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\varepsilon\sqrt{2n}} |\sin t\,|\,\frac{dt}{t} + \mathrm{O}(1) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{r_n}\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{k\pi+t} + \mathrm{O}(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt\sum_1^{r_n}\frac{1}{k\pi} + \mathrm{O}(1) = \frac{2}{\pi^2}\log r_n + \mathrm{O}(1),$$

où $r_n = \mathrm{E}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{2n}\right)$. De même pour j_1 et enfin

$$\rho_n^{(0)}(x) = \frac{4}{\pi^2}\log(\sqrt{2n}) + \mathrm{O}(1) = \frac{2}{\pi^2}\log n + \mathrm{O}(1).$$

IV. — Sommation de la série d'Hermite par les moyennes arithmétiques.

La moyenne arithmétique $f_n^{(\delta)}(x)$ des sommes partielles du développement

$$(2) \qquad f(x) \sim \sum_0^\infty \frac{\mathrm{H}_n(x)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u)\,\mathrm{H}_n(u)\,du$$

s'exprime à l'aide de celle $\mathrm{S}_n^{(\delta)}(x, u)$ de la série-noyau

$$f_n^{(\delta)} = f_n^{(\delta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{S}_n^{(\delta)}(x, u) f(u)\,du.$$

Décomposons l'intervalle $(-\infty, \infty)$ en six intervalles

$$f_n^{(\delta)} = \int_{-\infty}^{-\mathrm{A}} + \int_{-\mathrm{A}}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x} + \int_{x}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\mathrm{A}} + \int_{\mathrm{A}}^{\infty} = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{J}_k.$$

L'inégalité (65) du paragraphe 3 fait voir que l'on a

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{O}\left[\int_{-\infty}^{-\mathrm{A}} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{|u|^{2\delta+1}}\right], \qquad \mathrm{J}_6 = \mathrm{O}\left[\int_{\mathrm{A}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{u^{2\delta+1}}\right],$$

ce qui prouve que J_1 et J_6 peuvent être rendues aussi petites que l'on veut en valeur absolue, si l'on suppose l'existence des deux intégrales suivantes :

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{|u|^{2\delta+1}} < \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{u^{2\delta+1}} < \mathrm{G}.$$

En supposant cette condition remplie, on peut choisir un nombre A_0 suffisamment grand pour avoir quelque petit que soit η donné d'avance

$$|\mathrm{J}_1| < \eta \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{J}_6| < \eta \qquad (\mathrm{A} \geqq \mathrm{A}_0).$$

Ensuite l'inégalité (62) du paragraphe 3 permet d'écrire

$$\mathrm{J}_2 = \mathrm{O}\left[\int_{-\mathrm{A}}^{x-\varepsilon} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)|\,du}{\varepsilon^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}}\right] = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n^\delta}}\right)$$

et de même pour J_5. On en déduit pour $\delta > 0$

$$\lim_{n=\infty} J_2 = \lim_{n=\infty} J_5 = 0 \qquad (\delta > 0)$$

et cela quelque petit que soit ε fixe et quelque grand que soit A fixe. Supposons maintenant l'existence des deux nombres $f(x-0)$ et $f(x+0)$. On a

$$\left| J_3 - f(x-0)\int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du \right| \leqq \int_{x-\varepsilon}^{x} |f(u) - f(x-0)|\, e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du.$$

Soit $\beta = \beta(x, \varepsilon)$ la borne supérieure de $|f(u) - f(x-0)|$ dans l'intervalle $(x-\varepsilon, x)$. Vu que

$$\int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du < \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du = \rho_n^{(\delta)}(x) < R,$$

où la constante R ne dépend que de δ (*voir* § 3), on trouve :

$$\left| J_3 - f(x-0)\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du \right| \leqq \beta R + |f(x-0)| \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du.$$

Les inégalités (65) et (62) montrent que l'on a

$$\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du = \int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} + \int_{-e\sqrt{n}}^{x-\varepsilon} = O\left(\int_{-\infty}^{-e\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^\delta}} \int_{-e\sqrt{n}}^{x-\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{-u^2} |S_n^{(\delta)}(x, u)|\, du = 0.$$

Quelque petit que soit η donné d'avance, on peut choisir ε assez petit pour avoir $\beta R < \eta$. Par conséquent, on trouve

$$\left| J_3 - f(x-0)\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du \right| < \eta + o(1),$$

ce qui prouve que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{J}_3 = f(x-0) \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} \mathrm{S}_n^{(\delta)}(x, u)\, du.$$

Le même raisonnement montre que

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{J}_t = f(x+0) \lim_{n=\infty} \int_{x}^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{S}_n^{(\delta)}(x, u)\, du$$

et pour achever la sommation il ne reste qu'à prouver le lemme suivant :

Lemme. — *Pour x fixe, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} \mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)\, du = \lim_{n=\infty} \int_{x}^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)\, dx = \frac{1}{2}.$$

On pourrait démontrer le lemme à l'aide des inégalités (42), (43) et de la formule approchée (39), mais il est plus simple d'étudier la fonction génératrice des quantités

$$j_n = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} \mathrm{S}_n^{(0)}(x, u)\, du.$$

On trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(z) = \sum_0^{\infty} j_n z^n &= \frac{1}{(1-z)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{u-xz}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2} \frac{du}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}} e^{-v^2}\, dv.\end{aligned}$$

La fonction $\mathrm{J}(z)$ admet deux points singuliers $z=1$ et $z=-1$, et $\mathrm{J}(z)$ se présente pour $z \to \pm 1$ comme

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{x}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-z^2}} + \mathrm{O}(\sqrt{1-z}) \qquad (z \to 1)$$

et

$$\frac{x\, e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{\frac{2x^2 z}{1+z}}}{\sqrt{1+z}} \left[1 + \mathrm{O}(\sqrt{1+z})\right] \qquad (z \to -1).$$

Donc on a pour j_n la formule approchée suivante :

$$j_n = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} A_n^{(-\frac{1}{2})} + \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(2x^2) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\sqrt{\frac{2}{n}} \sin^2\left(x\sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quant à

$$\int_x^\infty e^{-u^2} S_n^{(0)}(u, x)\, du,$$

elle est égale à $1 - j_n$, car d'après l'orthogonalité de polynomes d'Hermite, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} S_n^{(0)}(u, x)\, du = \sum_0^n \frac{H_m(u)}{2^m\, m!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_m(u)\, du = 1.$$

Pour $\delta > 0$ on a *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du = \lim_{n=\infty} \int_x^\infty e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du = \frac{1}{2}.$$

et le théorème suivant se trouve être démontré :

THÉORÈME II. — *Partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-\infty, \infty)$ *le développement d'Hermite d'une fonction* $f(x)$, *intégrable* (L) *dans tout intervalle fini, est sommable* (C, δ) *avec la somme*

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)],$$

l'indice de sommabilité $\delta > 0$ *étant déterminé par l'allure de* $f(x)$ *à l'infini. La condition suffisante de sommabilité* (C, δ) *est l'intégrabilité du produit*

$$|x|^{-(2\delta+1)} e^{-\frac{x^2}{2}} |f(x)|$$

dans les intervalles infinis $(-\infty, -a)$, (a, ∞), *le nombre a étant aussi grand qu'on veut mais fixe.*

Observons que la condition sous-entendue de l'existence de $f(x_0+0)$ et $f(x_0-0)$ au point $x = x_0$, où l'on étudie la sommabilité de la série d'Hermite, peut être facilement élargie et remplacée par celle de la continuité en moyenne (mean continuity) d'un certain ordre positif ω au point $x = x_0$ c'est-à-dire de l'existence de la limite

$$\lim_{t=0} \varphi_\omega(t) = \lim_{t=0} \omega . t^{-\omega} \int_0^t \varphi_0(u).(t-u)^{\omega-1}.du \qquad (\omega > 0)$$

où $\varphi_0(u) = f(x_0 + u) - 2s + f(x_0 - u)$. Par analogie avec la série trigonométrique de Fourier, à laquelle la série d'Hermite est équiconvergente sous certaines conditions concernant l'allure de la fonction développée à l'infini, on doit s'attendre à ceci que l'hypothèse $\varphi_\omega(t) = o(1)$ pour $t \to 0$ ne peut assurer la sommabilité (C, δ) de la série d'Hermite avec la somme s que d'ordre δ supérieur à ω, $\delta > \omega$. De même la condition de Lebesgue

$$\Phi_0(h) = \int_0^h |\varphi_0(t)|.dt = o(h) \qquad (h \to 0)$$

et celles analogues du même type

$$\int_0^h |\varphi_\omega(t)|.dt = o(h) \qquad (h \to 0)$$

doivent assurer la sommabilité (C, δ) de la série d'Hermite au point $x = x_0$ d'ordres $\delta > 0$ et $\delta > \omega$ respectivement. A ce point de vue le résultat de M. Korous, qui a prouvé en 1928 que l'hypothèse $\Phi_0(h) = o(h)$ assure la sommabilité $(C, 1)$ de la série d'Hermite, correspond à celui obtenu en 1905 par M. Lebesgue pour les séries trigonométriques. Il est hors de doute que l'hypothèse de Korous $\Phi_0(h) = o(h)$ assure non seulement $(C, 1)$ mais aussi $(C, \delta > 0)$ de la série d'Hermite pour toute valeur positive de $\delta > 0$. Il serait intéressant de prouver ce fait.

Au point de vue qui nous occupe dans ce travail le résultat de Korous est loin d'être satisfaisant, car quant à l'allure de $f(x)$ à l'infini son énoncé exige l'intégrabilité du produit $e^{-\frac{x^2}{2}}.|f(x)|$. Or, on vient de voir qu'il suffit de supposer l'intégrabilité du produit $x^{-3}.e^{-\frac{x^2}{2}}.|f(x)|$ dans les intervalles $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) pour assurer la sommabilité $(C, 1)$ de la série d'Hermite.

On voit aussi que la sommabilité (C, δ) par les moyennes d'ordre positif $\delta > 0$ est plus naturelle que la convergence, car pour la première il suffit de supposer l'intégrabilité de la fonction développée $f(x)$ dans tout intervalle fini, tandis que la convergence n'a lieu qu'exceptionnellement quand certaines conditions suffisantes de convergence sont remplies au voisinage de la valeur considérée de la variable x. En outre, les conditions à l'infini sont moins larges s'il s'agit d'assurer la convergence et elles s'élargissent de plus en plus quand l'ordre δ des moyennes employées pour sommer la série (2) croît. Ainsi, si l'on a par exemple

$$(73) \qquad f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) \qquad (|x| \to \infty),$$

le développement (2) de $f(x)$ est sommable (C, δ) pour tout δ positif. En général la condition

$$(74) \qquad f(x) = O\left(|x|^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right) \qquad (|x| \to \infty)$$

assure la sommabilité (C, δ) pour $\delta > \alpha$.

Pour mieux préciser l'importance de l'allure de $f(x)$ à l'infini et son influence sur la sommabilité (C, δ) du développement (2), nous allons montrer sur un exemple particulier l'existence de fonctions continues dans tout intervalle fini et même monotones, dont les développements (2) ne sont sommables (C, δ) pour aucune valeur de x, l'ordre δ des moyennes étant non supérieur à δ_0, où δ_0 peut être aussi grand qu'on veut. Considérons à cet effet la fonction $x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}}$ et son développement

$$(75) \qquad x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}} \sim \sum_{0}^{\infty} d_n^{(m)} \mathrm{H}_n(x),$$

où $m = \mathrm{E}(m) \geqq 0$ et, comme d'habitude,

$$d_n^{(m)} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2m} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{H}_n(u)\, du.$$

Pour démontrer la non-sommabilité (C, δ) de la série (75) tant que $\delta \leqq m - \frac{1}{2}$, nous allons évaluer l'ordre de grandeur de son terme général $u_n = d_n^{(m)} \mathrm{H}_n(x)$ pour une valeur finie de x. Formons à cet effet la fonction génératrice

$$\mathrm{F}_m(z)=\sum_0^{\infty} d_n^{(m)}\,\mathrm{H}_n(x)\,z^n=\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\frac{e^{-\frac{x^2z^2-2uxz+u^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-z^2}}\,du$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-z^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}\cdot\frac{1+z^2}{1-z^2}+\frac{2uxz}{1-z^2}}\,u^{2m}\,du.$$

Or, la formule (48) de Mehler donne

$$\mathrm{H}_{2m}\left(\frac{ixz\sqrt{2}}{\sqrt{1-z^4}}\right)=\frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{2x^2z^2}{1-z^4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4}+it\frac{ixz\sqrt{2}}{\sqrt{1-z^4}}}\,t^{2m}\,dt.$$

La substitution $u\sqrt{2}\sqrt{1+z^2}=-t\sqrt{1-z^2}$ transforme l'expression de $\mathrm{F}_m(z)$ en

$$\mathrm{F}_m(z)=\frac{(-1)^m\sqrt{2}}{2^m}\,\frac{(1-z^2)^m}{(1+z^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,e^{\frac{x^2z^2}{1+z^2}}\,\mathrm{H}_{2m}\left(\frac{ixz\sqrt{2}}{\sqrt{1-z^4}}\right),$$

ce qui permet d'écrire la formule approchée du terme général de (75) qui est le coefficient de z^n dans $\mathrm{F}_m(z)$.

Le second membre a deux points singuliers $z=\pm i$ et, en développant H_{2m}, on constate que son premier terme fournit les parties principales de $\mathrm{F}_m(z)$ au voisinage de ses points singuliers. On peut d'ailleurs exprimer le terme général u_{2n} (ceux impairs u_{2n+1} étant absents) à l'aide du polynome $\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x^2)$, et cette expression approchée nous fera connaître son ordre de grandeur.

Vu que

$$\mathrm{H}_{2m}\left(\frac{ixz\sqrt{2}}{\sqrt{1-z^4}}\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\overline{2m}!\,(-1)^m}{k!\,\overline{2m-2k}!}\left(\frac{2xz\sqrt{2}}{\sqrt{1-z^4}}\right)^{2m-2k},$$

on trouve

$$\mathrm{F}_m(z)=2^{2m+\frac{1}{2}}(xz)^{2m}\frac{e^{\frac{x^2z^2}{1+z^2}}}{(1+z^2)^{2m+\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{m}\frac{\overline{2m}!}{k!\,\overline{2m-2k}!}\left(\frac{1-z^4}{8x^2z^2}\right)^k,$$

d'où l'expression approchée de u_{2n} à l'aide de la partie principale de $\mathrm{F}_m(z)$ au voisinage de $z=\pm i$,

$$\mathrm{F}_m(z)\sim 2^{2m+\frac{1}{2}}(-x^2)^m\sum_0^m\frac{\overline{2m}!}{k!\,\overline{2m-2k}!}\left(-\frac{1}{4x^2}\right)^k\frac{e^{\frac{x^2z^2}{1+z^2}}}{(1+z^2)^{2m-k+\frac{1}{2}}},$$

car on a évidemment

$$\frac{e^{\frac{x^2 z^2}{1+z^2}}}{(1+z^2)^{\alpha+1}} = \sum_0^{\infty} (-1)^n L_n^{(\alpha)}(x^2) z^{2n}.$$

On trouve ainsi la formule approchée

$$u_{2n}(x) \sim (-1)^n 2^{2m+\frac{1}{2}} (-x^2)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{\overline{2m}!}{k!\,\overline{2m-2k}!} \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^k L_n^{\left(2m-k-\frac{1}{2}\right)}(x^2).$$

La formule approchée de Fejér (26) donne

$$u_{2n}(x) = (-1)^n n^{m-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} 2^{2m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_0^m \frac{(-1)^k \overline{2m}!}{k!\,\overline{2m-2k}!} \cdot \frac{\sin\left(2x\sqrt{n} - k\frac{\pi}{2}\right)}{4^k \sqrt{n^k}}$$
$$+ O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

On constate ainsi que la condition nécessaire $u_n = o(n^\delta)$ de la sommabilité (C, δ) n'est pas vérifiée pour $\delta \leqq m - \frac{1}{2}$, donc la série étudiée n'est nulle part sommable $\left(C, \delta \leqq m - \frac{1}{2}\right)$. Cette condition est satisfaite si $\delta > m - \frac{1}{2}$ et, en effet, la série est sommable $\left(C, \delta > m - \frac{1}{2}\right)$. Pour le voir, il suffit de former la fonction génératrice de la suite de ses sigma-sommes $\sigma_n^{(\delta)}$. C'est la fonction

$$\sum_0^{\infty} z^n \sigma_n^{(\delta)}(x) = F_m^{(\delta)}(z) = \frac{F_m(z)}{(1-z)^{\delta+1}}.$$

Elle a trois points singuliers, sa partie principale au voisinage de $z = 1$ étant

$$\frac{F_m(1)}{(1-z)^{\delta+1}} = 2^{2m+\frac{1}{2}} x^{2m} . 2^{-2m-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} (1-z)^{-(\delta+1)} = \frac{x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}}}{(1-z)^{\delta+1}}.$$

Quant aux points singuliers $z = \pm i$ la contribution qu'ils apportent dans la formule approchée pour $\sigma_n^{(\delta)}$ ne diffère de celle que nous venons de calculer pour $u_n(x)$ que par le facteur nouveau

$$2\,R\,\frac{1}{(1-i)^{\delta+1}} = 2^{\frac{1-\delta}{2}} \cos\frac{\delta+1}{4}\pi,$$

provenant de $(1-z)^{-(\delta+1)}$. On obtient ainsi, n'écrivant que le premier terme de l'expression provenant des points $z = \pm i$,

$$\sigma_n^{(\delta)}(x) \sim A_n^{(\delta)} x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}} + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x\sqrt{n})\, n^{m-\frac{1}{2}} . 2^{2m+\frac{1-\delta}{2}} \cos\frac{\delta+1}{4}\pi,$$

d'où

$$s_n^{(\delta)} \sim x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \sin(2x\sqrt{n}) \frac{\Gamma(\delta+1)(-1)^n}{n^{\delta-m+\frac{1}{2}}} 2^{2m+\frac{1-\delta}{2}} \cos\frac{\delta+1}{4}\pi.$$

On constate que $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}}$, si $\delta > m - \frac{1}{2}$, mais les moyennes oscillent indéfiniment entre deux bornes finies pour $\delta = m - \frac{1}{2}$, quand $n \to \infty$, et entre $-\infty$ et $+\infty$ pour $\delta < m - \frac{1}{2}$. Comparons ce résultat avec le théorème général qui n'assure pour $f(x) = x^{2m} e^{\frac{x^2}{2}}$ la sommabilité (C, δ) que pour $\delta > m$, tandis que la série est partout sommable déjà pour $\delta > m - \frac{1}{2}$. Ce décalage s'explique par le fait que la fonction particulière développée est *monotone*. Il est aisé en effet de construire des fonctions continues partout et vérifiant les conditions $f(x) = O\left(x^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right)$, $|x| \to \infty$, dont les développements (2) sont non sommables (C, δ) pour $\delta < \alpha$ et cela pour toutes les valeurs positives de α.

Commençons par le cas le plus simple qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$ pour mieux préciser l'idée directrice. Vu que $H_{2n+1}(0) = 0$, on a pour $u = 0$

$$\sum_0^\infty \frac{H_{2n}(x)\, H_{2n}(0)}{2^{2n}\, 2n!\, \sqrt{\pi}} z^{2n} = \frac{e^{-\frac{x^2 z^2}{1-z^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-z^2}},$$

d'où, en remplaçant d'abord z^2 par z et en multipliant ensuite par $1-z$ et $\sqrt{\pi}$,

$$(1-z)\sum_0^\infty \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{2^{2n}\, n!} = e^{-\frac{x^2 z}{1-z}} \sqrt{1-z},$$

car $n!\,H_{2n}(0) = (-1)^n \overline{2n}!$. On en tire la relation

$$4n\,H_{2n-2}(x) + H_{2n}(x) = (-1)^n\,2^{2n}\,n!\,L_n^{(-\frac{3}{2})}(x^2).$$

La formule approchée de Fejér-Perron donne

$$n\,L_n^{(-\frac{3}{2})}(x^2) = \frac{x}{\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\left[\cos\left(2x\sqrt{n} + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

d'où l'inégalité

$$\frac{4n\,H_{2n-2}(x) + H_{2n}(x)}{2^{2n}\,\Gamma(n)} = O\left(|x|\,e^{\frac{x^2}{2}}\right),$$

valable quel que soit $|x|$ dans $(0, \infty)$ grâce à notre inégalité fondamentale (27). D'ailleurs le raisonnement de Perron permet d'affirmer sa validité pour $|x| = o\left(\sqrt[6]{n}\right)$ sans recourir à (27). Ceci posé, observons que chacun des termes de cette somme

$$\frac{4n\,H_{2n-2}(x)}{2^{2n}\,\Gamma(n)} \quad \text{et} \quad \frac{H_{2n}(x)}{2^{2n}\,\Gamma(n)}$$

pris séparément est de l'ordre de $O\left(\sqrt{n}\right)$ et c'est leur réunion ensemble qui fait baisser cet ordre de grandeur jusqu'à $O(1)$, x étant supposé fini. Définissons maintenant la fonction $F_{\frac{1}{2}}(x)$ par la série uniformément et absolument convergente suivante

$$(76) \qquad F_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\frac{2.n!\,H_{n!-2}(x) + H_{n!}(x)}{2^{n!}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\,n!\right)}.$$

On a évidemment pour $|x| \to \infty$

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,|x|\,e^{\frac{x^2}{2}}\right) = O\left(|x|\,e^{\frac{x^2}{2}}\right);$$

donc son développement (2) est partout sommable $\left(C,\ \delta > \frac{1}{2}\right)$ avec la somme $F_{\frac{1}{2}}(x)$, car cette fonction est continue. Or, il est aisé de prouver que ce développement, qui n'est autre que la série (76) écrite sans grouper ses termes et tenant compte des termes qui manquent

$$F_{\frac{1}{2}}(x) \sim \frac{H_0(x)}{2^2} + 0 + \frac{H_2(x)}{2^2 . 2^{2!}} + 0 + \frac{3 H_4(x)}{2^5} + 0 + \ldots,$$

n'est pas sommable (C, δ), si $\delta < \frac{1}{2}$, quel que soit x.

En effet, le $(n!)^{\text{ième}}$ terme est de l'ordre de

$$\frac{1}{n^2} \frac{H_{n!}(x)}{2^{n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}n!\right)} \sim \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^{n!}\Gamma(n!+1)} \frac{1}{2} n!}{n^2 \, 2^{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}n! + 1\right)} \sqrt[4]{\frac{2}{\pi n!}} \cos\left(2x\sqrt{n!} + \frac{n!\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire de l'ordre de

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{(n!)^{n!} e^{-n!} \sqrt{2\pi n!}\, n!}}{2 n^2 2^{\frac{1}{2}n!} \left(\frac{1}{2} n!\right)^{\frac{1}{2}n!} e^{-\frac{n!}{2}} \sqrt{\pi n!}} \sqrt[4]{\frac{2}{\pi n!}} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{n!}}{n^2 \sqrt{2\pi}}.$$

Par conséquent la condition nécessaire de sommabilité (C, δ)

$$u_{n!} = o[(n!)^{\delta}]$$

n'est satisfaite qu'à partir de $\delta = \frac{1}{2}$ et la série étudiée n'est nulle part sommable $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$.

Passons maintenant au cas général $\alpha > 0$ quelconque. Formons la fonction

$$(77) \qquad F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (n!)^{\alpha + \frac{1}{2}} L_{n!}^{\left[-\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}(x^2) \qquad (\alpha > 0).$$

La série (77) converge partout absolument et uniformément, car la formule approchée de Perron valable pour $|x| \leqq o(\sqrt[6]{n})$ prouve que l'on a

$$(n!)^{\alpha+\frac{1}{2}} L_{n!}^{\left[-\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}(x^2) = O\left[|x|^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right].$$

La fonction $F_\alpha(x)$ satisfait aux conditions du théorème général pour $\delta > \alpha$, donc son développement formel (2) est partout sommable (C, $\delta > \alpha$). Pour l'écrire il suffit de remplacer dans chaque terme de la série (77) le polynome de Laguerre par son expression en polynomes d'Hermite. L'identité

$$\sum z^n \mathrm{L}_n^{\left[-\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}(x^2) \equiv \frac{e^{-\frac{x^2 z}{1-z}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}-2\alpha}} \equiv (1-z)^{2\alpha} \frac{e^{-\frac{x^2 z}{1-z}}}{\sqrt{1-z}}$$

$$= (1-z)^{2\alpha} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \mathrm{H}_{2n}(x)}{2^{2n}\, n!} z^n$$

donne cette expression

$$\mathrm{L}_n^{\left[-\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}(x^2) = \sum_0^n \frac{(-1)^m \Gamma(n-m-2\alpha)}{\Gamma(-2\alpha)\, 2^{2m}\, m!\, \overline{n-m}!} \mathrm{H}_{2m}(x),$$

d'où le développement de $\mathrm{F}_\alpha(x)$ en série d'Hermite

$$\mathrm{F}_\alpha(x) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^2} \sum_0^{n!} \frac{(-1)^m \Gamma(n!-m-2\alpha)\, \mathrm{H}_{2m}(x)}{\Gamma(-2\alpha)\, 2^{2m}\, m!\, \Gamma(n!-m+1)}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^m c_m^{(\alpha)}}{2^{2m}\, m!} \mathrm{H}_{2m}(x)$$

avec

$$c_m^{(\alpha)} = \sum_{n! \geqq m}^\infty \frac{\Gamma(n!-m-2\alpha)}{\Gamma(-2\alpha)\, \Gamma(n!-m+1)} \frac{(n!)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^2}.$$

Pour prouver la non-sommabilité $(\mathrm{C}, \delta < \alpha)$ de ce développement, considérons l'ordre de grandeur du $2(k!)^{\text{ième}}$ terme dont le coefficient est $c_m^{(\alpha)}$ avec $m = k!$

$$c_{k!}^{(\alpha)} = \sum_{n=k}^\infty \frac{\Gamma(n!-k!-2\alpha)}{\Gamma(-2\alpha)\, \Gamma(n!-k!+1)} \frac{(n!)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^2} = \sum_{n=k}^\infty \mathrm{A}_{n!-k!}^{[-(1+2\alpha)]} \frac{(n!)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^2},$$

Pour $k \to \infty$ on constate facilement que c'est le premier terme du second membre qui est de beaucoup supérieur à la somme de tous les autres, donc d'après (38)

$$u_{2k!} = \frac{(-1)^{k!} c_{k!}^{(\alpha)} \mathrm{H}_{2k!}(x)}{2^{2k!}\, \Gamma(k!+1)} \sim \frac{c_{k!}^{(\alpha)}}{\sqrt{k!}} \sim \frac{(k!)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{k^2 \sqrt{k!}} \sim \frac{(k!)^\alpha}{k^2},$$

et la condition nécessaire $u_n = o(n^\delta)$ de (C, δ) n'est pas satisfaite pour $\delta < \alpha$. C. Q. F. D.

Pour $\alpha = 0$, on a la fonction $F_0(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ pour $|x| \to \infty$

$$F_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{H_{n!}(x)\sqrt[4]{n!}}{\sqrt{2^{n!}\, n!}},$$

dont la série qui la définit est en même temps son développement (2), ce développement n'étant pas sommable (C, $\delta < 0$). Ainsi, on voit que les conditions du théorème général, relatives à l'allure de $f(x)$ à l'infini ne peuvent pas être améliorées. Il reste cependant à étudier, si la condition

$$f(x) = O\left(x^{2\alpha} e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

est suffisante pour la sommabilité (C, $\delta = \alpha$).

Ayant ainsi précisé la portée du théorème général démontré dans ce paragraphe, complétons ce résultat par l'étude succincte de la superposition des deux procédés (C, δ) et (E, k), en posant $\theta = 2^{-k}$.

Au paragraphe 2 on a vu que la fonction génératrice des moyennes d'Euler de la série-noyau d'ordre quelconque k, $\mathcal{E}_n^{(k)}$, est égale à

$$\Psi_k(z) = \sum_0^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)} z^n = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{\theta z (u+x)^2}{2(1-z+2\theta z)}}}{\sqrt{1 - z(1-2\theta)}} \cdot \frac{e^{-\frac{z}{1-z}\left[\frac{\theta}{2}(u-x)^2\right]}}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}.$$

En leur appliquant le procédé (C, δ), on en déduit la fonction génératrice des sigma-sommes $\mathcal{E}^{(k)}\sigma_n^{(\delta)}$ qui est égale au quotient de $\Psi_k(z)$ par $(1-z)^\delta$. Par conséquent, en répétant le raisonnement du paragraphe 2, ces sigma-sommes sont représentées par la formule approchée suivante :

$$(78) \qquad \mathcal{E}^{(k)}\sigma_n^{(\delta)}(x, u) = e^{\frac{(u+x)^2}{4}} \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\theta}{2}(u-x)^2\right] \{1 + \varepsilon_n\}.$$

Les inégalités fondamentales pour le polynome de Laguerre nous donnent celles pour la moyenne mixte $\mathcal{E}^{(k)} s_n^{(\delta)}$ de la série-noyau, qui par définition est égale à la sigma-somme (78) divisée par $A_n^{(\delta)}$. Ces inégalités, pour x fixe,

$$\mathcal{E}^{(k)} s_n^{(\delta)}(x, u) = \mathrm{O}\left\{ \frac{e^{\frac{(u+x)^2}{4} + \frac{\theta}{4}(u-x)^2}}{|u-x|^{\delta+1}\sqrt{(n\theta)^\delta}} \right\} = \mathrm{O}\left\{ \frac{e^{\frac{u^2}{4}(1+\theta)}}{|u|^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}} \right\}$$

et

$$\mathcal{E}^{(k)} s_n^{(\delta)}(x, u) = \mathrm{O}\left\{ e^{\frac{u^2}{4}} \left(\frac{e\theta u^2}{n}\right)^n \sqrt{\frac{\theta}{n}} \right\} \qquad \left(|u| > \sqrt{\frac{2n}{\theta}}\right)$$

ne diffèrent de celles pour $\mathcal{E}_n^{(k)}$ que par la présence dans la première de $|u|^\delta \sqrt{n^\delta}$ au dénominateur, ce qui permet de démontrer le théorème général analogue au théorème II et qui s'énonce ainsi :

III. *Le développement* (2) *d'une fonction* $f(x)$, *intégrable* ($\mathcal{L}$) *dans tout intervalle fini* $(-a, a)$ *est sommable par l'application du procédé d'Euler* (E, k) *avec un* k *assez grand aux moyennes arithmétiques d'ordre* δ *de la série en question, s'il existe un nombre positif* ε *aussi petit que l'on veut mais fixe et tel que les deux intégrales*

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-u^2\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)} |f(u)| \frac{du}{|u|^{1+2\delta}} \qquad et \qquad \int_a^\infty e^{-u^2\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)} |f(u)| \frac{du}{u^{1+2\delta}}$$

soient finies. Plus précisément la condition

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{|u|^{1+2\delta}} < \mathrm{G} \qquad et \qquad \int_a^\infty e^{-qu^2} |f(u)| \frac{du}{u^{1+2\delta}} < \mathrm{G} \qquad \left(q < \frac{3}{4}\right)$$

assure la sommabilité de la série d'Hermite par le procédé mixte (E, k) (C, δ) *pour* $\log 2 . k \geqq \log \frac{1}{3-4q}$.

En particulier, si l'on a $f(x) = \mathrm{O}\,(e^{qx^2}|x|^{2\alpha})$, $|x| \to \infty$, avec $q < \frac{3}{4}$, la série d'Hermite de $f(x)$ est sommable (E, k)(C, δ), où

$$k \log 2 \geqq \log\left(\frac{1}{3-4q}\right) \qquad \text{et} \qquad \delta > \alpha.$$

On constate sur l'exemple de la série d'Hermite l'utilité des procédés de sommation mixtes tels que (E, k) (C, δ) par exemple, ce procédé étant équivalent, comme on le sait, à celui (C, δ)(E, k).

V. — Phénomène de Gibbs. Théorème de Parseval.

Comme application de l'étude des moyennes de la série-noyau précisons l'allure qu'accuse le phénomène de Gibbs dans le système de polynomes d'Hermite. On sait qu'il suffit de le connaître pour la fonction typique

$$G(y) = \operatorname{sign}(y - x) \varphi$$

égale à $+1$ pour $y > x$ et à -1 pour $y < x$. Cette fonction constante partout dans $(-\infty, \infty)$, sauf au point $y = x$, possède dans $(-\infty, \infty)$ une dérivée bien définie et nulle partout, sauf pour $y = x$. La série-noyau, multipliée par $2e^{-u^2}$, représente également zéro partout sauf au point $u = x$ et l'intégrant par rapport à u de x à $y \gtrless x$ on trouve la série convergente

$$(79) \quad \begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^y e^{-u^2}\, du + 2 \sum_1^\infty \frac{H_n(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \int_x^y e^{-u^2} H_n(u)\, du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^y e^{-u^2}\, du + 2 \sum_1^\infty \frac{H_n(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \left\{ e^{-y^2} H_{n-1}(y) - e^{-x^2} H_{n-1}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Pour montrer sa convergence et calculer sa somme, observons que les deux intégrales

$$(80) \quad \int_{x+\varepsilon}^{\infty} e^{-u^2} [S_n^{(0)}(x, u)]^2\, du < G \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{-u^2} [S_n^{(0)}(x, u)]^2\, du < G$$

existent et sont bornées pour $n \to \infty$, la constante G étant indépendante de n. Pour démontrer ce lemme, sur lequel Uspensky a basé son étude de conditions de convergence, il suffit d'observer que d'une part

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} [S_n^{(0)}(x, u)]^2\, du &= \sum_0^n \frac{H_m^2(x)}{(2^m\, m!\, \sqrt{\pi})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_m^2(u)\, du \\ &= \sum_0^n \frac{H_m^2(x)}{2^m\, m!\, \sqrt{\pi}} = S_n^{(0)}(x, x), \end{aligned}$$

et d'autre part, vu que

$$\begin{aligned} [S_n^{(0)}(x, u)]^2 = \frac{e^{x^2+u^2}}{\pi^2} \Bigg\{ &\frac{\sin^2[(u-x)\sqrt{2n}]}{(u-x)^2} \\ &+ \frac{2\varphi_n(x, u) \sin[(u-x)\sqrt{2n}]}{(u-x)^2 \sqrt{n}} + \frac{\varphi_n^2(x, u)}{n(u-x)^2} \Bigg\}; \end{aligned}$$

où $\varphi_n(x, u) = O(1)$, $\varphi_n(x, x) = 0$ et $\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u} = O(\sqrt{n})$,

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2}[S_n^{(0)}(x, u)]^2\,du$$
$$= \frac{e^{x^2}}{\pi^2}\left\{\sqrt{2n}\int_{-\varepsilon\sqrt{2n}}^{\varepsilon\sqrt{2n}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt + O\left(\int_{x-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{|\sin(u-x)\sqrt{2n}\,|}{|u-x|}\,du\right)\right.$$
$$\left. + O\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{x+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x+\varepsilon} \frac{du}{u-x}\right) + O\left(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} du\right)\right\}$$
$$= \frac{e^{x^2}\sqrt{2n}}{\pi} + O(1).$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} e^{-u^2}[S_n^{(0)}(x, u)]^2\,du = S_n^{(0)}(x, x) - \frac{e^{x^2}\sqrt{2n}}{\pi} + O(1),$$

Or,

$$\sum_0^\infty z^n S_n^{(0)}(x, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{2x^2 z(z-1)}{1-z^2}}}{\sqrt{1-z^2}\,(1-z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{2x^2 z}{1+z}}}{\sqrt{1+z}\,(1-z)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$S_n^{(0)}(x, x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{2\pi}} A_n^{(\frac{1}{2})}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2\pi}} L_n^{(-\frac{1}{2})}(2x^2)\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= \frac{e^{x^2}\sqrt{2n}}{\pi} + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi n}}\cos(2x\sqrt{2n}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On a ainsi trouvé les inégalités (80), ce qui prouve que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{-A} e^{-u^2}|S_n^{(0)}(x, u)|\,du \quad \text{et} \quad \int_{A}^{\infty} e^{-u^2}|S_n^{(0)}(x, u)|\,du$$

peuvent être rendues aussi petites qu'on veut en choisissant A assez grand. En effet, l'inégalité de Bouniakovsky, donnée par cet auteur en 1861 et connue sous le nom de l'inégalité de Schwarz qui ne l'a retrouvée qu'en 1885, permet de conclure :

$$\left\{\int_A^\infty e^{-u^2}|S_n^{(0)}(x, u)|\,du\right\}^2 \leqq \int_A^\infty e^{-u^2}\,du \int_A^\infty e^{-u^2}[S_n^{(0)}(x, u)]^2\,du,$$

ce qui justifie notre assertion.

Ceci dit, soit $s_n(y)$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série (79). On a vu au paragraphe 4 que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_x^\infty e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} s_n(y) = {} & 2\int_x^\infty e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du \\ & - 2\int_y^A e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du - 2\int_A^\infty e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du \\ = {} & 1 + o(1) - 2\int_y^A e^{-u^2} S_n(x, u)\, du - q_n(x), \end{aligned}$$

où $|q_n(x)| < \eta$ quelque petit que soit η pourvu que A soit assez grand. Dans l'intervalle (y, A) nous appliquons la formule approchée pour $S_n^{(0)}(x, u)$:

$$\begin{aligned} & \int_y^A e^{-u^2} S_n^{(0)}(x, u)\, du \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{y-x}^{A-x} e^{-\frac{u^2}{2} - ux} \frac{\sin(u\sqrt{2n})}{u}\, du + O\left(\frac{1}{(y-x)\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent cette intégrale tend vers zéro quand n croît et la limite de $S_n(y)$ existe. Elle est égale à 1, car on peut prendre η aussi petit qu'on veut. De même, on établit pour $y < x$ que $\lim_{n=\infty} S_n(y)$ est égale à -1. Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(y - x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^y e^{-u^2}\, du + 2\, e^{-y^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{H_n(x)\, H_{n-1}(y)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \\ - 2\, e^{-x^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{H_n(x)\, H_{n-1}(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

car la série

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du + e^{-x^2} \sum_1^\infty \frac{H_n(x)\, H_{n-1}(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} = \tau(x)$$

est convergente, comme on le voit à l'aide de la formule approchée pour $H_n(x)$.

Il est facile de voir que sa somme $\tau(x)$ est nulle. Posons

$$\sigma(x) = \sum_1^\infty \frac{H_n(x)\, H_{n-1}(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}.$$

Grâce aux relations

$$H'_n(x) = -2n\,H_{n-1}(x) = H_{n+1}(x) + 2x\,H_n(x),$$

on a, en posant

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{H_m(x)\,H_{m-1}(x)}{2^m\,m!\,\sqrt{\pi}} = \sigma_n(x),$$

$$\sigma'_n(x) = -\sum_{2}^{n} \frac{H_{m-1}^2(x)}{2^{m-1}\,\overline{m-1}!\,\sqrt{\pi}} + \sum_{m=1}^{n} \frac{H_m(x)}{2^m\,m!\,\sqrt{\pi}}[H_m(x) + 2x\,H_{m-1}(x)],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}\sigma_n(x)] = \frac{e^{-x^2}H_n^2(x)}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}} - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}},$$

d'où vu que $\sigma_n(0) = 0$, car $H_{2n+1}(0) = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du + \sigma_n\,e^{-x^2} = \int_0^x \frac{H_n^2\,e^{-x^2}\,dx}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}} = O\left(\int_0^x \frac{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}\,dx}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Par conséquent

$$e^{-x^2}\sigma(x) = \lim_{n=\infty}[\sigma_n(x)\,e^{-x^2}] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

Il reste par conséquent

$$\text{(81)} \qquad \operatorname{sign}(y-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-u^2}\,du + 2\,e^{-y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)\,H_{n-1}(y)}{2^n\,n!\,\sqrt{\pi}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, $y > x$ et étudions la borne supérieure de $s_n(y_n)$, quand $y_n \to x$ pour $n \to \infty$. Posons

$$y_n = x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}} \qquad (\beta > 0),$$

β étant une constante positive. On a

$$s_n(y_n) = 2\int_x^{\infty} e^{-u^2}\,S_n^{(0)}(x, u)\,du - 2\int_{x+\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{x+\varepsilon} e^{-u^2}\,S_n^{(0)}(x, u)\,du - \rho_n,$$

où le reste ρ_n, intégrale étendue de $x+\varepsilon$ à ∞, est d'après ce qui précède aussi petit qu'on veut en valeur absolue pourvu que n soit assez grand, $\rho_n = o(1)$.

Ainsi

$$s_n(y_n) = 1 + o(1) - 2R_n + o(1),$$

où

$$
\begin{aligned}
R_n = & \int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} e^{-(x+u)^2} S_n^{(0)}(x, x+u)\, du \\
= & \frac{e^{x^2}}{\pi} \int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} e^{-\frac{(x+u^2)}{2}} \left\{ \frac{\sin(u\sqrt{2n})}{u} + O\left(\frac{1}{u\sqrt{n}}\right) \right\} du \\
= & \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} [1 + O(u)] \frac{\sin(u\sqrt{2n})}{u}\, du + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \\
= & \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du + O(\varepsilon) + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

En choisissant ε assez petit on rend le terme $O(\varepsilon)$ négligeable et par conséquent $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ existe et est égale au premier terme du second membre, ce qui donne

$$
\lim_{n=\infty} s_n\left(x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\beta} \frac{\sin u}{u}\, du.
$$

On voit que le phénomène de Gibbs pour les sommes partielles existe et qu'il est identique au même phénomène dans le système trigonométrique, la longueur du « segment de Gibbs » l_0 étant donnée par $\beta = \pi$,

$$
l_0 = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi + u}\, du = 0,1788\ldots.
$$

Évidemment, on a aussi

$$
\lim_{n=\infty} s_n\left(x - \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = -1 + \frac{2}{\pi}\int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du.
$$

Considérons maintenant la fonction *continue*

$$
\varphi(y) = f(y) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}\, \mathrm{sign}(y - x),
$$

en supposant que $D = f(x+0) - f(x-0) \neq 0$ et que la série (2) de $f(y)$ converge au point $y = x$. Il en est de même alors pour la série de $\varphi(y)$ et sa somme partielle

$$\varphi_n\left(x \pm \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = f_n\left(x \pm \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) - \frac{D}{2} s_n\left(x \pm \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right)$$

tend pour $n \to \infty$ vers la valeur $\varphi(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ de la fonction continue $\varphi(y)$ pour $y = x$. Par conséquent

$$f_n\left(x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} + \frac{D}{2} s_n\left(x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) + \varepsilon_n,$$

c'est-à-dire, vu que

$$s_n\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\right) = 1 + l_0 + \eta_n,$$

$$f_n\left(x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = f(x+0) + \frac{D l_0}{2} + \varepsilon'_n,$$

et c'est en ceci que consiste le phénomène de Gibbs pour la fonction discontinue $f(x)$, tant qu'on se limite aux sommes partielles $f_n(y)$ de sa série (2).

Passons maintenant à l'allure qu'accuse ce phénomène pour les moyennes arithmétiques $S_n^{(\delta)}$ de la série typique (81). On a pour $x < y < x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$S_n^{(\delta)}(y) = 2\int_x^\infty e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\,du - 2\int_y^{x+\varepsilon} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\,du$$
$$- 2\int_{x+\varepsilon}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} S_n^{(\delta)}(x, u)\,du.$$

Vu que

$$\lim_{n=\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} S_n^{(\delta)}(x, u) = 0$$

pour $|u - x| \geqq \varepsilon$ uniformément quel que soit l'intervalle de variation de u, on a

$$\lim_{n=\infty} \int_{x+\varepsilon}^\infty e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\,du$$
$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \left(O \int_{x+\varepsilon}^{x+O(\sqrt{n})} e^{-\frac{u^2}{2}} du \frac{1}{\varepsilon^{\delta+1}\sqrt{n^\delta}} \right) + O\left(\int_{x+O(\sqrt{n})}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \right\} = 0,$$

par conséquent

$$S_n^{(\delta)}(y) = 1 - 2R_n^{(\delta)} + o(1),$$

où

$$\begin{aligned}
R_n^{(\delta)} = {} & \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi}\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^{\delta}} \\
& \times \int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} e^{\frac{x^2-(x+u^2)}{2}} \left\{ \frac{\sin\left(u\sqrt{2n} - \frac{\delta\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{u^{\delta+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\delta+1}{2}}}\right) \right\} du \\
= {} & \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi}\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^{\delta}} \int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} [1+O(u)] \frac{\sin\left(u\sqrt{2n} - \frac{\delta\pi}{2}\right)}{u^{\delta+1}} du \\
& + O\left(\int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{\delta+1}}} \frac{du}{u^{\delta+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\delta+\frac{1}{2}}}\right) \\
= {} & \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi}\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^{\delta}} \int_{\beta}^{\varepsilon\sqrt{2n}} \frac{\sin\left(u - \frac{\delta\pi}{2}\right) du}{u^{\delta+1}} \sqrt{(2n)^{\delta}} \\
& + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}}\int_{\frac{\beta}{\sqrt{2n}}}^{\varepsilon} \frac{du}{u^{\delta}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
= {} & \frac{2^{\delta}\Gamma(\delta+1)}{\pi}\int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin\left(u - \frac{\delta\pi}{2}\right) du}{u^{\delta+1}} + O\left(\int_{\varepsilon\sqrt{2n}}^{\infty} \frac{du}{u^{\delta+1}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
= {} & \frac{2^{\delta}\Gamma(\delta+1)}{\pi}\int_{\beta-\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin u\, du}{\left(u+\frac{\delta\pi}{2}\right)^{\delta+1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que pour $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}\left(x + \frac{\beta}{\sqrt{2n}}\right) = 1 - 2\lim_{n=\infty} R_n^{(\delta)} = 1 - \frac{2^{1+\delta}\Gamma(\delta+1)}{\pi}\int_{\beta-\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin u\, du}{\left(u+\frac{\delta\pi}{2}\right)^{\delta+1}},$$

c'est-à-dire, pour $\beta = \pi\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$:

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}\left[x + \frac{(2+\delta)\pi}{2\sqrt{2n}}\right] = 1 + \frac{2^{1+\delta}\Gamma(1+\delta)}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u\, du}{\left[u+\pi\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right]^{\delta+1}}.$$

Le segment $l(\delta)$ de Gibbs est égal à

$$l(\delta) = \frac{2^{1+\delta}\Gamma(1+\delta)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,du}{\left[u+\pi\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right]^{\delta+1}} \qquad (\delta \geqq 0).$$

Il est très probable que l'expression de $l(\delta)$ que nous avons établie pour $\delta \geqq 0$ reste valable aussi pour $-1 < \delta < 0$ et il serait intéressant de le vérifier. On constate que le phénomène de Gibbs subsiste quelque grand que soit $\delta > 0$, car $l(\delta) \neq 0$ et cette particularité de l'allure de ce phénomène est caractéristique pour le système orthogonal de polynomes d'Hermite. En effet, pour tous les autres systèmes orthogonaux étudiés à ce point de vue jusqu'à présent, le phénomène de Gibbs s'éteint progressivement quand δ croît et disparaît à partir d'une valeur $\delta = \delta_0$, différente dans les systèmes différents, mais finie, car $l(\delta) = 0$ pour $\delta \geqq \delta_0$.

Dans le cas du système trigonométrique par exemple Fejèr a prouvé que $\delta_0 < 1$ et les recherches de Cramer et de Lyons ont établi que $\delta_0 = 0, 4, \ldots$. Pour le système ultrasphérique nous avons démontré l'inégalité $\delta_0 < 2\lambda + 1$, où λ est le paramètre du système. En particulier, pour le système de polynomes de Legendre on a $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\delta_0 < 2$. Pour les polynomes d'Hermite $l(\delta)$ diminue rapidement quand δ croît — ce qui est important au point de vue d'applications pratiques du développement (2) — mais il ne s'annule jamais. Pour $\delta \to \infty$ on a la formule approchée

$$l(\delta) \sim \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2\delta}}\left(\frac{4}{\pi e}\right)^{\delta+2}\int_0^\infty e^{-u}\sin\frac{\pi u}{2}\,du = \frac{\pi^2}{4+\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{8\delta}}\left(\frac{4}{\pi e}\right)^{\delta+2}.$$

Pour $\delta = 8$ par exemple on a $l(8) \sim 0,000008$.

Ce caractère du phénomène de Gibbs s'explique par le fait que les moyennes de la série-noyau de tout ordre δ changent de signe un nombre infini de fois pour une valeur fixe de x quand n augmente indéfiniment, tandis que dans les autres systèmes orthogonaux elles deviennent en règle générale non-négatives quel que soit n à partir d'une valeur suffisamment grande de δ. Ainsi, les oscillations de la suite de sommes partielles $S_n^{(0)}(x, u)$ de la série-noyau autour du zéro ne peuvent pas être rendues unilatérales par l'emploi des moyennes arithmétiques et ceci entraîne le fait que $l(\delta) \neq 0$ quel que soit δ.

Comme une autre application de moyennes nous allons donner la preuve du théorème de Parseval. Ce théorème concerne deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies dans $(-\infty, \infty)$ et qui y sont à carrés intégrables avec le poids e^{-x^2}, c'est-à-dire on suppose l'existence des deux intégrales finies

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, e^{-x^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Cette hypothèse entraîne évidemment (à l'aide de l'inégalité de Bouniakowsky) l'existence de l'intégrale du produit $e^{-u^2}.f(u).g(u)$ et Parseval a démontré (dans le cas du système trigonométrique) que cette intégrale s'exprime à l'aide de coefficients de Fourier f_n et g_n.

Dans le système considéré on a la série infinie suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(u)\, g(u)\, du = \sum_{0}^{\infty} f_n g_n, \tag{82}$$

où

$$f(x) \sim \sum_{0} f_n \frac{\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \qquad g(x) \sim \sum_{0} g_n \frac{\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}},$$

c'est-à-dire f_n et g_n sont les coefficients de Fourier dans le système orthogonal *normé*. Pour démontrer le théorème de Parseval (82), il suffit de le faire dans le cas particulier $g(x) \equiv f(x)$. En effet, supposons établie la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f^2(u)\, du = \sum_{0}^{\infty} f_n^2. \tag{83}$$

En l'appliquant à la fonction $f(x) + g(x)$, dont les coefficients de Fourier sont évidemment $f_n + g_n$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f^2(u)\, du + 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(u)\, g(u)\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} g^2(x)\, du$$
$$= \sum^{\infty} (f_n^2 + 2 f_n g_n + g_n^2),$$

d'où (82). Le théorème de Parseval dans le système de polynomes d'Hermite a été démontré pour la première fois par Weyl en 1909. Pour prouver (83) nous allons étudier la série figurant dans le second membre, prouver sa convergence et calculer sa somme. Vu que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) \, H_n(u) \, du,$$

on peut écrire

$$f_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) \, e^{-u^2-v^2} \frac{H_n(u) \, H_n(v)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \, du \, dv,$$

et l'on voit apparaître sous le signe de somme double le terme général de la série-noyau. Par conséquent, la somme partielle s_n de la série étudiée s'exprime à l'aide de $S_n^{(0)}(x, u)$ ainsi

$$s_n = f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) \, e^{-u^2-v^2} S_n^{(0)}(x, u) \, du \, dv.$$

Tous les termes de la série sont positifs. Par conséquent elle n'est sommable (C, δ) que si elle converge et inversement : pour prouver sa convergence il suffit de la sommer (C, $\delta > 0$). La moyenne d'ordre $\delta > 0$, $s_n^{(\delta)}$, est égale à

$$s_n^{(\delta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(v) \, e^{-u^2-v^2} S_n^{(\delta)}(u, v) \, du \, dv.$$

Traçons maintenant dans le plan Ouv le cercle C de centre origine

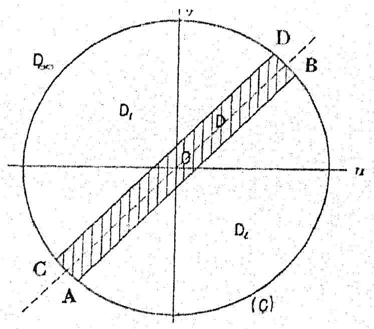

Fig. 2.

et de rayon égal à $e\sqrt{n}$, ainsi que les deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ parallèles à la bissectrice $u = v$ et situées de part et d'autre à une distance égale à ε de cette bissectrice. Désignons par D_∞, D et D_i respectivement les trois domaines : extérieur au cercle C, compris entre les deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ (hachuré) et l'intérieur du cercle, sauf D. On avait démontré au paragraphe 3 la formule

$$\sigma_n^{(\delta)}(u, v) = A_n^{(\delta)} S_n^{(\delta)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) L_{n-m}^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2),$$

où

$$2s^2 = (u+v)^2 \quad \text{et} \quad 2d^2 = (u-v)^2.$$

Dans le domaine D_∞ ont lieu les inégalités

$$\left| L_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) \right| \leqq \frac{(2s^2)^m}{m!} \quad \text{et} \quad \left| L_{n-m}^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) \right| \leqq \frac{(2d^2)^{n-m}}{\overline{n-m}!};$$

donc dans ce domaine, on a

$$\sqrt{\pi} |\sigma_n^{(\delta)}(u, v)| \leqq \frac{2^n}{n!}(s^2+d^2)^n = \frac{2^n(u^2+v^2)^n}{n!}.$$

En répétant le raisonnement du paragraphe 3 on en déduit pour $\sqrt{u^2+v^2} \geqq e\sqrt{n}$, c'est-à-dire dans D_∞

(84) $$e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} (u^2+v^2)^{\delta+\frac{1}{2}} |S_n^{(\delta)}(u, v)| = O(1) \qquad (u, v \subset D_\infty).$$

Dans le domaine D_i on a

$$|u+v| \leqq e\sqrt{2n} = O(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad \varepsilon \leqq |u-v| \leqq e\sqrt{2n} = O(\sqrt{n}).$$

Par conséquent, dans ce domaine ont lieu les inégalités

$$L_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) = O\left[A_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)} e^{\frac{s^2}{2}}\right], \qquad L_{n-m}^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) = O\left\{A_{n-m}^{\left(\frac{\delta}{2}\right)} \frac{e^{\frac{d^2}{2}}}{|d|^{\delta+1}}\right\},$$

d'où

$$\sigma_n^{(\delta)}(u, v) = O\left\{\frac{e^{\frac{u^2+v^2}{2}}}{|u-v|^{\delta+1}} \sum_{m=0}^{n} A_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)} A_{n-m}^{\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right\} = O\left\{e^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{n^{\frac{1+\delta}{2}}}{\varepsilon^{\delta+1}}\right\},$$

c'est-à-dire, vu que ε est fixe,

(85) $$e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} S_n^{(\delta)}(u, v) = O\left(n^{\frac{1-\delta}{2}}\right) \qquad (u, v \subset D_i).$$

Ceci posé, supposons δ supérieur à 2, $\delta > 2$, et considérons les intégrales doubles étendues à D_∞ et à D_i.

On a

$$\iint_{D_\infty} f(u) f(v) e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} S_n^{(\delta)}(u, v)\, du$$
$$= O\left\{\iint_{D_\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| e^{-\frac{v^2}{2}} |f(v)| \frac{du\, dv}{(u^2+v^2)^{\delta+\frac{1}{2}}}\right\}$$
$$= O\left\{\iint_{D_\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{|u|^{\delta+\frac{1}{2}+\gamma}} e^{-\frac{v^2}{2}} |f(v)| \frac{dv}{|v|^{\delta+\frac{1}{2}-\gamma}}\right\}$$

avec

$$|\gamma| \leqq \delta + \frac{1}{2},$$

car l'inégalité (84) n'est que renforcée, si l'on remplace u^2+v^2 par u^2 ou v^2 ou par $2|u|.|v|$. Le domaine D_∞ est compris dans celui défini par $2|u| \geqq e\sqrt{2n}$, ou $2|v| \geqq e\sqrt{2n}$ et en décomposant ce dernier en huit domaines D_1, D_2, ..., D_8 comme suit (*fig.* 3), nous prenons $\gamma = 0$

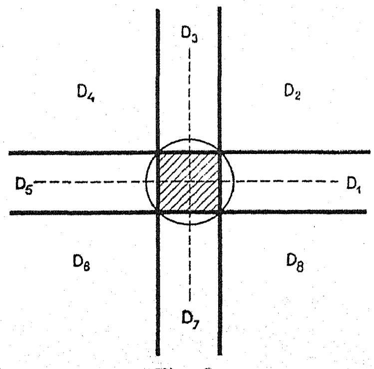

Fig. 3.

dans D_2, D_4, D_6 et D_8, tandis que $\gamma = \delta + \frac{1}{2}$ dans D_1 et D_5 et $\gamma = -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)$ dans D_3 et D_7. On en déduit

$$\iint_{D_2} = O\left\{\left[\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{u^{\delta+\frac{1}{2}}}\right]^2\right\}$$
$$= O\left\{\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-u^2} [f(u)]^2\, du \int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} \frac{du}{u^{2\delta+1}}\right\} = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

et de même pour les domaines D_4, D_6 et D_8. Ensuite,

$$\iint_{D_1} = O\left\{\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{u^{2\delta+1}}\int_{-e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{e\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2}}|f(v)|\,du\right\},$$

où

$$\left[\int_{-e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{e\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2}}|f(v)|\,dv\right]^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} f^2(v)\,dv \int_{-e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{e\sqrt{\frac{n}{2}}} dv = O(\sqrt{n}),$$

tandis que

$$\left[\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{u^{2\delta+1}}\right]^2 \leqq \left[\frac{1}{e}\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\frac{du}{u^{2\delta+\frac{1}{2}}}\right]^2$$
$$\leqq \frac{2}{ne^2}\int_{e\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-u^2} f^2(u)\,du \int_{e\sqrt{\frac{2}{n}}}^{\infty}\frac{du}{u^{1+4\delta}} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne pour l'intégrale étendue au D_1 :

$$\iint_{D_1} = O\left[O(\sqrt[4]{n})\,o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) = o(1).$$

On voit ainsi que

$$\lim_{n=\infty}\iint_{D_\infty} e^{-(u^2+v^2)} f(u) f(v)\, S_n^{(\delta)}(u, v)\,du\,dv = 0.$$

Dans le domaine D_i on a (85), donc

$$\iint_{D_i} = O\left\{n^{\frac{1-\delta}{2}}\iint_{D_i} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}|f(u)||f(v)|\,du\,dv\right\}$$
$$\leqq O\left\{n^{\frac{1-\delta}{2}}\left[\int_{-e\sqrt{n}}^{e\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\,du\right]^2\right\} \leqq O\left(n^{1-\frac{\delta}{2}}\right) = o(1),$$

grâce à l'hypothèse $\delta > 2$, car on trouve

$$\left[\int_{-e\sqrt{n}}^{e\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}|f(u)|\,du\right]^2 \leqq \int_{-e\sqrt{n}}^{e\sqrt{n}} e^{-u^2}[f(u)]^2\,du \,.\, 2e\sqrt{n} = O(\sqrt{n}).$$

Finalement, pour $\delta > 2$ on a trouvé

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \lim_{n=\infty} \int\int_D e^{-(u^2+v^2)} f(u) f(v)\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, du\, dv.$$

Il est bien connu ([1]) qu'il suffit de prouver (83) pour les fonctions continues pour l'avoir démontré pour toutes les fonctions à carré intégrable (avec le poids e^{-x^2}). Par conséquent, nous pouvons supposer $f(x)$ continue sans diminuer la généralité du résultat. Cette hypothèse n'est nécessaire pour la démonstration que dans l'intervalle fini $(-A, A)$, où A est aussi grand qu'on veut mais fixe, car dans $(A, e\sqrt{n})$ par exemple nous avons pour $|u - v| \leqq \varepsilon$

$$e^{-v^2} S_n^{(\delta)}(u, v) = O(\sqrt{n})$$

si $|u - v| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$, tandis que pour $|u - v| \geqq \frac{1}{\sqrt{n}}$ nous employons l'inégalité

$$e^{-v^2} S_n^{(\delta)}(u, v) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^\delta}\, |u - v|^{\delta+1}}\right).$$

Ces inégalités permettent de prouver, en supposant en outre que dans $A \leqq |u| \leqq e\sqrt{n}$ on a pour $|u - v| \leqq \varepsilon$

$$f(v) = O[|f(u)|] \qquad (|u - v| \leqq \varepsilon)$$

que

$$\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} e^{-v^2} f(v)\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, dv = O[|f(u)|].$$

Donc

$$\int_A^{e\sqrt{n}} e^{-u^2} f(u)\, du \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} e^{-v^2} f(v)\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, dv = O\left(\int_A^\infty e^{-u^2} [f(u)]^2\, du\right),$$

ce qui peut être rendu aussi petit qu'on veut par le choix d'un A suffisamment grand. Vu que $\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)}$ diffère aussi peu qu'on veut de celle

([1]) STEKLOFF, *Sur la théorie de fermeture, etc.* (*Communications de l'Académie des Sciences*, Pétrograde, 8[e] série, 30, 1911, théor. V-VII).

de $\bar{s}_n^{(\delta)}$:

$$\lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(\delta)} = \lim_{n=\infty} \int_{-A}^{A} e^{-u^2} f(u)\, du \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} e^{-v^2} f(v)\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, du$$

pourvu que A soit assez grand, il suffit de déterminer cette dernière. Or, $f(x)$ étant continue dans $|x| \leqq A + \varepsilon$, on trouve en posant $f(v) = f(u).[1 + \eta(u, v)]$ et en choisissant ε assez petit pour avoir $|\eta(u, v)| < \eta$:

$$\lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(\delta)} = \lim_{n=\infty} \left\{ \int_{-A}^{A} e^{-u^2} f^2(u)\, du \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} e^{-v^2}\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, dv \right\}$$
$$+ \eta\, O\left(\int_{-A}^{A} e^{-u^2} f^2(u)\, du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} |S_n^{(\delta)}(u, v)|\, dv \right).$$

Les constantes de Lebesgue $\rho_n^{(\delta)}(u)$ étant bornées dans leur ensemble, le dernier terme est $O(\eta)$ et il peut être rendu négligeable, en choisissant η suffisamment petit. Quant au premier terme, on a (*voir* § 4)

$$\lim_{n=\infty} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} e^{-v^2}\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, dv = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, S_n^{(\delta)}(u, v)\, dv = 1\,;$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(\delta)} = \int_{-A}^{A} e^{-u^2} [f(u)]^2\, du.$$

Or, pour diminuer autant qu'on veut la différence des deux limites $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\delta)}$ et $\lim\limits_{n=\infty} \bar{s}_n^{(\delta)}$, il suffit de faire tendre A vers ∞, d'où enfin

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} [f(u)]^2\, du \qquad (\delta > 2),$$

ce qui prouve la convergence de la série étudiée et détermine la valeur de sa somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} [f(u)]^2\, du = f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 + \ldots.$$

Ainsi le théorème de Parseval est démontré sous l'unique hypothèse d'intégrabilité des produits $e^{-x^2} f^2(x)$ et $e^{-x^2} g^2(x)$.

VI. — Sommation (C, δ) du développement suivant les polynomes de Laguerre au point-frontière $x = 0$.

Les inégalités (27) et (35) permettent d'étudier l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur la sommabilité (C, δ) de son développement

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} f(u) \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(u)\, du \tag{86}$$

au point-frontière $x = 0$, c'est-à-dire sur la sommabilité de la série numérique

$$f(0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} f(u) \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(u)\, du. \tag{87}$$

Szegö a démontré la sommabilité $\left(\mathrm{C}, \delta > \alpha + \frac{1}{2}\right)$ de la série (87) pour $f(x)$ intégrable (L) dans tout intervalle fini pourvu que l'on ait $f(x) = \mathrm{O}[x^{0(1)}]$ pour $x \to \infty$. Il suffit de considérer quelques exemples particuliers pour voir combien gênante est cette dernière condition relative à l'allure de $f(x)$ à l'infini. Soit par exemple

$$f(x) = x^{\beta} e^{\frac{x}{2}} \qquad (\beta \geqq 0).$$

Le cas $\beta < 0$ est éliminé car alors $f(0)$ serait infinie et la série (87) ne serait plus sommable. On a

$$x^{\beta} e^{\frac{x}{2}} \sim \sum_{0}^{\infty} c_n^{(\beta)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x), \tag{88}$$

où

$$c_n^{(\beta)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(0) = \mathrm{A}_n^{(\alpha)} c_n^{(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} u^{\alpha+\beta} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(u)\, dx,$$

car les polynomes $\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)$ sont orthogonaux dans $(0, \infty)$ avec le poids $e^{-x} x^{\alpha}$ et l'on a

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)]^2\, dx = \mathrm{A}_n^{(\alpha)} \Gamma(\alpha+1)$$

On en déduit

$$\Gamma(\alpha+1)\sum_{0}^{\infty} c_n^{(\beta)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(0) z^n = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} u^{\alpha+\beta}\left[\sum_{0}^{\infty} z^n \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(u)\right] du$$
$$= 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+1)(1-z)^{\beta}(1+z)^{-(\alpha+\beta+1)}.$$

Par conséquent, en désignant les sigma-sommes d'ordre δ de la série (88) pour $x = 0$ par $\sigma_n^{(\delta)}$, on trouve :

$$\Gamma(\alpha+1)\sum_{0}^{\infty} z^n \sigma_n^{(\delta)} = 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+1)(1-z)^{\beta-\delta-1}(1+z)^{-(\alpha+\beta+1)}$$

d'où leur expression approchée

$$\Gamma(\alpha+1)\sigma_n^{(\delta)} = 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+1)$$
$$\times\left\{2^{-\alpha-\beta-1}\mathrm{A}_n^{(\delta-\beta)}(1+\varepsilon_n) + 2^{\beta-\delta}(-1)^n \mathrm{A}_n^{(\alpha+\beta)}(1+\varepsilon'_n)\right\},$$

et enfin celle de la moyenne $s_n^{(\delta)} = \dfrac{\sigma_n^{(\delta)}}{\mathrm{A}_n^{(\delta)}}$

$$s_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\delta-\beta+1)} n^{-\beta}(1+\varepsilon_n) + (-1)^n . 2^{\alpha+2\beta-\delta+1} n^{\alpha+\beta-\delta}(1+\varepsilon'_n)\right\}.$$

Cette expression prouve que l'on a pour $\beta > 0$

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = 0 \qquad (\delta > \beta+\alpha),$$

si $\delta > \alpha+\beta$, la série étudiée n'étant pas sommable $(\mathrm{C}, \delta \leqq \alpha+\beta)$. Le cas $\beta = \frac{1}{2}$ donne ainsi la sommabilité $\left(\mathrm{C}, \delta > \alpha + \frac{1}{2}\right)$ au point $x = 0$ du développement de $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$ qui, à l'infini, n'est pas $\mathrm{O}[x^{0(1)}]$. Pour $\beta = 0$, on a de même

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = 1 \qquad (\delta > \alpha).$$

La condition générale de sommabilité, $\delta > \alpha+\beta$, prouve l'existence de fonctions continues dans tout intervalle fini et monotones dans $(0, \infty)$ dont le développement (86) néanmoins n'est pas sommable (C, δ) au point $x = 0$, quelque grand que soit δ *fixe*.

Ce fait pose le problème de l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur la sommabilité (C, δ) de son développement (86) au point $x = 0$.

Pour $\delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ le problème ne se pose pas : Szegö a démontré que les constantes de Lebesgue $\rho^{(\delta)}$ relatives au point $x = 0$

$$\rho_n^{(\delta)} = \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha |S_n^{(\delta)}(0, u)| \, du,$$

où $s_n^{(\delta)}$ désigne la moyenne d'ordre δ de la série-noyau

$$O \sim \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(u)$$

de (86), augmentent indéfiniment avec $n \to \infty$ si $\delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}$. Donc, d'après le théorème bien connu de Haar, l'existence de fonctions continues partout et dont le développement (86) au point $x = 0$ n'est pas sommable $\left(C, \ \delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}\right)$ est certaine. La divergence des moyennes d'ordre $\delta \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ reflète la structure du système orthogonal considéré.

Mais pour $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$ ces constantes sont bornées dans leur ensemble et ceci a permis à Szegö de démontrer son théorème cité au début : le système orthogonal ne s'oppose pas à la convergence de moyennes d'ordre $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$. Observons que les fonctions $f(x)$, telles que pour $x \to \infty$ on ait

$$f(x) = O\left[e^{x\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}\right] \qquad (\varepsilon > 0),$$

n'empêchent pas la convergence de moyennes d'ordre $\delta \geqq \alpha + \frac{1}{2}$. En effet, la somme partielle f_n de (87) s'écrit

$$\Gamma(\alpha+1) f_n = \sum_0^n \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha f(u) L_m^{(\alpha)}(u) \, du.$$

Or,

$$\sum_0^n L_m^{(\alpha)}(u) \equiv L_n^{(\alpha+1)}(u),$$

donc

$$\Gamma(\alpha+1) f_n = \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha f(u) L_n^{(\alpha+1)}(u) \, du,$$

et en général la $n^{\text{ième}}$ moyenne d'ordre δ, $f_n^{(\delta)}$, est égale à

$$A_n^{(\delta)}\Gamma(\alpha+1)f_n^{(\delta)}=\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha f(u)\,L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\,du,$$

car

$$\sum_0^n A_{n-m}^{(\delta)}L_m^{(\alpha)}(u)\equiv L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u).$$

Soit donc $f(x)=O\left[e^{x\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right]$, $\varepsilon>0$, et considérons l'intégrale

$$I_n=n^{-\delta}\int_A^\infty e^{-u}u^\alpha f(u)\,L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\,du,$$

où A est aussi grand qu'on veut, mais fixe. Grâce à l'inégalité (27), paragraphe 1, on a pour tout k fini

$$I_n^{(1)}=n^{-\delta}\int_A^{kn} e^{-u}u^\alpha|f(u)|\,|L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)|\,du=O\left\{\int_A^{kn}\frac{e^{-\varepsilon u}u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\delta}{2}-\frac{3}{4}}du}{\sqrt{n^{\delta-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}}}\right\},$$

donc

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(1)}=0\qquad \text{pour } \delta>\alpha+\frac{1}{2},$$

tandis que pour $\delta=\alpha+\frac{1}{2}$, $I_n^{(1)}$ peut être rendue aussi petite qu'on veut en choisissant $A\geqq A_0$, où A_0 est suffisamment grand. Pour $u>n+\alpha+\delta+1$, on a

$$(35)\qquad |L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)|\leqq\frac{(2u)^n}{n!}.$$

Soit k égal à la racine de l'équation

$$k\varepsilon=4(1+\log 2+\log k),$$

alors on a pour $u\geqq kn$,

$$\frac{(2u)^n u^\alpha e^{-\varepsilon\frac{u}{4}}}{n!\,n^\delta}\leqq\frac{k^\alpha}{n^{\delta+\frac{1}{2}-\alpha}}\qquad (u\geqq kn),$$

ce qui entraîne

$$n^{-\delta}\int_{kn}^\infty e^{-\varepsilon\frac{u}{2}}u^\alpha|L_n^{(\alpha+\delta+1)}|\,du=O\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}-\delta}\right)$$

c'est-à-dire

$$I_n^{(2)}=n^{-\delta}\int_{kn}^\infty e^{-u}u^\alpha f(u)\,L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\,du=o(1),$$

vu que $\delta \geqq \alpha + \frac{1}{2}$. Ainsi, on a démontré que l'allure de $f(x)$ n'a aucune influence sur la sommabilité $\left(C, \delta \geqq \alpha + \frac{1}{2}\right)$ de (87) si, pour $x \to \infty$,

$$f(x) = O\left[e^{x\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right] \qquad (\varepsilon > 0).$$

L'exemple de la fonction e^{qx} avec $q > \frac{1}{2}$ prouve l'existence de fonctions partout continues et dont le développement (86) au point $x = 0$ n'est sommable pour aucune valeur de δ. En effet, on prouve facilement que dans

$$e^{qx} \sim \sum_{0}^{\infty} c_n \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \qquad (q < 1),$$

on a pour c_n l'expression explicite suivante :

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \frac{1}{(1-q)^{\alpha+1}},$$

d'où la non-sommabilité (C, δ) pour aucune valeur de δ de la série de terme général $c_n \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(0)$ si $q > \frac{1}{2}$. Ainsi, le problème posé est délimité par la condition que l'ordre de croissance de $f(x)$ pour $x \to \infty$ doit être celui de $e^{\frac{x}{2}} \lambda(x)$, où la fonction croissante $\lambda(x)$ est $o(e^{\varepsilon x})$ quelque petit que soit ε. Nous allons montrer que la condition

$$f(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}} x^{\beta}\right) \qquad (\beta \geqq 0),$$

imposée à l'allure de $f(x)$ à l'infini assure la sommabilité (C, δ) de la série (87) pour $\delta > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$.

En effet, l'inégalité (35) prouve que l'on a

$$n^{-\delta} \int_{k_0 n}^{\infty} e^{-n} u^{\alpha} f(u) \mathrm{L}_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\, du = O\left[\int_{k_0 n}^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} u^{\alpha-\delta-\frac{1}{2}} |f(u)|\, du\right],$$

où k_0 est la racine de l'équation $k = 4(1 + \log 2 + \log k)$, car pour $u \geqq k_0 n$, on a

$$n^{-\delta} u^{\delta+\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} |\mathrm{L}_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)| \leqq k_0^{\delta \pm \frac{1}{2}}.$$

Ensuite, l'inégalité

$$\text{(27)} \qquad L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u) = O\left(e^{\frac{u}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{4}} u^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\delta}{2}-\frac{3}{4}}\right)$$

donne pour l'intégrale étendue de A à $k_0 n$:

$$n^{-\delta}\int_A^{k_0 n} e^{-u} u^{\alpha} f(u)\, L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\, du = O\left[\int_A^{k_0 n} e^{-\frac{u}{2}} |f(u)| \frac{u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\delta}{2}-\frac{3}{4}}\, du}{n^{\frac{1}{2}\left[\delta-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]}}\right].$$

Vu que $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$ et que $u \leqq O(n)$, on en déduit

$$n^{-\delta}\int_A^{k_0 n} e^{-u} u^{\alpha} f(u)\, L_n^{(\alpha+\delta+1)}(u)\, du = O\left[\int_A^{k_0 n} e^{-\frac{u}{2}} \frac{|f(u)|\, du}{u^{\delta-\alpha+\frac{1}{2}}}\right].$$

Par conséquent, il suffit de supposer l'existence de l'intégrale définie

$$\int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{u}{2}} |f(u)|\, du}{u^{\delta-\alpha+\frac{1}{2}}} < G$$

pour pouvoir réduire autant qu'on veut en valeur absolue la contribution de l'intervalle (A, ∞), en augmentant suffisamment la constante positive A. En particulier, l'hypothèse

$$f(x) = O\left[e^{\frac{x}{2}}\right] \qquad (x \to \infty)$$

assure la sommabilité (C, δ) de (87) pour tout $\delta > \alpha + \frac{1}{2}$. On voit ainsi que la condition $f(x) = O[x^{O(1)}]$ de Szegö est remplacée par celle $f(x) = O\left[e^{\frac{x}{2}}\right]$. La loi de l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini est la suivante : *Le développement* (86) *de* $f(x)$ *est sommable* (C, δ) *au point* $x = 0$ *avec la somme* $f(+0)$ *pour* $\delta > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, *si l'on a pour* $x \to \infty$,

$$\text{(89)} \qquad f(x) = O\left[x^{\beta} e^{\frac{x}{2}}\right].$$

Pour prouver la portée de cette condition, considérons la fonction, continue dans tout intervalle fini et vérifiant la condition (89), suivante :

(90) $$F_\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{\beta+\frac{1}{2}} L_{n!}^{\left[-\left(\frac{1}{2}+2\beta\right)\right]}(x)}{n^2}.$$

Le numérateur est $O\left(x^\beta e^{\frac{x}{2}}\right)$, donc $F_\beta(x)$ vérifie la condition (89). Elle est continue, la série (90) étant absolument et uniformément convergente pour tout x fini. Pour écrire son développement (86), il suffit d'observer que l'on a

$$L_n^{\left[-\left(\frac{1}{2}+2\beta\right)\right]}(x) \equiv \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{\left[-\left(\alpha+2\beta+\frac{3}{2}\right)\right]} L_m^{(\alpha)}(x),$$

d'où

(91) $$F_\beta(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \gamma_m^{(\beta)} L_m^{(\alpha)}(x)$$

avec

$$\gamma_m^{(\beta)} = \sum_{n!\geqq m}^{\infty} n^{-2}(n!)^{\frac{1}{2}+\beta} A_{n!-m}^{\left[-\left(\alpha+2\beta+\frac{3}{2}\right)\right]}.$$

On a évidemment

$$\gamma_{m!}^{(\beta)} = m^{-2}(m!)^{\frac{1}{2}+\beta}(1+\varepsilon_m)$$

et, par conséquent, le $(m!)^{\text{ième}}$ terme de (91) pour $x=0$, $u_{m!}(0)$ est égal à

$$u_{m!}(0) = \gamma_{m!}^{(\beta)} L_{m!}^{(\alpha)}(0) = m^{-2}(m!)^{\frac{1}{2}+\beta} A_{m!}^{(\alpha)}(1+\varepsilon_m)$$
$$= \frac{(m!)^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}}{m^2\,\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon_m)$$

et ainsi,

$$\lim_{m=\infty} \frac{u_{m!}(0)}{(m!)^\delta} = 0 \qquad \left(\delta \geqq \alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$$

seulement pour $\delta \geqq \alpha+\beta+\frac{1}{2}$. Ainsi, la non-sommabilité

$$\left(C,\ \delta < \alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$$

de (91) pour $x=0$, malgré le fait que la fonction développée $F_\beta(x)$ vérifie la condition (89), est prouvée. Il serait intéressant de prouver que la condition (89) assure, pour $\beta > 0$, la sommabilité

$$\left(C, \delta = \alpha + \beta + \frac{1}{2}\right).$$

L'évaluation de l'ordre de grandeur du terme général de (91) est possible aussi pour $x > 0$. Grâce à la formule approchée pour $L_n^{(\alpha)}(x)$, on trouve pour $u_{m!}(x)$:

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} u_{m!}(x)\sqrt{\pi} = m^{-2}(m!)^{\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left[2\sqrt{m!\,x} - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right] + o(1) \right\},$$

ce qui prouve que la série de Laguerre de $F_\beta(x)$ n'est nulle part sommable $\left(C, \delta < \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)$. Cette divergence des moyennes d'ordre $\delta < \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$ est due à l'influence de l'allure de $f(x)$ à l'infini sur la sommabilité (C, δ) de la série de Laguerre *à l'intérieur* de l'intervalle $(0, \infty)$.

Nous avons démontré que l'existence de l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-\frac{u}{2}} |f(u)|\, u^{\frac{\alpha}{2}-\delta-\frac{3}{4}}\, du < G$$

assure la sommabilité (C, δ) de la série de Laguerre pour $x \neq 0$, mais ce sujet sort des cadres du présent travail et il fera l'objet d'un autre Mémoire. Signalons seulement que le polynome de Laguerre est le cas limite du polynome de Jacobi. Or, on connaît que les phénomènes d'influence de l'allure de la fonction développée sur la sommabilité (C, δ) de la série de Jacobi sont très compliqués [1].

En terminant, formulons sous la forme d'énoncés les divers problèmes posés et non résolus dans ce travail. Il serait notamment intéressant de préciser s'il est vrai que :

a. La condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ est insuffisante pour la *convergence* de la série d'Hermite de $f(x)$ et de fonctions continues dans tout intervalle fini et vérifiant cette condition existent, dont la série d'Hermite

---

[1] *Voir* notre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **192**, séance du 20 avril 1931, p. 915-918.

diverge pour $x = x_0$, quoique $f(x)$ vérifie dans $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ les conditions usuelles de convergence;

b. La condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}|x|^{2\alpha}\right)$ suffit pour assurer la sommabilité (C, δ) de la série d'Hermite de $f(x)$, si $\delta = \alpha$ et $\alpha > 0$;

c. De fonctions continues dans tout intervalle fini et vérifiant pour $|x| \to \infty$ la condition $f(x) = O\left(e^{\frac{3x^2}{4}}\right)$ existent, dont la série d'Hermite n'est pas sommable par le procédé de Borel en un point $x = x_0$, quoique au voisinage immédiat de $x = x_0 f(x)$ satisfait aux conditions usuelles de *convergence;*

d. De fonctions continues dans $(-a, a)$ et vérifiant la condition $f(x) = O\left(e^{\frac{3x^2}{4}}|x|^{2\alpha}\right)$ existent, dont la série d'Hermite n'est pas sommable par les deux procédés de Borel et (C, δ) superposés, si $\delta < \alpha$;

e. La condition $f(x) = O\left(e^{\frac{3x^2}{4}}|x|^{2\alpha}\right)$ assure la sommabilité par les procédés de Borel, et (C, δ) superposés si $\delta = \alpha$.

f. De fonctions continues dans $(-a, a)$ et monotones, vérifiant la condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}|x|^{2\alpha}\right)$ existent, dont la série d'Hermite n'est pas sommable $\left(C, \delta = \alpha - \frac{1}{2}\right)$;

g. De fonctions continues dans $(0, a)$, vérifiant dans $(0, \varepsilon)$ les conditions usuelles de convergence et pour $x \to \infty$ celle $f(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}}\right)$, existent, dont la série de Laguerre au point $x = 0$ n'est pas sommable (C, δ) pour $\delta = \alpha + \frac{1}{2}$;

h. La condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}}x^{\beta}\right)$, $\beta > 0$, pour $x \to \infty$ suffit pour assurer la sommabilité $\left(C, \delta = \alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laguerre de $f(x)$ au point $x = 0$, si $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{L})$ dans tout intervalle fini;

i. La condition $f(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}}x^{\beta}\right)$, $\beta > 0$, pour $x \to \infty$ suffit pour assurer la sommabilité (C, δ) avec $\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{1}{4}$ de la série de Laguerre de $f(x)$ en un point *intérieur* $x > 0$ de l'intervalle $(0, \infty)$, si $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{L})$ dans tout intervalle fini et continu dans $(0, \varepsilon)$;

j. La condition $f(x)=\mathrm{O}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)$ pour $x\to\infty$ (cas où $\beta=0$) *n'assure pas* la sommabilité (C, δ) avec $\delta=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$ de la série de Laguerre de $f(x)$ en un point intérieur $x>0$, si $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{L})$ dans $(0, a)$ et continue dans $(0, \varepsilon)$.

NOTE.

La solution de la première des questions formulée plus haut est donnée par la fonction suivante :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{\pi x}{8|x|}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\,\frac{\mathrm{H}_{2\varphi(m)+1}(x)}{4^{\varphi(m)}\Gamma[\varphi(m)+1]},$$

où $\varphi(m)=2^{m^2}$. Grâce à l'inégalité fondamentale (29) on constate que pour $|x|\to\infty$ on a

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{O}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Le développement formel de $\mathrm{F}(x)$ en série d'Hermite s'écrit

$$\mathrm{F}(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}c_n}{4^n n!}\mathrm{H}_{2n}(x), \tag{92}$$

où

$$c_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k_2}\,\frac{1}{2\varphi(k)+1-2n}\,\frac{\Gamma\left[\varphi(k)+\frac{3}{2}\right]}{\Gamma[\varphi(k)+1]}.$$

Malgré le fait que le terme général de la série (92) tend vers zéro avec $n\to\infty$ cette série *diverge* pour $x=0$. L'étude directe de la somme partielle $s_{2n}=s_{2n+1}$ de la série numérique

$$\mathrm{F}(0)\sim\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}c_n}{4^n n!}\mathrm{H}_{2n}(0)=-\sum_{0}^{\infty}\frac{c_n 2n!}{4^n(n!)^2}$$

prouve que cette divergence ne provient point de l'allure qu'accuse $\mathrm{F}(x)$ au voisinage du point $x=0$ et qu'elle est due aux régions à l'infini dans l'expression de s_{2n}

$$s_{2n}=s_{2n+1}=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}\mathrm{F}(u)\mathrm{S}_{2n}^{(0)}(0, u)\,du.$$

Pour prouver la divergence de (92) pour $x=0$ il suffit d'établir celle de la suite partielle $s_{2\varphi(n)}$. Or, on démontre la formule approchée

$$s_{2\varphi(n)} = -\frac{n+1}{\sqrt{\pi}}\log 2 + o(1).$$

Ce résultat se laisse démontrer à l'aide des valeurs des intégrales définies suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-u^2} H_{2n+1}(u) H_{2m+1}(u)\frac{du}{u}$$
$$= \begin{cases} n!\,m!\,4^{n+m+1}\log\left|\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}\right| \cdot \left[\dfrac{(-1)^{n+m}}{\pi} + o(1)\right] & (m \neq n), \\ (n!)^2 4^{2n+1}\log n \cdot \left[\dfrac{1}{2\pi} + o(1)\right] & (m = n), \end{cases}$$

ainsi que

$$2\int_0^\infty e^{-u^2} H_n(u) H_m(u)\, du = \begin{cases} \dfrac{H_{n+1}(0)H_m(0) - H_n(0)H_{m+1}(0)}{n-m} & (m \neq n), \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & (m = n). \end{cases}$$

Ces valeurs permettent d'établir les relations

$$\sigma_m^{(n)} = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} H_{2\varphi(n)+1}(u) H_{2\varphi(m)+1}(u)}{4^{\varphi(m)+\varphi(n)}\Gamma[\varphi(n)+1]\Gamma(\varphi(m)+1]}\frac{du}{u} = O(1) \qquad (m \neq n),$$

mais

$$\sigma_n^{(n)} = n^3 \log 2 + O(1),$$

et ainsi

$$s_{2\varphi(n)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma_m^{(n)}}{m^2} = -\frac{n+1}{\sqrt{\pi}}\log 2 + O(1),$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} s_{2\varphi(n)} = \lim_{n=\infty} s_{2n^3+1} = -\infty.$$

Cette Note a été ajoutée après la correction des épreuves.

Liste de travaux ([1]).

1. Tschebycheff. — *Bull. Acad. des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. 1, 1859, p. 193-200.
2. Hermite. — *Comptes rendus*, t. 58, 1864, p. 93-100 et 266-273.

([1]) Cette liste est forcément incomplète.

3. Mehler. — *Journ. für Mathematik*, t. **66**, 1866, p. 174.
4. Appell. — *Annales de l'École Normale*, t. **9**, 1886, p. 119-144.
5. Deruyts. — *Mémoires couronnés Académie Royale de Belgique*, t. **47**, 1886, p. 1-18.
6. Adamoff. — *a. Annales de l'Inst. Polyt. de Saint-Pétersbourg*, t. **5**, 1906, p. 127-143.
b. Thèse (Saint-Pétersbourg, 1907).
7. Stekloff. — *a. Comm. Soc. Math. de Kharkow*, t. **10**, 1907, p. 3.
b. Bull. Acad. de Petrograd, 1916, p. 719.
8. W. Miller-Lebedeff. — *Mathem. Annalen*, t. **64**, 1907, p. 388-416.
9. L. Féjèr. — *a. Comptes rendus*, t. **147**, 1908, p. 1040.
b. Math. ès term. Ert., t. **27**, 1909, p. 1-33.
10. H. Weyl. — *Math. Annalen*, t. **66**, 1909, p. 273-324.
11. R. Neumann. — *Thése* (Breslau, 1912).
12. Curzon. — *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. **13**, 1913, p. 236-259.
13. H. Galbrun. — *Bull. Soc. math. de France*, t. **41**, 1913, p. 27–47.
14. Runge. — *Math. Annalen*, t. **75**, 1914, p. 130-132.
15. Beeger. — *Proc. Sc. Akad. Amsterdam*, t. $\mathbf{17}_1$, 1914, p. 192-197.
16. W. Kapteyn. — *Proc. Sc. Acad. Amsterdam*, t. $\mathbf{16}_2$, 1914, p. 1190-1211, et t. $\mathbf{17}_1$, p. 139-160.
17. O. Perron. — *a. Archiv. Math.-phys.*, t. **22**, 1914, p, 329-340.
b. Münchener Sitzungsber, 1917.
c. Journal für die Mathem., t. **151**, 1921, p. 63-78.
18. T. Kameda. — *a. Proc. Tokyo Math. Phys. Soc.*, t. **8**, 1915, p. 262-295 et 336-360.
b. Journal Fac. Sc. Imp. Univ. Tokyo, t. **1**, n° **1**, 1925, p. 1-62.
19. G. Faber. — *Münchener Sitzungsberichte*, 1717 et 1922-1923, p. 285-304.
20. N. Nielsen. — *Kgl. Danske Videnskab. Selk. Mid.*, t. **1**, 1918, p. 1-80.
21. Hamburger. — *Math. Zeits.*, t. **4**, 1919, p, 186-222.
22. Wigert. — *Arkiv for Math., Astr. och Fysik*, t, **15**, 1921, n° **25**.
23. Kampé de Fériet. — *Kgl. Danske Videns. Selsk. Mid.*, t. **5**, 1923, p. 1-9.
24. Mathias. — *Math. Zeits.*, t. **16**, 1923, p. 103-125.
25. E. Hille. — *a. Arkiv for Math. Astr. och Fysik*, t. **18**, 1924, p. 1-56.
b. Proced. Nat. Acad. of Sc., t. **12**, 1926, p. 261, 265, 348.
c. Annales of Mathem., t. **27**, 1926, p. 427-464.
d. Math. Zeits., t. **32**, 1930, p. 422–425.
26. W. Rotach. — *Promotions arbeit* (Zürich, 1925),
27. H. Cramer. — *a. Congrès des mathématiciens scandinaves* (Stockholm, 1925).
b. Skandinavisk Aktuarietidskrift, p. 1-74 (Upsala, 1928).
28. G. Szegö. — *Math. Zeits.*, t. **25**, 1926, p. 87-115).
29. J. Uspensky. — *a. Annales of Math.*, t. **28**, 1927, p. 593-619.
b. Bull. Acad. de Petrograd, t. **10**, 1916.

30. J. Korous. — *Rozpravy Ceské Akad.*, t. 37, 1928, nos 11 et 40.
31. Doetsch. — *Math. Zeits.*, t. 32, 1930, p. 597.
32. U. Kowallik. — *Math. Zeits.*, t. 31, 1980, p. 498-518.
33. Ch. Müntz. — *Math. Zeits.*, t. 31, 1930, p. 350-355.
34. N. Nazaroff. — *Math. Zeits.*, t. 33, 1931, p. 481-487.
35. S. C. van Veen. — *Math. Annalen*, t. 105, 1931, p. 408-436.
36. C.-V.-L. Charlier. — *Traité du Calcul des Probabilités*, par É. Borel, t. II, fasc. IV, Chap. III, p. 41-92 (Paris, Gauthier-Villars, 1931).
37. M. Jacob. — *Giorn. dell'Instituto Ital. d. Attuari*, t. II, nos 1 et 3, 1931, Rome.
38. M. Viaro. — *Rend. Acad. di Napoli* (3a), t. 36, 1930, p. 13-20.