ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

Mémoire sur l'extension du théorème d'Abel aux séries d'itérées $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 439-495
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__439_0>

MÉMOIRE

SUR

L'EXTENSION DU THÉORÈME D'ABEL

AUX SÉRIES D'ITÉRÉES $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$

PAR M. GASTON JULIA

Introduction et résumé succinct du mémoire.

Lorsque $R(Z)$ est une fraction rationnelle, dont les $R_n(Z)$ sont les itérées successives, j'ai étudié la convergence de la série

$$(1)\qquad \mathcal{F}(Z) = \sum_0^\infty a_n R_n(Z)$$

dans un Mémoire [1] inséré au Tome 56 des *Acta mathematica*, en me bornant toutefois à l'intérieur des domaines Δ_α où les R_n convergent vers un point double α, attractif ou indifférent, de la substitution $[Z|R(Z)]$. Pour étudier, dans le présent Mémoire, l'*allure de la convergence sur les frontières de ces domaines, et dans le voisinage de ces frontières*, j'ai restreint le choix de $R(Z)$ à cause des grandes complications qui peuvent surgir en général dans la nature géométrique de ces frontières. Je me suis donc borné aux $R(Z)$ *à cercle fondamental* $[|Z| = 1]$, parce que ce sont les seules, comme on sait, où l'on puisse garantir l'existence d'une tangente en tout point d'une courbe frontière de région de convergence, lorsque cette courbe existe. Mais on reconnaîtra immédiatement que les méthodes employées et les résultats

[1] *Mémoires sur la convergence des séries formées avec les itérées successives d'une fraction rationnelle*, par Gaston JULIA.

démontrés dans le présent Mémoire s'appliquent *aux points doubles ou cycles répulsifs ou indifférents d'une* R(Z) *quelconque (et à leurs antécédents) situés sur une frontière de domaine* Δ_α *possédant une tangente en ce point.* Voici un résumé rapide des résultats obtenus.

A. — Substitutions régulières de première espèce.

1° *Sous l'hypothèse* $\sum_0^\infty a_n$ *convergente* (condition nécessaire et suffisante), la série (1) converge dans tout domaine Δ_α où $\alpha \neq 0$. Lorsque $[Z|R(Z)]$ est de première espèce avec deux points attractifs α et β (α intérieur $\neq 0$, β extérieur $\neq \infty$), je montre que (1), convergente en tout point double répulsif A situé sur $\mathcal{C}$ (séparatrice de Δ_α et Δ_β) *converge uniformément dans tout secteur intérieur à* $\mathcal{C}$ *de pointe* A *et non tangent à* $\mathcal{C}$; *elle converge uniformément aussi dans tout secteur extérieur à* $\mathcal{C}$, *de pointe* A, *non tangent à* $\mathcal{C}$ *et ne contenant pas de pôles des* $R_n(Z)$, tout ceci est précisé au Chapitre I, § I, nos 1 à 14, les pôles, des R_n se répartissant sur des courbes analytiques émanées de A, dont les tangentes en A n'ont pour rayon-limite que la tangente à $\mathcal{C}$. Le *théorème d'Abel relatif aux points de convergence des séries entières situés sur le cercle de convergence s'étend donc aux séries actuelles.* La propriété s'étend *à tous les antécédents (partout denses sur* $\mathcal{C}$) *des points doubles répulsifs;* elle ne s'étend aux points des cycles répulsifs d'ordre n [et la série (1) n'y converge] que sous des hypothèses supplémentaires relatives à la convergence des séries partielles

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

2° *Lorsque* $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, *les multiplicateurs correspondants étant* $\neq 0$ *la propriété reste valable sous l'hypothèse* Σa_n *convergente,* pour l'intérieur de $\mathcal{C}$, non pour l'extérieur. Il faut alors *supposer* $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$ *convergente* (s_1 multiplicateur de $\beta = \infty$) pour que (1) converge à l'extérieur Δ_β de $\mathcal{C}$; sous cette hypothèse, le théorème d'Abel s'étend encore à tout secteur de pointe A (point double répulsif ou antécédent de tel point), extérieur et non tangent à $\mathcal{C}$, ne contenant pas de pôles des R_n (nos 15 à 19 du paragraphe 1, Chapitre I, même répartition des pôles des R_n qu'au 1°).

3° *Lorsque* $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, *les multiplicateurs étant nuls*, ***la propriété*** *reste vraie pour les secteurs intérieurs à* $\mathcal{C}$ *si* Σa_n *converge*. Mais la question est plus complexe, $F_1(Z)$ étant la fonction de Böttcher de l'origine $[R(Z) = r_p Z^p + \ldots, r_p \neq 0]$ telle que

$$F_1(0) = 0, \qquad F'_1(0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad F_1[R(z)] = [F_1(z)]^p,$$

et ρ_1 le rayon de convergence de la série image

$$\lambda_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^{p^n},$$

le domaine de convergence de (1) est défini par $|F_1(Z)| < \rho_1$. *Si* $\rho_1 < 1$ (1) *il ne comprend qu'une partie de* $\mathcal{C}$ limitée par des courbes analytiques $|F_1| = \rho_1$ qui sont des coupures de Weierstrass pour $\mathcal{F}(Z)$. Toutes les propriétés de la série en F_1 $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$, sur le cercle $|F_1| = \rho_1$ et à l'intérieur se transportent à la série $\sum_0^\infty a_n R_n$ aux points correspondants de la courbe frontière $|F_1(Z)| = \rho_1$ et de son voisinage intérieur. En particulier, *le théorème d'Abel s'étend à tous les points de convergence de* $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ *sur cette frontière* $|F_1(Z)| = \rho_1$ *pour tous les secteurs intérieurs, non tangents à la frontière et aboutissant en ces points*.

A l'extérieur de $\mathcal{C}$, $F_2(Z)$ étant la fonction de Böttcher de l'infini

$$\left[R(Z) = r_p Z^p \left[1 + \mathrm{Hol}\left(\frac{1}{Z}\right)\right], \; r_p \neq 0\right]$$

telle que

$$F_2(Z) = \frac{\lambda_1}{Z} + \frac{\lambda_2}{Z^2} + \ldots, \qquad (\lambda_1 \neq 0), \qquad F_2[R(Z)] = [F_2(Z)]^p,$$

(1) Lorsque Σa_n converge, $\rho \geqq 1$.

et $\rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$ étant le rayon de convergence de $\sum_0^\infty a_n z^{-p^n}$, *la région de convergence de* (1) *est définie par* $|F_2| > \frac{1}{\rho_1}$ *et n'existe que si* $\rho_1 > 1$; elle est limitée par $\mathcal{C}$ et par les courbes analytiques $|F_2| = \frac{1}{\rho_1}$. Excepté le cas élémentaire où $R \equiv r_d Z^d$, elle présente l'aspect d'une *écumoire criblée de trous*, limités par les courbes fermées $|F_2| = \frac{1}{\rho_1}$ en nombre infini *qui s'accumulent vers tout point de* $\mathcal{C}$. On montre d'abord qu'on peut trouver des *secteurs* d'ouverture finie, *extérieurs et non tangents à* $\mathcal{C}$, dont la pointe est en A (point double répulsif ou antécédent de tel point), *et qui ne sortent pas de la région de convergence :* dans ces secteurs, *la série* (1) *converge uniformément et le théorème d'Abel s'étend ainsi à tous les points des cycles répulsifs et à leurs antécédents avec le choix précédent des secteurs d'approximation* (n^{os} 20 à 28, paragraphe 2 du Chapitre I).

B. — Substitutions régulières de deuxième espèce.

Un seul point attractif α situé sur $\mathcal{C}$. La convergence de Σa_n est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (1) dans Δ_α. La frontière de Δ_α est un ensemble E'_R parfait, partout discontinu, situé sur $\mathcal{C}$; le complémentaire de E'_R est formé : 1° d'un arc $\mu\alpha\nu$ du cercle $\mathcal{C}$, limité aux deux points doubles répulsifs μ et ν qui encadrent sur $\mathcal{C}$ le point double attractif α; 2° de tous les antécédents de l'arc $\mu\alpha\nu$; les arcs du complémentaire sont intérieurs à Δ_α [1].

1° *Points* μ, ν *et leurs antécédents*. — A un tel point A aboutit toujours un arc de $\mathcal{C}$ intérieur à Δ_α. Dans tout secteur de pointe A, INTÉRIEUR A Δ_α, *non tangent à* $\mathcal{C}$, *ne contenant pas de pôle des* R_n, *la convergence de* $\Sigma a_n R_n$ *est uniforme et le théorème d'Abel s'étend. Un tel secteur peut chevaucher sur* $\mathcal{C}$, *contenir des arcs de* $\mathcal{C}$. *Son ouverture peut être* $> \pi$, puisque : 1° sa partie, intérieure à $\mathcal{C}$, peut être arbitrai-

---

[1] Δ_α comprend donc *à la fois l'intérieur et l'extérieur de* $\mathcal{C}$, unis par les arcs du complémentaire de E'_R

rement voisine de π, et 2° les pôles de R_n voisins de A se répartissent sur des courbes analytiques émanées de A dont un nombre fini seulement fait un angle $< \pi - \varepsilon$ avec l'arc de $\mathcal{C}$ intérieur à Δ_α qui aboutit en A.

2° *Points doubles répulsifs et antécédents distincts des précédents : ils ne sont pas extrémités d'arcs du complémentaire* de E'_R. Donc, sur $\mathcal{C}$, dans le voisinage *et des deux côtés* d'un tel point A, il y a des points de E'_R et des points du complémentaire. Un secteur intérieur à Δ_α de pointe A est *ou bien intérieur à $\mathcal{C}$, ou bien extérieur à $\mathcal{C}$: il ne chevauche pas sur $\mathcal{C}$; son ouverture est toujours $< \pi$; lorsqu'il n'est pas tangent à $\mathcal{C}$ et ne contient pas de pôles de* R_n, *la convergence de* $\Sigma a_n R_n(Z)$ *y est uniforme et le théorème d'Abel s'étend.* Tout se passe pour ces points comme dans le 1° des substitutions régulières de première espèce (n° 28 *bis*, § III du Chapitre I).

C. — Substitutions singulières de deuxième espèce.

On les étudie à l'aide des résultats établis dans le Mémoire des *Acta*, t. 56. Il y a sur $\mathcal{C}$ un point double indifférent α, tel que

$$R(\alpha) = \alpha, \qquad R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) \neq 0$$

et $d - 1$ points doubles répulsifs de $[Z|R(Z)]$. Le domaine Δ_α de convergence des R_n vers α se compose d'abord de l'intérieur et de l'extérieur de $\mathcal{C}$. Sa frontière est un ensemble parfait discontinu E'_R situé sur $\mathcal{C}$. α appartient à E'_R. Le complémentaire de E'_R sur $\mathcal{C}$ contient un arc $\alpha\mu$ unissant α à l'un (convenablement choisi) des deux points doubles répulsifs (soit μ) qui encadrent α sur $\mathcal{C}$ et tous les antécédents de $\alpha\mu$; ces arcs appartiennent aussi à Δ_α et unissent l'intérieur et l'extérieur de $\mathcal{C}$ à l'intérieur de Δ_α.

Comme en B, la convergence de Σa_n est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de (1) dans Δ_α.

1° *En μ, α ou leurs antécédents, le théorème d'Abel s'étend à tout secteur doué des propriétés énoncées au* 1° *de* B.

2° *Aux autres points doubles répulsifs ou leurs antécédents, le théorème d'Abel s'étend aux secteurs doués des propriétés énoncées au* 2° *de* B (nos 29 à 33 *bis* du paragraphe I, Chapitre II).

D. — Substitutions singulières de première espèce.

Un seul point double indifférent α

$$R(\alpha)=\alpha, \qquad R'(\alpha)=1, \qquad R''(\alpha)=0, \qquad R'''(\alpha)\neq 0$$

et $d-2$ points doubles répulsifs, tous situés sur $\mathcal{C}$. Le domaine Δ_α, où les R_n convergent vers α, se compose de l'intérieur et de l'extérieur de $\mathcal{C}$. *Sa frontière est* $\mathcal{C}$ *tout entier* (cas limite de A) sur lequel les antécédents de α et des points répulsifs sont partout denses.

On complète d'abord le Mémoire des *Acta*, t. 56, par l'étude générale de la convergence de $\sum\limits_0^\infty a_n R_n(Z)$ dans le domaine d'un point double indifférent Δ_α tel que

$$R'(\alpha)=1, \qquad R''(\alpha)=\ldots=R^{(p)}(\alpha)=0, \qquad R^{(p+1)}\neq 0,$$

Lorsque $\alpha\neq 0$ et $\neq\infty$ la convergence de Σa_n est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n R_n(Z)$ dans Δ_α; lorsque $\alpha=0$ la condition est $\Sigma a_n n^{-\frac{1}{p}}$ convergente; lorsque $\alpha=\infty$, c'est $\Sigma a_n . n^{+\frac{1}{p}}$ convergente (nos 34 et 36 du paragraphe II, Chapitre II).

Ici $p=2$ et $|\alpha|=1$, donc *la convergence de* Σa_n *doit être supposée* et l'on démontre que le *théorème d'Abel s'étend à tout secteur intérieur à* $\mathcal{C}$, *ou extérieur à* $\mathcal{C}$, *ayant sa pointe en* α, *ou en un point double répulsif, ou en un antécédent de ces points, dans les mêmes conditions qu'au* 1° *de* A. Pour les secteurs extérieurs il faut noter en outre que si leur pointe est α *ou un antécédent de* α leur ouverture peut être arbitrairement voisine de π sans qu'ils contiennent de pôles : on peut en effet montrer qu'en α par exemple, il n'y a aucun pôle des R_n dans le demi-plan, ne contenant pas $\mathcal{C}$, que détermine la tangente en α à $\mathcal{C}$ (nº 37 du Chapitre II).

Remarques sur les méthodes employées. — On observera le rôle important joué dans le présent Mémoire par des séries telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} | R_n(Z) - R_{n+1}(Z) | \qquad \text{pour A (1°), B, C, D;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} | s_1''^{n} R_n(Z) - s_1''^{n+1} R_{n+1}(Z) | \qquad \text{pour A (2°);}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} | R_k F_2''^{k} - R_{k+1} F_2''^{k+1} - F_2''^{k} + F_2''^{k+1} | \qquad \text{pour A (3°).}$$

On est amené à montrer que ces séries sont uniformément bornées quel que soit Z dans le secteur étudié. Pour cela, sans restreindre la généralité, on substitue en général avec avantage aux secteurs étudiés des secteurs invariants par $[Z | R(Z)]$, ou plutôt limités par des courbes analytiques Γ invariantes par $[Z | R(Z)]$; les nouveaux secteurs Δ'_1 s'obtiennent en considérant un *quadrilatère curviligne fondamental* Δ''_1, intérieur au domaine Δ_α considéré, et une famille d'antécédents successifs de ce quadrilatère, juxtaposés les uns aux autres, tendant vers le point répulsif A, sommet du secteur, et engendrant par leur ensemble le secteur d'étude Δ'_1. Il est généralement aisé, à l'aide des évaluations approchées de R_n en fonction de n données dans le Mémoire cité des *Acta* et complétées ici, de prouver que la série à étudier est bornée dans Δ''_1 et d'en déduire, par la considération de ses valeurs aux antécédents successifs d'un même point, qu'elle reste bornée dans tout Δ'_1. Une autre méthode, plus élégante, employée au A (1°) ramène le fait précédent à une évaluation d'une *borne supérieure de la longueur d'une courbe invariante* Γ entre un point Z et le point répulsif A dont elle émane, les termes $| R_n - R_{n+1} |$ étant les *cordes d'une ligne polygonale inscrite dans cette* Γ. J'ai d'ailleurs donné, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. 55, 1931) l'application de cette méthode géométrique à la démonstration du théorème d'Abel lui-même sur les séries entières et le lecteur pourra s'y reporter pour rapprocher ce travail du Mémoire actuel.

CHAPITRE PREMIER.

SUBSTITUTIONS RÉGULIÈRES DE PREMIÈRE ET DE DEUXIÈME ESPÈCES.

Préliminaires.

1° Le rappel des principales propriétès de ces substitutions a été fait dans le Mémoire cité des *Acta*, t. 56 (Chap. I, n° 7), et le lecteur est prié de s'y reporter. Le cercle fondamental $\mathcal{C}$ étant supposé coïncider avec $|Z| = 1$, une substitution de première espèce $Z_1 = R(Z)$, où R est rationnelle et de degré d, admet deux points doubles attractifs α et β (α intérieur), symétriques par rapport à $\mathcal{C}$, dont les multiplicateurs $R'(\alpha)$ et $R'(\beta)$ sont imaginaires conjugués et en module < 1 (ils peuvent être nuls). Le domaine Δ_α de convergence des R_n vers α est $|Z| < 1$. Δ_β est $|Z| > 1$. Sur $\mathcal{C}$ il y a $d-1$ points doubles répulsifs $R(Z) = Z$ à multiplicateur réel > 1 et toutes les racines des $R_n = Z$ (cycles) sont (excepté α et β) situées sur $\mathcal{C}$ qu'elles remplissent de façon dense; pour chacune de ces racines on a $R'_n > 1$, ces racines appartiennent à des cycles répulsifs. L'ensemble $|Z| = 1$ est l'ensemble singulier de l'itération $[Z|R(Z)]$ que j'ai appelé E'_R dans mes recherches sur ce sujet. Tout point du plan (excepté éventuellement α et β) admet E'_R pour dérivé de ses antécédents. E'_R sépare ici Δ_α de Δ_β.

Lorsque $[Z|R(Z)]$ est de deuxième espèce, il y a *un point double attractif α sur* $|Z| = 1$, dont le multiplicateur $R'(\alpha)$ est réel et compris entre 0 et 1 et d points répulsifs à multiplicateur réel > 1. Le domaine de convergence des R_n vers α se compose ici de tout le plan Z moins un *ensemble parfait discontinu* E_R situé sur $\mathcal{C}$ et qui n'est autre que le dérivé de l'ensemble des racines des équations

$$R_n(Z) - Z = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

E'_R est l'ensemble singulier de l'itération $[Z|R(Z)]$ et le dérivé de l'ensemble des antécédents d'un point quelconque du plan.

Le complémentaire de E'_R sur $\mathcal{C}$ se compose de l'*arc* $\mu\alpha\nu$, limité aux deux points doubles répulsifs μ et ν qui encadrent α, *et de tous les anté-*

cédents de cet arc. Parmi les extrémités des arcs contigus à E'_R il n'y en a donc que deux : μ et ν qui soient des points doubles répulsifs ou des racines d'équations $R_n(Z) - Z = 0$ (points appartenant à des cycles de l'itération) (*voir* plus loin, § III).

2° Lorsque $\alpha \neq 0$ (et cela est toujours vérifié pour les substitutions de deuxième espèce) la condition nécessaire et suffisante de convergence de $\Sigma a_n R_n$ dans Δ_α est que Σa_n converge. Alors $\Sigma a_n R_n(Z)$ converge uniformément dans tout domaine fermé intérieur à Δ_α.

Lorsque $\alpha = 0$, $s \neq 0$, il faut et il suffit que $\Sigma a_n s^n$ converge, s étant le multiplicateur de α, pour que $\Sigma a_n R_n$ converge uniformément dans $|Z| < 1 - \varepsilon$. Alors $\beta = \infty$, et la convergence de $\Sigma a_n R_n$ dans Δ_β exige la convergence de $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$ (s_1, multiplicateur de $\beta = \infty$ est le conjugué de s et il est $\neq 0$ en même temps que s). Alors $\Sigma a_n R_n$ converge uniformément dans tout domaine intérieur à Δ_β, ne contenant pas de pôles des R_n. La convergence dans Δ_β, lorsque $\beta = \infty$, entraîne donc la convergence de $\Sigma |a_n|$ et par suite la convergence dans Δ_α.

Lorsque $s = 0$ avec $\alpha = 0$ (et $\beta = \infty$) les choses se passent différemment : le domaine de convergence de $\Sigma a_n R_n$ peut n'être qu'une partie de Δ_α et il peut atteindre une assez grande complication comme on le verra dans le Mémoire cité des *Acta*, t. 56. Nous y revenons en détail dans le paragraphe II du Chapitre I.

3° Dans ce qui suivra, nous utiliserons aussi quelques propriétés de la *fonction de Poincaré relative à un point double répulsif de* $[Z | R(Z)]$ déjà démontrées et utilisées ailleurs ou résultant aussitôt de propriétés démontrées ailleurs [*voir* par exemple les Mémoires cités dans le Chapitre préliminaire du Mémoire des *Acta*, t. 56, et aussi *Sur la permutabilité des fractions rationnelles*, p. 199 et suiv. (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1922)]. μ étant un point double répulsif quelconque $\mu = R(\mu)$, $\sigma = R'(\mu) > 1$, situé sur $\mathcal{C}$, il existe une fonction *méromorphe* $f(z)$ telle que

$$f(0) = \mu, \qquad f'(0) = +1, \qquad f(z\sigma) = R[f(z)].$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $\mu = +1$ (rotation d'axes).

Par $Z=f(z)$, à tout Z [excepté éventuellement les deux points doubles attractifs α et β et alors la substitution $Z_1=R(Z)$ se ramène à $T_1=T^d$ en ramenant α et β à $T=0$ et $T'=\infty$] correspondent une infinité de points z s'accumulant vers l'infini. Le voisinage de $z=0$ se transforme en celui de $Z=1$. L'ensemble E'_R du plan Z devient un ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ du plan z qui est celui qu'on appelle aussi « ensemble J » de la suite $f(z\sigma^n)$.

Lorsque la substitution $(Z|R)$ est de première espèce, E'_R est identique à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}_\sigma$ devient une courbe analytique émanée de $z=0$ invariante par $(z|z\sigma)$, c'est une droite passant par O et comme $f'(0)=+1$, $\mu=+1$ c'est l'axe imaginaire du plan z. Un petit cercle entourant $Z=+1$ engendre par itérations successives [à cause de $f(z\sigma)=R[f(z)]$ et des propriétés connues de l'itération] une surface de Riemann Σ qui est la surface engendrée par $Z=f(z)$ lorsque z décrit tout le plan z (*voir* mon Mémoire *Bull. Soc. math. de France*, t. 52, 1924). L'axe imaginaire du plan z est axe de symétrie du plan z comme $\mathcal{C}$ l'est pour Σ. Au demi-plan à gauche $\mathcal{R}(z)<0$ correspond l'intérieur $|Z|<1$ de $\mathcal{C}$, une infinité de fois recouvert; à $\mathcal{R}(z)>0$ correspond $|Z|>1$ une infinité de fois recouvert. Lorsque z parcourt $\mathcal{R}(z)=0$ toujours dans le même sens, Z décrit $\mathcal{C}$ une infinité de fois et toujours dans le même sens. A tout Z de module <1 correspondent une infinité de z_i tels que $f(z_i)=Z$ et $\mathcal{R}(z_i)<0$. A cause de $f(z\sigma^n)=R_n[f(z)]$ et de la convergence des R_n vers α ou β, selon que $|Z|$ est <1 ou >1, $f(z)$ tend vers β lorsque z décrira une demi-droite quelconque issue de O et d'argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $f(z)$ tendra vers α si l'argument est entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. α et β sont valeurs asympotiques de $f(z)$. Il en résulte que les rayons Oz_i correspondant aux racines de $f(z_i)=Z$ n'ont pour limite que l'axe imaginaire.

Lorsque $(Z|R)$ est de deuxième espèce, $\mathcal{E}_\sigma$ est, comme E'_R, un ensemble parfait discontinu. La partie de E'_R comprise dans un arc de $\mathcal{C}$ arbitrairement petit contenant μ engendre par itérations (successives) tout E'_R; il lui correspond par $Z=f(z)$ une partie de $\mathcal{E}_\sigma$ voisine de zéro, située sur l'axe imaginaire $\mathcal{R}(z)=0$ et dont l'itération successive par $[z|z\sigma]$ engendre tout $\mathcal{E}_\sigma$. L'axe imaginaire est transformé dans $\mathcal{C}$ décrit une infinité de fois et les demi-plans $\mathcal{R}(z) < 0$ et $\mathcal{R}(z) > 0$ correspondent encore à $|Z| < 1$ et $|Z| > 1$.

Mais $F(z)$ n'a ici *qu'une seule valeur asymptotique* α, limite de $f(z)$ sur tout rayon émané de O et distinct de $\mathcal{R}(z) = 0$. Les rayons oz_i ont encore pour limite le seul axe imaginaire (quel que soit Z fixe). Il y a d'autres particularités de $f(z)$ et de $\mathcal{E}_\sigma$ qui distinguent entre eux les deux points doubles répulsifs extrémités d'un intervalle appartenant au complémentaire de E'_R et les autres. Nous y revenons au paragraphe III du présent Chapitre. *Pour les premiers, $\mathcal{E}_\sigma$ est localisé sur une des demi-droites* issues de O que porte $R(z) = 0$, pour les autres $\mathcal{E}_\sigma$ s'étale sur toute la droite $R(z) = 0$,

I. — Substitutions régulières de première espèce, à multiplicateurs $\neq 0$.

1° $\alpha \neq 0, \quad \beta \neq \infty.$

1. Supposons donc Σa_n convergente et $Z = +1$ point double répulsif de la substitution régulière à cercle fondamental $Z_1 = R(Z)$ dont α et β sont les points attractifs. La série $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ converge pour $Z = 1$ et sa valeur est $S = \sum_0^\infty a_n$. Montrons que $\mathcal{F}(z) = \sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ *tend vers* S lorsque Z tend vers $+1$ en restant à l'intérieur d'un domaine Δ intérieur au cercle fondamental $\mathcal{C}$ et aboutissant en $A(Z = +1)$ *non tangentiellement* au cercle fondamental, c'est-à-dire que la partie de Δ suffisamment voisine de A devra être intérieure à un secteur de sommet A, de bissectrice OA, d'angle au sommet $\pi - \eta$ $(\eta > 0)$.

Considérons pour cela la différence

$$(1) \qquad \delta = \sum_0^\infty a_n R_n(Z) - S = \sum_0^\infty a_n [R_n(Z) - 1],$$

pour marquer la convergence de $s_n = \sum_0^n a_n$ vers S on remplace a_n

par $s_n - s_{n-1}$ et il vient

$$(2) \qquad \delta = \sum_0^\infty s_n(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}) + s(\alpha - 1),$$

en tenant compte de ce que $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) = \alpha$ pour tout Z intérieur. En posant

$$s_n = s + \varepsilon_n \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right),$$

il vient

$$(3) \quad \delta = \sum_0^{p-1} s_n(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}) + s(\mathrm{R}_p - 1) + \sum_p^\infty \varepsilon_n(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}) = t_1 + t_2 + t_3,$$

en posant

$$t_1 = \sum_0^{p-1} s_n(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}), \qquad t_2 = s(\mathrm{R}_p - 1) \qquad \text{et} \qquad t_3 = \sum_p^\infty \varepsilon_n(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}).$$

Lorsque p est fixé chacun des termes de t_1 tend vers zéro, donc t_1 tend vers zéro lorsque $\mathrm{Z} \to 1$. De même $t_2 \to 0$ lorsque $\mathrm{Z} \to 1$,

Montrons qu'on peut choisir p fixe et assez grand pour que t_3 reste inférieur à tout nombre fixé à l'avance *quel que soit Z dans le domaine Δ signalé précédemment*.

2. Il suffit pour cela de prouver que la série

$$(4) \qquad \sum_q^\infty |\mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) - \mathrm{R}_{n+1}(\mathrm{Z})|$$

reste bornée, quel que soit q et quel que soit Z dans Δ.

En effet, si cela est démontré, on aura, quels que soient p et Z dans Δ,

$$\sum_p^\infty |\mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) - \mathrm{R}_{n+1}(\mathrm{Z})| < \mathrm{L}.$$

Puisque $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, on peut choisir p assez grand pour que $n > p$ donne $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ (ε arbitrairement petit). On aura alors, avec ce choix de p, et quel que soit Z dans Δ,

$$|t_3| < \varepsilon \sum_p^{\infty} |R_n - R_{n+1}| < \varepsilon L,$$

c'est-à-dire que t_3 sera arbitrairement petit comme on l'a annoncé.

3. Envisageons donc la série

$$\sum_q^{\infty} |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|.$$

Le terme général $|R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$ est la distance du point $R_n(Z)$ à son conséquent $R_{n+1}(Z)$. Or, on sait que par un point Z quelconque intérieur au cercle fondamental passe *une courbe* Γ (et même une infinité) *invariante par* $[Z \mid R(Z)]$, aboutissant en $Z = +1$ non tangentiellement au cercle fondamental $\mathcal{C}$; Γ est analytique en $Z = +1$, Γ contient une famille d'antécédents de Z, $R_{-K}(Z)$ $(K = 1, 2, \ldots, \infty)$ qui tend vers $Z = +1$, elle contient tous les conséquents de Z et aboutit en $Z = \alpha$ en général avec un point asymptote. On obtient Γ à partir d'une demi-droite de la façon suivante. On sait que, au point double répulsif $Z = +1$ de multiplicateur $\sigma > 1$, correspond une fonction méromorphe $f(z)$ telle que

$$f(0) = +1, \qquad f'(0) = +1 \qquad \text{et} \qquad f(\sigma z) = R[f(z)],$$

on l'appelle la fonction de Poincaré correspondant au point répulsif $Z = +1$.

Lorsque z décrit le demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$, $Z = f(z)$ décrit l'intérieur de $\mathcal{C}$ cercle fondamental, lorsque z décrit $\mathcal{R}(z) > 0$, Z décrit l'extérieur de $\mathcal{C}$. Lorsque z décrit une demi-droite issue de 0 dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) < 0$, laquelle est invariante par $(z \mid \sigma z)$, Z décrit dans $\mathcal{C}$ une courbe analytique Γ invariante par $[Z \mid R(Z)]$ allant de $+1$ à α, qui contient tous les conséquents d'un de ses points ζ et une famille, tendant vers $+1$, d'antécédents de ce point ζ. A chaque Z_0, intérieur à $\mathcal{C}$ correspondent par $f(z_i) = Z_0$ une infinité de z_i dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) < 0$, chacune de ces demi-droites allant de 0 à ces z_i est transformée par $Z = f(z)$ en une courbe Γ_i du type précédent passant par tous les conséquents de Z_0 et par une certaine famille d'antécédents de Z_0 qui tend vers $+1$. L'ensemble des demi-droites Oz_i *n'admet que l'axe imaginaire pour un ensemble limite*, il n'y a donc qu'*un nombre fini de courbes* Γ_i *issues de* Z *et aboutissant en* $Z = +1$ *par l'intérieur de* Δ.

4. On peut se borner à la partie de Δ voisine de $A(Z = +1)$ et si l'on veut à un secteur Δ' de rayon assez petit de sommet A limité par deux courbes issues de A et faisant avec AO de part et d'autre, l'angle $\frac{\pi}{2} - \eta$. A Δ' correspond biunivoquement par $Z = f(z)$ un petit secteur rectiligne δ' de sommet O limité par deux demi-droites faisant $\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$ avec la partie négative de l'axe réel. Si Z est dans Δ', z est dans δ' et la longueur de l'arc AZ de courbe invariante Γ qui correspond au segment Oz est finie, elle a quel que soit Z une borne supérieure [1] l'. A partir de Z la courbe Γ se prolonge jusqu'en α : je dis que l'arc $Z\alpha$ de Γ est aussi de longueur finie. En effet soit Z_{-1} l'antécédent de Z situé sur l'arc $AZ\left[Z_{-1} = f\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right]$.

La courbe Γ *est constituée des conséquents successifs de l'arc* $Z_{-1}Z$. Lorsque n est assez grand, Z_n, tendant vers α, est intérieur à un cercle de centre α de rayon assez petit pour que dans ce cercle $|R'(Z)| < k < 1$ (k est supérieur d'aussi peu qu'on le veut au multiplicateur de α qui est < 1). On a alors

$$\text{longueur arc } \widehat{Z_{n+1}Z_{n+2}} < k\left(\text{longueur arc } \widehat{Z_nZ_{n+1}}\right),$$

ce qui prouve que les arcs successifs sont majorés par une progression géométrique de raison k. Donc l'arc $Z\alpha$ a bien une *longueur finie*. Il en résulte que *chaque courbe* Γ *a entre* A *et* α *une longueur totale finie*. Il est facile de voir que *l'ensemble des longueurs des* Γ *dont les tangentes en* A *sont intérieures au secteur* Δ', *admet une borne supérieure*.

En effet ces Γ correspondent aux demi-droites Oz faisant avec la partie négative de l'axe imaginaire un angle compris entre $-\frac{\pi}{2} + \eta$

---

(1) En effet, f est holomorphe dans δ' et sur son contour, en $z = 0$, $f'(0) = +1$, $|f'(z)|$ est bornée supérieurement dans δ', $|f'| < m$, si donc λ est le plus grand segment Oz de δ', on aura $l' \leqq m\lambda$.

et $\frac{\pi}{2} - \eta$. Envisageons la partie δ'' de ces demi-droites comprise entre deux cercles de centre O de rayon r_0 et $r_0\sigma$, r_0 étant assez petit pour que le quadrilatère curviligne δ'' ainsi construit soit intérieur à δ'. Il est clair que les antécédents et les conséquents successifs de δ'' par $(z \mid z\sigma)$ engendrent l'angle balayé par les demi-droites précédentes. A δ'' correspond par $Z = f(z)$ une aire Δ'' *intérieure* à Δ' et dont les conséquents et une famille d'antécédents recouvriront par leur ensemble l'aire balayée par les courbes Γ dont les tangentes en A sont intérieures à Δ'. Or, lorsque Z reste intérieur à Δ'', il est immédiatement visible que la longueur de l'arc αZ de Γ a une borne supérieure l'' ne dépendant que de Δ'' (on peut par exemple, pour le voir, raisonner par l'absurde et appliquer le lemme de Bolzano-Weierstrass) Z, dans Δ'', est *a fortiori* intérieur à Δ' donc l'arc AZ de Γ est $\leqq l'$. En définitive, l'ensemble des longueurs des Γ considérées admet la borne supérieure $l' + l''$.

[Au contraire, les racines z_i de $f(z) = Z_0$ étant telles que $z_i \to \infty$ pour $i \to \infty$ de façon que Oz_i ait l'axe imaginaire pour limite, les courbes Γ correspondant à ces Oz_i comporteront des arcs $(AZ_0)_i$ dont la tangente en A tend vers la tangente au cercle $\mathcal{C}$ et dont les longueurs ne peuvent être limitées supérieurement comme on l'a fait précédemment.]

5. Cela étant, il est clair que, tous les R_n étant situés sur la courbe Γ passant par Z envisagée, et les $|R_n - R_{n+1}|$ représentant les côtés successifs d'une ligne brisée polygonale inscrite dans cette Γ, on aura quel que soit q

$$\sum_q^{\infty} |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)| < l' + l'' = l,$$

pour tout Z intérieur à Δ, puisque avec les hypothèses faites sur Δ, on peut recouvrir Δ avec des Γ dont les tangentes en A font avec AO, et de part et d'autre, un angle $\leqq \frac{\pi}{2} - \eta$ (η positif convenable).

On a donc bien prouvé que la série convergente $\sum_q^{\infty} |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$ (est *uniformément bornée dans* Δ quel que soit q. Elle *n'est pas uniformément convergente* dans Δ car, si grand que soit n, on peut trouver dans Δ un point ζ_{-n} (tendant vers $+1$), antécédent d'ordre n du point ζ de Δ, où

$$R_n(\zeta_{-n}) - R_{n+1}(\zeta_{-n}) = \zeta - R(\zeta) = a \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'aussi grand que soit n, le terme $|R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$ peut en un certain point de Δ, acquérir une valeur fixe $a \neq 0$, ce qui contredit la convergence uniforme.

6. La série $\Sigma a_n R_n(Z)$ possède donc *aux points doubles répulsifs situés sur le cercle fondamentat $\mathcal{C}$ la propriété dite théorème d'Abel pour les séries entières. Elle converge aux points doubles répulsifs et sa valeur est limite de la valeur en un point intérieur lorsque ce point tend vers le point double sans devenir tangent à la circonférence.*

La démonstration précédente nous a prouvé que $\sum_q^\infty |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$ étant uniformément bornée dans Δ, *la série* $\sum_0^\infty \varepsilon_n |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$ *est uniformément convergente dans* Δ, lorsque $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Il en résulte encore, en remontant la série des équations (3), (2) et (1), que $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ *est uniformément convergente dans* Δ, ce qui est un autre aspect du théorème d'Abel rappelé pour les séries entières.

7. Remarquons maintenant que, si θ est un point double, et ζ un antécédent d'ordre k de ce point double $[R_k(\zeta) = \theta]$, la série $\sum_0^\infty a_n R_n(\zeta)$ se réduit à

$$\sum_0^{k-1} a_n R_n(\zeta) + \sum_0^\infty a_{k+\nu} R_\nu(\theta) = \sum_0^{k-1} a_n R_n(\zeta) + \theta \sum_0^\infty a_{k+\nu},$$

laquelle est convergente. Donc, en *tout antécédent d'un point double situé sur* $\mathcal{C}$, la série $\Sigma a_n R_n(Z)$ converge. Et l'on sait (Préliminaires) que les antécédents successifs d'un point quelconque de $\mathcal{C}$ forment, dans le cas présent, un ensemble partout dense sur $\mathcal{C}$. Il existe donc sur $\mathcal{C}$ un ensemble partout dense de points de convergence de $\Sigma a_n R_n(Z)$, à savoir, tous les antécédents des points doubles répulsifs. Mais cela ne suffit pas pour affirmer la convergence de $\Sigma a_n R_n$ sur tout $\mathcal{C}$.

8. En effet, l'hypothèse Σa_n convergente ne suffit pas à assurer la convergence aux points de tous les cycles répulsifs. Considérons par exemple une fonction $R(Z)$ pour laquelle les points $+1$ et -1 forment un cycle d'ordre 2 et prenons $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors Σa_n converge tandis qu'au point $Z = +1$ on a $R_n = (-1)^n$; donc $\Sigma a_n R_n(+1) = \sum \frac{1}{n}$ qui diverge. Il faut donc des hypothèses supplémentaires sur Σa_n.

Envisageons un cycle d'ordre n formé des points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. On a

$$Z_2 = R(Z_1), \qquad Z_3 = R(Z_2), \qquad \ldots, \qquad Z_n = R(Z_{n-1}), \qquad Z_1 = R(Z_n),$$

et chacun des Z_i est un point double répulsif pour

$$[Z \mid R_n(Z)], \qquad Z_i = R_n(Z_i),$$
$$R'_n(Z_i) = R'(Z_1)R'(Z_2)\ldots R'(Z_n) = \sigma_n, \; |\sigma_n| > 1.$$

Envisageons les séries

$$a_0 + a_n + a_{2n} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \qquad \text{en posant} \qquad s_p^0 = \sum_{k=0}^{p} a_{kn},$$
$$a_1 + a_{n+1} + a_{2n+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+1} \qquad \text{»} \qquad s_p^1 = \sum_{k=0}^{p} a_{kn+1},$$
$$a_{n-1} + a_{2n-1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+(n-1)} \qquad \text{»} \qquad s_p^{n-1} = \sum_{k=0}^{p} a_{kn+(n-1)}.$$

Au point Z_1 on aura

$$\sum_{\mu=0}^{pn+(n-1)} a_\mu R_\mu(Z_1) = Z_1 s_p^0 + Z_2 s_p^1 + \ldots + Z_n s_p^{n-1} = s_{pn+n-1}(Z_1) = s'_p(Z_1),$$

au point Z_2 on aura

$$\sum_{\mu=0}^{pn+(n-1)} a_\mu R_\mu(Z_2) = Z_2 s_p^0 + Z_3 s_p^1 + \ldots + Z_1 s_p^{n-1} = s_{pn+n-1}(Z_2) = s'_p(Z_2),$$

au point Z_n on aura

$$\sum_{p=0}^{pn+(n-1)} a_\mu R_\mu(Z_n) = Z_n s_p^0 + Z_1 s_p^1 + \ldots + Z_{n-1} s_p^{n-1} = s_{pn+n-1}(Z_n) = s'_p(Z_n).$$

La convergence de $\sum_0^\infty a_n R_n$ aux points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ exige que les seconds membres des équations précédentes aient des limites finies lorsque p devient infini.

Or les équations, envisagées comme des équations en $s_p^0, s_p^1, \ldots, s_p^{n-1}$ admettent le déterminant classique

$$d = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_n \\ Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_n & Z_1 & \ldots & Z_{n-1} \end{vmatrix}$$

et lorsque $d \neq 0$ (cas général), il est clair en écrivant les formules de Cramer qui donnent les $s_p^0, s_p^1, \ldots, s_p^{n-1}$ en fonction linéaire des deuxièmes membres $s'_p(Z_1), \ldots, s'_p(Z_n)$ que l'existence de limites finies pour les deuxièmes membres *entraîne l'existence de limites finies pour les inconnues, lorsque p devient infini*. Les séries

$$\sum_{k=0}^\infty a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sont alors convergentes. Donc, *dans le cas général*, pour pouvoir affirmer la convergence de $\Sigma a_n R_n$ aux points de tous les cycles répulsifs d'ordre n, *il faudra supposer convergentes les n séries* $\sum_{k=0}^\infty a_{kn+\nu}$ (1) ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) formées en prenant de n en n les termes de $\sum_0^\infty a_n$.

Il est clair, par exemple, que si $\sum_0^\infty |a_n|$ converge, toutes les séries $\sum_{k=0}^\infty a_{kn+\nu}$ convergent, quels que soient n et ν, et $\Sigma a_n R_n$ converge alors uniformément sur tout $\mathcal{C}$ car $|R_n| = 1$ sur tout $\mathcal{C}$. Peut-il arriver que

(1) Y a-t-il des exceptions? La convergence en tous les cycles répulsifs d'ordre n n'entraîne-t-elle pas toujours la convergence des n séries précédentes? Nous n'insisterons pas ici sur ce problème.

toutes les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+\nu}$ soient convergentes, quels que soient n et ν sans que $\sum_{0}^{\infty} |a_n|$ soit convergente? C'est une question sur laquelle nous n'insisterons pas ici.

9. Nous nous contenterons simplement, dans l'hypothèse où les n séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

convergent, d'étendre aux points de tous les cycles répulsifs d'ordre n le théorème d'Abel généralisé précédemment aux points doubles répulsifs.

$Z_1, \ldots, Z_n$ étant les points du cycle considéré on aura pour $|Z| < 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Z) = \sum_{0}^{\infty} a_k R_k(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} R_{kn}(Z) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+1} R_{kn+1}(Z) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+(n-1)} R_{kn+(n-1)}(Z).\end{aligned}$$

Supposons que Z tende vers Z_1 en restant à l'intérieur d'un angle $\mathfrak{A}_1$ de sommet Z_1 de bissectrice OZ_1, d'ouverture $2\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) < \pi$. En posant $R_n(Z) = \rho(Z)$ la première des Σ précédentes sera $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \rho_k(Z)$ et puisque Z_1 est point double répulsif de $\rho(Z)$ il résulte de la démonstration faite que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \rho_k(Z)$ converge uniformément dans tout domaine Δ intérieur à $\mathcal{C}$, aboutissant à Z_1 par l'intérieur de l'angle $\mathfrak{A}_1$ et tend vers $\left(Z_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}\right)$ lorsque Z tend vers Z_1 par l'intérieur de $\mathfrak{A}_1$. De même pour

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+1} R_{kn+1}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+1} \rho_k[R(Z)],$$

puisque alors $R(Z)$ aboutit à Z_2 par l'intérieur d'un angle curviligne $\mathfrak{A}_2$ transformé de $\mathfrak{A}_1$ par $R(Z)$, de sommet Z_2, de bissectrice OZ_2, d'ouverture $2\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)$ égale à celle de $\mathfrak{A}_1$. Le même raisonnement s'appliquant aux n séries partielles en lesquelles on a décomposé $\mathcal{F}(Z)$, il résulte bien que la série $\sum_0^\infty a_k R_k(Z)$ converge uniformément dans Δ et a pour limite $\sum_0^\infty a_k R_k(Z_1)$ lorsque Z tend vers Z_1 par un chemin non tangent à $\mathcal{C}$ (chemin compris dans $\mathfrak{A}$, pour η assez petit). Et le raisonnement fait pour Z_1 se répétant identiquement pour tous les Z_i il résulte que le théorème d'Abel généralisé est encore vrai pour les points de tous les cycles répulsifs d'ordre n sous l'hypothèse de la convergence des n séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Mais d'ailleurs, on a vu que, si ζ est antécédent d'ordre k d'un point double répulsif $\theta[R_k(\zeta) = \theta = R(\theta)]$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n$ converge en ζ. Écrivons-la

$$\mathcal{F}(Z) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n R_n(Z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} R_n[R_k(Z)].$$

D'après ce qu'on a vu, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} R_n(u)$ converge uniformément dans tout domaine Δ_1, intérieur à $\mathcal{C}$, aboutissant à θ par l'intérieur d'un angle $\mathfrak{A}$ de bissectrice $O\theta$, d'ouverture $< \pi$. Il en résulte : 1° que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} R_n[R_k(Z)]$ et par suite $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ converge uniformément dans tout domaine Δ, intérieur à $\mathcal{C}$, aboutissant à ζ par l'intérieur d'un angle $\mathfrak{A}$ de bissectrice $O\zeta$, d'ouverture $< \pi$; 2° que $\mathcal{F}(Z)$ tend vers $\sum_0^\infty a_n R_n(\zeta)$ sur tout chemin aboutissant à ζ par l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Le *théorème d'Abel généralisé est donc vrai pour tous les antécédents des* *points doubles répulsifs* et une démonstration analogue *sous l'hypothèse de la convergence des n* séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

montre *qu'il est vrai pour les antécédents de tous les cycles répulsifs.*

10. Au contraire, sans l'hypothèse de la convergence des séries partielles précédentes, on a vu que $\sum_0^{\infty} a_n R_n(Z)$ peut diverger aux points d'un cycle répulsif. En reprenant l'exemple $a_0 = 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, R admettra toujours un cycle répulsif d'ordre 2 formé de deux points distincts Z_1 et Z_2 ; au point Z_1 on aura

$$\sum_{h=0}^{n=2p+1} a_n R_n(Z_1) = Z_1 \sum_{k=0}^{p} a_{2k} + Z_2 \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} = Z_1 a_0 + Z_1 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} - Z_2 \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1}.$$

Il est immédiatement visible que, $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1}$ ayant une limite finie lorsque p devient infini, la quantité $Z_1 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} - Z_2 \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1}$ n'aura de limite finie, pour $p = +\infty$, que si $Z_1 = Z_2$, ce qui n'est pas le cas ici. Donc en Z_1 et en Z_2, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(Z)$ est alors *divergente*. En un point quelconque ζ, antécédent de Z_1 d'ordre p, $[R_p(\zeta) = Z_1]$, la série s'écrira

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k R_k(\zeta) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{p+k} R_k(Z_1)$$

et par conséquent divergera puisque $\sum_{k=0}^{\infty} a_{p+k} R_k(Z_1)$ diverge. La série proposée $\sum \frac{(-1)^n}{n} R_n(Z)$ converge donc sur $\mathcal{C}$ aux antécédents de tous les *points doubles répulsifs*, mais diverge aux antécédents de tous les *cycles répulsifs d'ordre* 2. Ces deux ensembles de points sont *chacun partout denses sur* $\mathcal{C}$. On voit que lorsque la série Σa_n n'est pas absolument convergente, les points de convergence et de divergence peuvent être inextricablement mêlés sur $\mathcal{C}$. (Il serait intéressant d'étudier alors de plus près la mesure de l'ensemble où la série converge et de l'ensemble où elle diverge.

11. Dans tout ce qui précède, on a supposé que Z tendait vers un point de cercle $\mathcal{C}_1$ en restant intérieur à $\mathcal{C}$. Mais on peut démontrer les mêmes propriétés lorsque Z tend vers un point de $\mathcal{C}_1$ *en restant extérieur à* $\mathcal{C}$, en supposant d'abord $\alpha \neq 0$ et par conséquent $\beta \neq \infty$.

Reprenons le point double répulsif $A(Z = +1)$ et envisageons la fonction méromorphe $f(z)$ de Poincaré, telle que

$$f(0) = +1, \qquad f'(0) = +1, \qquad f(\sigma z) = R[f(z)],$$

considérée au n° 3. Lorsque z est à droite de l'axe imaginaire $\mathcal{R}(Z) > 0$, Z est extérieur à $\mathcal{C}$.

Quels sont les pôles des $R_n(Z)$? ce sont les antécédents successifs de l'infini par $[Z|R(Z)]$, ils ont pour ensemble limite le cercle $\mathcal{C}$ $(|Z| = 1)$. Considérons les pôles $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ de $f(z)$. Ils s'accumulent vers l'infini, et d'autre part les rayons Oz_i n'ont pour limite que l'axe imaginaire, car, au point de vue de l'itération, la valeur $Z = \infty$ ne se distingue pas de toute valeur finie Z_0 extérieure au cercle fondamental, puisque, par hypothèse, β, point double attractif de $R(|Z)$ extérieur à $\mathcal{C}$ est à distance finie. Envisageons d'ailleurs, à l'intérieur de la région $|z| < r$ (r assez petit) qui par $Z = f(z)$ se transforme d'une manière biunivoque en une aire fermée entourant A, un quadrilatère curviligne δ'' limité : 1° par 2 cercles de centre O de rayons r_0 et $r_0\sigma < r$; 2° par deux demi-droites issues de O faisant avec l'axe réel positif l'angle $\frac{\pi}{2} - \eta$ de chaque côté, il correspond à δ'' une aire Δ'' du plan Z toute extérieure à $\mathcal{C}$, et dont les conséquentes successives ont pour limite le seul point β. Ces aires conséquentes sont les valeurs que prennent $f(\sigma z), f(\sigma^2 z), \ldots$ dans δ'', donc, pour p assez grand, les valeurs dans δ'' des $f(\sigma^n z)$ pour $n > p$ sont intérieures à un petit cercle de centre β; elles sont donc finies : or ce sont les valeurs prises par

$f(z)$ dans l'angle des deux rayons limitant δ'', lorsque $|z| > r_0 \sigma^p$. Donc dans un angle quelconque $\mathfrak{A} < \pi$, de bissectrice l'axe réel positif, $f(z)$ tend uniformément vers β lorsque z tend vers l'∞. Il n'y a dans cet angle qu'un nombre fini de pôles de $f(z)$. Par chaque point ζ de cet angle $\mathfrak{A}$ passe une droite aboutissant en O, dont l'image par $Z = f(z)$ est une courbe analytique Γ, invariante par $[Z | R(Z)]$, unissant $Z = f(\zeta)$ à l'origine et au point β, sur Γ sont tous les conséquents de Z et une famille convenable d'antécédents, images des $\frac{z}{\sigma^k}$. Lorsque ζ est un pôle de f la courbe Γ passe par l'infini dans le plan Z. Mais les z_i étant en nombre fini dans $\mathfrak{A}$, *il n'y a qu'un nombre fini de ces courbes* Γ *exceptionnelles aboutissant en* A *dans un angle ne contenant pas la tangente à* $\mathcal{C}$.

En définitive tout point Z_0 extérieur à $\mathcal{C}$ peut être uni à A par une et en général une infinité de courbes analytiques Γ [images par $Z = f(z)$ des demi-droites unissant O aux racines de $f(z) = Z_0$]; il n'y en a qu'*un nombre fini aboutissant en* A *dans un angle ne contenant pas la tangente à* $\mathcal{C}$. Pour $Z_0 = \infty$, *tout ceci est aussi vrai, les courbes* Γ *sont dites alors exceptionnelles*.

12. Envisageons un secteur Δ' extérieur à $\mathcal{C}$, de sommet A, de rayon assez petit, limité par deux courbes Γ issues de A et faisant avec le rayon OA prolongé, de part et d'autre, l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$. Il ne contient qu'un nombre limité de Γ exceptionnelles. Ces Γ exceptionnelles contiennent tous les antécédents de $Z = \infty$ situés dans Δ', c'est-à-dire les pôles des $R_n(Z)$. En effet, $f(\sigma^n z) = R_n[f(z)]$, prouve qu'à tout Z_0 tel que $R_n(Z_0) = \infty$ correspondent par $Z_0 = f(z)$ des points $z_i^{(1)}$ tels que les $\sigma_n z_i^{(1)}$ soient des pôles de $f(z)$]. Donc Δ' contient une infinité d'antécédents de $Z = \infty$ mais *alignés sur un nombre fini de courbes exceptionnelles*. Il est possible alors d'isoler ces Γ exceptionnelles et de considérer des secteurs Δ'_1, de même type que Δ', mais *ne contenant aucun pôle des* R_n. La somme des ouvertures en A de ces secteurs sera aussi voisine qu'on le voudra de l'ouverture de Δ'.

13. Il est alors visible que pour un secteur tel que Δ'_1, dont les Γ frontières ne sont pas exceptionnelles, et qui ne contient aucune Γ

exceptionnelle, la longueur totale, de A en β, de toutes les Γ qui le traversent est bornée supérieurement ([1]). Par suite la série

$$\sum_0^\infty |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|,$$

converge dans Δ'_1 et sa somme est bornée quel que soit Z. Un raisonnement analogue à celui des n^{os} 4, 5 et 6 prouve que

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n |R_n(Z) - R_{n+1}(Z)|$$

converge uniformément dans Δ'_1 lorsque $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, et il en est de même pour $\sum\limits_0^\infty a_n R_n(Z)$, c'est-à-dire que *le théorème d'Abel s'étend à l'approximation du point double répulsif* A, *par un secteur extérieur à* $\mathcal{C}$, *ne contenant pas de pôles des* R_n, *et qu'on a appris à former au* n° 12.

14. Le même théorème s'étend à tous les antécédents des points doubles répulsifs par le raisonnement fait au n° 9 (*in fine*). Sous l'hypothèse de la convergence des *n* séries

$$\sum_{k=0}^\infty a_{kn+\nu} \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1),$$

il sera encore vrai pour les antécédents de tous les cycles répulsifs d'ordre *n*, lorsqu'on approche un *tel point par l'extérieur, en restant dans un secteur qui ne contient pas de pôle des* $R_n(Z)$ comme on l'a fait au n° 13.

2° $\qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \infty.$

15. L'étude précédente est valable *sous l'hypothèse générale* Σa_n *con-*

([1]) Lorsqu'on remplace Z par la sphère de Riemann classique, le point $Z = \infty$ devient le pôle de la sphère et joue dans l'itération exactement le même rôle que les autres. *Toutes* les courbes invariantes Γ ont alors une longueur finie et toutes celles qui abordent le point double A dans un angle ne contenant pas la tangente ou cercle fondamental *ont une longueur totale inférieure à une limite fixe*. Il n'y a plus de courbes invariantes exceptionnelles sur la sphère.

vergente laquelle, comme on sait, assure la convergence de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ en tout point intérieur ou extérieur au cercle fondamental, à condition que $\alpha \neq 0$ et par conséquent $\beta \neq \infty$.

Supposons maintenant $\alpha = 0$ *et par conséquent* $\beta = \infty$. Tout ce qu'on a dit précédemment, lorsque Z est intérieur à $\mathcal{C}$ est encore valable sous l'hypothèse Σa_n convergente. On sait, il est vrai, que cette hypothèse n'est plus nécessaire pour assurer la convergrnce de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$, cette convergence n'exigeant plus alors que la convergence de $\Sigma a_n s^n$, s étant le multiplicateur du point double

$$\alpha = 0 \qquad [s = \mathrm{R}'(\alpha)],$$

supposé d'abord $\neq 0$. Mais il ne peut être question de convergence en un point double répulsif situé sur $\mathcal{C}$ que si Σa_n converge. Il n'y a donc rien à ajouter dans le cas présent. Le théorème d'Abel s'étend aux séries $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ lorsque Z tend par l'intérieur de $\mathcal{C}$ vers un point double répulsif situé sur $\mathcal{C}$, sous l'hypothèse Σa_n convergente. Il n'en est pas de même lorsque Z est extérieur *puisque* Σa_n *convergente ne suffit pas à assurer la convergence de* $\Sigma a_n \mathrm{R}_n$ *à l'extérieur de* $\mathcal{C}$, la condition nécessaire et suffisante étant, pour $\beta = \infty$, que $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$ converge, lorsque $s_1 \neq 0$, s_1 étant le multiplicateur du point double $\beta = \infty$. On sait d'ailleurs que $s_1 = \lim\limits_{\mathrm{Z} = \infty} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}(\mathrm{Z})}$. Mais, en considérant le symétrique U de Z par rapport à $\mathcal{C}$ le principe de la symétrie prouve que $\mathrm{R}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{Z})$ sont aussi symétriques par rapport à $\mathcal{C}$, par suite

$$\left|\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}(\mathrm{Z})}\right| = \left|\frac{\mathrm{R}(\mathrm{U})}{\mathrm{U}}\right|,$$

tandis que

$$\arg \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}(\mathrm{Z})} = \arg \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}(\mathrm{U})}.$$

Si Z tend vers l'infini, U tend vers zéro, $\lim \frac{\mathrm{R}(\mathrm{U})}{\mathrm{U}} = s$, multiplicateur de $\alpha = 0$, il en résulte que *s et s_1 sont deux nombres complexes conjugués*, ils sont simultanément nuls ou simultanément différents de zéro.

16. La convergence de $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$ nécessaire et suffisante pour la conver-

gence de $\sum_0^\infty a_n R_n$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$ entraîne donc la convergence de $\Sigma|a_n|$ et par conséquent la convergence uniforme de $\Sigma a_n R_n$ sur tout $\mathcal{C}$. Peut-on alors étendre le théorème d'Abel, lorsque Z tend par l'extérieur vers le point double répulsif A, $Z = +1$, situé sur $\mathcal{C}$?

Tout d'abord il est presque immédiat que tout ce qu'on a dit au n° 11 des courbes invariantes Γ unissant à A un point Z_0 extérieur à $\mathcal{C}$ est encore vrai ici(¹) : *un tel point Z_0 extérieur à $\mathcal{C}$ et à distance finie peut être uni à* A *par une et en général une infinité de courbes analytiques* Γ *invariantes par* $[Z|R(Z)]$; *il n'y en a qu'un nombre fini aboutissant en* A *dans un angle ne contenant pas la tangente à* $\mathcal{C}$. Toutes les courbes Γ *aboutissent à l'infini*. Les courbes Γ exceptionnelles seront ici *celles qui contiennent les antécédents de* $Z = \infty$ pôles des $R_n(Z)$, et aussi (*voir Acta mathematica*, t. 56, n° 3 du Chapitre II) comme les antécédents *d'ordre un* de l'∞ sont en nombre fini, il n'y aura, comme au n° 12 qu'un nombre fini de courbes exceptionnelles aboutissant en A dans un angle de bissectrice OA d'ouverture $2\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$, il est donc possible de considérer, comme au n° 12, des secteurs Δ'_1 de sommet A, de rayon assez petit, limités par deux courbes Γ non exceptionnelles issues de A, et ne contenant aucun pôle des R_n. On isolera pour cela les Γ exceptionnelles par des petits angles curvilignes limités par des Γ non exceptionnelles. Envisageons un tel secteur Δ'_1 et supposons que Z y soit contenu : c'est l'image d'un certain secteur δ'_1 du plan z de sommet O, limité par deux demi-droites du demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$, z et Z se correspondant par $Z = f(z)$, $f(z)$ fonction méromorphe de Poincaré. On peut toujours supposer δ'_1 limité, en outre, par un arc de cercle de centre O, de rayon r assez petit, pour que Δ'_1 et δ'_1 se correspondent d'une manière biunivoque. Alors Δ'_1 sera limité, outre les deux courbes frontières Γ par l'image de cet arc de cercle. Nous désignons par σ le

(¹) D'ailleurs, à cause du principe de la symétrie, par deux points Z et U symétriques par rapport à $\mathcal{C}$ passent deux courbes Γ, invariantes par $[\bar{Z}|R(Z)]$, *symétriques l'une de l'autre par rapport à* $\mathcal{C}$. Les Γ extérieures sont donc les symétriques, par rapport à $\mathcal{C}$, des Γ intérieures et les Γ exceptionnelles sont les symétriques des Γ intérieures contenant les antécédents de l'origine. En particulier, si $R(Z) \equiv Z^d$, il n'y a pas de Γ exceptionnelles.

multiplicateur (>1) de A en sorte que $f(\sigma z) = R[f(z)]$. Dans δ'_1 nous envisageons la partie comprise entre les cercles de rayon r et $\frac{r}{\sigma}$, nous l'appelons δ''_1 comme au n° 11. Il lui correspond, dans le plan Z, un quadrilatère curviligne Δ''_1 intérieur à Δ'_1. δ'_1 peut être engendré par les antécédents successifs de $\delta''_1\left(z, \frac{z}{\sigma}, \frac{z}{\sigma^2}, \ldots\right)$, et de même Δ'_1 est engendré par une famille d'antécédents successifs $(Z, Z_{-1}, Z_{-2}, \ldots)$ de Δ''_1 convenablement choisis. On prendra toujours la branche de $Z_{-1} = R_{-1}(Z)$ qui est égale à 1 pour $Z = +1$ [laquelle est holomorphe dans Δ'_1 (de rayon supposé assez petit)] pour construire les antécédents successifs de Δ''_1, lesquels, par leur ensemble, recouvrent Δ'_1.

17. Ces préliminaires posés, nous allons montrer que, sous l'hypothèse $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$ convergente, le théorème d'Abel *s'étend ici à l'approximation de* A *par l'extérieur, dans le domaine* Δ'_1. Nous allons démontrer que $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ *converge uniformément dans* Δ'_1 et que par conséquent la limite, pour $Z = +1$, dans Δ'_1, de sa somme est bien $\sum_0^\infty a_n$.

Envisageons la différence

$$\delta = \sum_0^\infty a_n [R_n(Z) - 1].$$

Il faut montrer que pour $|Z-1| < \eta$, dans Δ'_1, on a $|\delta| < \varepsilon$.

L'hypothèse faite, convergence de $\sum \frac{a_n}{s_1^n}$, peut s'écrire

$$\frac{a_n}{s_1^n} = \sigma_n - \sigma_{n-1}$$

avec

$$\sigma_n = \sum_0^n \frac{a_n}{s_1^n} \quad \text{et} \quad \sigma_n = S + \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro. Nous écrirons alors

$$\delta = \sum_0^\infty (\sigma_n - \sigma_{n-1})[s_1^n R_n - s_1^n].$$

et

$$\delta_n = \sum_0^n (\sigma_n - \sigma_{n-1})(s_1^n R_n - s_1^n)$$

$$= \sum_0^{n-1} \sigma_k [s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1} - s_1^k + s_1^{k+1}] + \sigma_n (s_1^n R_n - s_1^n).$$

D'autre part, si l'on pose $Z = \frac{1}{\zeta}$, $R(Z) = \frac{1}{\rho(\zeta)}$, ρ est une fonction rationnelle à cercle fondamental $\mathcal{C}$, pour laquelle l'origine est un point double attractif de multiplicateur s_1. J'ai démontré [n° 3 du Chapitre II du Mémoire *Sur la convergence des séries* $\Sigma a_n R_n$ (*Acta math.*, t. 56)] que, $F(\zeta)$ désignant la fonction de Kœnigs de $\rho(\zeta)$ relative à o $[F(\rho(\zeta)) = s_1 F(\zeta)]$, on peut écrire, dans tout domaine extérieur à $\mathcal{C}$ et ne contenant aucun pôle des R_n,

$$s_1^n R_n(Z) = \frac{1}{F + s_1^n F_{2n}},$$

où

$$F_{2n}(\zeta) = \alpha_2 F^2 + \alpha_3 s_1^n F^3 + \ldots = F^2 \Phi(s_1^n F),$$

la fonction Φ étant holomorphe pour $|s_1^n F| < r$ suffisamment petit, et tendant vers α_2 pour $n = \infty$. D'ailleurs les pôles des R_n correspondent aux zéros des ρ_n, lesquels sont les zéros de F; par hypothèse il n'y en a pas dans Δ'_1 (¹).

On a donc

$$\lim_{n=\infty} s_1^n R_n(Z) = \frac{1}{F(\zeta)}, \qquad \text{où } \zeta = \frac{1}{Z},$$

et par suite *en tout point de* Δ'_1

$$\delta = \sum_0^\infty \sigma_k [s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1} - s_1^k + s_1^{k+1}] + \frac{S}{F(\zeta)}.$$

Remplaçant σ_k par $S + \varepsilon_k$ à partir d'un certain rang p il vient, en

---

(¹) Dans Δ'', en particulier, $F(\zeta) = F\left(\frac{1}{Z}\right)$ est holomorphe et $\neq 0$; donc, dans Δ''_1, $m < |F| < M$.

posant

$$s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1} - s_1^k + s_1^{k+1} = u_k,$$

$$\delta = \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_k u_k + \sum_{k=p}^{\infty} \varepsilon_k u_k + S \sum_{k=p}^{\infty} u_k + \frac{S}{F(\zeta)}.$$

Mais

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = s_1^p R_p - s_1^p - s_1^{q+1} R_{q+1} + s_1^{q+1}$$

et par suite

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = s_1^p R_p - s_1^p - \frac{1}{F(\zeta)},$$

ce qui donne, en définitive,

$$\delta = \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_k u_k + S(s_1^p R_p - s_1^p) + \sum_{k=p}^{\infty} \varepsilon_k u_k.$$

18. Désignons par t_1, t_2, t_3 les trois termes du second membre, dans l'ordre où ils se présentent.

Il est clair que $\lim u_k = 0$ lorsque Z tend vers 1 dans Δ'_1; par conséquent, p étant choisi fixe $|Z - 1| < \eta$ entraîne $|t_1| < \varepsilon$, $|t_2| < \varepsilon$. Reste à montrer que, quel que soit Z dans Δ'_1, on peut choisir p tel que $|t_3| < \varepsilon$. Raisonnant alors comme au nº 2 *il nous suffira de prouver que* $\sum_q^{\infty} |u_k|$ *reste bornée quel que soit q entier et Z dans* Δ'_1. Nous prouverons pour cela que $\sum_0^{\infty} |u_k|$ *reste bornée dans* Δ'_1.

Or

$$|u_k| \leqq |s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1}| + |s_1^k - s_1^{k+1}|.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |s_1^k - s_1^{k+1}| + \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \qquad \text{avec} \qquad v_k = s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1}.$$

Or

est indépendante de Z. Il suffit donc de montrer que $\sum_0^\infty |v_k|$ est bornée quel que soit Z dans Δ'_1.

19. Pour cela nous montrerons d'abord que $\mu(Z) = \sum_0^\infty |v_k|$ est bornée dans Δ''_1 et nous en déduirons facilement qu'elle est bornée aussi dans tous les antécédents de Δ''_1 qui engendrent Δ'_1 ([1]).

Considérons donc

$$v_k = s_1^k R_k - s_1^{k+1} R_{k+1}.$$

Quel que soit Z dans Δ''_1 on a, dès que k est assez grand $[|s_1^k F| < r]$,

$$s_1^k R_k(Z) = \frac{1}{F + s_1^k F_{2k}}, \qquad F_{2k}(\zeta) = F^2 \Phi[s_1^k F],$$

Φ holomorphe dans $|s_1^k F| < r$ et tendant vers α_2 lorsque k devient infini,

$$v_k = \frac{1}{F + s_1^k F_{2k}} - \frac{1}{F + s_1^{k+1} F_{2(k+1)}} = \frac{s_1^{k+1} F_{2(k+1)} - s_1^k F_{2k}}{(F + s_1^k F_{2k})[F + s_1^{k+1} F_{2(k+1)}]},$$

$$v_k = \frac{s_1^k F^2 [s_1 \Phi(s_1^{k+1} F) - \Phi(s_1^k F)]}{(F + s_1^k F_{2k})[F + s_1^{k+1} F_{2(k+1)}]}.$$

Donc, lorsque k devient infini, on a, quel que soit Z dans Δ''_1, puisque dans Δ''_1 il n'y a aucun pôle des R_n, c'est-à-dire aucun Z annulant F,

$$\lim_{k=\infty} \frac{v_k}{s_1^k \alpha_2 (s_1 - 1)} = 1.$$

Il en résulte que, quel que soit Z dans Δ''_1, on aura pour $k \geqq p_0$, p_0 étant choisi assez grand,

$$|v_k| < |\alpha_2| |s - 1| |s_1^k| . \lambda,$$

λ étant une constante supérieure à 1 et aussi voisine de 1 qu'on le

---

([1]) Nous aurions pu opérer d'une façon analogue pour démontrer, aux nos 3, 4, 5, 13, que $\sum_0^\infty |R_n - R_{n-1}|$ est bornée dans Δ'_1 ; nous avons préféré la démonstration directe plus élégante.

voudra. Donc

$$\sum_{k=p_0}^{\infty} |v_k| < \lambda |\alpha_2| |s_1 - 1| \cdot \frac{|s_1|^{p_0}}{1 - |s_1|},$$

quel que soit Z dans Δ''_1. Il en résulte bien, $\sum_0^{p_0-1} |v_k|$ étant évidemment bornée dans Δ''_1, que $\mu(Z) = \sum_0^{\infty} |v_k|$ est uniformément bornée dans Δ''_1, ce que nous écrirons

$$\mu(z) < M \qquad \text{dans } \Delta''_1.$$

20. Z étant dans Δ''_1, Z_{-1}, choisi comme on l'a dit, sera dans l'antécédent de Δ''_1 qui touche Δ''_1 dans Δ'_1. On a

$$\begin{aligned}\mu(Z_{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} |s_1^k R_k(Z_{-1}) - s_1^{k+1} R_{k+1}(Z_{-1})| &= |Z_{-1} - s_1 Z| \\ &+ \sum_1^{\infty} |s_1^k R_{k-1}(Z) - s_1^{k+1} R_k(Z)|,\end{aligned}$$

puisque

$$R_k(Z_{-1}) = R_{k-1}(Z).$$

Donc

$$\mu(Z_{-1}) = |Z_{-1} - s_1 Z| + |s_1| . \mu(Z).$$

Considérons de même les antécédents $Z_2, Z_3, \ldots, Z_{-n}, \ldots$ dont l'ensemble engendre Δ'_1 lorsque Z engendre Δ''_1, il vient

$$\begin{aligned}\mu(Z_{-n}) = |Z_{-n} - s_1 Z_{-n+1}| \\ + |s_1| |Z_{-n+1} - s_1 Z_{-n+2}| + \ldots + |s_1|^{n-1} |Z_{-1} - s_1 Z| + |s_1|^n \mu(Z).\end{aligned}$$

Or, lorsque Z décrit Δ'_1, Z_{-1} décrit Δ'_1 duquel on a retranché Δ''_1, et il est clair que $|Z_{-1} - s_1 Z|$ reste bornée dans Δ'_1; on a donc, quel que soit Z dans Δ'_1, $|Z_{-1} - s_1 Z| < \lambda'$ et par suite $|Z_{-n} - s_1 Z_{-n+1}| < \lambda'$ quel que soit aussi Z dans Δ'_1.

Il en résulte que

$$\mu(Z_{-n}) < \lambda'[1 + |s_1| + \ldots + |s_1^n|] + |s_1|^n M$$

et, quel que soit n, et quel que soit Z dans Δ''_1

$$\mu(Z_{-n}) < \frac{\lambda'}{1 - |s_1|} + M,$$

ce qui revient à dire que, quel que soit Z dans Δ'_1, on a

$$\mu(Z) < \frac{\lambda'}{1 - |s_1|} + M$$

et par conséquent $\sum_0^\infty |v_k|$ *est bien bornée dans* Δ'_1 ; *il en est de même de* $\sum_0^\infty |u_k|$ *qui reste* $< \mathfrak{M}$ dans Δ'_1.

21. Il en résulte que p peut être choisi assez grand pour que $k > p$ entraîne $|\varepsilon_k| < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{M}}$ et par suite

$$\sum_{k=p}^\infty |\varepsilon_k u_k| < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{M}} \sum_p^\infty |u_k| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire $|t_3| < \varepsilon$ et par suite

$$|\delta| < 3\varepsilon,$$

et ceci démontre bien à la fois la *convergence uniforme de* $\sum_0^\infty a_n R_n$ *dans* Δ'_1, *et la continuité de sa somme lorsque* Z *tend vers* A *sommet de* Δ'_1. Le théorème d'Abel est donc, ici encore, étendu aux séries $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ aux points de $\mathcal{C}$ qui sont points doubles répulsifs de $[Z|R(Z)]$, par suite aussi aux *antécédents successifs de ces points doubles*, et sous des restrictions analogues à celles introduites aux n^{os} 8 et 9 sur la convergence des séries partielles $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_{kn+\nu}}{s_1^{kn+\nu}}$, le théorème d'Abel s'étendra aussi à tous les points des cycles répulsifs d'ordre n et à leurs antécédents, lorsqu'on les approche, par l'extérieur de $\mathcal{C}$, en restant dans des secteurs, tels que Δ'_1, qui ne contiennent pas de pôles des $R_k(Z)$.

II. — Substitutions régulières de première espèce, à multiplicateur nul.

1° $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \infty$.

22. Lorsque R(Z) admet les points doubles attractifs α et β, à multiplicateur nul (ils sont nuls simultanément), tout ce que nous avons

dit dans les nos 1 à 14 est encore valable à condition que $\alpha \neq 0$ (d'où β fini). La condition Σa_n convergente est alors en effet la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de

$$\Sigma a_n R_n(Z) \tag{1}$$

dans le cercle $\mathcal{C}$ et hors du cercle $\mathcal{C}$. Le théorème d'Abel s'étend sans autre remarque, comme aux nos 1 à 14,

2° $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.

23. *Lorsque* $\alpha = 0$, *et par suite* $\beta = \infty$, *les choses se passent différemment*. Examinons d'abord l'intérieur de $\mathcal{C}$. Le domaine de convergence de (1)

$$\Sigma a_n R_n(Z)$$

dans $\mathcal{C}$ peut n'être alors qu'une partie de $\mathcal{C}$. D'une façon précise, si F(Z) est la fonction de Böttcher de l'origine (voir *Acta*, t. 56, Chap. I, n° 5, et Chap. II, nos 4 et suiv.), telle que

$$F_1(0) = 0, \qquad F_1'(0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad F_1[R(Z)] = [F_1(Z)]^p,$$

sous la condition que, à l'origine,

$$R'(0) = R''(0) = \ldots = R^{(p-1)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad R^{(p)}(0) = \frac{d^p R}{dZ^p}(0) \neq 0,$$

et si ρ_1 est le rayon de convergence de la série image

$$\lambda_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^{p^n}, \tag{2}$$

la série (1) convergera dans $\mathcal{C}$ aux points définis par $|F_1(Z)| < \rho_1$. Si $\rho_1 \geqq 1$, la série (1) convergera dans tout $\mathcal{C}$; pour étendre le théorème d'Abel à l'approximation d'un point double situé sur $\mathcal{C}$, il faudra en outre supposer Σa_n convergente et dès lors ce qu'on a dit aux nos 1 à 14 s'applique intégralement, le théorème d'Abel s'étend.

Il n'en est plus de même si $\rho_1 < 1$, car le domaine de convergence de (1) n'est alors qu'une partie de $\mathcal{C}$ définie par $|F_1|\, \rho_1$. Nous avons vu d'ailleurs que les courbes $|F_1| = \rho_1$ constituant la frontière de convergence de (1) dans $\mathcal{C}$ étaient des coupures de Weierstrass pour

$$S(Z) = \sum_0^\infty a_n R_n(Z)$$

(voir *Acta*, Chap. II, n° 7 *bis*).

Nous avons alors, au voisinage de tout point de cette frontière, écrit

$$R_n(Z) = \alpha_1 F_1^{p^n} + F_1^{2p^n}[\alpha_2 + \varepsilon_n],$$

avec $\alpha_1 \neq 0$ et ε_n, holomorphe en F_1 tendant vers zéro, uniformément dans tout Δ intérieur à $\mathcal{C}$ lorsque $\lim n = \infty$.

Il en résulte

$$(3) \qquad S(Z) = \sum_0^\infty a_n R_n(Z) = \alpha_1 \sum_0^\infty a_n F_1^{p^n} + \sum_0^\infty a_n F_1^{2p^n}[\alpha_2 + \varepsilon_n].$$

Or la série $\sum_0^\infty a_n F_1^{2p^n}$ converge absolument dans le domaine $|F_1| < \sqrt{\rho_1}$ qui contient le domaine $|F_1| \leqq \rho$. Donc $\sum_0^\infty a_n F_1^{2p^n}[\alpha_2 + \varepsilon_n]$ converge absolument et uniformément dans tout domaine $|F_1| \leqq \rho_1 + \varepsilon$ avec $\rho_1 + \varepsilon < \sqrt{\rho_1}$. Par conséquent, si, en un point Z_0 de $|F_1| = \rho_1$ la série $\sum_0^\infty a_n R_n$ converge, il faudra aussi que $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$ converge en ce point. A la série (4) $\sum_0^\infty a_n F_1^{p^n}$, dans le plan F_1, s'applique le théorème d'Abel lui-même sur les séries entières, elle converge uniformément dans tout domaine du plan F_1 intérieur à $|F_1| < \rho_1$ accédant au point $F_1(Z_0)$ par un point anguleux *non tangent à la frontière* $|F_1| = \rho_1$. Il en est de même en revenant au plan Z (¹); *dans tout domaine Δ intérieur à $|F_1| < \rho_1$, accédant en Z_0 par l'intérieur d'un angle dont les côtés ne sont pas tangents en Z_0 à la frontière $|F_1| = \rho_1$, la série* (4) *sera uniformément convergente et le théorème d'Abel s'étend*. On voit alors immédiatement, par (4), qu'*il en est de même pour la série proposée* $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$.

(¹) En effet le point $F_1((Z_0)$ est pour la fonction inverse de $F_1(Z)$ un point ordinaire ou un point critique algébrique.

Dans le cas présent on peut dire d'après (4) que toutes les conclusions que le théorème d'Abel sur les séries entières permet d'affirmer pour la série $\sum\limits_0^\infty a_n F_1^{p^n}$, série entière en F_1, sur son cercle de convergence, se transportent immédiatement à la série (1) sur sa frontière de convergence $|F_1| = \rho_1$.

24. Examinons maintenant l'extérieur de $\mathcal{C}$.

Envisageons la fonction de Böttcher $F_2(Z)$ du point à l'infini, pour laquelle, autour de l'infini, on a

$$F_2(Z) = \frac{\lambda_1}{Z} + \frac{\lambda_2}{Z^2} + \ldots \quad \lambda_1 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad F_2[R(Z)] = [F_2(Z)]^p,$$

car ici, on a, à l'infini,

$$R(Z) = r_p Z^p \left[1 + \mathrm{Hol}\left(\frac{1}{Z}\right)\right] \qquad (r_p \neq 0).$$

(A cause de la symétrie par rapport à $\mathcal{C}$ le nombre p est le même pour l'infini et pour l'origine.)

Le domaine de convergence, extérieur à $\mathcal{C}$, de

$$(1) \qquad \sum_0^\infty a_n R_n(Z)$$

est défini par $|F_2| > \rho_2$, ρ_2 étant le rayon de convergence de $\sum\limits_0^\infty a_n z^{-p^n}$, lequel est évidemment, d'après 23, $\rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$.

Lorsque $\rho_1 > 1$ [1], il y a donc, hors de $\mathcal{C}$, une région de convergence pour (1), limitée par $\mathcal{C}$ et par les courbes $|F_2| = \frac{1}{\rho_1}$. Hors le cas où $R(Z) \equiv r_d Z^d$, l'∞ a une infinité d'antécédents admettant $\mathcal{C}$ pour ensemble limite. Il y a *infinité de courbes fermées* $|F_2| = \frac{1}{\rho_1}$ enfermant à leur intérieur tous ces antécédents qui sont les pôles des R_n (voir *Acta*,

---

[1] Lorsque $\rho_1 \leqq 1$ on a $\rho_2 \geqq 1$ et par suite (1) ne converge en aucun point extérieur à $\mathcal{C}$. Le problème *ne se pose donc que si* $\rho_1 > 1$. Et, dans ce cas, il y a convergence uniforme de (1) dans tout l'intérieur de $\mathcal{C}$ et sur $\mathcal{C}$ elle-même.

t. 56, Chap. II, n° 8). Le domaine de convergence de $\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$ hors de $\mathcal{C}$ présente donc, pour $\rho_1 > 1$, *l'aspect d'une écumoire dont les trous s'accumulent vers tout point de* $\mathcal{C}$. Il faudra donc, d'abord, examiner dans quelles conditions on peut s'approcher d'un point double de $[Z | R(Z)]$ situé sur $\mathcal{C}$ *en restant*, hors de $\mathcal{C}$, dans *le domaine de convergence de* (1). Au contraire, par des raisonnements analogues à ceux du n° 23, on verra aussitôt que lorsque Z reste dans un domaine Δ aboutissant à un point Z_0 d'une courbe $|F_2| = \frac{1}{\rho_1}$, où la série (1) est supposée converger, Δ ayant en Z_0 un angle non tangent à la courbe, il y aura convergence uniforme de (1) dans Δ et extension du théorème d'Abel.

25. Soit maintenant $A(Z = +1)$ le point double répulsif, situé sur $\mathcal{C}$, vers lequel va tendre Z en restant, hors de $\mathcal{C}$, dans le domaine de convergence de (1). Tout d'abord, le raisonnement fait au n° 16 prouve que les Γ invariantes exceptionnelles [passant par les pôles des $R_n(Z)$] aboutissant dans un angle de sommet A et ne contenant pas la tangente à $\mathcal{C}$ sont en nombre fini; on peut donc construire, *comme au* n° 16, un secteur Δ'_1, de sommet A, limité par deux courbes invariantes Γ non exceptionnelles, et engendré par les antécédents successifs d'un quadrilatère curviligne Δ''_1 ne contenant aucun antécédent de l'infini, c'est-à-dire aucun pôle des $R_n(Z)$. Or, les zéros de $F_2(Z)$ sont et sont seulement les *antécédents de l'infini*. Dans Δ''_1, F_2 analytique n'a pas de zéro, donc, dans Δ''_1 $|F_2| > m (0 < m < 1)$. A cause de la relation

$$F_2[R(z)] = [F_2(Z)]^p$$

et par suite

$$F_2[R_n(Z)] = [F_2(Z)]^{p^n}$$

on aura, dans un domaine antécédent d'ordre n de Δ''_1,

$$|F_2(Z)| > m^{\frac{1}{p^n}},$$

et il est clair que, pour $n > n_0$, on aura

$$m^{\frac{1}{p^n}} > \frac{1}{\rho_1} \qquad (\text{car } \rho_1 > 1).$$

Par conséquent, les domaines antécédents successifs de Δ_1'' appartiennent dès que l'ordre d'antécédence est $> n_0$ au domaine de convergence de (1), et par suite, en ne considérant que ceux dont l'ordre est $n > n_0$, on aura un secteur Δ_2' aboutissant en A, limité par deux courbes invariantes Γ non exceptionnelles et par une troisième courbe suffisamment voisine de A, ce Δ_2' est tout entier dans le domaine de convergence de (1). C'est dans un tel secteur que nous ferons varier Z pour le faire tendre vers A. Ce n'est pas restreindre la généralité que de supposer, comme on le fera dans la suite, que Δ_1'' lui-même appartient au domaine de convergence de (1), c'est-à-dire $n_0 = 1$ dans le raisonnement précédent.

26. Nous montrerons maintenant que la série

$$(1) \qquad \sum_0^\infty a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z}),$$

converge uniformément dans Δ_2' *et que sa somme a pour limite* $\sum_0^\infty a_n$ *lorsque* Z, *dans* Δ_2', *tend vers* A.

Envisageons la différence

$$\delta = \sum_0^\infty a_n[\mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) - 1],$$

et montrons que, pour $|-1| < \eta$, dans Δ_2', on a $|\delta| < \varepsilon$ [la convergence uniforme dans Δ_2' de cette série δ entraîne celle de (1)].

Par hypothèse la série $\sum_0^\infty \frac{a_n}{\mathrm{F}_2^{p^n}}$ converge en tout point de Δ_2'. Nous posons

$$\sum_0^n \frac{a_k}{\mathrm{F}_2^{p^k}} = s_n = s_n + \varepsilon,$$

s étant la somme $\sum_0^\infty \frac{a_k}{\mathrm{F}_2^{p^k}}$ (c'est une fonction holomorphe de Z dans Δ_2'), et ε_k tendant vers zéro pour $k = \infty$ en tout point intérieur à Δ_2'.

Il vient successivement

$$\delta = \sum_0^\infty \frac{a_k}{F_2^{p^k}}[R_k F_2^{p^k} - F_2^{p^k}] = a_0(R_0 - 1) + \sum_1^\infty (s_k - s_{k-1})(R_k F_2^{p^k} - F_2^{p^k})$$

$$= a_0[R_0 - 1 - R_1 F_2^p + F_2^p] + \sum_1^\infty s_k[R_k F_2^{p^k} - R_{k+1} F_2^{p^{k+1}} - F_2^{p^k} + F_2^{p^{k+1}}]$$

$$+ s h_2(0),$$

en se rappelant que l'on a, pour n assez grand, en tout domaine extérieur à $\mathcal{C}$ ne contenant pas d'antécédents de l'infini, et par conséquent dans Δ'_2

$$R_n = \frac{h_2(F_2^{p^n})}{F_2^{p^n}},$$

$h_2(u)$ holomorphe pour $|u| < r_2$ et $h_2(0) \neq 0$ [voir *Acta*, t. 56, n° 7 du Chapitre II) et par suite $\lim\limits_{n=\infty} R_n F_2^{p^n} = h_2(0)$ en tout point intérieur à Δ'_2, car $\lim\limits_{n=\infty} F_2^{p^n} = 0$ en un tel point on a enfin, avec $s_k = s + \varepsilon_k$, en raisonnant comme au n° 16

$$\delta = a_0[R_0 - 1 - R_1 F_2^p + F_2^p] + s(R_1 F_2^p - F_2^p)$$
$$+ \sum_1^\infty \varepsilon_k[R_k F_2^{p^k} - R_{k+1} F_2^{p^{k+1}} - F_2^{p^k} + F_2^{p^{k+1}}].$$

27. Décomposant la série précédente, nous écrirons

$$\delta = t_1 + t_2 + t_3 + t_4,$$

avec

$$t_1 = a_0[R_0 - 1 - R_1 F_2^p + F_2^p] = a_0[Z - 1 - R(Z).F_2^p + F_2^p],$$

$$t_2 = s[RF_2^p - F_2^p] = [R(Z) - 1].F_2^p.\sum_0^\infty \frac{a_k}{F_2^{p^k}},$$

$$t_3 = \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k u_k,$$

$$t_4 = \sum_{k=q+1}^{\infty} \varepsilon_k u_k,$$

avec

$$u_k = R_k F_2^{p^k} - R_{k+1} F_2^{p^{k+1}} - F_2^{p^k} + F_2^{p^{k+1}}.$$

Pour prouver que le théorème d'Abel s'étend lorsque Z, dans Δ'_2, tend vers A, nous prouverons que la série $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$ est *uniformément* (et absolument) *convergente* dans Δ'_2.

Nous montrerons d'abord qu'on peut choisir q de sorte que, *quel que soit* Z *dans* Δ'_2, on ait $|t_4| < \varepsilon$ (ε arbitrairement petit positif); q étant ainsi choisi, et puisque u_k tend vers zéro lorsque Z, dans Δ'_2, tend vers A [car $|F_2|$, R_k et R_{k+1} ont 1 pour limite], on aura $|t_1| < \varepsilon$, $|t_2| < \varepsilon$, $|t_3| < \varepsilon$ dès que Z sera suffisamment voisin de A dans Δ'_2. Par suite, on aura, dans ces conditions, $|\delta| < 4\varepsilon$, ce qui étendra le théorème d'Abel.

28. Comme précédemment, la convergence absolue et uniforme de $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$ dans Δ'_2 résulte de ce fait que la série $\varphi(Z) = \sum_{0}^{\infty} |u_k|$ *est bornée dans* Δ'_2. En effet, puisque

$$-\varepsilon_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{a_k}{F_2^{p^k}},$$

et puisque, dans tout Δ'_2, on a

$$1 > |F_2| > \frac{1}{\rho_1} + \eta,$$

ρ_1 étant le rayon de convergence de $\Sigma a_k z^{p^k}$, il résulte que, quel que soit Z dans Δ'_2, on aura pour $n > n_0$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$; par suite, si $\varphi(Z) < \mathfrak{M}$ dans Δ'_2, on aura, dans tout Δ'_2,

$$\left| \sum_{n_0}^{\infty} \varepsilon_k u_k \right| < \varepsilon \sum_{n_0}^{\infty} |u_k| < \varepsilon \mathfrak{M},$$

ce qui démontre l'absolue et uniforme convergence de $\Sigma \varepsilon_k u_k$ dans Δ'_2.

29. Nous montrerons d'abord que

$$\varphi(Z) = \sum_{0}^{\infty} |u_k|,$$

est bornée dans Δ''_1. C'est un quadrilatère curviligne (*voir* n° 25) ne contenant aucun antécédent de l'infini dans lequel on a

$$m < |F_2| < m' < 1$$

pour lequel par conséquent, on aura, pour k assez grand ($k > k_0$),

$$R_k = \frac{h_2(F_2^{p^k})}{F_2^{p^k}},$$

$h_2(u)$ étant holomorphe en u pour $|u| < r_2$ (assez petit)

$$h_2(u) = h_2(0) + u h_3(u),$$

$h_3(u)$ étant aussi holomorphe en u pour $|u| < r_2$.

On a alors pour $k > k_0$

$$\begin{aligned} |u_k| &= |h_2(F_2^{p^k}) - F_2^{p^k} - h_2(F_2^{p^{k+1}}) + F_2^{p^{k+1}}| \\ &= |F_2^{p^k}|.|h_3(F_2^{p^k}) - 1 - F_2^{p^k(p-1)}[h_3(F_2^{p^{k+1}}) - 1]|; \end{aligned}$$

pour $k > k_0$, on a

$$|F_2^{p^k}| < r_0, \qquad |F_1^{p^{k+1}}| < r_0,$$

quel que soit Z dans Δ''_1, par suite puisque l'on a

$$|h_3(u)| < m_1 \qquad \text{pour } |u| < r_0,$$

on aura

$$|u_k| < \mu.|F_2^{p^k}| \qquad \text{avec } \mu = 2m_1 + 2, \qquad \text{pour } k > k_0,$$

quel que soit Z dans Δ''_1.

Il en résulte que la série $\sum_{k_0}^{\infty} |u_k|$ est dans Δ''_1 majorée par la série $\mu \sum_{k_0}^{\infty} |F_2^{p^k}|$, laquelle est évidemment bornée dans Δ''_1, puisque alors $m < |F_2| \leq m' < 1$. Comme chacun des u_k d'indice $k < k_0$ est borné dans Δ''_1, il en résulte bien que $\varphi(Z)$ est bornée dans Δ''_1, $\varphi(Z) < M$ dans Δ''_1.

30. Considérons maintenant les antécédents successifs de Δ''_1, dont l'ensemble constitue le domaine Δ'_1 engendré au nº 25. On voit facilement, en désignant par Z_{-1} l'antécédent de Z ainsi choisi (qui tend vers A lorsque Z tend vers A), et à cause des relations

$$R_k(Z_{-1}) = R_{k-1}(Z) \qquad \text{et} \qquad F_2(Z) = [F_2(Z_{-1})]^p,$$

que l'on a

$$u_k(Z_{-1}) = u_{k-1}(Z) \qquad \text{pour } k \geqq 1,$$

par suite

$$\varphi(Z_{-1}) = \varphi(Z) + \left| Z_{-1} F_2^{\frac{1}{p}} - F_2^{\frac{1}{p}} - ZF_2 + F_2 \right|,$$

où nous écrirons toujours F_2 pour $F_2(Z)$; ceci s'écrit

$$\varphi(Z_{-1}) = \varphi(Z) + |u_{-1}(Z)|,$$

avec

$$u_{-1} = Z_{-1} F_2^{p^{-1}} - F_2^{p^{-1}} - ZF_2 + F_2$$

et l'on voit que u'_{-1} est la valeur que prend l'expression de u_k lorsque l'on fait $k = -1$ en y remplaçant naturellement $R_{-1}(Z)$ par Z_{-1}, et $R_0(Z)$ par Z.

En définissant donc u_k, pour *k entier, positif, nul, ou négatif, quelconque* par la formule

$$u_k = R_k(Z).F_2^{p^k} - R_{k+1}(Z).F_2^{p^{k+1}} - F_2^{p^k} + F_2^{p^{k+1}},$$

où l'on choisit pour $R_k(Z)$, lorsque k est négatif, précisément la détermination $Z_{-|k|}$ antécédente de Z qui est dans Δ'_2, on aura, pour tout entier n positif et quel que soit Z dans Δ''_1,

$$\varphi(Z_{-n}) = |u_{-n}| + |u_{-n+1}| + \ldots + |u_{-1}| + \varphi(Z).$$

Or, dans Δ''_1 on a vu que $m < |F_2| < m' < 1$; de plus on peut toujours supposer Δ'_2 assez voisin de A pour que, dans tout Δ'_2, on ait

$$Z_{-n} = 1 + \eta_n \qquad \text{avec } |\eta_n| < |\eta_0|.k^n,$$

k étant une constante positive, inférieure à 1, et aussi peu supérieure à $\frac{1}{s}$ qu'on le voudra, s désignant le multiplicateur (>1) du point double répulsif A. Il vient alors

$$|u_{-n}| = |Z_{-n} F_2^{p^{-n}} - Z_{-n+1} F_2^{p^{-n+1}} - F_2^{p^{-n}} + F_2^{p^{-n+1}}| = |\eta_n F_2^{p^{-n}} - \eta_{n-1} F_2^{p^{-n+1}}|,$$

ce qui donne

$$|u_{-n}| < |\eta_n| + |\eta_{n-1}| < 2|\eta_0|.k^{n-1}.$$

Donc, quel que soit Z dans Δ''_1, et quel que soit n on aura

$$\varphi(Z_{-n}) < M + 2|\eta_0| \sum_0^{n-1} k^{n-1} < M + 2|\eta_0|.\frac{1}{1-k} = \mathfrak{M}.$$

On voit ainsi que, *quel que soit Z dans Δ'_2, on aura*

$$\varphi(Z) < M + \frac{2|M_0|}{1-k} = \mathfrak{M}.$$

comme on l'a annoncé au n° 28, l'extension du théorème d'Abel est donc prouvée par les points de $\mathcal{C}$ qui sont points doubles répulsifs de $[Z|R(Z)]$ sous l'hypothèse que le rayon de convergence de $\sum_0^\infty a_n z^{p^n}$ est $\rho_1 > 1$ et qu'on s'approche de ces points par l'extérieur de $\mathcal{C}$. Il en résulte aussitôt que le théorème d'Abel s'étend aussi à tous les points des cycles répusifs de $[Z|R(Z)]$ et à tous les antécédents de ces points, sous les mêmes hypothèses et conditions d'approximation.

III. — Les substitutions régulières de deuxième espèce.

31. Elles possèdent un point *double attractif α situé sur $\mathcal{C}$* et $d-1$ points doubles répulsifs sur $\mathcal{C}$. L'ensemble E'_R, situé sur $\mathcal{C}$, est parfait discontinu. Il ne contient pas α. Le domaine Δ_α du point attractif α se compose de tout le plan Z, excepté l'ensemble E'_R. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n R_n(Z)$ est encore la convergence de Σa_n (car $\alpha \neq 0$ et $\neq \infty$).

En la supposant remplie, on voit immédiatement que l'analyse faite dans les n^{os} 1 à 14 est valable et *l'extension du théorème d'Abel est assurée en tout point double répulsif et en tout antécédent d'un tel point double dans les mêmes conditions qu'aux numéros cités.*

La seule différence avec ce que l'on a dit aux n^{os} 1 à 14 consiste dans une propriété de la fonction de Poincaré $Z = f(z)$ relative à un point répulsif sur laquelle nous allons insister ici.

Pour les substitutions régulières de première espèce, l'ensemble E'_R, étant identique à $\mathcal{C}$, partage le plan complet en deux domaines Δ_α, Δ_β dont chacun est le domaine de convergence des R_n vers le point attractif α ou β qui y est contenu. La fonction de Poincaré relative à un point double répulsif quelconque admet *deux valeurs asymptotiques α et β*. $\mathcal{C}$ est l'ensemble singulier de l'itération $[Z|R(Z)]$, les secteurs Δ ayant leur pointe en un point double répulsif, et où l'on démontre la convergence uniforme de $\Sigma a_n R_n$, doivent être supposés complètement intérieurs soit à Δ_α, soit à Δ_β sans pouvoir contenir aucun point de $\mathcal{C}$, du moins *sous l'hypothèse faite de la seule convergence de* Σa_n.

Ici les choses se présentent différemment. Il n'y a qu'un point double attractif α situé sur $\mathcal{C}$. Ce point est intérieur à un arc γ de $\mathcal{C}$, limité aux deux points doubles répusifs μ et ν qui encadrent α sur $\mathcal{C}$. Cet arc γ appartient au domaine Δ_α de convergence des R_n vers α. C'est un *arc contigu à l'ensemble* E'_R *des singularités de l'itération* $[Z \mid R(Z)]$ et limité par deux points de E'_R. On reconnaît aussitôt que, sur $\mathcal{C}$, le *complémentaire de* E'_R *est composé de* γ *et de tous ses arcs antécédents* γ_{-1}, γ_{-2}, ..., γ_{-n}, ... Ces arcs sont deux à deux extérieurs et sans extrémités communes. On voit donc que deux seulement des points doubles répulsifs, les points μ et ν, sont des extrémités d'arcs contigus à E'_R, les autres extrémités des arcs contigus à E'_R étant les antécédents de μ et ν, par conséquent n'étant jamais des points doubles répulsifs.

32. Les fonctions de Poincaré relatives à μ et ν diffèrent profondément de celles qui sont relatives aux autres points répulsifs. Par $Z = f(z)$, en effet, E'_R devient l'ensemble que j'ai appelé $\mathcal{E}_\sigma$ (¹) pour la fonction $f(z)$: c'est l'ensemble des points que les géomètres appellent maintenant les points J de la famille $f(z\sigma^n)$ (σ multiplicateur du point répulsif considéré). Il en résulte que, *pour les points* μ *ou* ν *l'ensemble parfait discontinu* $\mathcal{E}_\sigma$ *est situé sur une* DEMI-DROITE J *issue de* O tandis que sur la demi-droite opposée $f(z)$ admettra la valeur asymptotique α, ainsi que sur toute autre demi-droite. Pour les autres points doubles répulsifs, $\mathcal{E}_\sigma$ s'étalera au contraire sur deux demi-droites opposées issues de O. Dans l'un et l'autre cas on peut, sans restriction (²), supposer que la ou les demi-droites portant $\mathcal{E}_\sigma$ sont portées par l'axe $\mathcal{R}(z) = 0$. [Pour les substitutions régulières de première espèce, et pour tout point répulsif l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ coïncide avec l'axe entier $\mathcal{R}(z) = 0$.]

(¹) Voir (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1919, 1920) *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes*.

(²) Un simple changement de z en $ze^{i\theta}$ suffit pour cela.

Il en résulte que, pour les points μ et ν, un secteur du type Δ, à l'intérieur duquel la démonstration des n^os 1 à 14 est valable, *peut contenir à son intérieur des portions du cercle $\mathcal{C}$ appartenant au complémentaire de* E'_R. En effet, les Γ invariantes [provenant, par $Z = f(z)$, des demi-droites issues de O] issues d'un point quelconque Z de Δ_α et l'unissant au point double μ par exemple ont pour direction limite de leurs tangentes en μ la seule demi-droite $\mu t'$ opposée à la tangente μt en μ à l'arc de $\mathcal{C}$ contigu à E'_R en μ. Dans tout angle de sommet μ, d'ouverture $< 2\pi$, laissant $\mu t'$ à l'extérieur, n'aboutissent donc qu'un nombre fini de Γ exceptionnelles (contenant une infinité de pôles des R_n). En particulier, sur l'arc $\mu\nu$ de $\mathcal{C}$ contenant α, il n'y a pas de pôles des R_n : $\mu\alpha\nu$ est une Γ particulière non exceptionnelle et par conséquent *$\mu\alpha\nu$ est intérieur à un secteur du type Δ aboutissant en O non tangentiellement à $\mu t'$ et dans lequel l'extension du théorème d'Abel est valable, comme aux n^os 1 à 14*.

Pour les autres points répulsifs, il n'y a pas d'arc contigu à E'_R qui y aboutisse et l'extension du théorème d'Abel est valable dans les mêmes secteurs qu'aux n^os 1 à 14.

Les remarques précédentes s'étendent aux *antécédents* : de μ et ν d'une part, des autres points doubles répulsifs d'autre part. Pour les premiers, les secteurs de convergence uniforme de $\Sigma a_n R_n(Z)$ *peuvent contenir l'arc de $\mathcal{C}$ contigu à* E'_R *au point considéré;* pour les seconds les secteurs de convergence uniforme laissent à l'extérieur les deux demi-tangentes à $\mathcal{C}$ menées par le sommet du secteur.

CHAPITRE II.

LES SUBSTITUTIONS SINGULIÈRES.

33. Elles sont de deux espèces selon que le point double indifférent α, situé sur le cercle fondamental, compte pour deux ou trois racines de l'équation $R(Z) - Z = 0$ (voir *Acta*, t. 56, Chap. I, n° 7 du *Mémoire sur la convergence des séries*...). Les substitutions singulières de première espèce sont celles pour lesquelles

$$\alpha = R(\alpha), \qquad R'(\alpha) = 1, \qquad R''(\alpha) = 0, \qquad R'''(\alpha) \neq 0,$$

α compte pour trois racines de $R - Z = 0$. C'est un cas limite des substitutions régulières de première espèce étudiées au paragraphe I (lorsque α et β, points doubles attractifs, viennent se confondre sur $\mathcal{C}$).

Les substitutions singulières de *deuxième espèce* sont celles pour lesquelles

$$\alpha = R(\alpha), \qquad R'(\alpha) = 1, \qquad R''(\alpha) \neq 0,$$

α compte pour deux racines de $R - Z = 0$.

Dans l'un et l'autre cas, α est le *seul point limite* des conséquents d'un point intérieur ou extérieur au cercle $\mathcal{C}$. Mais, pour les substitutions de première espèce, l'ensemble dérivé E'_R des antécédents d'un point quelconque du plan se compose de la circonférence $\mathcal{C}$ tout entière; pour les substitutions de deuxième espèce cet ensemble dérivé E'_R est un ensemble parfait discontinu situé sur $\mathcal{C}$ et contenant α.

Nous examinons successivement les deux cas en commençant par le deuxième qui est plus simple.

I. — Substitutions singulières de deuxième espèce.

34. Le point double indifférent α, situé sur $\mathcal{C}$, est tel que

$$\alpha = R(\alpha), \qquad R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) \neq 0.$$

d étant le degré de R il y a, sur $\mathcal{C}$, $d - 1$ autres racines de $R(Z) - Z = 0$ qui sont points doubles répulsifs de $[Z | R(Z)]$. De même, $R_n(Z)$ étant du même type que $R(Z)$, toutes les racines de $R_n(Z) - Z = 0$ distinctes de α sont des points doubles répulsifs de $[Z | R_n(Z)]$, et fournissent des cycles répulsifs de $[Z | R(Z)]$. Ces points sont partout denses sur E'_R qui est parfait discontinu.

J'ai démontré (§ III du Mémoire précédemment cité) que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\sum_0^\infty a_n R_n(Z) \tag{1}$$

converge en un point intérieur ou extérieur à $\mathcal{C}$ est que $\sum_0^\infty a_n$ *converge*. (Ici $\alpha \neq 0$ et $\neq \infty$.)

Il en résulte que la série (1) *converge en tout point double répulsif ou indifférent* A *de* $[Z|R(Z)]$. On va montrer que le théorème d'Abel s'étend ici encore, c'est-à-dire que (1) *converge uniformément dans tout secteur* Δ *de sommet* A *de côtés non tangents à* $\mathcal{C}$, *de rayon assez petit.* (La démonstration s'étendra aussitôt à tous les antécédents de A, lesquels sont partout denses sur E'_R.)

35. Considérons la somme $\sum_0^n a_k R_k(Z)$, en posant

$$\sum_0^n a_k = s_n = s + \varepsilon_n, \qquad \text{avec } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\,;$$

il vient

$$\sum_0^n a_k R_k = \sum_0^n (s_k - s_{k-1}) R_k = \sum_0^{n-1} s_k (R_k - R_{k+1}) + s_{n+1} R_{n+1}.$$

Donc

$$\sum_0^\infty a_k R_k(Z) = \sum_0^\infty s_k (R_k - R_{k+1}) + s\alpha,$$

en tout point intérieur ou extérieur à $\mathcal{C}$

$$\sum_0^\infty s_k (R_k - R_{k+1}) = s R_0 - s\alpha + \sum_0^\infty \varepsilon_k (R_k - R_{k+1}).$$

Donc

$$\sum_0^\infty a_k R_k(Z) = s R_0 + \sum_0^\infty \varepsilon_k (R_k - R_{k+1}).$$

Le problème revient à *prouver la convergence uniforme de*

$$\sum_0^\infty \varepsilon_k (R_k - R_{k+1})$$

dans le secteur Δ *précédent.* Il suffit pour cela, comme on l'a vu maintes fois antérieurement, de montrer que *la somme*

$$\varphi(Z) = \sum_0^\infty |R_k(Z) - R_{k+1}(Z)|$$

est uniformément bornée dans Δ.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que A est le point $Z = +1$ et l'on a deux cas à examiner selon que α est en A ou n'est pas en A.

36. Premier cas : A *est point double répulsif, c'est-à-dire* $\alpha \neq 1$. — On peut toujours, comme on l'a fait dans le Chapitre I (*voir* par exemple nos 4, 12, 16, 25) remplacer Δ par un secteur Δ' ou Δ'_1 limité par deux courbes analytiques invariantes et engendré par les antécédentes successives d'un même quadrilatère curviligne fondamental que nous appellerons Δ'' lorsqu'il est extérieur à $\mathcal{C}$ et Δ''_1 lorsqu'il est extérieur à $\mathcal{C}$. Dans Δ'_1 extérieur à $\mathcal{C}$, comme dans Δ''_1, on peut supposer (*voir* no 16) qu'il n'y a pas de pôles des R_n.

Montrons d'abord que $\varphi(Z)$ est uniformément borné dans Δ'' ou Δ''_1. En se reportant au no 11 du Mémoire cité précédemment (*Acta*, t. 56). on verra que l'on a, *uniformément dans* Δ'' *ou* Δ''_1,

$$R_n(Z) = \alpha + \frac{1}{n\alpha + \beta Ln + A(Z) + \varepsilon_n(Z)} \qquad \text{avec } |\varepsilon_n| < \frac{B}{n^{1-\eta}},$$

$$R_n(Z) = \alpha + \frac{1}{n\alpha} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right),$$

$o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$ désignant une expression qui, divisée par $\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}$, tend vers zéro, pour $n = \infty$, uniformément dans Δ'' ou Δ''_1.

Donc

$$R_n - R_{n+1} = \frac{1}{\alpha n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)$$

et, par suite,

$$|R_n - R_{n+1}| < \frac{k}{n^{2-\varepsilon}},$$

k étant une constante fixe quel que soit Z dans Δ'' ou Δ''_1. Donc la série $\varphi(Z)$ majorée dans Δ'' ou Δ''_1 par $\sum \frac{k}{n^{2-\varepsilon}}$, *est uniformément bornée dans* Δ'' *ou* Δ''_1. c'est-à-dire $\varphi(Z) < M$.

Considérons maintenant les antécédents successifs Z_{-1}, Z_{-2}, ..., Z_{-n}, ... de Z, dont l'ensemble décrit Δ' lorsque Z (intérieur) décrit Δ'', ou Δ'_1 lorsque Z (extérieur) décrit Δ''_1 on a

$$\begin{aligned}\varphi(Z_{-1}) &= |Z_{-1} - Z| + \varphi(Z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi(Z_{-n}) &= |Z_{-n} - Z_{-n+1}| + \ldots + |Z_{-1} - Z| + \varphi(Z).\end{aligned}$$

Or on peut toujours supposer Δ' (ou Δ'_1) *assez voisin de* A pour que l'on y ait en tout point de Δ' (ou Δ''), $|R'(Z)| > s_1 = s - \varepsilon > 1$ ($s > 1$ étant le multiplicateur du point répulsif A) et par conséquent

$$\left|\frac{d}{dZ} R_{-1}(Z)\right| < \frac{1}{s_1},$$

$$|Z_{-k} - Z_{-(k-1)}| < \int_{Z_{-k+1}}^{Z_{-k+2}} \left|\frac{d}{dZ} R_{-1}(Z)\right| dZ < \frac{|Z_{-k+1} - Z_{-k+2}|}{s_1} < \frac{|Z_{-1} - Z|}{s_1^{k-1}},$$

d'où il résulte, en posant $|Z_{-1} - Z| = \lambda_0$, que l'on a, quel que soit Z dans Δ' (ou Δ'') et quel que soit n,

$$\varphi(Z_{-n}) < \lambda_0 \sum_0^\infty \frac{1}{s_1^k} + M = M + \frac{\lambda_0}{1 - \frac{1}{s_1}} = \mathfrak{M}.$$

et, par conséquent, quel que soit Z dans Δ' (ou Δ'') on a $\varphi(z) < \mathfrak{M}$; $\varphi(Z)$ est donc uniformément bornée dans Δ' (ou Δ'') et par conséquent dans Δ. C. Q. F. D.

37. Deuxième cas : A *est lui-même le point double indifférent, c'est-à-dire* $\alpha = 1$. — On a ici

$$R'(1) = 1 \quad \text{et} \quad R''(1) \neq 0.$$

Il faut d'abord, en vue de l'*approximation de* A *par l'extérieur de* $\mathcal{C}$, examiner comment s'accumulent les pôles des R_n (antécédents de l'infini), au voisinage de A. Or, il résulte d'un théorème que j'ai donné autrefois, comme extension du lemme de Schwarz [voir *Mémoire sur l'itération* (*J. de Jordan*, 1918, p. 72), ou bien *Acta*, t. 42, ou bien *Principes géométriques d'Analyse*, 1re Partie, § IV, Chap. IV], que tout cercle γ tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ en A se transforme par $[Z|R(Z)]$ en domaine intérieur à γ tangent à $\mathcal{C}$ en A. Par suite : il n'y a *aucun pôle des* R_n dans le demi-plan ne contenant pas $\mathcal{C}$, déterminé par la tangente en A à $\mathcal{C}$. Si donc nous considérons un *secteur quelconque extérieur à $\mathcal{C}$ de sommet* A *de côtés non tangents à $\mathcal{C}$, il ne contient pas de pôles des* R_n. Un tel secteur s'appellera Δ'_1. Un secteur intérieur à $\mathcal{C}$ de sommet A, non tangent à C s'appellera Δ'.

Lorsque Z reste dans Δ' ou Δ'_1 il résulte d'une étude élémentaire de la convergence uniforme des $Z_n = R_n(Z)$ vers A (étude que l'on trouvera soit dans mon Mémoire du *J. de Jordan*, 1918, n^{os} 104 et suiv., soit dans Fatou, *Bull. Soc. math. de France*, 1919 et 1920, n^{os} 7, 8, 72, 73) que l'on a, *uniformément dans* Δ' ou Δ'_1

$$|R_n(Z) - 1| < \frac{k}{n} \qquad (k \text{ const.})$$

et, d'autre part, à cause du développement de Taylor de R(Z) au voisinage de A

$$Z_{n+1} - 1 = R(Z_n) - 1 = Z_n - 1 + a(Z_n - 1)^2 + \ldots \qquad (a \neq 0),$$

on a

$$|Z_{n+1} - Z_n < k' |Z_n - 1|^2,$$

k' étant une constante fixe, lorsque le rayon des secteurs Δ' ou Δ'_1 est supposé assez petit.

Il en résulte que, *quel que soit* Z *dans* Δ' ou Δ'_1, on aura

$$|R_n(Z) - R_{n+1}(Z)| < \frac{k''}{n^2} \qquad (k'' \text{ constante fixe}).$$

Par suite $\varphi(Z)$ est uniformément borné dans Δ' ou Δ'' et par suite la série (1) est, ici encore, uniformément convergente dans Δ' et Δ'' et *le théorème d'Abel s'étend aux domaines aboutissant en* A *non tangentiellement à $\mathcal{C}$.*

38. *Remarque.* — Des considérations analogues à celles qu'on a développées au paragraphe III du Chapitre I prouvent qu'ici E'_R est aussi un ensemble parfait discontinu dont le complémentaire se compose d'un arc γ de $\mathcal{C}$ unissant α, point double indifférent, à l'un des deux points doubles répulsifs qui l'encadrent sur $\mathcal{C}$ [ce point double μ est parfaitement déterminé par $R(z)$] et de tous les antécédents de l'arc γ. L'arc γ lui-même et tous ses antécédents appartiennent au domaine Δ_α de convergence des R_n vers α. Il en résulte que les secteurs de conver-

gence uniforme de $\Sigma_{a n} R_n$ peuvent, lorsque leur sommet est choisi en μ (ou α), contenir à l'intérieur la demi-droite tangente à l'arc $\mu\alpha$ (ou $\alpha\mu$), c'est-à-dire qu'ils peuvent contenir des arcs de $\mathcal{C}$ aboutissant en μ (ou α) et appartenant à l'arc $\alpha\mu$. Il en est de même aux antécédents de μ ou de α. Les secteurs relatifs aux autres points doubles situés sur $\mathcal{C}$ devront au contraire laisser à l'extérieur les deux demi-tangentes à $\mathcal{C}$ en leur sommet. (Il en est de même aux antécédents de ces points doubles.) *Bien entendu, avec l'hypothèse de la convergence de* Σa_n, posée au début de ce Chapitre.

II. — Substitutions singulières de première espèce.

α étant le point double indifférent,

$$R(\alpha) = \alpha, \qquad R'(\alpha) = 1, \qquad R''(\alpha) = 0, \qquad R'''(\alpha) \neq 0.$$

39. Dans le Mémoire des *Acta* cité au n° 34 nous n'avons pas étudié dans ce cas la convergence de la série (1) *dans* $\mathcal{C}$ *ou hors de* $\mathcal{C}$. *Nous allons d'abord compléter cette étude.*

Supposons, d'une manière générale, que α soit point double indifférent *distinct de l'origine et de l'infini* et annulant $R''(\alpha)$, $R'''(\alpha), \ldots$, $R^{(p)}(\alpha)$, avec $R^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ (*voir* Fatou, Mémoire cité n° 12). On aura alors l'expression asymptotique suivante de $Z_n = R_n(Z)$ *uniformément valable dans tout domaine intérieur au domaine* Δ_α *de convergence des* R_n *vers* α

$$Z_n - \alpha = w_n + \mu_2 w_n^2 + \ldots + \mu_p w_n^p + \mu_{p+1} w_n^{p+1} + \ldots,$$

avec

$$w_n = \left[nap + \frac{b}{a} \mathrm{L} n + \mathrm{C}(\mathrm{Z}) + \varepsilon_n\right]^{-\frac{1}{p}},$$

a et b étant des constantes, $\mathrm{C}(\mathrm{Z})$ une fonction holomorphe dans Δ_α, et $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^{1-\eta}}\right)$ dans tout domaine intérieur à Δ_α.

Un calcul facile prouve que l'on a alors

$$Z_n = \alpha + \frac{\mu'_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{\mu'_2}{n^{\frac{2}{p}}} + \ldots + \frac{\mu'_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right) \qquad (\mu'_1 \neq 0).$$

La quantité $o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)$ étant en $\frac{1}{n}$ infiniment petite d'ordre $< 1 + \frac{1}{p}$, uniformément à l'intérieur de Δ_α, les μ' étant des constantes.

Par suite, si, en un point ζ intérieur à Δ_α, la série $\Sigma a_n R_n(Z)$ converge, la série Σb_n converge, en posant

$$b_n = a_n R_n(\zeta).$$

Les $R_n(\zeta)$ tendant vers $\alpha \neq 0$ sont différents de zéro à partir d'un certain rang. On a alors

$$a_n = \frac{b_n}{R_n(\zeta)} = \frac{b_n}{\alpha}\left[1 + \frac{\lambda_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{\lambda_2}{n^{\frac{2}{p}}} + \ldots + \frac{\lambda_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right],$$

les λ étant des constantes.

Lorsque Σb_n converge, *il en est de même de* $\frac{b_n}{n^\nu}$ *quel que soit* ν *positif.*

En effet on a alors

$$b_n = B_n - B_{n-1} \qquad \text{avec } \lim_{n=\infty} B_n = B = \sum_0^\infty b_n.$$

Donc

$$\sum \frac{b_n}{n^\nu} = \sum \frac{B_n - B_{n-1}}{n^\nu} = \Sigma B_n\left[\frac{1}{n^\nu} - \frac{1}{(n+1)^\nu}\right] = \sum \frac{B_n}{n^\nu}\left[\frac{k_n}{n}\right],$$

la quantité k_n étant bornée quel que soit n, car

$$\frac{k_n}{n} = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\nu} = \frac{\nu}{n} + \ldots \qquad \left(\text{donc } \lim_{n=\infty} k_n = \nu\right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^{1+\nu}}$ étant convergente, il en sera de même de $\sum \frac{\beta_n k_n}{n^{1+\nu}}$ et par conséquent de $\sum \frac{b_n}{n^\nu}$.

Lorsque Σb_n converge, il en résulte donc que Σa_n *converge.*

Réciproquement, si Σa_n converge, il résulte de l'expression

$$a_n R_n = a_n\left(\alpha + \frac{\mu'_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \ldots + \frac{\mu'_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right]$$

et de la convergence de toute série $\sum \frac{a_n}{n^\nu} (\nu > 0)$ que $\Sigma a_n R_n$ *converge uniformément dans tout domaine intérieur à* Δ_α.

Σa_n convergente est donc toujours la condition néecssaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(z)$ dans Δ_α, domaine d'un point double indifférent et distinct de o *et de l'∞.*

40. A vrai dire, nous n'avons pas besoin ici, puisque $|\alpha|$ est toujours égal à 1, d'étudier la convergence de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ *lorsque* $\alpha = 0$; nous la ferons cependant pour compléter l'étude faite dans notre Mémoire des *Acta* précédemment cité. ζ étant un point distinct ([1]) d'un antécédent de α, les $\mathrm{R}_n(\zeta)$ sont tous $\neq 0$. Supposons que $\Sigma b_n = \Sigma a_n \mathrm{R}_n(\zeta)$ soit convergente.

On a ici, en reprenant

$$\mathrm{Z}_n = w_n + \mu_2 w_n^2 + \ldots,$$

$$w_n = \left[nap + \frac{b}{a} \mathrm{L}n + \mathrm{C}(\mathrm{Z}) + \varepsilon_n \right]^{-\frac{1}{p}},$$

les expressions asymptotiques

$$w_n^k = \theta_k n^{-\frac{k}{p}} \left[1 + \lambda_k \frac{\mathrm{L}n}{n} + \mu_k \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \right],$$

d'où l'on déduit pour Z_n

$$\mathrm{Z}_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \mathrm{H}\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{\mathrm{L}n}{n} \cdot \frac{\mathrm{H}_1\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n} \cdot \frac{\mathrm{H}_2\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)}{n^{\frac{1}{p}}} + \sigma\left(\frac{1}{n^{2+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right),$$

$\mathrm{H}, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ étant des fonctions d'un argument holomorphes au voisinage de l'origine avec $\mathrm{H}(0) \neq 0$; on a, dans ces conditions,

$$a_n = b_n \cdot \frac{1}{\mathrm{Z}_n} = n^{\frac{1}{p}} \cdot b_n \left[h\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{\mathrm{L}n}{n} h_1\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n} h_2\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \right],$$

les h étant, comme les H, holomorphes autour de l'origine, et $h(0) \neq 0$.

([1]) Il est bien connu que *α appartient ici à la frontière de Δ_α* (*voir* mon Mémoire sur l'itération). Il n'a donc aucun antécédent intérieur à Δ_α, *tout point ζ intérieur à Δ_α est donc distinct des antécédents de α.*

Il en résulte que

$$\frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} = b_n\left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \ldots + \frac{\beta_p}{n} + \frac{\mathrm{L}n}{n}\cdot\beta' + \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n}\cdot\beta'' + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right],$$

les β étant des constantes.

La série Σb_n étant convergente, il en sera de même de $\sum \frac{b_n}{n^\nu}$, pour $\nu > 0$ et aussi de $\sum b_n \frac{\mathrm{L}n}{n}$ comme on l'a prouvé au n° 12 du Mémoire des *Acta* cité précédemment. Évidemment $\sum b_n o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)$ converge absolument.

La convergence de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ en un point intérieur à Δ_α (quel qu'il soit) entraîne la convergence de $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$.

Réciproquement, si $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ converge, on a

$$a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) = \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}\left[\mathrm{H} + \frac{\mathrm{L}n}{n}\cdot\mathrm{H}_1 + \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n}\cdot\mathrm{H}_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right],$$

que l'on peut réduire à

$$a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z}) = \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}\left[\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \ldots + \frac{\gamma_p}{n} + \frac{\mathrm{L}n}{n}\cdot\gamma' + \frac{\mathrm{C}(\mathrm{Z})}{n}\cdot\gamma'' + \sigma\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right]$$

et la convergence de $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ entraîne, en vertu de ce qui précède, celle de tous les termes du type $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \frac{\gamma_k}{n^{\frac{k}{p}}}$, du type $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \frac{\mathrm{L}_n}{n}\gamma'$, et du type $\mathrm{C}(\mathrm{Z})\gamma'' \sum \frac{a_n}{n^{1+\frac{1}{p}}}$. Donc $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$ converge uniformément dans tout domaine intérieur à Δ_α et même dans tout domaine, intérieur ou non, où l'expression asymptotique précédente de Z_n est valable uniformément.

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n \mathrm{R}_n(\mathrm{Z})$

dans le domaine de convergence des R_n *vers* $\alpha = 0$, *où* $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$, $R''(0) = \ldots = R^{(p)}(0) = 0$, $R^{(p+1)}(0) \neq 0$, *est que* $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ *soit convergente.*

41. Reste à examiner le cas où $\alpha = \infty$.

On aurait en ramenant α à l'origine par $Z = \frac{1}{t}$, $R(Z) = \frac{1}{\rho(t)}$, $R_n = \frac{1}{\rho_n}$ l'expression asymptotique suivante pour les R_n (déduite de celle des ρ_n étudiée au n° 36):

$$Z_n = R_n(Z) = n^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{H + \frac{Ln}{n} H_1 + \frac{C(Z)}{n} H_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)},$$

où H, H_1, H_2 sont des fonctions de $n^{-\frac{1}{p}}$ holomorphes au voisinage de l'origine — avec $H(0) \neq 0$.

Supposons $\Sigma a_n R_n(Z)$ convergente en un point ζ intérieur à Δ_α; il n'est pas [1] alors antécédent de $\alpha = \infty$, c'est-à-dire qu'il n'est pas pôle des R_n et posons $a_n R_n(\zeta) = b_n$. Il viendra

$$a_n = \frac{b_n}{R_n(\zeta)} = \frac{b_n}{n^{\frac{1}{p}}}\left[H + \frac{Ln}{n} H_1 + \frac{C(Z)}{n} H_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right]$$

et, par conséquent,

$$n^{\frac{1}{p}} . a_n = b_n\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \ldots + \frac{\mu_p}{n} + \mu' \frac{Ln}{n} + \mu'' \frac{C(Z)}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right].$$

La convergence de Σb_n entraîne, en raisonnant comme au n° 40 celle de $\Sigma n^{\frac{1}{p}} a_n$ et réciproquement, la convergence de $\Sigma n^{\frac{1}{p}} a_n$ entraîne celle de $\Sigma a_n R_n(Z)$, uniformément dans tout domaine de Δ_α, ne contenant pas de pôles des R_n, et où l'expression asymptotique ci-dessus donnée pour Z_n est valable uniformément (en particulier dans tout domaine intérieur à Δ_α,

En définitive, *lorsque* $\alpha = \infty$ *est point double indifférent de* $[Z \mid R(Z)]$,

---

[1] En effet, comme au n° 39, α est ici point frontière de Δ_α, donc aucun antécédent de α n'est intérieur à Δ_α.

au voisinage duquel on a le développement de Laurent

$$R(Z) = Z + \frac{r_{p-1}}{Z^{p-1}} + \frac{r_p}{Z^p} + \ldots \qquad (r_{p-1} \neq 0 \text{ et } p \geqq 2),$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma\, a_n R_n(Z)$ *converge dans le domaine* Δ_∞ *est que* $\Sigma\, a_n\,.\, n^{\frac{1}{p}}$ *soit convergente.*

42. Il est maintenant aisé de prouver que le théorème d'Abel est, ici encore, susceptible d'extension.

D'abord, α étant en module égal à 1, la convergence de Σa_n (condition de convergence de $\Sigma a_n R_n$ dans $\mathcal{C}$) entraîne celle de $\Sigma a_n R_n(Z)$ en tous les points doubles de $[Z | R(Z)]$ situés sur $\mathcal{C}$ (et par suite en tous leurs antécédents). $A(Z = +1)$ est supposé l'un d'eux.

Premier cas : A *est point double répulsif, c'est-à-dire* $\alpha \neq 1$. — Opérons *comme au* n° 36; tout secteur Δ aboutissant en A non tangentiellement à $\mathcal{C}$ sera remplacé par un secteur Δ' (ou Δ'_1) engendré par les antécédents successifs d'un quadrilatère fondamental Δ'' (ou Δ''_1).

On voit d'abord que $\varphi(Z) = \Sigma | R_n(Z) - R_{n+1}(Z) |$ est *uniformément borné dans* Δ'' (ou Δ''_1). On a en effet, uniformément dans Δ'', et puisque ici l'entier p des n^{os} 39 à 41 *est égal à* 2,

$$R_n(Z) = \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[H + \frac{Ln}{n}\cdot H_1 + \frac{C(Z)}{n}\cdot H_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right],$$

H, H_1, H_2, fonctions holomorphes de $n^{-\frac{1}{2}}$, holomorphes autour de l'origine, avec $H(0) \neq 0$,

On peut réduire cette expression à

$$R_n(Z) = \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda_2}{n} + \lambda'.\frac{Ln}{n} + \lambda''\frac{C(Z)}{n} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\right)\right],$$

les λ étant des constantes et $o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\right)$ étant en module $< \frac{k}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ (k constante arbitrairement petite dès que n est assez grand) uniformément dans Δ'' (ou Δ''_1). Dans ces conditions, en observant que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{est d'ordre } \frac{3}{2} \text{ en } \frac{1}{n},$$

que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{est d'ordre 2 en } \frac{1}{n},$$

que

$$\frac{\mathrm{L}n}{n} - \frac{\mathrm{L}(n+1)}{n+1} \quad \text{est d'ordre supérieur à } 2 - \varepsilon \text{ en } \frac{1}{n} \quad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit}),$$

on voit que $|R_n - R_{n+1}|$ est, par rapport à $\frac{1}{n}$, un infiniment petit d'ordre $\frac{3}{2}$. Par suite $\Sigma |R_n - R_{n+1}|$ est uniformément convergente dans Δ'' (ou Δ''_1) et y représente une fonction $\varphi(Z)$ bornée. La démonstration s'achève comme à la fin du n° 36 et prouve la convergence uniforme de $\Sigma a_n R_n(Z)$ dans tout le secteur Δ' (ou Δ''_1) et par conséquent dans Δ (ou Δ_1), c'est-à-dire l'extension du théorème d'Abel.

Deuxième cas : A *est point double indifférent, c'est-à-dire* $\alpha = +1$. — Reportons-nous au n° 37. On voit d'abord comme au n° 37 qu'il n'y a aucun pôle des R_n dans le demi-plan ne contenant pas $\mathcal{C}$ déterminé par la tangente en A à $\mathcal{C}$. Nous considérerons un secteur quelconque de sommet A de côtés non tangents à $\mathcal{C}$. S'il est intérieur à $\mathcal{C}$ nous l'appelons Δ'; s'il est extérieur à $\mathcal{C}$, il ne contient pas de pôles des R_n et nous l'appelons Δ'_1. On verra en se reportant aux sources indiquées au n° 37, que l'on a ici, *uniformément dans* Δ' *ou* Δ'_1, $|R_n(Z) - 1| < \frac{k}{\sqrt{n}}$; d'autre part, le développement de $R(Z) - 1$ en puissances de $Z - 1$ donne ici

$$Z_{n+1} - 1 = R(Z_n) - 1 = Z_n - 1 + a(Z_n - 1)^3 + \ldots \qquad (a \neq 0).$$

On a donc

$$|R_{n+1} - R_n| < K' |Z_n - 1)^3,$$

k' constante fixe, dès que $|Z_n - 1|$ est assez petit on a donc alors, quel que soit Z dans Δ' ou Δ'_1 (supposés de rayon assez petit),

$$|R_{n+1} - R_n| < \frac{k''}{n_3}.$$

Il en résulte que $\varphi(Z)$ est majoré dans Δ' ou Δ'_1 par la série convergente $\sum \frac{k''}{n^{\frac{3}{2}}}$; par conséquent $\varphi(Z)$ est borné et la série (1) est uniformément convergente dans Δ' ou Δ'_1, c'est-à-dire qu'ici encore l'extension du théorème d'Abel à la série (1) est assuré. La propriété s'étend à tous les antécédents de A, lesquels sont, ici, partout denses sur $\mathcal{C}$, puisque E'_R se confond ici avec $\mathcal{C}$, comme pour les substitutions régulières de première espèce.