Annales scientifiques de l'É.N.S.

PAUL VINCENSINI

Sur certaines congruences normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 397-438

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__397_0>

SUR

CERTAINES CONGRUENCES NORMALES

DANS

LEURS RELATIONS AVEC LES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE

ET

LEURS TRANSFORMATIONS

PAR M. P. VINCENSINI

I. — Formules fondamentales.

L'objet principal du présent mémoire, est l'étude de certaines congruences normales, dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et les transformations de ces dernières.

Quelques-unes de ces relations ont déjà été présentées à l'Académie des Sciences sous forme de courtes notes [1], ou ont été signalées par L. Bianchi dans un mémoire des *Annales de l'École Normale : Sur les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une sphère*, t. XIX, 1902, p. 325.

Nous avons pensé qu'il convenait de les étudier d'une façon plus approfondie.

La définition qui nous a semblé la plus commode pour l'objet que nous avions en vue est celle qui consiste à prendre pour surface de départ de la congruence le lieu des projections orthogonales d'un point fixe O de l'espace sur ses différents rayons, ces derniers étant définis par leurs cosinus directeurs relativement à un système d'axes fixes $Oxyz$.

L'équation définissant les foyers se présente alors sous une forme invariante très simple, dont on peut déduire presque sans calculs les

[1] *Comptes rendus*, t. 190, p. 155 et 1217; t. 191, p. 638.

équations aux dérivées partielles d'un grand nombre de congruences géométriquement intéressantes.

Soient u et v les deux paramètres fixant un rayon quelconque d'une congruence rectiligne normale; X, Y, Z, fonctions de u et de v, les cosinus directeurs du rayon.

Les trois fonctions X, Y, Z définissent la représentation sphérique de la congruence. L'élément linéaire de cette représentation sphérique, qui dans les applications ultérieures sera supposé donné, est

$$ds^2 = \mathrm{S}\, d\mathrm{X}^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2.$$

La surface de départ de la congruence (lieu des projections de l'origine sur ses différents rayons) a des équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X}), \\ y = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Y}), \\ z = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) \end{cases} \qquad \text{(Weingartein).}$$

M est une fonction de u et v, et Δ le paramètre différentiel mixte du premier ordre relatif au ds^2 de la représentation sphérique.

L'ensemble constitué par toutes les congruences rectilignes normales correspond au différentes fonctions $\mathrm{M}((u, v)$.

La fonction $\mathrm{M}(u, v)$ [définie à une constante additive près] représente, comme on sait, la distance algébrique de l'origine O des coordonnées, au plan tangent [normal au rayon u, v] à l'une quelconque des surfaces orthogonales aux rayons de la congruence correspondante.

La distance du point O au rayon $\mathrm{D}(u, v)$ de la congruence définie par $\mathrm{M}(u, v)$ est susceptible elle aussi d'une expression invariante digne d'intérêt.

Si I est la projection de O sur D, on a :

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{S}[\Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X})]^2.$$

En remplaçant les paramètres différentiels par leurs expressions, on obtient :

$$(2)\qquad \overline{\mathrm{OI}}^2 = \Delta_1 \mathrm{M}, \qquad \mathrm{OI} = \sqrt{\Delta_1 \mathrm{M}};$$

$\Delta_1 \mathrm{M}$ étant le paramètre différentiel du premier ordre de M relatif au ds^2 de la représentation sphérique.

Posant, conformément à l'habitude,

$$(3)\qquad e = \mathbf{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad f = f' = \mathbf{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad g = \mathbf{S}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},$$

l'équation aux abscisses des foyers situés sur le rayon $D(u, v)$, comptées à partir du point I correspondant, est

$$(4)\qquad (EG - F^2)\rho^2 + [Eg - F(f + f') + Ge]\rho + eg - ff' = 0.$$

Calculons e, g, $f = f'$.

En tenant compte des expressions (1) de x, y, z, et de celles des dérivées des paramètres différentiels mixtes qui, en posant

$$\alpha = \frac{GM_{11} - FM_{12}}{EG - F^2}, \qquad \beta = \frac{EM_{12} - FM_{11}}{EG - F^2},$$

$$\gamma = \frac{GM_{21} - FM_{22}}{EG - F^2}, \qquad \delta = \frac{EM_{22} - FM_{21}}{EG - F^2},$$

$$\left(M_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 M}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \sum_i \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_i}; \qquad x_1 = u, x_2 = v\right),$$

sont

$$\frac{\partial \Delta(M, X)}{\partial u} = \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}X,$$

$$\frac{\partial \Delta(M, X)}{\partial v} = \gamma\frac{\partial X}{\partial u} + \delta\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v}X,$$

avec les analogues en Y et Z, on trouve sans difficulté

$$e = \alpha E + \beta F,$$

$$f = f' = \gamma E + \delta F = \alpha F + \beta G,$$

$$g = \gamma F + \delta G.$$

Portons ces valeurs de e, f, f', g dans l'équation (4). Celle-ci devient après division par $EG - F^2$

$$\rho^2 + (\alpha + \delta)\rho + (\alpha\delta = \beta\gamma) = 0,$$

soit en observant que

$$\alpha + \delta = \Delta_2 M, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta_{22} M:$$

$$(5)\qquad \rho^2 + \Delta_2 M \rho + \Delta_{22} M = 0.$$

L'équation des développables est, en tenant compte de ce que $f = f'$

$$(6) \qquad (Ef' - Fe)\,du^2 + (Eg - Ge)\,du\,dv + (Fg - Gf)\,dv^2 = 0.$$

Si la représentation sphérique est l'une de celles qu'on obtient en rapportant la sphère à ses génératrices rectilignes, (6) s'écrit

$$e\,du^2 - g\,dv^2 = 0,$$

soit

$$\beta\,du^2 - \gamma\,dv^2 = 0;$$

ou, en tenant compte des valeurs de β, γ,

$$(7) \qquad M_{11}\,du^2 - M_{22}\,dv^2 = 0.$$

Si la sphère est rapportée à un système orthogonal quelconque, (6) est à remplacer par

$$(8) \qquad \beta\,du^2 + (\delta - \alpha)\,du\,dv - \gamma\,dv^2 = 0.$$

II. — Équations aux dérivées partielles de certaines congruences rectilignes normales.

L'équation (5) donne immédiatement, sous forme invariante, les équations aux dérivées partielles des congruences pour lesquelles il existe une relation déterminée entre les distances des foyers aux projections d'un point fixe de l'espace sur les différents rayons.

Si la relation est de la forme

$$F[(\rho_1 + \rho_2), \rho_1\rho_2] = 0,$$

l'équation définissant les congruences est

$$F(-\Delta_2 M, \Delta_{22} M) = 0.$$

Congruences normales à enveloppée moyenne point (*congruences d'Appell*). — Si le point par lequel passent les plans perpendiculaires aux segments focaux en leurs milieux est l'origine O des coordonnées, la condition pour qu'une congruence appartienne au type indiqué, qui est $\rho_1 + \rho_2 = 0$, s'écrit

$$(9) \qquad \Delta_2 M = 0.$$

C'est là l'équation, d'ailleurs bien connue, des congruences d'Appell.

La distance du point central I d'un rayon quelconque, aux deux foyers, est

$$d = \sqrt{-\Delta_{22} M}.$$

Congruences normales à enveloppée moyenne sphérique. — Pour ces congruences

$$\rho_1 + \rho_2 = K \qquad \left[\left| \frac{K}{2} \right| \text{ étant le rayon de la sphère} \right],$$

leur équation est

$$(10) \qquad \Delta_2 M + K = 0.$$

Congruences normales à surface moyenne plane. — Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale au plan moyen, et si d désigne la distance du plan à l'origine, l'équation de ces congruences est

$$\Delta_2 M\, S\alpha X - 2 S\alpha\, \Delta(M, X) + 2d = 0.$$

Si le plan moyen est le plan xOy, on a

$$(11) \qquad Z \Delta_2 M - 2\Delta(M, Z) = 0.$$

Congruences normales à surface moyenne sphérique. — Si J est le milieu du segment focal sur un rayon quelconque, l'équation de ces congruences est

$$\overline{OI}^2 + \overline{OJ}^2 = K^2 \qquad (K = \text{rayon de la surface moyenne}).$$

En observant que $\overline{IJ}^2 = \dfrac{\overline{\Delta_2 M}^2}{4}$, et en se rappelant (2), que $\overline{OI}^2 = \Delta_1 M$, on obtient

$$(12) \qquad 4\Delta_1 M + \overline{\Delta_2 M}^2 = 4K^2.$$

Congruences normales telles que la projection d'un point fixe O sur les différents rayons partage les segments focaux en rapport constant. — On obtient l'équation de ces congruences en écrivant que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const.}$$

Un calcul simple donne :

$$\frac{\Delta_{22} M}{\overline{\Delta_2 M}^2} = \text{const.} \tag{13}$$

Congruences pseudosphériques normales. — Elles sont définies par la relation

$$\rho_1 - \rho_2 = K.$$

L'équation correspondante est

$$\overline{\Delta_2 M}^2 - 4\Delta_{22} M = K^2. \tag{14}$$

Congruences normales telles que deux foyers associés soient conjugués par rapport à une sphère fixe. — Soit K le rayon de la sphère (Σ), de centre O. On obtiendra l'équation des congruences indiquées, en exprimant que les sphères ayant pour diamètres les différents segments focaux sont orthogonales à (Σ).

Si P et Q sont les points où le rayon D d'une congruence répondant à la question coupe (Σ), la condition s'exprime par la relation

$$\overline{IP}^2 = \Delta_{22} M,$$

I étant, comme on l'a dit plus haut, la projection de O sur D.

La relation peut s'écrire :

$$K^2 - \overline{OI}^2 = \Delta_{22} M,$$

soit, en tenant compte de ce que $\overline{OI}^2 = \Delta_1 M$:

$$\Delta_{22} M + \Delta_1 M = K^2. \tag{15}$$

Si l'on change K en iK, on obtient les congruences normales telles que les sphères décrites sur les différents segments focaux comme diamètres, coupent (Σ) suivant un grand cercle.

L'équation correspondante est

$$\Delta_{22} M + \Delta_1 M = -K^2.$$

Congruences normales telles que les segments focaux soient vus d'un *point fixe* O *sous un angle droit*. — Leur équation :

$$\Delta_{22} M + \Delta_1 M = 0, \tag{16}$$

s'obtient en faisant $K = 0$ dans (15).

La plupart des types de congruences dont il vient d'être question, sont liés à des questions intéressantes de géométrie.

Nous avons montré [1] comment la connaissance des congruences (9) entraîne celle de *toutes* les congruences normales admettant une enveloppée moyenne donnée *quelconque*, quand on en connaît *une*.

Les congruences (10) interviennent, comme l'a établi, G. Darboux [2], dans la recherche des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

(11) et (14) sont respectivement liées aux surfaces minima [3], et aux surfaces pseudosphériques.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons plus particulièrement des congruences (9), (15), (16).

Les congruences (9) sont liées aux surfaces minima; les deux autres sont en relation intime avec les surfaces à courbure totale constante.

III. — Congruences d'Appell et surfaces minima.

Prenons comme représentation sphérique d'une congruence d'Appell :

$$X = \frac{u+v}{uv+1}, \qquad Y = \frac{1}{i}\,\frac{u-v}{uv+1}, \qquad Z = \frac{uv-1}{uv+1};$$

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(uv+1)^2}.$$

Calculons les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque de la sur-

---

(1) *Bulletin des sciences mathématiques*, février 1929.

(2) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 329.

(3) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 91. — *Voir* aussi notre mémoire des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 1927, § 22.

face de départ, qui est ici la surface moyenne, en utilisant les équations (1) du paragraphe I. On trouve sans difficulté :

$$x = \Delta(M, X) = \frac{1}{2}(1 - u^2)\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{1}{2}(1 - v^2)\frac{\partial M}{\partial v},$$
$$y = \Delta(M, Y) = \frac{i}{2}(1 + u^2)\frac{\partial M}{\partial u} - \frac{i}{2}(1 + v^2)\frac{\partial M}{\partial v},$$
$$z = \Delta(M, Z) = u\frac{\partial M}{\partial u} + v\frac{\partial M}{\partial v}.$$

En tenant compte de ce que M est une solution quelconque de l'équation

$$\Delta_2 M = 0,$$

qui s'écrit ici

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

et en prenant M sous la forme

$$M = \int \mathcal{F}(u)\, du + \int \Phi(v)\, dv,$$

on voit que la surface moyenne de la congruence d'Appell la plus générale est définie par les équations

$$(17)\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - u^2)\mathcal{F}(u) + \frac{i}{2}(1 - v^2)\Phi(v), \\ y = \frac{i}{2}(1 + u^2)\mathcal{F}(u) - \frac{i}{2}(1 + v^2)\Phi(v), \\ z = u\mathcal{F}(u) + v\Phi(v), \end{cases}$$

dans lesquelles $\mathcal{F}$ et Φ sont des fonctions arbitrairement de u et de v respectivement.

Pour avoir des surfaces réelles on doit prendre u et v, $\mathcal{F}$ et Φ, imaginaires conjuguées.

Si τ_0 est l'imaginaire conjuguée de τ, la représentation sphérique est définie par les équations

$$(18)\qquad X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \qquad Y = \frac{1}{i}\,\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \qquad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1},$$

et l'on a les congruences réelles d'Appell, par les formules

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}(1-\tau^2)\,\mathcal{F}(\tau), \\ y = \mathcal{R}\,i(1+\tau^2)\,\mathcal{F}(\tau), \\ z = \mathcal{R}\,2\tau\,\mathcal{F}(\tau), \end{cases}$$

le symbole $\mathcal{R}$ signifiant, comme à l'ordinaire, qu'on ne prend que les parties réelles des fonctions devant lesquelles il est placé.

Les formules (19) sont à rapprocher des suivantes :

$$(20)\qquad \begin{cases} \xi = \mathcal{R}\displaystyle\int (1-\tau^2)\,\mathcal{F}(\tau)\,d\tau, \\ \eta = \mathcal{R}\displaystyle\int i(1+\tau^2)\,\mathcal{F}(\tau)\,d\tau, \\ \zeta = \mathcal{R}\displaystyle\int 2\tau\,\mathcal{F}(\tau)\,d\tau; \end{cases}$$

qui définissent les *surfaces minima* réelles.

Les congruences d'Appell et les surfaces minima, réelles, s'assemblent donc par couples définis par les formules (19), (20).

Avec les variables u et v du début, on peut écrire les formules suivantes, définissant une surface minima et une congruence d'Appell associées :

$$(19')\qquad \begin{cases} x = U' + V', \\ y = U'_1 + V'_1, \\ z = U'_2 + V'_2, \end{cases}$$

$$(20')\qquad \begin{cases} \xi = U + V, \\ \eta = U_1 + V_1, \\ \zeta = U_2 + V_2, \end{cases}$$

les U et V étant des fonctions respectives de u et de v, et leurs dérivées U′, V′ vérifiant les relations

$$U'^2 + U_1'^2 + U_2'^2 = 0, \qquad V'^2 + V_1'^2 + V_2'^2 = 0.$$

On obtient la congruence d'Appell la plus générale, en menant par chaque point de la surface (19′) la parallèle à la normale au point correspondant de la surface minima (20′).

Les équations (19′) montrent que les surfaces moyennes des congruences d'Appell sont des surfaces de translation (à réseau imaginaire), et conduisent à la construction géométrique suivante de ces congruences :

Sur le cône isotrope de sommet O, *traçons deux courbes quelconques* (u) *et* (v) *engendrées par les points* u *et* v. *Soit* I *le milieu du segment* (uv). *Quand* u *et* v *varient* I *décrit la surface moyenne d'une congruence d'Appell relative au point* O. *La congruence elle-même s'obtient en menant par chaque point* I *la perpendiculaire au plan* Ouv *correspondant.*

Les congruences réelles s'obtiennent avec (u) et (v), u et v, imaginaires conjugués.

La construction précédente appelle les remarques suivantes. Remplaçons les deux courbes (u) et (v) par leurs homothétiques dans les homothéties de centre O et de rapports $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$. (u) et (v) restent sur le cône isotrope, et le milieu du segment (uv) tourne, dans le plan Ouv, de l'angle α autour de O. D'où ce premier résultat établi autrement dans un autre travail (1) :

Étant donnée une congruence d'Appell relative au point O, *si l'on fait tourner chacun de ses rayons d'un angle constant* α *autour de sa parallèle issue de* O, *on la transforme en une autre congruence d'Appell.*

Nous dirons *associées* toutes les congruences qu'on obtient en faisant varier α.

Aux points I correspondants des surfaces moyennes de deux congruences d'Appell associées, les courbes de translation ont leurs tangentes parallèles ; *les plans tangents sont donc parallèles.*

Le choix des deux rapports d'homothétie montre en outre que, sur les deux surfaces moyennes, deux éléments d'aire homologues sont équivalents [les courbures sont les mêmes].

On peut donc énoncer les propriétés suivantes des surfaces moyennes (associées) des congruences d'Appell déduites d'une congruence donnée par la variation arbitraire de α :

Les points homologues sont distribués sur des circonférences de centre O.
Les plans tangents en ces points sont parallèles.
Les éléments d'aire homologues sont égaux.

Ces propriétés sont à rapprocher de celles des familles de surfaces

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929.

minima *associées*. D'ailleurs, on passe de la surface moyenne de la congruence d'Appell (19) à toutes ses associées, en remplaçant $\mathcal{F}(\tau)$ par $\mathcal{F}(\tau)e^{i\alpha}$; et la même substitution donne, comme on sait, la famille des surfaces minima associées à la surface (20).

Ayant égard à la remarque relative à l'égalité des aires, envisageons deux éléments d'aire homologues entourant deux points homologues A et A′ sur deux surfaces moyennes associées, et les pinceaux infiniment déliés déterminés par leurs contours.

Désignons par Δ, Δ', les deux rayons homologues (parallèles) passant par A et A′. Les normales en A et A′ aux surfaces moyennes associées sont parallèles. Soit θ l'angle que ces droites font avec Δ, Δ'. Les sections des deux pinceaux associés par les plans perpendiculaires en A et A′, ont même aire :

$$d\sigma = da \cos\theta,$$

da désignant l'aire des deux contours définissant les deux pinceaux.

Les droites issues du centre d'une sphère de rayon 1 parallèles aux rayons des deux pinceaux ci-dessus, déterminent sur la sphère un contour infiniment petit limitant une certaine aire $d\varepsilon$.

Soient F et F_1 les deux foyers situés sur Δ, F′ et F'_1 les deux foyers situés sur Δ' (F et F_1, F′ et F'_1 sont symétriques par rapport à A et A′ respectivement). On sait que l'on a [1] :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = AF \times AF' = \overline{AF}^2.$$

De même

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \overline{A'F'}^2,$$

Il en résulte :

$$AF = A'F', \qquad FF' = F_1F'_1.$$

On peut donc énoncer ce résultat:

Quand on passe d'une congruence d'Appell à toutes ses associées, la distance des deux foyers situés sur un même rayon reste invariable.

---

[1] *Voir* E. Vessiot, *Leçons de géométrie supérieure*, p. 156.

Si l'on a égard aux *surfaces d'Appell associées* (normales aux rayons des congruences d'Appell associées), on peut dire :

En deux points homologues (plans tangents parallèles) de deux surfaces d'Appell associées, la différence des rayons de courbure est la même.

Les surfaces minima associées jouissent, comme on sait, de cette propriété :

Quand on passe d'une surface minima (S) à son associée (S_α), en chaque point de (S_α) les lignes de courbure font l'angle constant $\frac{\alpha}{2}$ avec les lignes de courbure au point correspondant de (S).

Un calcul très simple, que nous omettons, conduit au résultat analogue suivant que nous nous bornons à énoncer :

Si l'on considère deux surfaces d'Appell associées (Σ) *et* (Σ_α), *les lignes de courbure de* (Σ_α) *font l'angle constant* $\frac{\alpha}{2}$ *avec les lignes de courbure aux points correspondants de* (Σ).

Il y a lieu de signaler un autre trait commun aux surfaces minima et aux surfaces d'Appell associées, que nous nous bornons également à énoncer.

On sait que dans une famille de surfaces minima associées, les points homologues sont distribués sur ∞^2 ellipses concentriques. Dans une famille de surfaces d'Appell associées, les surfaces correspondantes ne sont définies qu'au parallélisme près. Il est toutefois possible, en choisissant convenablement les surfaces (Σ_α) correspondantes, d'obtenir une suite ∞^1 de surfaces partageant avec les surfaces minima associées la propriété *d'avoir leurs points homologues disposés sur ∞^2 ellipses concentriques*.

Le centre commun est le *point moyen*, et quatre surfaces (Σ_α) quelconques déterminent sur les ∞^2 ellipses associées des points en rapport anharmonique constant.

IV. — Congruences normales, restant normales après une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère.

Envisageons l'une quelconque des congruences normales ($\mathcal{C}'$), qu'une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère (Σ) de centre O laisse normales.

Soient D l'un quelconque de ses rayons, F et F', P et P' les foyers et les plans focaux correspondants. Désignons par $(\mathcal{C}')$ la congruence transformée de $(\mathcal{C})$ et par Δ la droite conjuguée de D.

Soient, en outre, π et π' les plans polaires de F et F'; φ et φ' les pôles de P et P'. φ et φ' sont les foyers de $(\mathcal{C}')$ situés sur Δ, π et π' les plans focaux correspondants.

Pour que $(\mathcal{C}')$ soit normale, il faut et il suffit que π et π' soient rectangulaires; c'est-à-dire que le segment FF' soit vu de O sous un angle droit.

L'équation générale des congruences $(\mathcal{C})$ est donc l'équation (16) du paragraphe II :

$$\Delta_{22}M + \Delta_1 M = 0. \tag{16}$$

Les congruences $(\mathcal{C})$ jouissent de propriétés intéressantes. Montrons d'abord qu'elles sont *cycliques* (formées par les axes d'un système cyclique).

Soit D' l'homothétique de D dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. La congruence (D') est normale, comme $(\mathcal{C})$. L'inverse de D', dans l'inversion de pôle O et de puissance R^2 [R étant le rayon de (Σ)], est un cercle (σ) passant par O et ayant pour axe la droite Δ conjuguée de D.

L'ensemble des cercles (σ) correspondant aux différents rayons D' constitue un système cyclique [inverse de la congruence (D')]. La congruence $(\mathcal{C}')$ des droites Δ, transformée de $(\mathcal{C})$, est cyclique, et il en est de même de $(\mathcal{C})$ conformément au résultat annoncé.

Ainsi :

Toute congruence $(\mathcal{C})$ de l'espèce étudiée est cyclique, le système cyclique associé étant formé de cercles passant par le point fixe O.

Il est clair d'ailleurs que, réciproquement, toute congruence cyclique normale dont les cercles passent par un point fixe appartient au type indiqué.

Ceci donne une nouvelle définition aux congruences $(\mathcal{C})$ qui nous occupent, établissant un lien étroit entre les congruences $(\mathcal{C})$ et les surfaces pseudosphériques.

On sait que les congruences rectilignes cycliques et normales sont celles qui admettent, pour image sphérique de leurs développables, l'image des lignes de courbure des surfaces pseudosphériques.

A toute congruence $(\mathcal{C})$, il est donc possible d'associer une surface pseudosphérique (définie à une homothétie près), admettant pour image sphérique de ses lignes de courbure l'image des développables de $(\mathcal{C})$.

Une question se pose dès lors :

Obtiendra-t-on TOUTES *les surfaces pseudosphériques en envisageant toutes les congruences* $(\mathcal{C})$?

V. — Les congruences $(\mathcal{C})$ et les surfaces pseudosphériques.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de répondre à la question posée à la fin du précédent, en établissant la proposition suivante :

Étant donnée a priori une surface pseudosphérique, il existe ∞^1 *congruences de l'espèce* $(\mathcal{C})$ *du paragraphe précédent, admettant pour images sphériques de leurs développables les images des lignes de courbure de la surface envisagée.*

Soit (Σ) une surface pseudosphérique de rayon 1, rapportée à ses lignes de courbure ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$). L'élément linéaire de la représentation sphérique de (Σ) a la forme

$$ds^2 = \sin^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2, \tag{21}$$

θ étant une solution de l'équation bien connue :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \sin\theta\cos\theta. \tag{22}$$

Donnons-nous le ds^2 de la représentation sphérique d'une congruence $(\mathcal{C})$ sous la forme (21), et définissons $(\mathcal{C})$, conformément au paragraphe I, par les équations

$$x = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X}), \qquad y = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Y}), \qquad z = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Z}),$$

M étant une solution de l'équation

$$\Delta_{22} M + \Delta_1 M = 0, \tag{16}$$

les paramètres différentiels étant calculés par rapport à (21).

Il s'agit de voir s'il est possible de déterminer la solution M de (16), de façon que les développables de la congruence ($\mathcal{C}$) correspondante aient pour images sphériques les courbes $u =$ const., $v =$ const. [images sphériques des lignes de courbure de (Σ)].

L'équation des développables de ($\mathcal{C}$) est l'équation (8) du paragraphe I :

$$\beta\, du^2 + (\delta - \alpha)\, du\, dv - \gamma\, dv^2. \tag{8}$$

On devra donc avoir :

$$\beta = \gamma = 0.$$

Si l'on tient compte des expressions de β et de γ, données au paragraphe I, on constate que les deux équations ci-dessus se réduisent à une seule :

$$M_{12} = 0. \tag{23}$$

Pour que la détermination de ($\mathcal{C}$) soit possible, il faut et il suffit que les équations (23) et (16) aient une (ou plusieurs) solutions communes, lorsqu'on y remplace θ par une solution quelconque de l'équation (22).

La question est ainsi ramenée à la suivante :

Le système

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_{22} M + \Delta_1 M = 0,\\ &M_{12} = 0\end{aligned}\right. \tag{24}$$

est-il compatible moyennant (22) ?

C'est ce que l'on peut vérifier analytiquement. On constaterait que la condition de compatibilité du système (24) est précisément (22), et l'on verrait en outre que si θ satisfait à (22), les deux équations (24) ont en commun, non pas une mais *une infinité* de solutions M, dépendant d'une constante arbitraire, en plus bien entendu de celle qui rentre dans M de façon purement additive.

A la méthode analytique, nous en préférerons une autre, géométrique, présentant l'avantage de donner une construction facile à se représenter, des ∞^1 congruences ($\mathcal{C}$) attachées à une surface pseudosphérique quelconque.

La méthode que nous allons exposer, rattache la question à une autre que nous avons étudiée dans un mémoire antérieur [1], sur quelques points duquel nous avons besoin de revenir.

Dans le mémoire cité, nous avons montré qu'à toute surface applicable sur une surface de révolution, on peut attacher ∞^1 congruences rectilignes normales (N), formées de droites perpendiculaires aux plans tangents à la surface, restant normales lorsque la surface se déforme en entraînant ses différents plans tangents et les rayons correspondants de (N) supposés invariablement liés à ces plans tangents.

Les seules surfaces auxquelles on puisse attacher des congruences de l'espèce (N) sont d'ailleurs les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, et pour les surfaces à *courbure totale constante* le nombre des congruences (N) associées est ∞^3.

La construction des congruences (N) attachées à une surface déterminée (Σ) est fort simple.

Envisageons sur la surface le système formé par les courbes transformées des méridiens ($v=$ const.) et leurs trajectoires orthogonales ($u=$ const.).

L'élément linéaire a la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + G\,dv^2 \qquad [G = f(u)].$$

Sur la tangente à la transformée du méridien, passant par le point M de la surface, portons, à partir de M, une longueur $\overline{MI} = \lambda\sqrt{G}$ ($\lambda =$ const.). Élevons en I la perpendiculaire au plan tangent en M à (Σ). L'ensemble des droites ainsi obtenues constitue l'une des congruences (N) attachées à (Σ), arbitrairement déformables avec (Σ). Toutes les autres congruences (N) relatives à (Σ) s'obtiennent en faisant varier λ. Enfin, les développables des différentes congruences obtenues se correspondent, et correspondent toutes aux lignes de courbure de (Σ).

Ces résultats étant rappelés, soit (Σ) une surface pseudosphérique de courbure -1. Supposons connues ses géodésiques. En associant aux géodésiques passant par un même point à l'infini leurs trajectoires

---

(1) *Sur la déformation des systèmes cycliques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XLVII, 1930, p. 381.

orthogonales, on peut mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2.$$

La mise de l'élément linéaire sous cette forme (essentielle pour la suite) peut, notons-le dès à présent, être effectuée d'une infinité de façons. A chaque point à l'infini sur (Σ) en correspond une.

Sur la tangente à chaque géodésique ($v =$ const.), portons à partir du point de contact M une longueur $\overline{\mathrm{MI}} = e^u$ (ou λe^u), puis élevons en I la perpendiculaire au plan tangent en M.

Nous obtenons ainsi une congruence normale (N) de l'espèce précédemment indiquée.

Cela étant, menons par l'origine O des coordonnées le vecteur (OJ) équipollent à (MI), et par J la parallèle au rayon correspondant N de (N). Nous obtenons ainsi une droite Δ. Quand M varie sur (Σ), l'ensemble des droites Δ constitue une congruence (Δ). Je dis que (Δ) est une congruence appartenant à la classe $(\mathcal{C})$ du paragraphe IV [normale et cyclique, les cercles associés passant par O], et que l'image sphérique de ses développables est celle des lignes de courbure de (Σ).

Le fait que (Δ) est normale et que ses développables ont pour image sphérique l'image des lignes de courbure de (Σ), résulte immédiatement de ce que c'est la *différence géométrique* (¹) des deux congruences normales suivantes : congruence (N) et congruence des normales à (Σ), sur lesquelles, comme nous l'avons rappelé plus haut, les développables se correspondent.

Pour montrer que (Δ) appartient à la classe $(\mathcal{C})$, il suffit de montrer que sa polaire réciproque par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1 est elle-même normale.

Cette vérification se fait sans difficulté.

Désignons par δ la droite conjuguée de Δ. Soit K la projection de O sur δ. OK a pour longueur

$$\mathrm{OK} = \frac{1}{\mathrm{OJ}}.$$

(¹) *Voir* par exemple : *Les congruences de normales dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenne donnée* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929).

Les cosinus directeurs de δ sont visiblement ceux de la tangente en M à la courbe [$u=$ const.] de (Σ); nous les désignerons par X_2, Y_2, Z_2; X_1, Y_1, Z_1 étant les cosinus directeurs de la tangente à la géodésique [$v=$ const.], et X_3, Y_3, Z_3 ceux de la normale en M.

Les cosinus directeurs de OK sont X_1, Y_1, Z_1, et l'on a pour les coordonnées du point K :

$$\xi = \frac{X_1}{OJ} = e^{-u} X_1,$$

$$\eta = \frac{Y_1}{OJ} = e^{-u} Y_1,$$

$$\zeta = \frac{Z_1}{OJ} = e^{-u} Z_1.$$

La condition pour que la congruence (δ) soit normale est comme on sait :

$$\mathbf{S}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial X_2}{\partial v} = \mathbf{S}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}.$$

Développons cette condition. Elle s'écrit après division par e^{-u} :

$$(25) \qquad \mathbf{S}\left(X_1 + \frac{\partial X_1}{\partial u}\right)\frac{\partial X_2}{\partial v} = \mathbf{S}\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}.$$

Si D, D′, D″ sont les coefficients de la deuxième forme de (Σ) :

$$-\,\mathrm{S}\, dX_3\, dx = \mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2,$$

et si l'on prend l'élément linéaire sous la forme orthogonale

$$d\sigma^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2,$$

on sait que l'on a le groupe de formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}}X_3, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}}X_2; \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}}X_3, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} - X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}}X_2; \end{aligned} \right.$$

avec les analogues en Y et Z.

Dans le cas actuel,

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = DX_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = D'e^{-u}X_3,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = e^u X_2 + D'X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -e^u X_1 + D''e^{-u}X_3.$$

En tenant compte de ces relations dans (25), celle-ci devient, après un calcul facile,

$$\frac{DD'' - D'^2}{e^{2u}} = -1.$$

On reconnaît au premier membre l'expression de la courbure totale de (Σ). Celle-ci étant égale à -1, la condition (25) est satisfaite et (δ) est une congruence de normales.

La polaire réciproque (Δ) de (δ) est bien une congruence de l'espèce $(\mathcal{C})$. Ainsi :

A toute surface pseudosphérique (Σ), *correspond, pour une mise de l'élément linéaire sous la forme*

$$d\sigma^2 = du^2 + e^{2u}dv^2,$$

une congruence $(\mathcal{C})$ *admettant pour image sphérique de ses développables l'image des lignes de courbure de* (Σ).

En envisageant les ∞^1 points à l'infini sur (Σ), on voit qu'à une surface déterminée (Σ), on peut faire correspondre une infinité (dépendant d'une constante arbitraire) de congruences $(\mathcal{C})$, comme on l'avait annoncé au début de ce paragraphe.

Il est donc établi que les équations (24) ont une infinité de solutions communes si θ est solution de (22).

A cette conséquence analytique de ce qui précède, il convient d'en ajouter d'autres, d'ordre purement géométrique.

1° Le problème de la détermination des surfaces pseudosphériques est au fond identique à celui de la détermination des congruences $(\mathcal{C})$.

2° Si, comme on l'a supposé, on connaît les géodésiques sur (Σ), la congruence (Δ) est connue. Il en est de même de sa réciproque (δ) laquelle appartient aussi à la classe $(\mathcal{C})$. La représentation sphérique de (δ) se déduit de celle de (Δ). L'image sphérique des développables de (δ) étant connue, on en déduit une autre surface pseudosphérique (Σ_1) définie à une homothétie et une translation près par la connaissance de la représentation sphérique de ses lignes de courbure.

(Σ) et (Σ_1) se correspondent évidemment par orthogonalité des éléments superficiels homologues. Les lignes de courbure de (Σ) et de (Σ_1) correspondant respectivement aux développables de (Δ) et de (δ), et ces dernières se correspondant (propriété de la transformation par polaires réciproques), on voit que la correspondance entre (Σ) et (Σ_1) conserve les lignes de courbure.

(Σ) et (Σ_1) sont deux transformées de Ribaucour-Bianchi. Il serait aisé de mettre en évidence la correspondance des asymptotiques.

3° A chaque point à l'infini sur (Σ) correspond une mise de l'élément linéaire de (Σ) sous la forme $d\sigma^2 = du^2 + e^{2u} dv^2$. On peut par suite associer à (Σ) une infinité (dépendant d'une constante arbitraire) de congruences (Δ). A chacune de ces congruences correspond une congruence (δ), et par suite une surface pseudosphérique.

On voit donc comment, par le nouveau procédé qui vient d'être exposé, on peut obtenir les ∞^1 surfaces pseudosphériques que la transformation de Ribaucour-Bianchi associe à (Σ).

Chaque transformée peut, bien entendu, être traitée comme (Σ), ce qui permet d'obtenir des surfaces pseudosphériques dépendant d'autant de constantes que l'on veut.

A ces conséquences relatives aux surfaces pseudosphériques, il n'est pas sans intérêt d'ajouter la suivante, concernant plus spécialement la théorie des systèmes cycliques, que nous nous bornons à énoncer.

Étant donnée une congruence cyclique normale quelconque $(\mathcal{C})$, il est possible, et cela d'une infinité de façons, en déplaçant ses rayons parallèlement à eux-mêmes, de la transformer en une autre congruence du même type mais dont tous les cercles passent par un point fixe de l'espace, les développables se correspondant dans la congruence envisagée et dans toutes ses transformées.

La loi de passage de $(\mathcal{C})$ à ses ∞^1 transformées est facile à apercevoir si l'on a égard précisément à la surface pseudosphérique (Σ) associée à $(\mathcal{C})$ (définie à une homothétie près).

La représentation sphérique de (Σ) étant connue [c'est celle des développables de $(\mathcal{C})$], (Σ) se détermine par quadratures ([1]).

Il suffit d'envisager les congruences normales (N) arbitrairement déformables avec (Σ) déduites des différentes familles de géodésiques passant par un même point à l'infini, puis de construire les *différences géométriques* relatives au point fixe O des congruences (N) et de la congruence des normales à (Σ), pour avoir les ∞^1 congruences transformées.

Disons avant de terminer ce paragraphe que, dans son analyse de la méthode de Weingarten pour rechercher les surfaces applicables sur une surface donnée (*Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 322), G. Darboux a signalé (dans le cas particulier des surfaces à *courbure totale constante positive*) le rôle curieux des surfaces telles que les sphères ayant pour diamètres les droites joignant deux centres de courbure associés quelconques passent par un point fixe.

Dans ce qui précède, ces surfaces s'introduisent tout naturellement auprès des surfaces *pseudosphériques*.

VI. — Surfaces à courbure totale constante positive.

Dans le paragraphe précédent, nous avons identifié les deux problèmes de la recherche des surfaces pseudosphériques et des congruences normales telles que les sphères ayant pour diamètres les différents segments focaux passent par un point fixe.

Les congruences ci-dessus sont des cas particuliers des congruences normales telles que deux foyers associés quelconques soient conjugués par rapport à une sphère fixe.

Nous nous proposons actuellement, de montrer que ces dernières congruences sont, à leur tour, étroitement liées au problème de la recherche des surfaces à *courbure totale constante* (positive ou négative).

([1]) Si les développables de $(\mathcal{C})$ ne sont pas en évidence, leur détermination comportera l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.

Nous commencerons par le cas des surfaces à courbure totale constante *positive*, pour lesquelles la première équation de l'applicabilité est comme on sait

$$(27) \qquad \Delta_{22}M = 1 - \Delta_1 M,$$

la courbure étant supposée égale à 1.

Chaque solution (M) de l'équation (27) définit, de façon intrinsèque, une déformation de la sphère, après laquelle les coefficients D, D', D'' de la deuxième forme fondamentale $-\mathrm{S}\, dX_3\, dx$ (les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent) ont les valeurs :

$$\frac{M_{11}}{\sqrt{1-\Delta_1 M}}, \quad \frac{M_{12}}{\sqrt{1-\Delta_1 M}}, \quad \frac{M_{22}}{\sqrt{1-\Delta_1 M}};$$

M_{11}, M_{12}, M_{22} étant les dérivées covariantes de M.

Or l'équation des congruences à foyers conjugués par rapport à une sphère de rayon 1 est précisément (27) (*voir* § II).

Toute solution de (27) définit donc, simultanément, une congruence rectiligne du type envisagé et une surface applicable sur la sphère.

Ainsi se trouve établie l'identité des deux problèmes énoncés au début de ce paragraphe.

On peut, en suivant une méthode analogue à celle qui a été suivie dans le cas des surfaces pseudosphériques, établir un procédé géométrique de correspondance entre les surfaces à courbure totale constante positive et les congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère.

Envisageons une surface (Σ) à courbure totale constante positive, que nous pouvons supposer égale à $+1$.

Prenons, en supposant connues les géodésiques, l'élément linéaire sous la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + G\, dv^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2.$$

Portons sur la tangente à (Σ) en chacun, M, de ses points, le long de la géodésique $v = \text{const.}$, une longueur $\overline{MI} = \sqrt{G}$, et élevons au point I ainsi obtenu la perpendiculaire au plan tangent en M [1]. Nous

[1] On pourrait remplacer $\sqrt{G} = \sin u$ par $\lambda \sin u\, [\lambda = \text{const.}]$, mais il faudrait alors substituer, à la sphère de rayon 1, la sphère de rayon λ.

obtenons ainsi l'une des congruences (N) arbitrairement déformables avec (Σ), dont il a été question au paragraphe précédent.

Menons par l'origine O des coordonnées le vecteur (OJ) équipollent à (MI), et par J la parallèle Δ au rayon correspondant de (N) [ou ce qui revient au même à la normale en M à (Σ)].

L'ensemble des droites Δ correspondant aux différents points M de (Σ) constitue une congruence *normale*, dont les développables ont même image sphérique que les lignes de courbure de (Σ) (*voir* le paragraphe précédent).

Montrons que cette congruence (Δ) a ses couples de foyers associés, conjugués par rapport à la sphère (S) de centre O et de rayon 1. Soit

$$ds^2 = E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

l'élément linéaire de la représentation sphérique de (Δ) [ou de (Σ)] sur (S).

Les cosinus directeurs des tangentes aux deux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et de la normale en M à (Σ) étant toujours X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, les formules (26) du paragraphe précédent subsistent.

Désignons par $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ les coordonnées de J; on a

$$\mathfrak{X} = X_1\sqrt{G} = X_1 \sin u,$$
$$\mathfrak{Y} = Y_1\sqrt{G} = Y_1 \sin u,$$
$$\mathfrak{Z} = Z_1\sqrt{G} = Z_1 \sin u;$$

et les cosinus directeurs de Δ sont X_3, Y_3, Z_3.

L'équation aux abscisses (comptées à partir de J) des deux foyers F et F' situés sur Δ, étant l'équation (4) du paragraphe I, on voit que

$$\overline{JF} \times \overline{JF'} = \frac{eg - f^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

$f = f'$, la congruence étant normale.

Calculons e, g, f :

$$e = \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial u}\left[\frac{\partial X_1}{\partial u}\sin u + X_1 \cos u\right],$$
$$g = \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} = \sin u\, \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v},$$
$$f = \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} = \sin u\, \mathrm{S}\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}.$$

En tenant compte des formules (26) du paragraphe précédent et de la forme de l'élément linéaire de (Σ), on trouve

$$e = -\mathrm{D}\cos u,$$
$$g = -\mathrm{D}''\cos u,$$
$$f = -\mathrm{D}'\cos u;$$

d'où

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF}'} = \frac{(\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2)\cos^2 u}{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2} = \frac{\mathrm{G}\cos^2 u}{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}.$$

La courbure de (Σ) étant égale à 1, on a

$$\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2 = \mathrm{G} = \sin^2 u,$$

par suite

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF}'} = \cos^2 u.$$

A et B étant les points où Δ coupe la sphère (S), F et F$'$ seront conjugués par rapport à (S) si

$$\overline{\mathrm{JA}}^2 = \overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF}'} = \cos^2 u.$$

Ceci est facile à vérifier.

Un point quelconque de Δ a pour coordonnées :

$$\mathfrak{X} + \lambda\mathrm{X}_3,$$
$$\mathfrak{Y} + \lambda\mathrm{Y}_3,$$
$$\mathfrak{Z} + \lambda\mathrm{Z}_3.$$

Exprimons que le point appartient à (S), nous obtenons, pour déterminer λ, l'équation

$$\mathrm{S}(\mathfrak{X} + \lambda\mathrm{X}_3)^2 = 1.$$

On tire de cette équation :

$$\lambda^2 = \overline{\mathrm{JA}}^2 = 1 - \mathrm{S}\mathfrak{X}^2 = \cos^2 u.$$

On a bien

$$\overline{\mathrm{JA}}^2 = \overline{\mathrm{JF}} \times \mathrm{JF}'.$$

La congruence (Δ), précédemment construite, a bien ses couples de foyers associés conjugués par rapport à (S), comme on l'avait annoncé. Ainsi :

A chaque mise de l'élément linéaire d'une surface (Σ) *de courbure* $+1$ *sous la forme*

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$

correspond, par la construction géométrique ci-dessus indiquée, une congruence normale (Δ) *à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe de rayon* 1 (*de rayon quelconque, moyennant une homothétie*).

En faisant varier la surface de départ (Σ), on obtient une famille dépendant de deux fonctions arbitraires, de congruences (Δ) à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe.

Cette famille ne fournit cependant pas la totalité des congruences normales (Δ) à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe.

Si l'on observe que la distance de l'origine au rayon de (Δ), correspondant au point (u, v) de (Σ), est $\sin u$, et que par suite cette distance est plus petite que 1, on voit que le rayon envisagé coupe la sphère de rayon 1 en deux points *réels*.

On peut donc dire :

Seules, les congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe dont les rayons coupent effectivement la sphère, sont susceptibles d'être déduites des surfaces à courbure totale constante positive par le procédé ci-dessus exposé.

L'image sphérique des développables d'une congruence (Δ) déduite d'une surface à courbure constante positive est la même, comme nous l'avons déjà fait observer, que celle des lignes de courbure de la surface.

Il resterait à voir si la congruence normale à foyers associés conjugués par rapport à une sphère, *la plus générale*, dont les rayons coupent effectivement la sphère, a pour image sphérique de ses développables l'image des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante positive. Nous verrons au paragraphe VIII qu'il en est bien ainsi ([1]), de sorte que :

Les congruences actuelles admettent pour images sphériques de leurs

---

([1]) Cela revient à dire que la construction des congruences (Δ) indiquée dans le texte, donne *toutes* les congruences normales à foyers conjugués par rapport à une sphère dont les rayons coupent la sphère, à partir des surfaces à courbure totale constante positive.

développables les images des lignes de courbure des surfaces à courbure totale constante positive, de même que celles du paragraphe précédent admettaient pour image sphérique de leurs développables les images des lignes de courbure des surfaces pseudosphériques.

Il résulte de là que si l'on suppose connue une congruence (Δ) dont les rayons coupent la sphère par rapport à laquelle deux foyers associés sont conjugués, la détermination de ses développables entraînera la connaissance d'une surface à courbure totale constante positive, définie à une homothétie près.

VII. — Sur les congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe, dont les rayons ne coupent pas la sphère.

L'étude qui précède attache un intérêt particulier aux deux types suivants de congruences rectilignes :

Les congruences normales dont les sphères décrites sur les différents segments focaux comme diamètres passent par un point fixe.

Les congruences normales dont deux foyers associés quelconques sont conjugués par rapport à une sphère fixe, les différents rayons coupant la sphère en deux points réels.

Les congruences du premier type ont pour images sphériques de leurs développables les images des lignes de courbure des surfaces pseudosphériques; celles du second ont pour images de leurs développables les images des lignes de courbure des surfaces à courbure totale constante positive.

Seules les congruences normales à foyers associés conjugués, par rapport à une sphère fixe *dont les rayons ne coupent pas la sphère*, n'ont pas été rattachées au problème de la représentation sphérique des surfaces à courbure totale constante.

Si l'on observe que, relativement à ces dernières congruences, le premier type ci-dessus signalé se présente comme un cas particulier, on est conduit à se demander s'il ne serait pas possible, au moyen d'une construction géométrique analogue à celle déjà exposée deux fois dans ce qui précède, de déduire les congruences normales à foyers conjugués par rapport à une sphère fixe dont les rayons ne coupent pas la sphère, des surfaces pseudosphériques.

Effectivement la chose est possible. Il suffit de choisir convenablement les congruences (N) arbitrairement déformables avec une surface pseudosphérique, qui ont servi de point de départ aux constructions exposées dans les deux paragraphes précédents.

Envisageons une surface pseudosphérique (Σ), dont nous prendrons, pour simplifier, la courbure égale à -1.

Considérons sur (Σ) une ligne géodésique quelconque g. Prenons pour lignes coordonnées $v = \text{const.}$ les géodésiques orthogonales à g, et pour lignes $u = \text{const.}$ les trajectoires orthogonales des précédentes (g ayant pour équation $u = 0$).

Dans ces conditions l'élément linéaire de (Σ) est :

$$d\sigma^2 = du^2 + \cosh^2 u \, dv^2.$$

Portons sur la tangente en un point M quelconque de (Σ) à la géodésique ($v = \text{const.}$) une longueur $\overline{\mathrm{MI}} = \cosh u$, et élevons en I la perpendiculaire N au plan tangent en M. Nous obtenons ainsi une congruence (N) arbitrairement déformable avec (Σ).

Menons par l'origine O des coordonnées le vecteur (OJ) équipollent à (MI), et par J la parallèle Δ à N. L'ensemble des droites Δ correspondant aux différents points M de (Σ) constitue, comme nous le savons, une congruence normale (Δ) dont les développables correspondent aux lignes de courbure de (Σ).

Il est facile d'établir que (Δ) a ses couples de foyers associés, conjugués par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1, et qu'aucun de ses rayons ne coupe la sphère.

Ce dernier point résulte de ce que $\overline{\mathrm{OJ}}$ est un cosinus hyperbolique. Montrons que les foyers associés de (Δ) sont conjugués par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1.

Les coordonnées de J sont, en utilisant toutes les notations des deux paragraphes précédents :

$$\mathfrak{X} = \cosh u \, X_1,$$
$$\mathfrak{Y} = \cosh u \, Y_1,$$
$$\mathfrak{Z} = \cosh u \, Z_1.$$

Si F et F′ sont les foyers situés sur le rayon $\Delta(u, v)$, la condition pour que ces points soient conjugués par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1 est, comme on s'en rend compte immédiatement,

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF'}} = 1 - \cosh^2 u = -\sinh^2 u. \tag{28}$$

Évaluons $\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF'}}$ en utilisant la formule, qui nous a servi au paragraphe précédent

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF'}} = \frac{eg - f^2}{\mathrm{E}_1 \mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2},$$

$ds^2 = \mathrm{E}_1\, du^2 + 2\mathrm{F}_1\, du\, dv + \mathrm{G}_1\, dv^2$ étant l'élément linéaire de la représentation sphérique de (Σ), c'est-à-dire de (Δ).

On a ici

$$e = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u}\left[\mathrm{X}_1 \sinh u + \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\cosh u\right],$$

$$g = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} = \cosh u\, \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v},$$

$$f = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} = \cosh u\, \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}.$$

Soit, en tenant compte des formules (26) du paragraphe V,

$$e = -\mathrm{D}\sinh u,$$
$$g = -\mathrm{D''}\sinh u,$$
$$f = -\mathrm{D'}\sinh u.$$

On en déduit

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF'}} = \frac{eg - f^2}{\mathrm{E}_1 \mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2} = \frac{(\mathrm{DD''} - \mathrm{D'^2})\sinh^2 u}{\mathrm{E}_1 \mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}.$$

La courbure de (Σ) étant égale à -1, on a

$$\mathrm{DD''} - \mathrm{D'^2} = -\cosh^2 u.$$

En outre, et pour la même raison,

$$\mathrm{E}_1 \mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2 = \cosh^2 u.$$

On a donc

$$\overline{\mathrm{JF}} \times \overline{\mathrm{JF'}} = -\sinh^2 u.$$

La condition (28) étant vérifiée, la congruence (Δ) a bien ses couples de foyers associés, conjugués par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1, comme on se proposait de le montrer.

En faisant varier (Σ), on obtient, par le procédé qui vient d'être exposé, toutes les congruences (Δ) du type envisagé dans ce paragraphe.

Nous établirons d'ailleurs directement, au paragraphe suivant, que *toute* congruence du type actuel a pour image sphérique de ses développables l'image des lignes de courbure d'une surface pseudosphérique, de sorte qu'une congruence (Δ) étant supposée connue, la détermination de ses développables entraînera la connaissance de l'image sphérique des lignes de courbure d'une surface pseudosphérique, définie à une homothétie près.

On peut alors compléter les résultats des paragraphes précédents et énoncer la proposition générale suivante :

La connaissance des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe (S) *entraîne, une fois les développables déterminées, celle des surfaces à courbure totale constante.*

Les congruences du type indiqué pour lesquelles les rayons coupent (S) *en deux points réels donnent les surfaces à courbure positive.*

Celles pour lesquelles les rayons coupent (S) *en deux points imaginaires donnent les surfaces pseudosphériques.*

VIII. — Les congruences générales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe, envisagées comme congruences cycliques.

Envisageons une congruence quelconque (Γ) à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe [la congruence n'est plus nécessairement normale]. Il est facile de voir que (Γ) est cyclique [formée par les axes des cercles d'un système cyclique].

Soient D un rayon quelconque de (Γ); F et F′ les foyers situés sur D; (S) la sphère relativement à laquelle F et F′ sont conjugués; I la projection du centre O de (S) sur D; $(\mathcal{C})$ le cercle d'axe D orthogonal à (S) [cercle situé dans le plan perpendiculaire à D mené par O].

A chaque rayon D correspond un cercle $(\mathcal{C})$. L'ensemble des cercles $(\mathcal{C})$ constitue une congruence de cercles, réelle si les rayons de (Γ) ne coupent pas (S), imaginaire dans le cas contraire.

Supposons que D se déplace de façon que F décrive l'arête de rebroussement (γ) de l'une des développables de (Γ), et considérons les sphères ayant pour centres les différentes positions de F et passant par les cercles ($\mathcal{C}$) correspondants. Ces sphères sont toutes orthogonales à (S). Le cercle caractéristique sur chaque sphère est visiblement le cercle ($\mathcal{C}$). Le lieu de ($\mathcal{C}$) est une certaine surface canal sur laquelle les différentes positions de ($\mathcal{C}$) constituent un système de lignes de courbure.

A chaque arête de rebroussement (γ) située sur la nappe focale sur laquelle se déplace F correspond une surface canal.

L'ensemble de ces surfaces canaux constitue une famille ∞^1 de surfaces.

Si l'on remplace F par F', on obtient une nouvelle famille ∞^1 de surfaces canaux, sur lesquelles les cercles ($\mathcal{C}$) sont lignes de courbure.

Envisageons deux quelconques des surfaces canaux ci-dessus, correspondant à deux arêtes de rebroussement (γ), (γ') situées sur des nappes différentes. Il existe un rayon D de (Γ) touchant (γ) en F et (γ') en F' [F et F' étant les deux foyers portés par D].

Les sphères de centres F et F' et passant par le cercle ($\mathcal{C}$) relatif à D, tangentes aux deux surfaces canaux le long de ($\mathcal{C}$), sont orthogonales. Il en est de même des surfaces canaux.

Les deux familles de surfaces dont il vient d'être question se coupent orthogonalement suivant leurs lignes de courbure ($\mathcal{C}$); ce sont, comme l'on sait, deux familles d'un système triple orthogonal, et leurs lignes de courbure communes [les cercles ($\mathcal{C}$)] forment un système cyclique, comme on se proposait de le montrer.

Ainsi :

Les congruences rectilignes à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe de centre O *sont cycliques. Les cercles du système cyclique associé sont dans des plans passant par* O. *Ils sont réels ou imaginaires suivant que les rayons ne coupent pas ou coupent la sphère fixe.*

Supposons maintenant que la congruence (Γ), au lieu d'être quelconque, soit normale [congruence cyclique normale (1)].

(1) *Voir*, pour ce cas particulier, le mémoire déjà cité de L. Bianchi. *Annales de l'École Normale supérieure*, t. XIX, 1902, p. 325.

On sait alors que si le système cyclique associé est réel [si les rayons de (Γ) ne coupent pas la sphère (S)], l'image sphérique des développables de (Γ) est celle des lignes de courbure d'nne surface pseudo-sphérique; si le système est imaginaire [si les rayons de (Γ) coupent (S)], l'image des développables est celle des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante positive. Ceci est le complément annoncé, aux rèsultats des deux paragraphes précédents.

Revenant aux congruences (Γ) *quelconques* à foyers associés conjugués par rapport à une sphère, il est facile d'établir qu'elles constituent *les seules* congruences rectilignes cycliques dont les plans des cercles passent par un point fixe.

On sait en effet que si les plans des cercles d'un système cyclique passent par un point fixe O, les cercles sont orthogonaux à une sphère fixe (S) de centre O. On sait en outre [propriété générale des congruences cycliques], que si r est le rayon de l'un des cercles, si I est son centre, F et F' les foyers situés sur le rayon correspondant, on a

$$\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF}'} = -r^2.$$

Il résulte de là que F et F' sont conjugués par rapport à (S).

Dans le cas particulier où (Γ) est normale, on a le résultat suivant :

Les congruences rectilignes cycliques normales dont les plans des cercles passent par un point fixe, sont les congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe.

IX. — La transformation d'Hazzidakis.

Nous avons vu au paragraphe V comment la considération des congruences normales arbitrairement déformables avec les surfaces pseudosphériques conduit à la transformation étudiée par Ribaucour et Bianchi de ces dernières surfaces.

Nous nous proposons de montrer que la transformation d'Hazzidakis des surfaces applicables sur la sphère peut, à son tour, être rattachée à la considération des congruences normales arbitrairement déformables avec les surfaces à courbure totale constante positive, et donner ainsi une origine commune aux résultats obtenus par Ribaucour, Bianchi, Hazzidakis.

Nous avons fait observer, au début du paragraphe VI, que toute solution M de la première équation de l'applicabilité pour les surfaces de courbure $+1$ donnait, simultanément, une surface de courbure $+1$ et une congruence normale (Δ) à foyers associés conjugués par rapport à une sphère de rayon 1 [les rayons de la congruence coupant effectivement la sphère].

Nous avons ensuite indiqué le moyen de construire géométriquement, en associant a une surface (Σ) de courbure $+1$, l'une quelconque des congruences normales (N) arbitrairement déformables avec elle, ∞^2, congruences (Δ), correspondant aux différentes mises possibles de l'élément linéaire sous la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u \, dv^2. \tag{29}$$

Chaque congruence (Δ) particulière fournit une solution M de la première équation de l'applicabilité pour les surfaces de courbure $+1$ M représentant la distance de l'origine aux plans tangents aux surfaces orthogonales aux rayons de (Δ) [1]. A cette solution de l'équation de l'applicabilité correspond une surface de courbure $+1$. Il se trouve que cette surface, distincte de (Σ), *n'est autre chose que la transformée d'Hazzidakis* (Σ_1) *de* (Σ).

Cette dernière étant unique, on voit dès à présent que la congruence (Δ) permettant de réaliser le passage de (Σ) à (Σ_1) pourra être choisie arbitrairement parmi les ∞^2 congruences correspondant aux différentes mises possibles de l'élément linéaire de la surface (Σ) sous la forme (29).

Soit (Σ) une surface quelconque de courbure $+1$, dont l'élément linéaire est supposé mis sous la forme (29).

Désignons par D, D′, D″ les coefficients de la deuxième forme fondamentale de la surface. D, D′, D″ sont trois fonctions supposées connues de u et de v, vérifiant l'équation de Gauss et les deux équations de Codazzi.

---

[1] La condition $\Delta_1 M < 1$ est vérifiée pour les congruences (Δ) envisagées, car $\Delta_1 M$ est la distance de l'origine aux rayons de (Δ), lesquels coupent effectivement la sphère de centre O et de rayon 1.

Les notations étant celles des paragraphes précédents, au système de courbes coordonnées considéré sur (Σ) pour la mise de son élément linéaire sous la forme (29) correspond, comme on l'a vu, une congruence (Δ) définie par les coordonnées des projections J de l'origine sur les différents rayons :

$$(\mathrm{J}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = -\sin u\, X_1, \\ \mathfrak{y} = -\sin u\, Y_1, \\ \mathfrak{z} = -\sin u\, Z_1, \end{cases}$$

et par les cosinus directeurs X_3, Y_3, Z_3 de ces rayons.

Le signe $-$ aux seconds membres évite une symétrie ultérieure.

La distance de l'origine aux plans tangents à l'une quelconque des surfaces orthogonales à (Δ), qui est ici la distance des différents points J aux points où les rayons correspondants coupent cette même surface, est comme l'on sait

$$M(u, v) = C - \int (U\,du + V\,dv) \qquad (C = \text{const.}),$$

avec

$$U = S X_3 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}, \qquad V = S X_3 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}.$$

On trouve en tenant compte des formules (26) du paragraphe V

$$U = -D \sin u, \qquad V = -D' \sin u;$$

d'où

$$(30) \qquad M = C + \int \sin u\,(D\,du + D'\,dv).$$

la quantité sous le signe $\int$ étant une différentielle totale exacte.

La valeur (30) de M fournit une solution de la première équation de l'applicabilité pour les surfaces de courbure $+1$, à laquelle correspond une surface (Σ_1) définie intrinsèquement par les coefficients δ, δ', δ'' de sa deuxième forme fondamentale,

$$(31) \qquad \delta = \frac{M_{11}}{\sqrt{1 - \Delta_1 M}}, \quad \delta' = \frac{M_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 M}}, \quad \delta'' = \frac{M_{22}}{\sqrt{1 - \Delta_1 M}},$$

M_{11}, M_{12}, M_{22}, $\Delta_1 M$ étant les dérivées covariantes et le paramètre différentiel du premier ordre de M, calculés relativement à l'élément linéaire de la représentation sphérique de (Δ) [1], qui n'est autre chose, d'après la façon dont (Δ) est déduite de (Σ), que l'élément linéaire de la représentation sphérique de (Σ) [troisième forme fondamentale de (Σ)].

Calculons cet élément linéaire.

$$d\sigma'^2 = S(dX_3)^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

En utilisant les formules (26) du paragraphe V, on obtient sans peine

$$e = D^2 + \frac{D'^2}{\sin^2 u},$$
$$g = D'^2 + \frac{D''^2}{\sin^2 u},$$
$$f = DD' + \frac{D'D''}{\sin^2 u},$$

et, par suite,

$$(32) \qquad d\sigma'^2 = \left(D^2 + \frac{D'^2}{\sin^2 u}\right)du^2 + 2\left(DD' + \frac{D'D''}{\sin^2 u}\right)du\,dv + \left(D'^2 + \frac{D''^2}{\sin^2 u}\right)dv^2.$$

(32) étant aussi l'élément linéaire de (Σ) on voit que la première forme fondamentale de (Σ_1) est identique à la troisième forme de (Σ).

Les coefficients δ, δ', δ'' de la deuxième forme de (Σ_1) s'obtiennent simplement au moyen des formules (31). En tenant compte de la valeur (30) de M et des formules de Codazzi, et en observant que $\Delta_1 M$ a la même valeur qu'on le calcule par rapport à (29) ou à (32), on trouve

$$\delta = D, \qquad \delta' = D', \qquad \delta'' = D''.$$

La deuxième forme fondamentale de (Σ_1) est identique à celle de (Σ).

En tenant compte de l'équation de Gauss,

$$DD'' - D'^2 = \sin^2 u,$$

---

[1] Dans l'équation des congruences (Δ) à foyers conjugués par rapport à la sphère de rayon 1 $[\Delta_{22} M = 1 - \Delta_1 M]$, les paramètres différentiels sont calculés par rapport à l'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence, qui n'est pas l'élément linéaire (29) de (Σ).

et de l'expression de la courbure moyenne de (Σ),

$$H = -\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right),$$

on peut écrire (32)

$$d\sigma'^2 = -(du^2 + \sin^2 u\, dv^2) - H(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2). \tag{33}$$

De là résulte que la troisième forme fondamentale de (Σ_1) est

$$du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$

identique à la première forme de (Σ).

On passe de (Σ) à (Σ_1), en intervertissant la première et la troisième forme. (Σ_1) est donc, comme l'on sait, la transformée d'Hazzidakis de (Σ).

Les propriétés de la transformation d'Hazzidakis sont bien connues. Notons que celle suivant laquelle les géodésiques de l'une des deux surfaces (Σ), (Σ_1) correspondent aux lignes d'ombre de l'autre peut être déduite de la signification géométrique de la solution M de (30) de l'équation de l'applicabilité [distance d'un point quelconque de (Σ_1) à un plan fixe].

Les lignes de niveau de (Σ_1) relatives au plan fixe sont définies par l'équation $M = \text{const.}$; soit

$$D\, du + D'\, dv = 0.$$

Cette dernière équation est celle des courbes conjuguées des géodésiques $v = \text{const.}$ de (Σ), d'où la propriété énoncée [1].

Si l'on met l'élément linéaire de (Σ_1) sous la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$

et si l'on construit les congruences (Δ_1) correspondantes (normales à foyers conjugués par rapport à la sphère de rayon 1), ces congruences correspondent aux congruences (Δ) de départ dans une correspondance involutive tout comme celle entre (Σ) et (Σ_1).

La transformation involutive des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe, qui vient d'être

---

[1] L'identité des deuxièmes formes fondamentales de (Σ) et de (Σ_1), entraîne la correspondance des réseaux conjugués.

mise en évidence, conserve les développables, puisque nous savons (§ V) que ces dernières correspondent aux lignes de courbure de (Σ) et (Σ_1); en outre elle transforme les unes dans les autres les surfaces orthogonales aux congruences (Δ) et (Δ_1).

Désignons par (S) l'ensemble des surfaces orthogonales aux ∞^2 congruences (Δ); par (S_1) l'ensemble analogue relatif aux congruences (Δ_1). (S) et (S_1) sont définis par quadratures dès que (Σ) est connue ainsi que ses géodésiques. Sur toutes les surfaces (S), (S_1), les lignes de courbure se correspondent, et pour les surfaces d'une même famille la correspondance est par plans tangents parallèles.

La représentation sphérique des lignes de courbure des différentes surfaces (S), (S_1) étant celle des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante positive, ces surfaces admettent une déformation dans laquelle le réseau de courbure reste de courbure.

Les équations de ces surfaces s'obtiennent simplement à partir de (Σ).

Soit (N) l'une quelconque des ∞^2 congruences normales arbitrairement déformables avec (Σ) dont dérivent les ∞^2 congruences (Δ) dont il est question ci-dessus. Envisageons, les géodésiques étant supposées connues, une mise déterminée de l'élément linéaire de (Σ) sous la forme (29). I étant le point où le rayon N de (N) perpendiculaire au plan tangent en P à (Σ) perce le plan, les coordonnées de ce point relatives aux tangentes aux courbes coordonnées sur (Σ) sont [1]

$$\xi = \sin u + d \cos u \sin(v + \alpha),$$
$$\eta = d \cos(v + \alpha),$$

d et α étant deux constantes arbitraires.

Les coordonnées de l'extrémité J du vecteur (OJ) équipollent à (PI) sont par suite

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \xi X_1 + \eta X_2, \\ \mathfrak{Y} &= \xi Y_1 + \eta Y_2, \\ \mathfrak{Z} &= \xi Z_1 + \eta X_2, \end{aligned} \right.$$

$X_1, \ldots, Z_3$, ayant pour (Σ) les significations habituelles. Les équa-

---

(1) Pour la détermination des expressions de ξ, η, voir un article du *Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1930.

tions (34) définissent les ∞^2 congruences (Δ) attachées à (Σ). Les rayons passent par les différents points J et sont dirigés par les valeurs correspondantes de X_3, Y_3, Z_3.

Quant aux ∞^2 surfaces (S) ayant même représentation sphérique que (Σ), dont il est question plus haut, elles ont pour équations, en négligeant la constante qui correspond à des surfaces parallèles,

$$x = \mathfrak{X} - X_3 \int (U\,du + V\,dv),$$
$$y = \mathfrak{Y} - Y_3 \int (U\,du + V\,dv),$$
$$z = \mathfrak{Z} - Z_3 \int (U\,du + V\,dv),$$
$$U = SX_3 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u}, \qquad V = SX_3 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v}.$$

Les formules (34) définissent une transformation à deux paramètres (d, α) des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère, conservant l'image sphérique des développables.

Au point de vue de la *recherche* des surfaces à courbure totale constante positive, les transformations des congruences ci-dessus, *modifiant* l'image sphérique des développables, présenteraient évidemment un tout autre intérêt.

Un calcul analogue au précédent donnerait ∞^2 surfaces, définies à une homothétie près par des quadratures, ayant même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure qu'une surface pseudosphérique quelconque.

Les expressions à adopter pour ξ, η seraient (*article cité*)

$$\xi = e^u(v^2 + cv + d) - e^{-u}, \qquad \eta = 2v + c \qquad (c \text{ et } d = \text{const.}).$$

X. — Sur une transformation des surfaces pseudosphériques.

Dans les paragraphes qui précèdent, nous nous sommes attaché à mettre en évidence l'identité des problèmes de la recherche des surfaces à courbure totale constante et des congruences normales à foyers conjugués par rapport à une sphère, et l'intérêt qu'il y aurait, au point de vue du problème de la transformation des surfaces à courbure totale constante, à savoir transformer les congruences ci-dessus en congruences analogues.

Ce dernier paragraphe a pour objet l'étude d'une transformation que nous avons signalée dans une Note des *Comptes rendus* [1].

Dans un autre travail [2], nous avons indiqué le moyen de transformer toute congruence normale en une congruence d'*Appell généralisée* (à enveloppée moyenne point).

A une congruence normale douée d'une propriété déterminée, correspondra une congruence d'Appell généralisée douée d'une propriété correspondante; de sorte que :

Tout problème de recherche de congruences normales assujetties à une condition déterminée, peut être transformé en un certain problème relatif aux congruences d'Appell généralisées.

La transformation ci-dessus admet un invariant qu'il est très facile de mettre en évidence.

Envisageons une congruence normale quelconque (N), définie comme au paragraphe I, par les coordonnées (x, y, z) de la projection I de l'origine sur un rayon quelconque D de cosinus directeurs X, Y, Z,

$$x = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X}), \qquad y = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Y}), \qquad z = \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Z});$$

les paramètres différentiels se rapportant à la représentation sphérique.

Faisons tourner chaque rayon D d'un angle droit autour de sa parallèle issue de O. D vient en Δ et I en K.

Les coordonnées de K sont les mineurs extraits de la matrice

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X}) & \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Y}) & \Delta(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) \end{vmatrix}.$$

---

(1) *Comptes rendus*, t. 190, p. 1217.

(2) *Les congruences de normales dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenee donnée* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929).

On peut écrire ces coordonnées

$$\xi = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right],$$

$$\eta = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right],$$

$$\zeta = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right],$$

$H = \sqrt{EG - F^2}$ (E, F, G étant les coefficients du ds^2 de la représentation sphérique).

Elles ont été données sous cette dernière forme par L. Bianchi. Si, tenant compte de l'équation (4) du paragraphe I, on calcule le produit des distances des foyers φ, φ', situés sur Δ, au point K, on trouve

$$\overline{K\varphi} \times \overline{K\varphi'} = \Delta_{22} M.$$

L'équation (5) de ce même paragraphe montre que si F et F' sont les foyers de la congruence (N) situés sur D, on a aussi

$$\overline{IF} \times \overline{IF'} = \Delta_{22} M.$$

Quand on transforme une congruence normale quelconque par le procédé ci-dessus indiqué, le produit des distances des foyers situés sur un rayon quelconque, à la projection de l'origine sur ce rayon, ne change pas.

Celà étant, supposons que (N) soit une congruence normale à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe (S), de centre O et de rayon k.

L'équation définissant (N) est, comme on l'a vu au paragraphe II,

$$\Delta_{22} M + \Delta_1 M = k^2. \tag{15}$$

Après la transformation

$$\overline{K\varphi} \times \overline{K\varphi'} = \overline{IF} \times \overline{IF'} = \Delta_{22} M,$$

et l'on a, comme on sait,

$$OK = OI = \sqrt{\Delta_1 M}.$$

En tenant compte de ces relations, (15) s'écrit

$$\overline{K\varphi} \times \overline{K\varphi'} = k^2 - \overline{OK}^2,$$

égalité qui prouve que la sphère de diamètre $(\varphi\varphi')$ est orthogonale à la sphère (S). φ et φ' ne sont réels que si les rayons de (N) ne coupent pas (S).

Ainsi :

Les transformées des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère (S) *de centre* O, *sont des congruences d'Appell généralisées relatives à* O, *telles que les sphères ayant pour diamètres les différents segments focaux soient orthogonales à* (S).

Il revient évidemment au même de dire que les congruences transformées ont leurs couples de foyers associés, conjugués par rapport à (S), tout comme les congruences de départ.

Si $k = 0$ [1], cas auquel nous nous arrêterons, les congruences (N) sont les congruences normales transformables en congruences normales par polaires réciproques relativement à une sphère, dont il a été question au paragraphe IV.

Alors les congruences d'Appell transformées jouissent de cette propriété que, du point O, on voit les différents segments focaux sous un angle droit.

Soumettons l'une quelconque de ces congruences transformées à une transformation par polaires réciproques, relativement à une sphère quelconque (Σ) de centre O. Nous obtenons évidemment une congruence *normale* (Γ), jouissant de cette propriété que les plans focaux issus d'un même rayon sont équidistants de O.

Par deux opérations géométriques successives, très simples, il est donc possible de transformer les congruences normales de l'espèce (N), *en congruences normales* (Γ) *à plans focaux équidistants d'un point fixe.*

Si l'on fait tourner chaque rayon de (Γ), dans le plan qu'il détermine avec O, d'un angle droit, la rotation ayant le sens inverse de celle effectuée pour obtenir (Γ) à partir de (N), on obtient la congruence (N') transformée par polaires réciproques de (N) par rapport à (Σ). (N') appartient comme l'on sait à la famille (N). On voit alors

---

[1] *Comptes rendus*, t. 190, p. 1217.

que l'on peut présenter un peu plus simplement la transformation ci-dessus :

Si l'on fait tourner chaque rayon de la congruence (N) *la plus générale, d'un angle droit, autour d'un point* O, *dans le plan qu'il détermine avec* O, *on obtient la congruence* (Γ) *la plus générale.*

Les problèmes de la détermination et de la transformation des congruences (Γ) sont identiques à ceux de la détermination et de la transformation des congruences (N), et par suite aussi aux problèmes analogues sur les surfaces pseudosphériques.

Cela étant, envisageons une surface quelconque (L) orthogonale aux rayons d'une congruence (Γ) déduite d'une congruence (N) déterminée. Elle jouit de la propriété évidente suivante :

Les lignes de courbure en l'un quelconque P *de ses points font le même angle avec* OP.

Cette propriété, caractéristique des surfaces (L), se conserve dans une inversion quelconque de pôle O.

Si donc on considère une surface (L_1), inverse de (L) dans une telle inversion, et si l'on envisage la congruence (Γ_1) de ses normales, on peut dire que (Γ_1) appartient à la famille des congruences (Γ).

Il n'y a plus qu'à soumettre (Γ_1) à la transformation inverse de celle qui a donné (Γ) à partir de (N), pour avoir une *nouvelle* congruence (N_1) du type (N).

Ainsi se trouve réalisée, et de la façon la plus simple, une transformation des congruences (N) en congruences analogues.

Si l'on observe que la surface (L), dont il est question ci-dessus, peut être remplacée par une surface parallèle quelconque, et que la même chose peut être faite pour les surfaces inverses, on voit qu'il est possible d'introduire dans les formules définissant la transformation qui vient d'être mise en évidence autant de constantes que l'on veut.

A la transformation ci-dessus, des congruences normales (N) transformables en congruences normales par polaires réciproques par rapport à une sphère, correspond, conformément à ce qui a été dit au cours de ce mémoire, une transformation dépendant d'autant de paramètres que l'on veut des surfaces pseudosphériques.

Nous terminerons par la remarque suivante.

Envisageons une congruence normale quelconque (N), à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe (S) de centre O.

Soient $(\mathcal{C})$ les cercles orthogonaux à (S) ayant pour axes les différents rayons D de (N), envisagés au paragraphe VIII.

Les cercles $(\mathcal{C})$ constituent un système cyclique *normal* (les axes des cercles forment une congruence normale). Transformons (N) en une congruence d'Appell généralisée (Δ) par la construction indiquée au début du paragraphe actuel. Nous avons observé plus haut que, dans (Δ), deux foyers situés sur un même rayon sont conjugués par rapport à (S). Il résulte alors du paragraphe VIII que (Δ) est à son tour cyclique, les cercles du système associé étant situés dans des plans passant par O.

En outre, le rayon du cercle associé à un rayon quelconque Δ de (Δ) étant égal à $\sqrt{-\overline{\mathrm{K}\varphi}\times\overline{\mathrm{K}\varphi'}}$ (les notations sont celles du début de ce paragraphe), et celui du cercle $(\mathcal{C})$ correspondant relatif à la congruence (N) étant $\sqrt{-\overline{\mathrm{IF}}\times\overline{\mathrm{IF}'}}$, deux cercles correspondants dans les deux systèmes cycliques ci-dessus sont *égaux*.

On peut donc énoncer ce résultat :

Étant donné le système cyclique normal le plus général dont les plans des cercles passent par un point fixe O, *si l'on fait tourner chacun de ses cercles, dans son plan, d'un angle droit, autour du point* O, *on le transforme en un autre système cyclique dont les axes constituent une congruence d'Appell généralisée relative au point* O [1].

[1] Plus généralement, si l'on fait tourner les cercles d'un angle constant *quelconque*, on obtient encore un système cyclique. J'étudierai ultérieurement cette transformation plus générale.