

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

## Surfaces de Voss-Guichard

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 48 (1931), p. 359-396

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1931\\_3\\_48\\_\\_359\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__359_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SURFACES DE VOSS-GUICHARD

PAR M. BERTRAND GAMBIER

---

1. *Introduction et bibliographie.* — Les surfaces de Voss-Guichard sont celles qui admettent un *réseau conjugué formé de géodésiques*. Leurs propriétés nombreuses n'ont été découvertes qu'avec assez de peine par les géomètres successifs; je puis même citer l'exemple d'un géomètre éminent qui a écrit deux mémoires élégants en 1907 et 1914 sur ces surfaces; le second porte comme titre : *Transformations des surfaces de Voss*, mais (du moins en 1914) l'auteur, en rédigeant ce second mémoire, ne s'aperçoit pas encore qu'il avait déjà, en 1907, sans l'avoir remarqué, traité des surfaces de Voss. La nouvelle édition (1922) de la Géométrie différentielle de Bianchi contient la remarque simple qui permet enfin de reconnaître la portée exacte du premier des deux mémoires que je viens de citer. Si, chronologiquement, c'est Voss qui, le 3 mars 1888, a découvert les surfaces en jeu, on doit remarquer, en hommage à la mémoire de Guichard, qui a été un précurseur sur beaucoup de points, qu'en août 1890, aux *Annales de l'École Normale*, Guichard a, sans connaître l'article de Voss (*Sitzungsberichte* de Munich), retrouvé toutes les propriétés de Voss, puis signalé une série de propositions importantes non soupçonnées par Voss. A cette époque ni Voss ni Guichard n'ont signalé que les *surfaces en jeu admettent une déformation continue sur leur réseau géodésique conjugué comme base* et pourtant, en 1873, M. Cosserat avait signalé la *propriété caractéristique (relative à la représentation sphérique) des réseaux conjugués permanents*; il a fallu que l'illustre géomètre italien Bianchi fit la synthèse des résultats dus à MM. Cosserat, Demoulin, Tzitzéica sur la déformation continue (sans oublier les siens propres) pour

obtenir la remarque géométrique qui met aussitôt en évidence la propriété de déformation continue des surfaces de Voss-Guichard. Le célèbre *théorème de permutabilité* de Bianchi s'applique alors aux surfaces de Voss par l'intermédiaire des *surfaces à courbure totale constante dont les asymptotiques ont même représentation sphérique que le réseau conjugué* (c'est la remarque de Bianchi citée plus haut) et M. Eisenhart a explicité en 1914 l'application aux surfaces de Voss de la transformation de Bäcklund dont Bianchi avait fait l'usage si heureux que l'on connaît.

En 1927 j'ai retrouvé aux *Acta mathematica* par une méthode originale les propriétés des surfaces de Voss : j'expliquerai plus loin comment j'avais failli ne pas reconnaître certaines surfaces classiques telles que l'hélicoïde minimum et ses déformées hélicoïdales, la développée du caténoïde et ses développées hélicoïdales, surfaces qui sont toutes surfaces de Voss : il a fallu qu'au cours de la rédaction de mes deux fascicules sur la déformation des surfaces je me proposasse une série de problèmes pour que deux de ces problèmes (indépendants en apparence) me fissent d'abord retrouver les surfaces de Voss, avec une certaine surprise d'ailleurs (mémoire rédigé en 1925, mais imprimé aux *Acta* seulement en 1927), puis en 1926 (mémoire rédigé en 1926, puis imprimé en 1926 au *Bulletin des Sciences mathématiques*) constater que *les hélicoïdes qui admettent  $\infty^1$  déformées hélicoïdales non révolutives avec réseau conjugué permanent sont surfaces de Voss* : ce résultat inattendu m'a permis de retoucher mon mémoire des *Acta* au moment de la correction des épreuves. J'ignorais à cette époque les résultats de M. Eisenhart.

Les surfaces de Voss possèdent un grand nombre de propriétés curieuses qu'il y aurait lieu d'encore mieux approfondir ; aussi je crois rendre service aux Géomètres en exposant une vue d'ensemble ; j'ajouterai quelques résultats nouveaux sur la détermination, par quadratures, sur une surface de Voss connue, du réseau géodésique conjugué de cette surface.

Voici la liste des travaux que je connais sur cette théorie : les lettres que j'adopte (V), (Gu), (B), (R), (E<sub>1</sub>), (E<sub>2</sub>) (GaA), (GaB), (D), (F), me serviront dans le texte ultérieur pour renvoyer le lecteur aux diverses références.

(V). VOSS, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden* (*Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, Band XVIII, 1888, p. 95-102).

(Gu). GUICHARD, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent* (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. VII, 1890, p. 233-264).

(B). BIANCHI, *Leçons de Géométrie différentielle*, seconde édition.

(R). A. RAZZABONI, *Delle Superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 4<sup>e</sup> série, t. IX, 1888, p. 766-776).

(E<sub>1</sub>). EISENHART, *Applicable surfaces with asymptotic lines of one surface corresponding to a conjugate system of another* (*Transactions of the American mathematical Society*, t. 8, 1907, p. 112-134).

(E<sub>2</sub>). EISENHART, *Transformations of surface of Voss* (même Recueil, t. 15, 1914, p. 245-265).

(Ga A.). GAMBIER, *Surfaces de Voss-Guichard; surfaces associées et adjointes; déformation avec réseau conjugué permanent* (*Acta mathematica*, t. 51, 1927, p. 83-131).

(Ga B.). GAMBIER, *Déformation continue d'un hélicoïde en hélicoïde avec réseau conjugué permanent. Surfaces de Voss-Guichard* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. 50, 1926, octobre-novembre).

(D). DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 101-110).

Darboux donne géométriquement la démonstration de propriétés spéciales aux surfaces G (développantes des surfaces V de Voss) introduites par Guichard.

Je dois enfin citer le nom de M. Finikoff, professeur à l'Université de Moscou, qui, dans sa thèse imprimée en langue russe en 1917 avait démontré le premier que *seuls les hélicoïdes minima sont  $\infty^1$  fois surfaces de Voss*; en réalité, M. Finikoff avait cité seulement l'hélicoïde minimum habituel, réel et transcendant, qui est l'adjointe du caténoïde, et avait négligé l'hélicoïde minimum, imaginaire, mais algébrique, qui est l'adjointe de la surface minima imaginaire et algébrique de révo-

lution; la méthode de M. Finikoff donne les deux hélicoïdes; j'avais moi-même oublié (parce qu'imaginaire) cette surface dans le mémoire (Ga B). J'ai rectifié cette omission dans divers travaux, en particulier dans un paragraphe ajouté au mémoire de M. Finikoff.

(F). *Déformation d'une surface et réseaux conjugués persistants* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t. 54, 1930, mai).

2. *Résultats de Voss.* — Le problème, posé par Voss, conduit à des équations aux dérivées partielles extrêmement simples et faciles à former : l'une est celle, non intégrable, qui donne les surfaces à courbure totale constante. Les trois formes quadratiques fondamentales de la surface V, sont, en prenant le réseau géodésique conjugué comme réseau de coordonnées curvilignes

$$(1) \quad ds^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega du dv + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

$$(2) \quad -Sdc dx = \sin 2\omega \left(\frac{\partial X}{\partial u} du^2 + \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2\right),$$

$$(3) \quad d\sigma^2 = du^2 - 2 \cos 2\omega du dv + dv^2,$$

avec les conditions nécessaires et suffisantes, comme on le reconnaît aussitôt par les équations de Gauss-Codazzi.

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega,$$

$$(5) \quad \cos 2\omega = \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\frac{\partial Y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial u}}.$$

On doit donc d'abord trouver *une* intégrale particulière de (4), ce qui revient d'ailleurs à trouver une surface  $\Sigma$  à courbure totale constante et égale à  $-1$ , d'élément linéaire,

$$(6) \quad d\Sigma^2 = du^2 + 2 \cos 2\omega du dv + dv^2.$$

Ensuite on intègre le système (5), ce qui revient à trouver X (ou Y), par une équation de Laplace, l'autre fonction Y (ou X) se calculant par quadratures.

M. Razzaboni a fait remarquer que si l'on pose

$$(7) \quad M = X + Y, \quad N = X - Y,$$

le système (5) est remplacé par

$$(5') \quad \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u} \operatorname{tang}^2 \omega, \quad \frac{\partial N}{\partial v} = - \frac{\partial M}{\partial v} \operatorname{tang}^2 \omega.$$

L'élimination de N fournit l'équation de Laplace en M que Voss avait déjà formée; mais si l'on pose, comme Darboux,

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

le système (5') équivaut à l'une ou l'autre des équations de Moutard

$$(5'') \quad \mathcal{F}(M \operatorname{tang} \omega) = \mathcal{F}(\operatorname{tang} \omega), \quad \mathcal{F}\left(\frac{N}{\operatorname{tang} \omega}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} \omega}\right),$$

dont on intègre l'une, l'autre fonction N (ou M) s'obtenant ensuite par une quadrature. Ayant ainsi trouvé *une* solution  $\omega$ , puis *un* couple associé à  $\omega$ , (X, Y), la surface V, la surface  $\Sigma$  et la sphère  $\sigma$  sont définies intrinsèquement, la sphère  $\sigma$  servant de représentation sphérique commune à V et  $\Sigma$  de sorte que *les géodésiques de V aient même image que les asymptotiques de  $\Sigma$* . Quand on a déterminé les coordonnées  $c(u, v)$ ,  $c'(u, v)$ ,  $c''(u, v)$  de  $\sigma$ , on a  $\Sigma$  par quadratures (formules de Lelievre), puis V aussi par quadratures : Voss indique pour la surface V les quadratures

$$(8) \quad - \frac{\partial x}{\partial u} \sin 2\omega = \frac{\partial X}{\partial u} \left( \frac{\partial c}{\partial u} + \cos 2\omega \frac{\partial c}{\partial v} \right), \quad - \frac{\partial x}{\partial v} \sin 2\omega = \frac{\partial Y}{\partial v} \left( \frac{\partial c}{\partial u} \cos 2\omega + \frac{\partial c}{\partial v} \right).$$

Voss indique ensuite comment on déterminerait les surfaces V qui sont en même temps surfaces minima (mais sans montrer que l'on ne retrouve ainsi que les deux hélicoïdes que j'ai indiqués plus haut), puis les surfaces V qui sont de révolution.

3. *Résultats de Guichard.* — Soit une surface de Voss, V et les tangentes aux géodésiques  $v = \text{const.}$  de V [désormais j'appellerai courbes ( $u$ ) ou ( $v$ ) celles où  $u$  et  $v$  reste constant, quelle que soit la surface étudiée]; prenons l'une des  $\infty^1$  surfaces trajectoires orthogonales de

cette congruence rectiligne, soit  $G$ ; considérons la congruence  $C$  des tangentes aux courbes  $v$  de  $G$ ; la seconde surface focale de  $C$ , à savoir  $G_1$ , possède avec  $G$  cette propriété que les développables de  $C$ ,  $v = \text{const.}$  et  $u = \text{const.}$ , ont leurs arêtes de rebroussement sur  $G$  (lignes  $v$ ) et sur  $G_1$  (lignes  $u$ ), et que ces arêtes de rebroussement sont lignes de courbure de  $G$  et  $G_1$ ; réciproquement si deux surfaces  $G, G_1$  sont telles que les développables de la congruence  $C$  de leurs tangentes communes découpent sur chacune (par arêtes de rebroussement et par courbes de contact) le réseau des lignes de courbure, la développée de  $G$  (ou  $G_1$ ) relative aux arêtes de rebroussement portées par  $G$  (ou  $G_1$ ) est une surface de Voss  $V$  (ou  $V_1$ ).

La relation entre  $G$  et  $G_1$  est réciproque, ainsi qu'entre  $V$  et  $V_1$ ; sur la surface  $G$ , les lignes  $u, v$  jouent un rôle dissymétrique, mais sur l'ensemble  $G, G_1$  ou  $V, V_1$  les variables  $u, v$  jouent un rôle symétrique. On remarque que  $V$  étant donnée, on obtient  $\infty^1$  surfaces  $G$ , donc  $\infty^1$  surfaces  $V_1$ ; l'une quelconque  $V_1$  des surfaces ainsi obtenues livre aussi  $\infty^1$  surfaces  $V$ , la série obtenue étant indépendante du choix de  $V_1$  parmi les  $\infty^1$  surfaces  $V_1$  et la série  $(V)$  obtenue comprend la surface  $V$  de départ <sup>(1)</sup>. Appelons  $(s)$  l'opération qui fait passer de  $V$  à  $V_1$ ,  $(t)$  l'opération qui fait revenir de  $V_1$  à  $V$ : nous obtenons, par l'application répétée de la méthode de Guichard, une suite infinie de familles  $\infty^1$  de surfaces de Voss:

$$\dots (V_{-2}), (V_{-1}), (V), (V_1), (V_2), \dots, (V_n), \dots,$$

avec la relation symbolique

$$(V_n) = s(V_{n-1}) \quad (V_{n-1}) = t(V_n),$$

valable que  $n$  soit positif, négatif, ou nul. Guichard montre que cela revient à faire sur chaque intégrale connue de l'équation de Moutard

$$(M) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos 2\omega,$$

une opération  $(s)$  ou  $(t)$  qui n'exige que des quadratures;  $\omega$  est solution supposée connue, et fixe au cours de ces opérations de l'équation

---

<sup>(1)</sup> On obtient donc une transformation infinitésimale des surfaces  $V$ .

déjà obtenue

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega.$$

L'équation de Moutard (M) est l'équation de Laplace, tangentielle, relative au réseau conjugué géodésique de V, ou  $V_1, \dots, V_n$ , car toutes ces surfaces sont parallèles entre elles au sens de Peterson suivant le réseau conjugué géodésique.

Cette découverte des propriétés de la congruence C, des surfaces G et de la transformation illimitée des surfaces V dans l'un ou l'autre sens est propre à Guichard, qui avait retrouvé en même temps les résultats de Voss. Guichard part de l'étude du trièdre mobile attaché à la surface G (tangentes principales et normale); je vais reprendre la question en partant directement de V, ce qui a l'avantage de ne pas exiger l'emploi des tableaux relatifs aux formules de Codazzi pour un trièdre mobile et nous verrons plus nettement que dans le mémoire de Guichard les formules relatives aux transformations (s) et (t). Darboux a démontré géométriquement l'existence des propriétés spéciales aux quatre surfaces G,  $G_1$ , V,  $V_1$ ; l'artifice simple employé par Darboux consiste à remarquer qu'une développante d'une courbe  $c$  de V a pour tangente une parallèle  $d$  à la normale principale de  $c$ , donc à la normale de V; cette droite  $d$  est d'ailleurs pour G tangente principale; de même la développante de la courbe  $u$  de V donne une surface  $G'$  (autre que  $G_1$ ) et une droite  $d'$  tangente principale de  $G'$ , parallèle à  $d$ ; *les développables engendrées par  $d$  et  $d'$  se correspondent* et le reste s'en déduit (Darboux, t. 4, p. 106-110 et p. 128-130).

Donnons maintenant la démonstration analytique; nous appelons  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la tangente à la courbe  $c$  de V de sorte que l'on a, si  $x, y, z$  est le point courant M de V,

$$(1) \quad \frac{dx}{du} = \alpha \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{dy}{du} = \beta \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{dz}{du} = \gamma \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Appelons  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  les cosinus directeurs de la normale principale de la courbe  $c$ (<sup>1</sup>); cette droite est normale à V; appelons  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  les

---

(<sup>1</sup>) Je rappelle que le rayon de courbure R d'une courbe n'est pas obligatoi-

cosinus directeurs de la tangente à V en M perpendiculaire sur  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , ou si l'on préfère de la binormale de la courbe  $\nu$  de V. Je rappelle les formes fondamentales de V

$$(2) \quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega du dv + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 dv^2, \\ -(dx_1 dx + d\beta_1 dy + d\gamma_1 dz) = \sin 2\omega \left(\frac{\partial X}{\partial u} du^2 + \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2\right), \\ dx_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2 - du^2 - 2 \cos 2\omega du dv + dv^2, \end{cases}$$

avec les équations complémentaires

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega, \quad \cos 2\omega = \frac{\frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\frac{\partial Y}{\partial v}}.$$

Les formules bien connues, donnant sur une surface définie par ses deux premières formes  $\frac{\cos \theta}{R}$  et  $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$  pour une courbe quelconque, fournissent pour une géodésique ( $\theta = 0$ )  $\frac{1}{R}$  et  $\frac{1}{T}$ ; appliquons ici à la géodésique  $\nu$ ; on a

$$(4) \quad R = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{1}{\sin 2\omega}, \quad T = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{1}{\cos 2\omega}.$$

(Pour la courbe  $u$  on aurait  $R' = \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{1}{\sin 2\omega}$ ,  $T' = -\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{1}{\cos 2\omega}$ , de sorte que  $\frac{T}{R} = -\frac{T'}{R'} = \tan 2\omega$ .) Appliquons, sur la courbe  $\nu$  dont l'arc est X, les formules de Serret-Frenet

$$\frac{d\alpha}{dX} = \frac{\alpha_1}{R}, \quad \frac{d\alpha_1}{dX} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}, \quad \frac{d\alpha_2}{dX} = \frac{\alpha_1}{T}$$

rement positif: une fois fixé un sens positif arbitraire sur la normale principale, si C est le centre de courbure, R est la valeur algébrique de MC; le trièdre formé par la tangente positive, la normale principale et la binormale doit avoir même sens que le trièdre de référence et, avec ces conditions, les formules de Serret-Frenet sont toujours exactes. En étudiant les géodésiques  $\nu$  et  $u$  de V on peut prendre même normale principale; le signe de T est indépendant du sens adopté sur la normale principale.

et multiplions par  $\frac{\partial X}{\partial u}$ ; on a ainsi

$$(5) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \alpha_1 \sin 2\omega, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\alpha \sin 2\omega = \alpha_2 \cos 2\omega, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \alpha_1 \cos 2\omega,$$

Les relations

$$\mathbf{S} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = \left( \frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2, \quad \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega, \quad \mathbf{S} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

données par le  $ds^2$  de V et la conjugaison  $(u, v)$  donnent, tenant compte de (1),

$$(6) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (\alpha \cos 2\omega - \alpha_2 \sin 2\omega) \frac{\partial Y}{\partial v},$$

de sorte que le trièdre analogue de Serret-Frenet pour la courbe  $u$  de V est

$$(7) \quad \alpha \cos 2\omega - \alpha_2 \sin 2\omega, \quad \dots; \quad \alpha_1, \quad \dots; \quad \alpha \sin 2\omega + \alpha_2 \cos 2\omega, \quad \dots$$

On sait que la relation

$$d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2 = du^2 - 2 \cos 2\omega du dv + dv^2,$$

entraîne que  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  soient chacun solution de l'équation de Moutard

$$(M) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos 2\omega.$$

Il s'agit maintenant de calculer  $\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial v}$ . Nous commençons par  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}$ ; on a

$$\mathbf{S} \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} \alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = 0;$$

cela prouve que  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}, \frac{\partial \beta_1}{\partial v}, \frac{\partial \gamma_1}{\partial v}$  sont proportionnels à  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  et, puisque l'on a

$$\mathbf{S} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = -\mathbf{S} (\alpha \sin 2\omega + \alpha_2 \cos 2\omega) \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = -\cos 2\omega,$$

on a

$$(8) \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} = \alpha_2, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} = \beta_2, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \nu} = \gamma_2$$

et ceci suffit pour retrouver

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial \nu} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \alpha_1 \cos 2\omega.$$

Maintenant, pour calculer  $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ , remarquons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} (\alpha_1 \sin 2\omega) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} \sin 2\omega + 2\alpha_1 \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial \nu},$$

mais ceci peut encore s'écrire

$$2\alpha_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial \nu} + 2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( 2\alpha_2 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right).$$

On a donc

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 2\alpha_2 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} + V_1, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 2\beta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} + V_2, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = 2\gamma_2 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} + V_3,$$

où  $V_1, V_2, V_3$  sont certaines fonctions de  $\nu$  seul. Mais l'on a  $\sum \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \alpha = 0$ , d'où l'on déduit

$$V_1 \alpha + V_2 \beta + V_3 \gamma = 0.$$

En dérivant par rapport à  $u$  on a

$$V_1 \alpha_1 + V_2 \beta_1 + V_3 \gamma_1 = 0.$$

En dérivant encore une fois par rapport à  $u$ , on a

$$V_1 \alpha_2 + V_2 \beta_1 + V_3 \gamma_1 = 0,$$

donc  $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ . On a donc  $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$  et la relation

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} + \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} + \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \nu} = 0,$$

donne  $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \nu}$ . On a ainsi retrouvé tous les résultats de Guichard : je

récapitule

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (\alpha \cos 2\omega - \alpha_2 \sin 2\omega) \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = \alpha_1 \sin 2\omega, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = -\alpha \sin 2\omega - \alpha_2 \cos 2\omega, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u} = \alpha_1 \cos 2\omega, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = 2\alpha_2 \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \alpha_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial v} = -2\alpha \frac{\partial \omega}{\partial v} - \alpha_1, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega, \quad \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u \partial v} = \cos 2\omega. \end{array} \right.$$

Considérons maintenant la surface G lieu du point

$$(9) \quad x_1 = x - Xz, \quad y_1 = y - Xz, \quad z_1 = z - Xz.$$

En se rappelant  $\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega$ , on a, d'après (T),

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial u} = -X\alpha_1 \sin 2\omega, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\alpha_2 \left[ \sin 2\omega \frac{\partial Y}{\partial v} + 2X \frac{\partial \omega}{\partial v} \right], \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) = -\alpha_1 \left[ \frac{\partial X}{\partial v} \sin 2\omega + 2X \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \right] - \alpha_2 X \sin 2\omega. \end{array} \right.$$

Ces formules montrent que le système  $(u, v)$  est rectangulaire et conjugué sur G : la surface G est rapportée à ses lignes de courbure. En écrivant que  $\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_1}{\partial v} \right)$  coïncide avec l'expression déjà obtenue pour  $\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}$ , on voit qu'en posant

$$(11) \quad 2\rho = \sin 2\omega \frac{\partial Y}{\partial v} + 2X \frac{\partial \omega}{\partial v} = \tan 2\omega \frac{\partial X}{\partial v} + 2X \frac{\partial \omega}{\partial v},$$

on a

$$(12) \quad 2 \frac{\partial \rho}{\partial u} = X \sin 2\omega,$$

[ Comme vérification, on trouverait aisément que (12) est l'équation de Laplace vérifiée par X d'après

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v} \cos 2\omega, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{\cos 2\omega} \frac{\partial X}{\partial v} ] .$$

Une nouvelle dérivation de (12) fournit

$$(13) \quad 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \sin 2\omega + 2X \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} = 2\rho \cos 2\omega,$$

de la sorte l'équation de Moutard (M) qui admet pour solutions  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  admet aussi  $\rho$  pour solution: c'est l'équation tangentielle de Laplace relative au système conjugué de V. Si nous étudions maintenant la surface  $G_1$  lieu du point

$$(14) \quad x_2 = x_1 + 2\alpha_1\rho, \quad y_2 = y_1 + 2\beta_1\rho, \quad z_2 = z_1 + 2\gamma_1\rho,$$

nous trouvons aisément

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\rho(\alpha_1 \sin 2\omega + \alpha_2 \cos 2\omega), & \frac{\partial x_2}{\partial v} = 2\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} = -2\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial u}, & \frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\rho\alpha_2. \end{cases}$$

Ces formules (15) montrent que la surface  $G_1$  est la seconde nappe focale de la congruence C engendrée par les tangentes aux lignes de courbure  $v$  de G et que  $G_1$  est aussi rapportée à ses lignes de courbure.

Le surface V est l'enveloppe du plan

$$(16) \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r.$$

on a d'ailleurs aussi

$$(16') \quad r = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1.$$

Par dérivation de (16') on trouve aussitôt

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial v} = \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = \cos 2\omega (\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) = r \cos 2\omega, \\ \frac{\partial r}{\partial u} = -\sin 2\omega (\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) - \cos 2\omega \frac{\partial r}{\partial v} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial v} (\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) - 2\rho - r. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que la surface  $V_1$  est l'enveloppe du plan

$$(18) \quad \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2 = r + 2\rho = r_1.$$

Puisque  $r$  et  $\rho$  sont solutions de (M), il en est de même de  $r_1$ : cette détermination de  $r_1$  en fonction de  $r$  suffit à déduire la surface de Voss  $V_1$  de V. Or si nous posons

$$(19) \quad \mu = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1,$$

nous trouvons immédiatement les formules

$$(s) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial u} = r \sin 2\omega, & \frac{\partial \mu}{\partial v} = 2 \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ r_1 = -2\mu \frac{\partial \omega}{\partial v} - \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}, & \frac{\partial r_1}{\partial u} = -\mu \sin 2\omega - \cos 2\omega \frac{\partial r}{\partial v}, \end{cases}$$

qui définissent la substitution  $r_1 = s(r)$  annoncée par Guichard; les deux premières formules (s) ont été obtenues par dérivation de (19) et les deux dernières formules (s) ne sont autres que les deux dernières formules (17); quand  $r$  solution de (M) est connue,  $\mu$  se calcule par une quadrature de différentielle totale et  $r_1$  s'obtient par la troisième formule (s). Naturellement si G est connue (ce qui exige d'avoir calculé X par une quadrature au fond équivalente à celle qui donne  $\mu$ ) on a  $\mu$  par l'équation finie (19); de même si l'on a calculé  $\mu$  le premier, on a X sans quadrature, car  $\mu + X = \alpha x + \beta y + \gamma z$ . L'interprétation de  $2\rho$  est aisée: c'est la distance des points focaux de la droite générale de la congruence C pendant que  $2\omega$  est l'angle des plans focaux. La constante qui figure dans  $\mu$  sous forme additive (et par suite aussi dans X, puisque la somme  $\mu + X$  ne contient plus de constante) remplace G par une surface parallèle.

La relation entre V et  $V_1$  est réciproque: à condition de permuter  $u$  et  $v$ , nous devons obtenir des formules analogues pour la transformation (7) qui de  $r_1$  fait dériver  $r$ . Écrivons donc

$$(20) \quad r_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2.$$

Par dérivations nous avons

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial u} = -S(z \sin 2\omega + z_2 \cos 2\omega) x_2, \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} = S z_2 x_2 + 2 \frac{d\rho}{dv}, \\ \frac{\partial^2 r_1}{\partial u^2} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial u} S x_2 (z \cos 2\omega - z_2 \sin 2\omega) + 2\rho - r_1 \\ \quad = -2 \frac{\partial \omega}{\partial u} S x_2 (z \cos 2\omega - z_2 \sin 2\omega) - r. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(22) \quad \mu_1 = S x_2 (z \cos 2\omega - z_2 \sin 2\omega),$$

on trouve aussitôt

$$(t) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial u}, & \frac{\partial \mu_1}{\partial v} = r_1 \sin 2\omega, \\ r = -\frac{\partial^2 r_1}{\partial u^2} - 2\mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial u}. \end{cases}$$

La substitution (t), comme cela devait être, se déduit bien de (s) en permutant  $u$  et  $v$ ,  $r$  et  $r_1$ .

L'égalité  $\frac{\partial r_1}{\partial v} = \int z_2 x_2 + 2 \frac{\partial \rho}{\partial v}$  peut s'écrire

$$\frac{\partial r}{\partial v} = S z_2 x_2 = -\mu_1 \sin 2\omega - \cos 2\omega \frac{\partial r_1}{\partial u},$$

ce qui donne bien l'équivalent de la dernière formule (s).

Dans mon mémoire (GaA) j'ai ajouté quelques propriétés géométriques à celles qu'indique Darboux.

4. *Résumé du mémoire (GaA)*. — Déformer une surface quelle qu'elle soit revient au fond à trouver la solution générale ( $\partial$ ,  $\partial'$ ,  $\partial''$ ) des trois équations de Gauss-Codazzi satisfaites par les coefficients de la seconde forme quadratique

$$\partial du^2 + 2\partial' du dv + \partial'' dv^2 \equiv -Sdc dx.$$

Or l'une de ces équations est en termes finis et donne  $\partial\partial'' - \partial'^2$ ; les deux autres sont linéaires, de sorte que si deux surfaces représentatives  $S_1, S_2$  sont connues et fournies par  $(\partial_1, \partial'_1, \partial''_1), (\partial_2, \partial'_2, \partial''_2)$  la combinaison  $h\partial_1 + k\partial_2, h\partial'_1 + k\partial'_2, h\partial''_1 + k\partial''_2$  fournit une solution de ces deux équations linéaires, quelles que soient les constantes  $h, k$ . Mais alors, peut-on obtenir par cette combinaison une solution de la première? La réponse est immédiate: *il faut et suffit que l'expression  $\partial_1\partial''_2 + \partial''_1\partial_2 - 2\partial'_1\partial'_2$  soit égale identiquement à  $m(\partial_1\partial''_1 - \partial'^2_1)$ , où  $m$  est une nouvelle constante; et si cela a lieu,  $h$  et  $k$  doivent simplement vérifier la relation numérique  $h^2 + k^2 + mhk = 1$ : cela prouve qu'il y a  $\infty^1$  déformées avec réseau conjugué permanent: mais jusqu'ici rien ne renseigne sur la nature de ce réseau. Pour simplifier la recherche, on remarque que remplacer le couple  $S_1, S_2$  par le couple  $S_1$  et  $\bar{S}_2$  où  $\bar{S}_2$  est fournie par la solution  $h_0\partial_1 + k_0\partial_2, \dots$  change la valeur de  $m$  et permet d'annuler  $m$  en choisissant  $h_0, k_0$  de façon à avoir*

$$h_0^2 + k_0^2 + mh_0k_0 = 1, \quad 2h_0 + k_0m = 0,$$

ce qui au fond ne donne qu'une surface (à une symétrie ou déplacement près) dite *adjointe* à  $S_1$  tandis que les autres sont *associées*; or l'existence d'une famille  $\infty^1$  de surfaces associées à  $S_1$  au sens employé ici est strictement équivalente à l'existence d'une surface associée : donc la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des surfaces cherchées est que *les surfaces  $S_1, \bar{S}_2$  soient applicables et qu'aux asymptotiques de chacune corresponde sur l'autre deux familles conjuguées* (autrement dit que les deux surfaces soient *adjointes*). Il suffit alors de choisir pour réseau paramétrique le réseau conjugué de  $S_1, \bar{S}_2$  (choix naturel puisque nous avons reconnu *avant tout autre recherche* que ce réseau est permanent) pour constater, avec une certaine surprise, que ce réseau est *géodésique* et que, par suite, nous avons retrouvé les surfaces de Voss.

Il y a maintenant des résultats intéressants à donner au point de vue réel, toujours sans avoir à poursuivre davantage la détermination de nos surfaces. Il faut d'ailleurs faire cette critique à beaucoup de recherches géométriques que le point de vue réel est trop peu abordé et je dois d'abord m'expliquer sur ce point : nous avons ici, par exemple, des surfaces définies par un réseau géodésique conjugué : le premier chercheur, Voss, déclare : « Je vais donc supposer ce réseau réel ». Ce n'est pas, à mon sens, un point de vue justifié, même au point de vue réel, car si une surface  $V$  est réelle, le réseau géodésique en jeu est ou composé de courbes réelles ou de courbes imaginaires conjuguées (Voss s'empresse d'ailleurs de faire remarquer que les surfaces minima sont un exemple de surfaces  $V$ , les courbes minima étant des géodésiques *exceptionnelles* : dans les équations écrites jusqu'ici, elles ne figurent pas, précisément à cause de ce caractère exceptionnel, les variables  $X$  ou  $Y$  du cas général signifiant l'arc des géodésiques à condition que ces géodésiques ne soient pas minima). Or l'hélicoïde minimum réel admet  $\infty^1$  réseaux de Voss que l'on peut définir ainsi : transformons l'hélicoïde par déformation continue (réelle) en le caténoïde et traçons sur le caténoïde un parallèle *arbitraire* : les géodésiques *tangentes à ce parallèle* sont un réseau de Voss de l'hélicoïde; le parallèle partage le caténoïde en deux régions : sur l'une les géodésiques sont réelles, sur l'autre elles sont imaginaires (imaginaires conjuguées en un point réel); se borner au cas des géo-

désiques réelles reviendrait donc à supprimer sur l'hélicoïde minimum l'une des deux régions et les *déformées réelles* correspondant à cette région, déformées qui sont des hélicoides pour lesquels la transformée du parallèle en jeu du caténoïde est une hélice circulaire arête de rebroussement.

D'autre part les asymptotiques jouent aussi un grand rôle ici, surtout si l'on se borne aux surfaces adjointes (point de vue de M. Eisenhart) : si les asymptotiques sont imaginaires, M. Eisenhart écarte les surfaces correspondantes, même réelles, du moins dans son premier mémoire ; mais alors le réseau conjugué est réel et Voss accepte la surface (<sup>1</sup>). Si au contraire le réseau de Voss est imaginaire, les asymptotiques sont réelles, Voss rejette la surface et M. Eisenhart la conserve (du moins dans son premier mémoire tandis qu'il la rejette dans le second). Il n'y a qu'un cas où la surface ne se trouve pas rejetée : c'est celui où les asymptotiques et le réseau de Voss sont tous deux réels : l'hélicoïde minimum a été partagé en deux régions dont l'une satisfait aux deux dernières conditions. L'hélicoïde minimum imaginaire donne des déformées hélicoïdales réelles, applicables sur la développée du caténoïde, et ces surfaces ont un réseau de Voss réel, tandis que les asymptotiques sont imaginaires.

Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à des distinctions de cette nature, mais à préciser le caractère de réalité des géodésiques, ou des asymptotiques et éventuellement la séparation en régions d'une surface de Voss. Le scrupule qui a arrêté les géomètres est que les équations aux dérivées partielles rencontrées ici telles que  $\omega_{uv} = \sin \omega \cos \omega$  sont du type hyperbolique si  $u, v$  sont réelles, du type elliptique si  $u, v$  sont imaginaires conjuguées et que les conditions d'existence des intégrales ou les propriétés des surfaces changent suivant le cas. Mais en réalité, les géomètres ne supposent-ils pas implicitement (du moins jusqu'ici) toutes les conditions d'analyticité voulues de sorte que les variables employées puissent indifféremment balayer le champ réel et le champ complexe ?

Supposons  $S_1$  et  $S_2$  associées et réelles ; l'adjointe n'est réelle que si le nombre  $|m|$  déterminé par  $S_1$  et  $S_2$  est inférieur à 2 ; elle est imagi-

---

(<sup>1</sup>) Et alors M. Eisenhart, dans un second Mémoire, accepte la surface.

naire si  $|m| > 2$ ; le cas de  $m = \pm 2$  est impossible. On voit aussitôt que si  $|m| < 2$ ,  $S_1$  et  $S_2$  réelles se recouvrent, dans leur applicabilité, sur une étendue  $\mathcal{E}$  réelle qui ne peut être nulle (qui est la totalité ou une fraction de  $S_1$ , la totalité ou une fraction de  $S_2$ ) et que la variation réelle de  $h, k$  liés par la relation

$$h^2 + m h k + k^2 = 1$$

(relation du type ellipse) donne  $\infty^1$  surfaces de Voss donnant chacune une représentation complète de  $\mathcal{E}$  de sorte que, finalement, si l'étendue  $\mathcal{E}$  n'est qu'une fraction de  $S_1$ , elle est la totalité de toutes les autres surfaces associées; de plus la courbure totale, en tout point de  $\mathcal{E}$ , est nécessairement négative, parce que l'on peut passer par continuité du couple  $(h, k)$  au couple  $(-h, -k)$ , c'est-à-dire remplacer  $S$  par une surface symétrique, et par déformation continue. Le réseau de Voss est *imaginaire*.

Si au contraire  $|m| > 2$ , chaque surface réelle a une adjointe *imaginaire*; mais il existe encore  $\infty^1$  déformées réelles de  $S_1$  et  $S_2$  données par la relation

$$h^2 + m h k + k^2 = 1,$$

du type hyperbolique. L'étendue  $\mathcal{E}$  existe encore avec les mêmes propriétés pour le recouvrement complet; mais on ne peut plus rien dire pour la courbure totale, le réseau de Voss est *réel*. J'ai démontré ces résultats, pages 87-88 et 93-95 de mon mémoire (GaA), avant toute détermination de surface V. Mon mémoire (GaB) donne confirmation de ces prévisions par les résultats relatifs aux déformées réelles des deux hélicoïdes minimum.

Je m'occupe ensuite de déterminer toutes les surfaces de Voss hélicoïdales ou révolutives, ou simplement applicables sur une surface de révolution. On trouve ainsi des surfaces hélicoïdales dépendant (outre d'un paramètre de *grandeur*) de *trois* paramètres de *forme*, ces trois paramètres se réduisant à *deux* si la surface devient de révolution.

Il est bien clair que les deux hélicoïdes minima sont  $\infty^1$  fois surfaces de Voss; en effet l'hélicoïde minimum réel admet pour *adjointes* au sens de ce travail le caténoïde et les déformées révolutives du caté-

noïde, puisque les asymptotiques rectilignes se transforment en les méridiens et les asymptotiques curvilignes en les parallèles (même remarque pour l'hélicoïde minimum imaginaire, les adjointes étant la développée du caténoïde et ses déformées révolutives). Chaque choix d'adjointe donne un réseau de Voss, qui *varie avec l'adjointe* (car un réseau conjugué ne peut être conjugué que sur  $\infty^1$  déformées; et deux déformées révolutives n'ont comme réseau conjugué commun que celui des méridiens et parallèles, qui n'est pas réseau de Voss). Les déformées hélicoïdales de ces deux hélicoïdes dépendent de deux paramètres de forme (le paramètre de grandeur revient à remplacer l'hélicoïde minimum par un hélicoïde homothétique); donc parmi les hélicoïdes trouvés comme surfaces de Voss nous trouvons d'abord ceux qu'une réflexion *a priori* fait dériver des hélicoïdes minima, puis d'autres. Or mon mémoire (GaB), rédigé postérieurement à celui des *Acta*, mais imprimé avant, m'a permis de rectifier l'omission que je faisais aux *Acta* en ne reconnaissant pas les hélicoïdes minima et leurs déformées comme cas particuliers des surfaces trouvées. Cette omission s'explique en partie si l'on songe que, de parti pris, chaque surface de Voss est rapportée à son réseau géodésique: on a donc ici pour les deux hélicoïdes minima  $\infty^1$  formes différentes du  $ds^2$ , formes autres que la forme révolutive. J'ai montré, au mémoire (GaB), que le parallélisme de Peterson permet de déduire de l'un quelconque des hélicoïdes minima et de ses déformées tous les hélicoïdes de Voss (répartis donc en trois catégories). Mon mémoire (GaB) prouve aussi que si un  $ds^2$  de révolution admet  $\infty^1$  représentations hélicoïdales avec réseau conjugué permanent (autres que les surfaces révolutives) ces hélicoïdes sont surfaces de Voss.

Au point de vue de la réalité l'hélicoïde minimum réel  $H$  n'est recouvert par une déformée *révolutive* réelle  $R$  que sur une fraction  $H_1$ ;  $R$  est limité par un parallèle de rebroussement; la déformation  $(H_1, R)$  fournit donc  $\infty^1$  surfaces de Voss hélicoïdales, limitées par une hélice circulaire arête de rebroussement: chacune associée, à  $H_1$ , donne un nombre  $m$ , tel que  $|m| < 2$  et le réseau géodésique est imaginaire sur  $H_1$  et  $R$  et les déformées; mais alors la région complémentaire  $H_2$  admet pour adjointe la nappe *imaginaire* de  $R$ , que j'appellerai  $R'$ , où deux coordonnées sont réelles et la troisième imaginaire pure: la

déformation  $(H_2, R')$  fournit  $\infty^1$  déformées hélicoïdales *réelles*, limitées encore par une hélice circulaire arête de rebroussement; chacune associée à  $H_2$  donne un nombre  $|m| > 2$  et le réseau géodésique est réel. (Quand  $m$  varie de 0 à  $+\infty$ , la valeur  $m = 2$  fournit simplement l'hélicoïde minimum H.) On ferait une discussion analogue mais plus simple pour l'hélicoïde minimum imaginaire et ses adjointes *réelles*, le nombre  $|m|$  est supérieur à 2 et le réseau conjugué est réel.

Comme surface de Voss à  $ds^2$  de révolution, sans être hélicoïdale ni révolutive, on ne trouve (à une homothétie près) qu'une surface dépendant de *trois* paramètres de forme, admettant une auto-application continue où le réseau de Voss reste conjugué (de sorte que dans son ensemble cette surface coïncide avec ses  $\infty^1$  associées).

La méthode que j'ai suivie permet de retrouver simplement une propriété que Voss indique pour les *surfaces minima ayant un système conjugué géodésique autre que le réseau de longueur nulle*; mais Voss n'indique pas qu'une telle surface se réduit nécessairement à l'un des deux hélicoïdes minima; *par parallélisme de Peterson, quand l'un de ces hélicoïdes est rapporté à l'un de ses  $\infty^1$  systèmes conjugués de Voss, on en déduit un hélicoïde à courbure totale positive pour lequel le réseau de Voss (unique cette fois) est tangent en chaque point aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice (ici elliptique)*. J'indique synthétiquement le résultat: on peut obtenir un cas particulier des surfaces de Voss en écrivant soit

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = [f(u+v) + \varphi(u-v)]^2 (du^2 + dv^2) \\ \quad + 2[f^2(u+v) - \varphi^2(u-v)] du dv, \\ dX = f(u+v)(du+dv) + \varphi(u-v)(du-dv) \\ dY = f(u+v)(du+dv) - \varphi(u-v)(du-dv) \\ d\sigma^2 = du^2 + dv^2 - 2 \frac{f-\varphi}{f+\varphi} du dv, \end{cases} \quad \cos 2\omega = \frac{f-\varphi}{f+\varphi},$$

soit (en mettant pour plus de clarté l'indice 1)

$$(2) \quad \begin{cases} ds^2 = [f_1(u+v) + \varphi_1(u-v)](du^2 + dv^2) \\ \quad + 2[f_1^2(u+v) - \varphi_1^2(u-v)] du dv, \\ dX = f_1(u+v)(du+dv) + \varphi_1(u-v)(du-dv) \\ dY = -f_1(u+v)(du+dv) + \varphi_1(u-v)(du-dv) \\ d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + 2 \frac{f_1 - \varphi_1}{f_1 + \varphi_1} du dv. \end{cases} \quad \cos 2\omega = \frac{-f_1 + \varphi_1}{f_1 + \varphi_1},$$

Naturellement, dans chaque cas il faut choisir  $\omega$  de façon à avoir

$$\omega_{uv} = \sin \omega \cos \omega$$

et cela fixe la valeur des fonctions  $f(u + v)$ ,  $\varphi(u - v)$  ou  $f_1(u + v)$ ,  $\varphi_1(u - v)$ ; mais on voit aussitôt qu'à chaque solution de (1) ou (2) correspond une solution de l'autre, en prenant

$$(3) \quad f_1 f \equiv 1, \quad \varphi_1 \varphi \equiv 1,$$

de façon que l'angle  $\omega$  soit le même dans les deux cas. Or l'hélicoïde minimum (réel ou imaginaire) nous fournit  $\infty^1$  réductions du type (2); le type (2) fournit évidemment des surfaces minima puisque  $ds^2$  et  $d\sigma^2$  sont proportionnels [d'ailleurs l'équation qui fournit les rayons de courbure principaux est dans chaque cas

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \sin 2\omega - \left( \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v} \right) R + R^2 \sin 2\omega = 0].$$

Nous savons aussi que les rayons de courbure des géodésiques  $u, v$ , ou des sections normales tangentes sont  $\frac{\partial X}{\partial u} \frac{1}{\sin 2\omega}$  et  $\frac{\partial Y}{\partial v} \frac{1}{\sin 2\omega}$ , et ceci suffit à justifier l'énoncé donné plus haut. Or mon mémoire (GaB) donne les formes (2) relatives à l'hélicoïde minimum réel [avec les formes analogues relatives à l'hélicoïde minimum imaginaire on épuise les cas possibles du type (2)]; je ne ferai pas le calcul pour le second hélicoïde qui ne donne que des surfaces imaginaires. On peut, au moyen d'une constante *arbitraire*  $\lambda$  écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = -\frac{1 + \lambda^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2 - \lambda^2}{3}, \quad e_3 = \frac{2\lambda^2 - 1}{3}, \\ e_2 - e_1 = 1, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ p(u + v) - e_1 = \operatorname{ch}^2 \alpha, \quad p(u + v) - e_2 = \operatorname{sh}^2 \alpha, \\ p(u + v) - e_3 = \operatorname{ch}^2 \alpha - \lambda^2 \\ 2\sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)} d(u + v) = 2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha dz, \\ d(u + v) = \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \lambda^2}}, \quad d(u - v) = -\frac{d\beta}{\lambda}, \\ 2 du = \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \lambda^2}} - \frac{d\beta}{\lambda}, \quad 2 dv = \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \lambda^2}} + \frac{d\beta}{\lambda}, \\ dz^2 = (p - e_3)(du + dv)^2, \quad d\beta^2 = (e_3 - e_1)(du - dv)^2, \end{array} \right.$$

De la sorte, si l'on se rappelle que l'hélicoïde minimum H donne

$$(5) \quad \begin{cases} x = \operatorname{sh} z \cos \beta, & y = \operatorname{sh} z \sin \beta, & z = \beta, \\ ds^2 = \operatorname{ch}^2 z (dx^2 + d\beta^2), & d\sigma^2 = \frac{dx^2 + d\beta^2}{\operatorname{ch}^2 z}, \\ ds^2 = (p - e_1) [(p - e_1) (du^2 + dv^2) + 2(p + e_1 - 2e_3) du dv], \\ d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + 2 \frac{p + e_1 - 2e_3}{p - e_1} du dv, \end{cases}$$

nous avons des expressions de la forme (2) avec

$$(6) \quad f_1 \equiv p(u + v) - e_3, \quad \varphi_1 \equiv e_3 - e_1.$$

Nous aurons donc la surface annoncée par Voss en écrivant

$$(7) \quad f \equiv \frac{1}{p(u + v) - e_3}, \quad \varphi \equiv \frac{1}{e_3 - e_1};$$

$$(8) \quad \begin{cases} ds^2 = \left( \frac{1}{p - e_3} + \frac{1}{e_3 - e_1} \right) \left[ \left( \frac{1}{p - e_3} + \frac{1}{e_3 - e_1} \right) (du^2 + dv^2) \right. \\ \quad \left. + 2 \left( \frac{1}{p - e_3} - \frac{1}{e_3 - e_1} \right) du dv \right], \\ d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + 2 \frac{(p + e_1 - 2e_3)}{p - e_1} du dv. \end{cases}$$

La surface ainsi obtenue (X, Y, Z) peut se déduire de l'hélicoïde H par parallélisme en écrivant

$$(9) \quad dX = \frac{1}{(e_3 - e_1)(p - e_3)} \left[ \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \right], \quad dY = \dots, \quad dZ = \dots$$

On constate que l'on trouve pour surface (8) une surface de révolution, car l'équation des asymptotiques,  $du^2 + dv^2 = 0$ , ne change pas si l'on remplace  $u$  et  $v$  par  $u - h$  et  $v + h$ , non plus que le  $ds^2$  de la surface : la surface est donc hélicoïdale (ou révolutive); l'équation des lignes de courbure  $du^2 - dv^2 = 0$  ne changeant pas non plus et la courbure totale ne dépendant que de  $u + v$ , on voit que la surface est de révolution; sur l'hélicoïde H les lignes asymptotiques ont pour équation  $du^2 - dv^2 = 0$  de sorte qu'elles ont pour homologue sur la nouvelle surface les lignes de courbure (réseau conjugué); inversement les asymptotiques de la nouvelle surface ont pour homologue sur l'ancienne un réseau conjugué. La surface (8) se trouve obtenue,

au milieu d'autres, dans mon mémoire (GaA) (p. 100), et signalée aussi dans mon mémoire (GaB) [formule (17) du paragraphe 5, où l'on fait  $A = 0$ ].

J'ai ensuite étudié la déformation au sens de Gauss de la surface  $V$  en nouvelle surface de Voss; à  $V$  correspond par plans tangents parallèles la sphère unité  $\sigma$ , puis une surface à courbure totale constante  $\Sigma$ ; sur  $\Sigma$ , le réseau  $(u, v)$  est devenu asymptotique, de sorte que, pour la réalité, il y aurait à prendre suivant le cas  $\Sigma$  de courbure totale égale à  $+1$  [réseau  $(u, v)$  imaginaire] ou  $-1$  [réseau  $(u, v)$  réel]; pour ne pas compliquer les formules on peut toujours, au moyen d'une homothétie de rapport  $i$  éventuelle, se borner au cas où  $\Sigma$  a pour courbure  $-1$ , de sorte que les éléments de  $\sigma$  et  $\Sigma$  sont

$$(10) \quad (\sigma) \quad du^2 + dv^2 - 2 \cos 2\omega \, du \, dv,$$

$$(11) \quad (\Sigma) \quad du^2 + dv^2 + 2 \cos 2\omega \, du \, dv.$$

La surface  $V$  est l'enveloppe du plan

$$(12) \quad cx + c'y + c''z = \theta,$$

où  $c, c', c''$  sont trois solutions de l'équation de Moutard

$$(M) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos 2\omega,$$

telles que, de plus,

$$(13) \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Pour obtenir  $c, c', c''$ , il faut donc intégrer le système complètement intégrable

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \left[ -\theta + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \log(\sin 2\omega) + \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \right] = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \theta \cos 2\omega = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \left[ -\theta + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \log(\sin 2\omega) + \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] = 0, \end{cases}$$

système dont la résolution revient à une équation de Riccati.

Déformer la surface  $V$  en une nouvelle surface  $V_1$  revient à trouver une nouvelle représentation sphérique  $(c_1, c'_1, c''_1)$  et une nouvelle

surface  $\Sigma_1$  donnant les éléments

$$\begin{aligned} (\sigma_1) \quad & t^2 du^2 + \frac{dv^2}{t^2} - 2 \cos 2\omega du dv, \\ (\Sigma_1) \quad & t^2 du^2 + \frac{dv^2}{t^2} + 2 \cos 2\omega du dv, \end{aligned}$$

où  $t$  est une constante réelle si le réseau  $(u, v)$  est réel, ou imaginaire et de module égal à 1 si le réseau  $(u, v)$  est imaginaire. Si l'on pose

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1(\theta, t) &\equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \left[ -t^2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \log(\sin 2\omega) + \frac{2t^2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \right], \\ E(\theta) &\equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \theta \cos 2\omega, \\ E_2(\theta, t) &\equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \left[ -\frac{\theta}{t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \log(\sin 2\omega) + \frac{2}{t^2 \sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right], \end{aligned} \right.$$

$c_1, c'_1, c''_1$  sont trois intégrales du système

$$(16) \quad E_1(\theta, t) = 0, \quad E = 0, \quad E_2(\theta, t) = 0,$$

et  $\theta_1$  une intégrale du système

$$(17) \quad \frac{1}{t} E_1(\theta_1, t) = E_1(\theta, t), \quad E(\theta_1) = 0, \quad t E_2(\theta_1, t) = E_2(\theta, t),$$

où il est entendu qu'au second membre des équations (17) la fonction  $\theta$  est celle qui figure dans l'équation (12) pour définir la surface initiale  $V$ . *Enfin la surface  $\Sigma$  est remplacée par l'une de celles qui lui correspondent dans la transformation de Bonnet-Lie.*

Dans la dernière partie de mon mémoire je montre enfin comment des surfaces minima on peut déduire des surfaces de Voss voisines qui ne sont plus minima.

5. *Premier mémoire (E<sub>1</sub>) de M. Eisenhart.* — J'ai expliqué comment M. Eisenhart cherche un couple de surfaces applicables  $(S, S_1)$  telles que les asymptotiques de chacune aient pour homologues sur l'autre un réseau conjugué. Je ne m'imposerai pas, pour l'exposé des conséquences, à la restriction que les asymptotiques soient réelles (elles sont bien entendu simultanément réelles ou simultanément imaginaires sur  $S$  et  $S_1$ , puisque la courbure totale se conserve).

Le couple obtenu par M. Eisenbart se compose d'une première surface de Voss, soit  $S$  et de son adjointes  $S_1$ . Une première question se pose : *comment, étant donnée une surface  $S$ , reconnaître si  $S$  est surface de Voss, puis trouver les surfaces associées, en particulier adjointes?* Je suppose  $S$  rapportée à un système curviligne  $(\alpha, \beta)$  quelconque et j'appelle  $E, F, G, \delta, \delta', \delta''$  les coefficients des deux premières formes quadratiques; il suffit que  $S$  possède une adjointe, c'est-à-dire que l'on puisse trouver un ensemble de trois nouvelles fonctions  $\delta_1, \delta'_1, \delta''_1$  solutions des trois équations de Gauss-Codazzi et de l'équation complémentaire

$$(1) \quad \delta \delta''_1 + \delta'' \delta_1 - 2 \delta' \delta'_1 = 0.$$

*Or ce problème se traite uniquement par dérivations (pour les conditions de possibilité) et par des calculs algébriques (pour l'obtention de  $\delta_1, \delta'_1, \delta''_1$ , si le nombre de solutions est 1 ou 2). Au cas où il existe plus de deux adjointes (non réductibles l'une à l'autre par symétrie ou déplacement), on sait que la surface est l'un des deux hélicoïdes minima (fait que l'on sait reconnaître : surface minima d'une part, surface réglée de l'autre). Nous écartons le cas des deux hélicoïdes en question : donc on sait trouver algébriquement — en cas de possibilité — l'unique solution  $\delta_1, \delta'_1, \delta''_1$  (ou les deux systèmes de solutions). Mais alors le réseau de Voss est déterminé (intrinsèquement) par l'équation*

$$(2) \quad \begin{vmatrix} dx^2 & -dx d\beta & d\beta^2 \\ \delta'' & \delta' & \delta \\ \delta''_1 & \delta'_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

et il est composé de géodésiques : soit  $A d\alpha + B d\beta = 0$  l'un des facteurs de décomposition de (2). On détermine la valeur de  $\lambda$  telle que la forme

$$(3) \quad ds^2 - \lambda (A d\alpha + B d\beta)^2,$$

soit un carré parfait  $(m d\alpha + n d\beta)^2$  et alors  $m d\alpha + n d\beta$  est une différentielle totale exacte : c'est la fonction  $X$  qui donne l'arc des géodésiques de la famille en jeu, de même que l'autre facteur  $A_1 d\alpha + B_1 d\beta$  conduira à la différentielle analogue  $m_1 d\alpha + n_1 d\beta$  qui donne  $Y$ . *L'angle  $2\omega$  des courbes du réseau conjugué géodésique (2) est donc connu explicitement au moyen de  $\alpha$  et  $\beta$ .*

Écrivons maintenant, avec les notations employées jusqu'ici les formes fondamentales  $F_1, F_2, F_3$  de  $S$

$$(4) \quad \begin{cases} F_1 \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \cos 2\omega du dv + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 dv^2, \\ F_2 \equiv \sin 2\omega \left(\frac{\partial X}{\partial u} du^2 + \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2\right), \\ F_3 \equiv du^2 + dv^2 - 2 \cos 2\omega du dv. \end{cases}$$

Les formes d'une surface associée sont, avec une constante  $t$  arbitraire

$$(5) \quad \begin{cases} F'_1 \equiv F_1, \\ F'_2 \equiv \sin 2\omega \left(t \frac{\partial X}{\partial u} du^2 + \frac{1}{t} \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2\right), \\ F'_3 \equiv t^2 du^2 + \frac{dv^2}{t^2} - 2 \cos 2\omega du dv. \end{cases}$$

Celles de l'adjointe ( $t = i$ ; si  $u, v$  sont des variables réelles, l'adjointe est imaginaire; si  $u, v$  sont imaginaires, l'adjointe est réelle) sont

$$(6) \quad \begin{cases} \Phi_1 \equiv F_1, \\ \Phi_2 \equiv \sin 2\omega \left(i \frac{\partial X}{\partial u} du^2 - i \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2\right), \\ \Phi_3 \equiv -du^2 - dv^2 - 2 \cos 2\omega du dv. \end{cases}$$

Il en résulte les identités

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{F_3 + \Phi_3}{-4 \cos 2\omega} \equiv du dv, & \frac{F_3 - \Phi_3}{2} \equiv du^2 + dv^2, \\ \frac{F_3 - \Phi_3}{2} - \frac{F_2 + \Phi_2}{2 \cos 2\omega} \equiv (du + dv)^2, & \frac{F_3 - \Phi_3}{2} + \frac{F_2 + \Phi_2}{2 \cos 2\omega} \equiv (du - dv)^2. \end{cases}$$

Or, nous avons, avec les variables  $\alpha, \beta$  quelconques, su déterminer algébriquement (le cas de l'hélicoïde minimum exclu), les coefficients  $\delta_1, \delta'_1, \delta''_1$ , donc obtenir  $\Phi_2, \Phi_3$  et  $\cos 2\omega$ : de simples quadratures donnent donc les variables précises  $u, v$ , qui doivent fournir les expressions (4), (6), du moment que  $S$  est connue soit explicitement, soit simplement par ses formes fondamentales. Le réseau de Voss est ainsi obtenu par différentiations, éliminations et quadratures (1). Cela fait, il suffit de déter-

(1) Ce résultat m'est personnel. M. Eisenhart ne s'est pas occupé du réseau conjugué géodésique.

miner  $c, c', c''$  cosinus directeurs de la normale à  $S$  pour obtenir par quadratures (formules de Lelievre) la surface  $\Sigma$  à courbure totale constante qui correspond par parallélisme à  $S$ , de sorte que les asymptotiques de  $\Sigma$  correspondent au réseau de Voss : en me bornant, comme je l'ai fait, à  $\Sigma$  de courbure totale égale à  $-1$  [réelle donc si  $u, v$  sont réelles, tandis que si  $u, v$  sont imaginaires conjuguées, c'est la surface ( $i\Sigma$ ) qui est réelle], l'élément linéaire de  $\Sigma$  est  $-\Phi_3$ ; la surface adjointe  $S_1$  n'est définie qu'intrinsèquement même si  $S$  est connue explicitement. M. Eisenhart semble indiquer dans son paragraphe d'introduction que, s'il existe une ou deux surfaces adjointes  $S_1$ , elles peuvent être obtenues par quadratures (E<sub>1</sub>, p. 113); mais c'est un simple lapsus calami, car dans le texte, M. Eisenhart ne revient pas sur ce point; il faut entendre que  $S_1$  est déterminée intrinsèquement, les formes fondamentales de  $S_1$  s'obtenant par différentiations et calculs algébriques sans quadratures. La surface  $S_1$  donne une surface  $\Sigma_1$  obtenue aussi intrinsèquement, dont le  $ds^2$  est  $-F_3$ :  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre. En même temps que  $S$  et  $S_1$ , nous obtenons toutes les surfaces de Voss,  $S'$  et les surfaces à courbure totale constante  $\Sigma'$  définies par les formules (5): deux surfaces adjointes s'obtiennent pour  $t$  et  $it$ ; les surfaces  $\Sigma'$  sont celles qui correspondent à  $\Sigma$  par la transformation de Bonnet Lie. Il sera bon aussi de signaler que la forme de Weingarten  $|dx dc c|$  est ici, pour la surface ( $t$ ),

$$(8) \quad W \equiv t \cos 2\omega \frac{\partial X}{\partial u} du^2 + \left( t \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{1}{t} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du dv - \frac{1}{t} \cos 2\omega \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2.$$

J'avais cru pouvoir affirmer que la détermination des asymptotiques de  $S$  se ramène à des quadratures; en réalité, je n'ai pas aperçu de facteur intégrant pour  $F_2$ , (c'est-à-dire fournissant une nouvelle forme de courbure totale nulle).

On remarquera que l'équation de Laplace ponctuelle relative au système géodésique conjugué  $(u, v)$  admet comme solutions  $x, y, z, x', y', z', x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$  [ $x, y, z$  étant le point courant de  $S$  et  $x', y', z'$  celui de  $S'$  ou  $S(t)$ ], puis encore  $X$  et  $Y$  comme on le voit en écrivant cette équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \theta}{\partial u} - B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0;$$

remplaçant  $\theta$  par  $x, y, z$  puis multipliant par  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$  et ajoutant, puis par  $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}$ , et ajoutant; cela donne aussitôt :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - AE - BF = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - AF - BG = 0,$$

et en remplaçant E, F dans la première de ces deux relations par  $\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$ ,  $\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}$ , on a le résultat annoncé pour X; de même pour Y. [Cela prouve que l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \theta}{\partial u} - \left(B + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u}\right) \frac{\partial \theta}{\partial v} + \left(A \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u}\right) \theta = 0,$$

vérifiée par les dérivées en  $u$  des intégrales de la précédente admet une infinité de systèmes de quatre intégrales dont les carrés satisfont à la relation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_4^2 = 0,$$

il suffit de prendre  $\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \frac{\partial z'}{\partial u}$  et  $\frac{\partial X}{\partial u}$ ; cette propriété se rattache évidemment aux surfaces  $\mathcal{G}$  de Guichard].

Il n'y a que deux cas où la surface  $S_1$  a une raison profonde de pouvoir être obtenue par quadratures : d'abord, celui de S surface minima; on sait, par quadratures, obtenir le réseau de longueur nulle; on peut placer  $S_1$  de façon que, aux points correspondants dans l'applicabilité, S et  $S_1$  aient leurs plans tangents parallèles; cette condition définit l'*orientation* de S, et laisse arbitraire une *translation*: c'est ce qui explique que l'on puisse, dans ce cas, déterminer les coordonnées de la surface adjointe (et, par suite aussi, des associées) par quadratures. Le second cas est celui où S est hélicoïdale ou révolutive; il en est de même alors pour  $S_1$ , et l'on place les axes parallèlement. Mais pour une surface de Voss générale, cela ne se produit plus: il n'y a pas de raison spéciale d'orienter l'adjointe  $S_1$  de S de telle façon plutôt que telle autre, de même que pour deux surfaces à courbure totale constante transformées d'Hazzidakis, il n'y a

aucune raison de fixer une orientation spéciale, du moins en général.

La surface  $S$  et la surface  $\Sigma$  sont *associées au sens de Bianchi* : correspondance par plans tangents parallèles et asymptotiques de chacune ayant pour homologue sur l'autre un réseau conjugué : les asymptotiques de  $\Sigma$  donnent sur  $S$  le réseau géodésique  $(u, v)$ ; réciproquement, une surface associée à une surface  $\Sigma$  à courbure totale constante est une surface de Voss; *l'équation de Laplace, tangentielle, relative au réseau  $(u, v)$  de  $S$  a ses invariants égaux; inversement, les asymptotiques de  $S$  ont pour transformées sur  $\Sigma$  un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux*. C'est ce dernier point de vue qui a servi de départ pour les recherches de M. Eisenhart qui suppose  $S$  rapportée à ses asymptotiques et obtient ainsi  $\Sigma$  par quadratures : nous avons reconnu plus haut que nous n'avions pas besoin des asymptotiques de  $S$  pour obtenir  $\Sigma$  par quadratures. Quand on connaît une surface  $\Sigma$  à courbure totale constante, c'est un fait bien connu que l'on peut déterminer ses asymptotiques par quadratures : nous savons que la connaissance de  $\Sigma$  ne livre  $S$  que par l'intégration d'une équation de Laplace (fournissant  $X$  et  $Y$  en fonction de  $\omega$ ) Mais, quand sur une surface  $\Sigma$ , nous connaissons un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux, nous obtenons par *quadratures* une surface de Voss et une seule  $S$  rapportée à ses asymptotiques, correspondant à  $\Sigma$  par plans tangents parallèles, bien déterminée à une homothétie près : il suffit, par exemple, d'appliquer les formules de Lelievre.

Le réseau conjugué de  $S$  et  $\Sigma$  a manifestement pour équation

$$\frac{\partial X}{\partial u} du^2 - \frac{\partial Y}{\partial v} dv^2 = 0,$$

*il correspond aux asymptotiques de l'adjointe  $S_1$ ; donc sur  $\Sigma_1$ , il a ses invariants tangentiels égaux, tandis que sur  $\Sigma$ , il a ses invariants ponctuels égaux, d'après les propriétés bien connues des transformées d'Hazidakis (ou plus simplement encore, d'après les propriétés connues de deux surfaces associées au sens de Bianchi).*

*Réciproquement, si nous connaissons sur une surface  $\Sigma$  à courbure totale constante un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux, nous pouvons, par quadratures, trouver une surface de Voss, et une seule parallèle à  $\Sigma$ , au sens de Peterson, suivant ce réseau.*

Mais rien dans ces résultats ne permet d'affirmer que si l'on connaît sur  $\Sigma$ , soit un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux, soit un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux, on puisse obtenir la surface  $\Sigma_1$  transformée d'Hazzidakis de  $\Sigma$  par quadratures :  $\Sigma_1$  n'est déterminée qu'intrinsèquement, de même que  $S$ , tandis que  $S_1$  est déterminée par quadratures.

Il y a ainsi sur les quatre surfaces  $S, \Sigma, S_1, \Sigma_1$  trois réseaux intéressants :

1° Le réseau conjugué géodésique des deux adjointes  $S, S_1$  qui a ses invariants tangentiels égaux ; il correspond aux asymptotiques de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  ;

2° Le réseau asymptotique de  $S$  qui donne sur  $\Sigma$  un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux et sur  $\Sigma_1$  et  $S_1$  un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux,  $\Sigma_1$  et  $S_1$  étant parallèles suivant ce réseau ;

3° Le réseau asymptotique de  $S_1$  qui donne des propriétés analogues (intervertir les surfaces avec ou sans indice dans l'énoncé qui précède).

Imaginons maintenant que  $S$  soit deux fois surface de Voss (ou même  $\infty^1$  fois) : chaque réseau de Voss de  $S$  donne une surface à courbure totale constante associée au sens de Bianchi : on obtient ainsi  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$ , et ces deux surfaces sont parallèles entre elles suivant le réseau qui correspond aux asymptotiques de  $S$  ; or, ce réseau reste conjugué sur  $S_1$  et  $\bar{S}_1$  adjointes de  $S$  ; le parallélisme de Peterson fait correspondre aux deux surfaces  $S_1$  et  $\bar{S}_1$  des surfaces applicables aussi ; or,  $\Sigma_1$  correspond à  $S_1$  par parallélisme, donc  $\bar{\Sigma}_1$  est applicable sur  $\Sigma_1$  par les points de même  $(u, v)$ .

Diverses réciproques sont à envisager : la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une surface deux fois surface de Voss est que l'on puisse obtenir deux surfaces  $\Sigma, \bar{\Sigma}$ , à courbure totale constante parallèles au sens de Peterson, suivant un réseau à invariants tangentiels égaux, et alors la surface  $S$  est celle qui admet pour représentation sphérique de ses asymptotiques la représentation sphérique du réseau en jeu.

On peut donner une autre forme à la condition qui précède : la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une surface deux fois surface de Voss est que l'on puisse obtenir deux surfaces  $\Sigma_1, \bar{\Sigma}_1$  à cour-

*bure totale constante égale telles que, dans l'un de leurs modes d'applicabilité, le réseau conjugué commun soit à invariants ponctuels égaux.* On doit remarquer que, dans ce cas,  $S$  est déterminée implicitement et que l'on a par quadratures  $S_1, \bar{S}_1$  simultanément (tandis que le cas précédent  $S$  est seule connue par quadratures,  $S_1, \bar{S}_1$  n'étant connues qu'implicitement).

J'ai cherché à obtenir une surface de Voss qui soit *deux fois* (et deux seulement, puisque l'on aurait les hélicoïdes minima si la valeur deux était dépassée) surfaces de Voss : je n'ai obtenu que l'exemple banal des surfaces de Voss révolutives comme surfaces deux fois surfaces de Voss, puis l'un ou l'autre hélicoïde minimum comme surface  $\infty$ ' fois surfaces de Voss. (Nous avons vu plus haut qu'une surface minima admettant un réseau de Voss autre que celui des lignes minima est l'hélicoïde minimum réel ou imaginaire.) Si nous prenons l'hélicoïde minimum réel  $H$ , la surface  $\Sigma$  qui lui est parallèle au sens de Peterson, suivant le réseau des lignes de longueur nulle, est la sphère (les asymptotiques de  $H$  ont pour homologues les méridiens et les parallèles); la surface  $\bar{\Sigma}$ , qui est parallèle à  $H$  suivant un réseau de Voss différent, est une surface à courbure totale constante de révolution; les surfaces adjointes à  $H$  sont les déformées révolutives du caténoïde, et les surfaces  $\bar{\Sigma}_1$  sont les transformées d'Hazzidakis des surfaces  $\Sigma$ .

Si la surface  $S$  est de révolution, prenons le réseau  $R$  de Voss de cette surface : il se reproduit par révolution autour de l'axe de  $S$  (chaque courbe étant remplacée par une autre), de sorte que par symétrie autour d'un méridien *arbitraire* de  $S$ , on n'obtient qu'un réseau *unique*  $R_1$ , évidemment réseau de Voss;  $\Sigma$  est révolutive ou hélicoïdale et  $\bar{\Sigma}$  n'est autre que la symétrique de  $\Sigma$  relativement à un plan méridien de  $S$  (méridien dont le choix, au fond, est indifférent, puisque cela ne peut qu'introduire une translation de  $\bar{\Sigma}$  le long de l'axe de  $S$ ). En établissant sur  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$  une correspondance par plans tangents parallèles, le réseau conjugué commun à  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$  est celui qui correspond aux asymptotiques de  $S$ , et il a ses invariants tangentiels égaux; quant à  $\Sigma_1$  et  $\bar{\Sigma}_1$ , elles sont symétriques par rapport à un plan, et le théorème perd son intérêt pour elles.

M. Eisenhart cite le cas intéressant également où *une surface à courbure totale  $\Sigma$  constante possède un réseau conjugué qui est simultanément à invariants ponctuels ou tangentiels égaux* : la surface  $\Sigma_1$ , transformée d'Hazzidakis possède la même propriété; ce réseau R de  $\Sigma$  fournit deux surfaces de Voss S et  $\bar{S}$  correspondant à  $\Sigma$  par plans tangents parallèles de façon que R devienne sur S le réseau asymptotique et sur  $\bar{S}$  un réseau conjugué; les surfaces adjointes  $S_1$  et  $\bar{S}_1$  se correspondent de même entre elles (associées au sens de Bianchi) et se déduisent par le même procédé de la surface  $\Sigma_1$ . L'exemple donné plus haut, d'après Voss, de l'hélicoïde H minimum réel et de la surface de révolution de Voss qui correspond à H par plans tangents parallèles est un exemple effectif de ce cas.

6. *Second Mémoire (E<sub>2</sub>) de M. Eisenhart.* — Rappelons la transformation asymptotique imaginée par Bianchi-Bäcklund pour les surfaces à courbure totale constante; pour simplifier, supposons que la valeur constante de la courbure est  $-1$  :

*Étant données une surface pseudosphérique  $\Sigma$  de rayon 1 (autrement dit de courbure totale constante égale à  $-1$ ), puis une constante arbitraire  $\alpha$ , il existe  $\infty^1$  congruences pseudosphériques ayant  $\Sigma$  pour première nappe focale et pour angle des plans focaux l'angle  $\alpha$ ; la seconde nappe  $\Sigma'$  est une nouvelle surface pseudosphérique de même rayon que  $\Sigma$ ; sur  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  les asymptotiques se correspondent.*

La surface  $\Sigma$  est caractérisée par son  $ds^2$

$$(1) \quad d\Sigma^2 = du^2 + dv^2 - 2 \cos 2\omega \, du \, dv,$$

où  $\omega$  vérifie l'équation déjà obtenue

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega.$$

On obtient  $\Sigma'$  (au moins intrinsèquement) en intégrant le système complètement intégrable (dépendant de  $\alpha$ )

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \alpha \left( \frac{\partial \omega'}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) - (1 + \cos \alpha) \sin(\omega' + \omega) = 0, \\ \sin \alpha \left( \frac{\partial \omega'}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) - (1 - \cos \alpha) \sin(\omega' - \omega) = 0. \end{cases}$$

$\Sigma'$  a pour  $ds^2$

$$(4) \quad d\Sigma'^2 = du^2 + dv^2 - 2 \cos 2\omega' du dv.$$

Je n'insiste pas sur la mise en place de  $\Sigma'$  relativement à  $\Sigma$  de façon à obtenir la congruence pseudosphérique annoncée.

Or à  $\Sigma$  correspondent une infinité de surfaces de Voss, V, toutes parallèles entre elles au sens de Peterson, leur réseau de Voss correspondant aux asymptotiques de  $\Sigma$ ; de même pour  $\Sigma'$  on a une infinité de surfaces V' [intégration des équations de Laplace déjà mentionnées ou si l'on préfère de l'équation de Moutard (M) ou (M')]

$$(M) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos 2\omega,$$

$$(M') \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \theta' \cos 2\omega'.$$

Un problème se pose : *comment peut-on associer les surfaces V relatives à  $\Sigma$  aux surfaces V' relatives à  $\Sigma'$ , ou si l'on préfère, comment tirer parti de l'intégration (M) pour intégrer l'équation (M')*. Rappelons qu'en partant de  $\Sigma$  supposée connue, les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$  [ $c(u, v)$ ,  $c'(u, v)$ ,  $c''(u, v)$ ] sont trois solutions particulières de (M) et que la détermination de V revient à trouver une quatrième intégrale  $\theta$  de façon que cette surface V soit l'enveloppe du plan

$$(4) \quad cx + c'y + c''z = \theta.$$

Or la réponse est bien simple et figure déjà dans le traité de Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 4, p. 49-54) publié dès 1896 (1) : les deux équations de Moutard (M) et (M') sont celles qui s'introduisent dans la théorie de la déformation infiniment petite de  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ , *problèmes équivalents* : à chaque solution de (M) ou (M') correspondent, par quadratures,  $\infty^1$  intégrales de l'autre; *ces deux équations de Moutard sont transformées l'une de l'autre* et l'on sait comment Bianchi a développé cette théorie avec les théorèmes de permutabilité. *Donc à chaque sur-*

---

(1) Le résultat est d'ailleurs dû à Guichard qui l'a obtenu en 1890 comme Darboux l'indique en note, page 54. Il est juste de signaler le rôle de Guichard comme précurseur, rôle souvent apprécié au-dessous de sa juste valeur.

face  $V$  correspondent, en position,  $\infty^1$  surfaces  $V'$  et il s'agit de définir le lien géométrique dans le passage de  $V$  à  $V'$ . Nous allons le faire avec M. Eisenhart dont j'ai modifié l'ordre de présentation, profitant moi-même de l'ensemble des travaux faits de 1890 à 1914, de leur exposé synthétique réalisé depuis, en particulier dans la seconde édition de la Géométrie différentielle de Bianchi.

D'abord quelle est la solution transformatrice assurant le passage de  $(M)$  à  $(M')$ ? Nous remarquons qu'une fois  $\omega$  et  $\omega'$  connues par (3), on peut calculer par une intégrale de différentielle totale la fonction  $\varpi$  satisfaisant aux équations

$$(5) \quad \frac{\partial \log \omega}{\partial u} = -\frac{1 + \cos z}{\sin z} \cos(\omega + \omega'), \quad \frac{\partial \log \omega}{\partial v} = -\frac{1 - \cos z}{\sin z} \cos(\omega' - \omega).$$

Cette fonction  $\varpi$  satisfait à l'équation  $(M)$  et est la solution transformatrice qui change  $(M)$  en  $(M')$ .

En effet, à chaque solution  $\theta$  de  $(M)$ , nous pouvons faire correspondre une fonction  $\theta'$  par la quadrature de différentielle totale

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial u} (\varpi \theta') = -\varpi \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \varpi}{\partial u} \theta, \quad \frac{\partial}{\partial v} (\varpi \theta') = \varpi \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varpi}{\partial v} \theta$$

et cette fonction  $\theta'$  satisfait à l'équation de Moutard

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \varpi \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{1}{\varpi} \right),$$

d'après un résultat classique. Si l'on pose

$$(8) \quad \begin{cases} \varpi \omega' = 1, \\ \frac{\partial \log \omega'}{\partial u} = \frac{1 + \cos z}{\sin z} \cos(\omega + \omega'), \quad \frac{\partial \log \omega'}{\partial v} = \frac{1 - \cos z}{\sin z} \cos(\omega' - \omega), \end{cases}$$

on constate aussitôt que

$$(9) \quad \varpi \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{1}{\varpi} \right) = \frac{1}{\omega'} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u \partial v} = \cos 2 \omega',$$

et ceci prouve bien que  $(M')$  est la transformée de  $(M)$  par la solution particulière  $\varpi$ .

Or, si l'on cherche l'enveloppe du plan

$$(10) \quad cx + c'y + c''z = \varpi,$$

on trouve une surface de Voss,  $V_0$ , définie à une homothétie près (car  $\omega$  n'est déterminée qu'à un facteur de proportionnalité) que nous appellerons surface *spéciale*. Pour chaque fonction  $\omega$  solution de

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega,$$

on trouve (par une équation de Riccati)  $\infty^2$  fonctions *contiguës*  $\omega'$  et pour chaque couple  $\omega, \omega'$ , on a *une* surface  $V_0$  (et ses homothétiques relatives à l'origine), puis une surface  $V'_0$  (et ses homothétiques) définie comme enveloppe du plan

$$c_1 x + c'_1 y + c''_1 z = \omega',$$

où  $c_1, c'_1, c''_1$  sont cette fois les cosinus de la normale à  $\Sigma'$  au point  $(u, v)$ : *la droite qui réunit les points homologues de  $V_0$  et  $V'_0$  passe constamment par l'origine; aux asymptotiques de  $V_0$  correspond un système conjugué sur  $V'_0$  et inversement.*

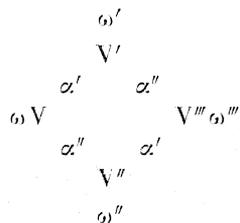
Si maintenant nous remplaçons, dans les formules (6),  $\theta$  par une intégrale quelconque de (M), autre que  $\omega$ , les formules (6) donnent une intégrale  $\theta'$  de (M') définie à un terme additif près de la forme  $\mu \omega'$  où  $\mu$  est une constante arbitraire; d'ailleurs les seconds membres de (6) restent les mêmes si l'on remplace  $\theta$  par  $\theta + \lambda \omega$ , où  $\lambda$  est une constante. On constate que *toutes les surfaces V de Voss correspondant aux solutions  $\theta + \lambda \omega$  de (M), et les surfaces V' correspondant aux solutions  $\theta' + \mu \omega'$  de (M') ont leurs points homologues réunis par un rayon, indépendant de  $\lambda$  et  $\mu$ , parallèle au rayon vecteur joignant le point de  $V_0$  au point de  $V'_0$  et que ces rayons engendrent une congruence dont les développables correspondent au système conjugué géodésique. Si l'on remplace  $\theta$  par une autre intégrale de M, on obtient une congruence nouvelle dont les rayons sont respectivement parallèles aux rayons de la précédente.*

Remarquons que le passage de V à V' exige de fixer le nombre  $\alpha$ , puis l'intégration d'une équation de Riccati, puis une quadrature.

Le théorème de permutabilité relatif aux équations de Moutard entraîne immédiatement que si l'on considère *une* surface V, puis *une* transformée V' obtenue par la méthode précédente avec un angle  $\alpha'$ , puis *une* transformée V'' de V relative à un angle  $\alpha'' \neq \alpha'$ , on peut

trouver *sans quadrature* une surface  $V'''$  transformée à la fois de  $V'$  avec l'angle  $\alpha''$  et de  $V''$  avec l'angle  $\alpha'$ ; la surface  $V'$  dépend d'abord de  $\alpha'$  puis du choix de la fonction  $\omega'$  (équation de Riccati); de même pour  $V''$  on a  $\alpha''$  et  $\omega''$ : le passage de  $V'$  à  $V'''$  fait intervenir  $\alpha''$  et une certaine fonction  $\omega'''$ , le passage de  $V''$  à  $V'''$  fait intervenir  $\alpha'$  et la même fonction  $\omega'''$ ; nous savons d'ailleurs que  $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$  sont solutions de l'équation  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega$  et nous retrouvons pour  $\omega'''$  le résultat de permutabilité établi par Bianchi.

Si l'on appelle *quadruple* le système de surfaces  $(V, V', V'', V''')$  que l'on peut représenter schématiquement par



on peut s'arranger pour que les quatre surfaces soient spéciales et même pour que  $V$  et  $V'$  soient deux surfaces *spéciales* en correspondance perspective et de même  $V''$  et  $V'''$  deux surfaces spéciales en correspondance perspective (mais  $V$  et  $V''$  ne sont pas en correspondance perspective, non plus que  $V'$  et  $V'''$ ).

Voici maintenant une propriété intéressante nouvelle de la correspondance entre  $V$  et  $V'$  ( $V'$  dérivant de  $V$  au moyen de l'angle  $\alpha$  et de la fonction  $\omega'$ ); soient  $M, M'$  deux points homologues sur  $V$  et  $V'$ ; les tangentes en  $M$  et  $M'$  aux courbes  $v$  se coupent en un point  $F$ , les tangentes aux courbes  $u$  se coupent en  $F'$ ; les points  $F$  et  $F'$  sont les points focaux de la congruence rectiligne  $FF'$ , tandis que les plans focaux sont les bissecteurs de l'angle dièdre des deux plans tangents  $MFF'$  et  $M'FF'$  à  $V$  et  $V'$ ; il en résulte que la congruence  $FF'$  est une congruence de normales.

Si l'on considère deux surfaces  $\Sigma, \Sigma'$  de courbure totale constante  $-1$ , dérivant l'une de l'autre par la transformation de Bäcklund (fonctions  $\omega, \omega'$  et angle  $\alpha$ ), il existe une famille de surfaces parallèles  $S$  dont chacune a ses normales parallèles aux rayons joignant le point  $P$  de  $\Sigma$  au point homologue  $P'$  de  $\Sigma'$ ; les lignes de courbure de  $\Sigma$  correspondent aux

asymptotiques de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ ; de plus les plans menés par chaque normale de  $S$  parallèlement aux plans tangents à  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en  $P$  et  $P'$  enveloppent deux surfaces de Voss  $V, V'$  qui sont dans la correspondance étudiée ici (relative à  $\omega, \omega'$  et  $\alpha$ ): c'est la réciproque du théorème qui précède.

J'ai résumé le mémoire de M. Eisenhart; je renvoie au mémoire lui-même pour les démonstrations. C'est sans doute dommage que M. Eisenhart n'ait pas songé à rattacher à ce mémoire ( $E_2$ ) les propriétés du mémoire ( $E_1$ ).

Je cite par exemple une propriété suggérée par Bianchi (*Géométrie différentielle*, 2<sup>e</sup> édition, p. 775-778). J'ai introduit la notion de surface  $\bar{V}$  associée à  $V$  (ou adjointe); la surface  $\bar{\Sigma}$  est une transformée de  $\Sigma$  par l'opération de Bonnet-Lie, la transformée d'Hazzidakis s'il s'agit de deux surfaces de Voss adjointes, au lieu d'être simplement associées. Si donc on envisage un quadruple  $VV'V''V'''$  déjà considéré, il est clair que l'on aura pour chaque associée  $\bar{V}$  un quadruple  $\bar{V}\bar{V}'\bar{V}''\bar{V}'''$  formé par les surfaces associées respectives et au fond cela tient à ce que pour les surfaces associées à  $V$  l'équation de Moutard ( $M$ ) reste la même, ainsi que l'équation ( $M'$ ) pour  $V'$  et ses associées. Bianchi cite la proposition uniquement pour les surfaces à courbure totale constante et en se bornant à la transformation d'Hazzidakis (ce qui oblige à supposer  $\Sigma$  de courbure positive constante, restriction sur laquelle je me suis expliqué plus haut).

On remarquera en particulier le cas où  $V, V', V'', V'''$  sont des surfaces spéciales telles que  $V$  et  $V'$  soient en correspondance projective, ainsi que  $V''$  et  $V'''$ ; dans ce cas il en est de même pour  $\bar{V}$  et  $\bar{V}'$  d'une part, entre  $\bar{V}''$  et  $\bar{V}'''$ : les asymptotiques de  $V$  ont pour homologue un réseau conjugué sur  $V'$  et  $\bar{V}$ .

De même l'opération de Guichard donne des chaînes de familles simplement infinies de surfaces de Voss; la transformation indiquée ici transforme cette chaîne en une nouvelle chaîne analogue.

J'espère, par ce résumé de la théorie, avoir convaincu les géomètres qu'il reste encore bien des découvertes à faire dans cette théorie.

7. *Coefficients de Gauss. Errata du mémoire (Ga A)*. — Au moment de la correction des épreuves de ce travail, j'ai eu communication d'une Note de M. Lovett qui va paraître dans un numéro des *Comptes rendus*

du mois d'octobre 1931 et qui répond aux prévisions que je viens de formuler.

Je crois utile de rappeler le sens précis des lettres  $D, D', D''$ , *coefficients de Gauss*, que j'ai employés dans le système d'équations fondamental

$$\begin{aligned} (1) \quad & EE_v - 2EF_u + GE_u = 0, \\ (2) \quad & GG_u - 2GF_v + FG_v = 0, \\ (3) \quad & \left[ \log \left( \frac{DD''}{H^2} \right) \right]_{uv} = \left( \frac{GE_v - FG_u}{2H^2} \right) + \left( \frac{EG_u - FE_v}{2H^2} \right), \end{aligned}$$

où l'on a posé  $H^2 = EG - F^2$ ; dans l'équation (3),  $DD''$  ou  $DD'' - D'^2$  (puisque  $D' = 0$ ) s'exprime en fonction de  $E, F, G$  et de leurs dérivées. Les coefficients  $D, D', D''$  de cette équation, coefficients que j'ai employés aussi au mémoire (Ga A), sont définis par l'identité

$$(4) \quad \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} d^2 x \right| \equiv D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

et sont ceux que Gauss, fondateur de la théorie, employait. Mais depuis on a remarqué que cette forme quadratique n'a pas de signification intrinsèque tandis que la forme

$$\frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{H} \equiv -S dc dx \equiv Sc d^2 x$$

est manifestement intrinsèque; aussi tous les géomètres (sauf les géomètres français) se sont ralliés à la nouvelle forme, mais au lieu de donner un nom spécial (tel que  $\delta, \delta', \delta''$ , notations que j'emploie systématiquement) à  $\frac{D}{H}, \frac{D'}{H}, \frac{D''}{H}$ , ont conservé le nom  $D, D', D''$  à des coefficients définis par l'identité

$$(5) \quad D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \equiv -S dc dx.$$

Cette confusion de notations rend assez pénible la lecture simultanée de la *Théorie des Surfaces* de Darboux et d'un mémoire italien, allemand, américain, etc.

Je crois qu'il serait bon d'adopter définitivement les notations telles que je les emploie :

$$\begin{aligned} D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 &\equiv \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} d^2 x \right|, \\ \delta du^2 + 2\delta' du dv + \delta'' dv^2 &\equiv -S dc dx. \end{aligned}$$

D'ailleurs, j'avais prévenu le lecteur dès la seconde page du mémoire (Ga A).

Je crois utile de signaler ici quelques erreurs de détail (*lapsus calami* ou erreurs de copie) que j'ai laissées au mémoire (Ga A) (*Acta mathematica*, t. 51, 1927, p. 83-131).

Page 92, paragraphe 5, j'ai établi les formules relatives aux géodésiques  $v = \text{const.}$  :

$$\frac{1}{R} = \frac{D}{EH}, \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{H^2} \frac{DF}{E}, \quad D_2 = -iD_1, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{D_1}{EH}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{D_2}{EH},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{e^{-iz}}{R_1}, \quad \frac{1}{T} = \frac{e^{-iz}}{T_1}, \quad \frac{T}{R} = \frac{T_1}{R_1} = \frac{T_2}{R_2} = \frac{H}{F} = \text{tang } 2\omega,$$

qui sont exactes. Mais pour les géodésiques  $u = \text{const.}$ , il y a lieu d'écrire *explicitement*

$$\frac{1}{R'} = \frac{D''}{GH}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{-1}{H^2} \frac{D''F}{G}, \quad D_2'' = iD_1'', \quad \frac{1}{R_1'} = \frac{D_1''}{GH}, \quad \frac{1}{R_2'} = \frac{D_2''}{GH},$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{e^{iz}}{R_1'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{e^{iz}}{T_1'}, \quad \frac{T'}{R'} = \frac{T_1'}{R_1'} = \frac{T_2'}{R_2'} = \frac{-H}{F} = -\text{tang } 2\omega.$$

Puis, au lieu de deux formules fausses, écrire :

$$\frac{1}{RR'} = \frac{DD''}{EGH^2} = \frac{H^2}{EG} \frac{DD''}{H^4} = K \sin^2 2\omega,$$

$$\frac{1}{TT'} = \frac{-DD''}{H^4} \frac{F^2}{EG} = -K \cos^2 \omega;$$

d'où

$$\frac{1}{RR'} - \frac{1}{TT'} = K, \quad \frac{T}{R} = \frac{-T'}{R'} = \text{tang } 2\omega.$$

Page 101, la formule (10) concernant les asymptotiques est à remplacer par

$$\xi l^2 du^2 + \eta dv^2 = 0.$$

Page 106, l'équation des asymptotiques, en haut de la page, après les formules (20), doit être écrite

$$\xi e^u l^2 dv^2 + \eta e^v dv^2 = 0.$$