ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL BRELOT

Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M)$, $c(M) \geq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 153-246
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__153_0>

ÉTUDE

DE

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

$$\Delta u = c(\mathrm{M})u(\mathrm{M}), \qquad c(\mathrm{M}) \geqq 0,$$

AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER DU COEFFICIENT

PAR M. MARCEL BRELOT

INTRODUCTION.

1. Dans la théorie des équations différentielles ordinaires, bien des travaux concernent l'intégration au voisinage d'une valeur exceptionnelle de la variable x, d'un point exceptionnel (x, y), pour lesquels certaines fonctions connues figurant dans l'équation n'ont plus les propriétés de régularité habituellement requises dans l'étude générale. Par exemple on s'est occupé de l'équation $y' = f(x, y)$ au voisinage d'un point en lequel f est infinie ou indéterminée.

Il n'y a, à ma connaissance, à peu près rien d'analogue pour les équations aux dérivées partielles. Pourtant, outre son intérêt théorique, la question peut se poser d'elle-même dans des problèmes physiques. Par exemple, on sait que sous les hypothèses classiques les plus simples, l'équilibre thermique d'une plaque conductrice [coefficient de conductibilité $k(x, y) \geqq 0$] et rayonnante selon la loi de Newton dans l'espace à o° [coefficient $r(x, y) \geqq 0$] obéit à l'équation

$$k(x,y)\,\Delta u + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y)\,u \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

u étant la température.

Lorsque l'on suppose $k > 0$, c'est une équation du type linéaire

$$\Delta u + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial u}{\partial y} = cu$$

à coefficients *bornés*.

Or pour ce type d'équation, moyennant quelques hypothèses sur les coefficients, comme l'existence de dérivées des premiers ordres, et des conditions plus ou moins restrictives sur un contour et la distribution des valeurs données qu'il porte, on sait résoudre le problème de Dirichlet, soit en se ramenant à une équation intégrale du type de Fredholm [1], soit lorsque $c > 0$, par des procédés directs antérieurs [2]. Mais si k peut s'annuler en des points isolés ou le long d'une ligne, l'équation à laquelle on se ramène en divisant par k n'a plus ses coefficients *bornés* et les méthodes précédentes ne sont plus applicables. C'est un cas que l'on n'a pas étudié; et cependant on conçoit qu'un zéro isolé de k par exemple ne doive pas changer l'allure du phénomène physique d'équilibre correspondant au problème de Dirichlet.

Dans un autre ordre d'idées, la théorie des marées conduit, comme

---

[1] M. Hilbert (*Gott. Nachr.*, 1904) avait considéré le cas où $a\,dx + b\,dy$ est une différentielle exacte et traité le problème en utilisant une fonction de Green généralisée (non harmonique). Sa méthode pourrait s'étendre au cas du texte; mais d'autre part M. Picard (*Annales de l'École Normale*, t. 23, 1906 et *R. di Palermo*, 1906) l'a résolu en se servant tout simplement de la fonction de Green ordinaire.

J'ajoute que l'existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet n'est vraie pour c de signe quelconque, qu'*en général*, à cause de l'existence des valeurs singulières de la théorie de Fredholm. Mais le théorème devient exact sans restriction pour $c \geqq 0$.

[2] M. Picard utilise pour cela un procédé d'approximations successives, et en même temps une méthode alternée tout à fait analogue à celle de Schwarz pour les fonctions harmoniques (*voir* Picard, *Journal de Math.*, 1896, 5e série, t. 2, et quelques Mémoires qui précèdent).

M. Lichtenstein a pu, entre autres perfectionnements, étendre ces raisonnements au cas $c \geqq 0$.

On peut aussi, lorsque $a\,dx + b\,dy$ est une différentielle exacte, et c'est le cas de l'équation de la chaleur, utiliser la méthode du balayage de Poincaré convenablement généralisée. *Voir* un exposé, pour trois variables d'ailleurs, dans la Thèse de M. Le Roy, *Annales de l'École Normale*, t. 14-15.

me l'a fait remarquer M. Picard, à résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation de type analogue

$$h(x, y)\,\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = cu + f$$

où $h > 0$ (profondeur d'un bassin) peut *s'annuler* sur le contour. Et H. Poincaré a souligné la difficulté qui s'ensuit ([1]).

On voit donc l'intérêt que peut présenter l'étude de certaines équations aux dérivées partielles au voisinage de singularités des coefficients, et cela dans le domaine *réel*, sans hypothèses bien restrictives sur les coefficients. Le présent travail est un effort dans ce sens.

2. On s'est beaucoup occupé des équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique ([2]), en particulier M. Picard qui dans son récent Ouvrage auquel je renvoie « *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles* » ([3]), a plus spécialement repris ses travaux sur l'équation

$$\Delta u = c(x, y)\,u(x, y) \qquad (c > 0).$$

La question, à peu près laissée de côté par M. Picard qui m'en avait proposé l'étude, du problème de Dirichlet extérieur relatif à cette équation, m'a conduit tout d'abord, au moyen d'une inversion évidente, à étudier l'équation précédente et ses intégrales bornées, au voisinage d'un point singulier du coefficient. De mes recherches consécutives et dont une grande partie a été publiée plus ou moins briè-

---

([1]) H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. 3, p. 290 (Gauthier-Villars, 1910).

([2]) On trouvera un historique et une bibliographie détaillée du sujet jusque vers 1900 dans l'article II A, 7 *c*, de l'*Encyclop. d. math. Wissenschaft* (Sommerfeld) et une exposition récente avec une bibliographie considérable, dans un article de la même encyclopédie (II C. 12, 1924, p. 1277), par M. Lichtenstein qui a personnellement beaucoup perfectionné cette théorie, dans de multiples publications.

([3]) Fascicule V de la collection des Cahiers scientifiques (Paris, Gauthier-Villars, 1930).

vement, par fragments ([1]), je fais ici un exposé d'ensemble pour ce qui concerne le sujet de ce Mémoire.

Encore que divers procédés et résultats puissent s'étendre à des équations plus ou moins générales du type elliptique, j'éviterai des longueurs et bien des difficultés en me limitant ici à un type très simple dont il semble naturel de pousser assez loin l'étude avant d'aborder celle de types plus étendus.

Je ne considérerai (dans le domaine réel) *que l'équation*

$$\Delta u = c(M)\, u(M) \qquad (c \geqq 0). \tag{1}$$

Je me placerai souvent d'abord dans le cas du plan (simple); l'équation est alors celle de l'équilibre thermique d'une plaque rayonnante à conductibilité constante $\left(k = \text{const.};\ c(M) = \frac{r(M)}{k}\right)$, la singularité de $c(M)$ étant celle du coefficient de rayonnement. Mais presque tout s'étendant immédiatement au cas de n dimensions, j'en ferai la remarque en signalant les différences.

Je supposerai pour $c(M)$, *en dehors du point singulier, qu'il est simplement* $\geqq 0$ *et continu*. Seulement je ne puis me limiter à l'hypothèse de continuité, plus large que celles employées ordinairement, qu'en adoptant pour le laplacien une définition plus étendue que la définition classique, vu l'usage de la formule de Poisson pour le potentiel spatial; mais les intégrales de (1) auront leur sens ordinaire et un laplacien ordinaire dès que c satisfera aux hypothèses supplémentaires négligées, comme d'avoir un gradient continu. On peut justifier cette extension en remarquant que l'équation (1) avec le laplacien généralisé est, comme on le verra, équivalente à une certaine équation intégrale locale qui correspond de plus près au phénomène calorifique de sorte que les conditions supplémentaires qu'on peut introduire pour c après la simple continuité sont tout à fait inutiles dans l'interprétation physique. D'autre part dans ses études indépendantes de la théorie de

---

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. **189**, 1929, p. 1230; t. **190**, 1930, p. 101, 286 et 411; t. **191**, 1930, p. 697; t. **192**, 1931, p. 206. — *R. della R. Acc. N. dei Lincei*, 1^er^ sem., vol. XI, fasc. 3, 4, 5, 9, 1930, p. 268, 371, 458 et 800. — *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1930, vol. LXIII, fasc. 11-15. — *R. del Circolo Matematico di Palermo*, 1931, vol. LV, p. 21.

Fredholm, M. Picard avait supposé $c > 0$ en s'appuyant sur certains lemmes, essentiels pour nous, mais que l'on a pu depuis étendre au cas $c \geqq 0$; de sorte que l'on pourra adopter cette dernière hypothèse.

Ajoutons que cette double extension d'hypothèses aura un grand intérêt de *commodité* dans certaines démonstrations où l'on a à modifier c.

3. Dans un *Chapitre préliminaire* je rappellerai des propriétés connues avec des extensions, des compléments et une adaptation aux hypothèses choisies pour (1). Je préciserai la notion de laplacien et d'intégrale généralisés et donnerai sous la forme la plus générale des propriétés d'impossibilité d'extrema des intégrales qui sont avec leurs conséquences, de première importance; puis je parlerai du problème de Dirichlet intérieur relatif à (1) sans singularité, rappellerai les méthodes de résolution et étudierai la solution comme *fonctionnelle* de la distribution et de c; des travaux récents permettront d'obtenir des propriétés assez générales relatives à l'allure des dérivées à la frontière; il sera utile également de parler de la fonction de Green généralisée. Enfin, ce qui est essentiel pour la suite, j'étudierai les familles et suites d'intégrales de (1); je donnerai des démonstrations aussi simples que possible des propositions connues généralisant les théorèmes de Harnack et montrerai de plus la propriété très utile d'*égale continuité* d'une famille.

J'arrive au *deuxième Chapitre* au sujet proprement dit et y étudie les intégrales *bornées* au voisinage de O singulier; $c \geqq 0$ n'y est pas défini et l'on ne fait pas d'hypothèses sur son allure au voisinage. Entourant O d'un contour γ, je résous le problème de la recherche d'une intégrale u (bornée) prenant des valeurs données sur γ : il admet une solution unique; en comparant avec la solution harmonique, j'obtiens quelques résultats *généraux* comme celui de l'existence d'une valeur moyenne en O de u, limite de la moyenne sur un cercle infiniment petit de centre O; mais à certaines *restrictions* sur l'allure de c correspondent des propriétés remarquables : par exemple si $c.\overline{\mathrm{OM}}^2 \to +\infty$ quand $\mathrm{OM} \to 0$, toutes les intégrales s'annulent en O plus vite que toute puissance positive de OM. Je montre ensuite que l'équation de Fredholm connue qui correspond au problème de Dirichlet pour (1) lorsqu'il n'y a pas de singularité équivaut encore au problème précédent; c'est que $\iint cu\,d\sigma$ a toujours un sens pour toute intégrale bornée u. Cette équation intégrale à noyau singulier se trouve ainsi résolue indirectement; elle permet d'obtenir des propriétés générales de u ou d'en retrouver et se prête à un examen plus approfondi de cas particuliers pour c; il faut pour cela étudier le potentiel logarithmique avec une densité ayant un point singulier, c'est-à-dire l'équation $\Delta u = f$ où f admet un point singulier, $\iint f\,d\sigma$ ayant un sens.

Au *troisième Chapitre* j'étudie, au voisinage du point O toujours singulier pour c, les intégrales *non bornées*, mais bornées dans un sens par exemple inférieurement, et approfondis la notion de source ponctuelle en ce point singulier O du coefficient de rayonnement. Je me ramène aussitôt au cas d'une intégrale $u > 0$ par addition d'une intégrale bornée. O se comporte comme « source simple » finie ou infinie, c'est-à-dire de flux fini ou infini; la nullité du flux entraine que l'intégrale soit bornée en module et réciproquement; u peut se mettre sous la forme $\frac{\varphi(\mathrm{M})}{2\pi}\log\frac{1}{\mathrm{OM}}$; si O est source finie, $\varphi \geqq 0$ admet une valeur moyenne en O égale à sa plus grande limite et au flux; si O est source infinie, φ admet une valeur moyenne infinie. Entourant O d'un contour γ, on peut chercher une intégrale s'annulant sur γ et pour laquelle O soit source de flux *donné* fini non nul; il y a non-multiplicité mais pas nécessairement existence, cela dépendant de l'allure de c; au contraire il existe toujours des intégrales > 0 s'annulant sur γ, O pouvant être pour elles source finie ou infinie; de plus le cas où une source simple non nulle ne peut être qu'infinie équivaut à celui où toutes les intégrales bornées s'annulent régulièrement en O. Enfin si une intégrale u est telle que $\left|\frac{u}{\log\frac{1}{\mathrm{OM}}}\right|$ soit borné, elle est bornée dans un sens et O est source finie : c'est la généralisation du « principe des singularités > 0 » de M. Picard pour les fonctions harmoniques. L'extension de tout cela à l'espace donne par une transformation de Lord Kelvin l'allure à l'infini dans l'espace des intégrales de (1).

Quant aux méthodes employées, elles sont tout à fait indépendantes de la théorie des équations intégrales. On utilisera constamment les propriétés qui se traduisent dans l'interprétation calorifique par ce fait qu'en tout point d'une plaque rayonnante en équilibre, dont les bords sont à des températures >0 et non partout nulles, la température est >0 et croît lorsque le coefficient de rayonnement diminue quelque part, même jusqu'à s'annuler partout (cas harmonique); la forme linéaire et homogène de l'équation (1) permettra de se ramener systématiquement à étudier les intégrales >0; *l'obtention des solutions désirées se fera par un passage à la limite à partir de solutions relatives au cas où il n'y a pas de singularité, soit qu'on l'isole, soit qu'on modifie au voisinage le coefficient c de façon à le rendre continu;* et la justification rigoureuse sera basée sur les propriétés des suites d'intégrales quant *aux théorèmes d'unicité* ils seront en partie basés sur un type de raisonnement introduit par M. Zaremba pour les fonctions harmoniques.

Mais avant d'entreprendre l'exposé de ces recherches, je tiens à remercier ici bien vivement pour toutes leurs suggestions ou leurs indications bibliographiques MM. Picard, Volterra, Bouligand et Lichtenstein avec qui j'ai eu le plaisir et le profit d'échanger bien des conversations ou de la correspondance. Je remercie également la Fondation Rockefeller à qui je dois d'avoir pu poursuivre ces études sans préoccupations matérielles, à Rome puis à Berlin.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Laplacien et intégrales généralisés.

1. On sait que l'intégrale étendue au domaine [1] borné Ω plan

$$V = \int\int_{\Omega} \log \frac{1}{MP} \psi(P)\, d\sigma_P,$$

potentiel logarithmique relatif à la densité continue bornée $\psi(P)$,

(1) Une fois pour toutes, un *domaine* sera un ensemble *connexe* de points tous *intérieurs*; et les *intégrales* seront prises *au sens de Lebesgue*.

admet partout des dérivées partielles premières continues, qu'on obtient en dérivant sous le signe $\int\int$; moyennant des conditions supplémentaires pour ψ, par exemple continuité des dérivées premières, « condition de Hölder », conditions plus générales de Petrini (¹), le potentiel admettra des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et l'on aura

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi\psi(M).$$

Afin de pouvoir utiliser cette formule de Poisson sans autre hypothèse que la continuité pour ψ, on peut songer à employer un « laplacien généralisé ». *Rappelons* que, pour des fonctions continues u sur un domaine Ω, satisfaisant à certaines conditions plus larges que l'existence de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, mais remplies en particulier par les fonctions harmoniques et les potentiels logarithmiques à densité continue sur Ω, il est possible de définir des opérateurs locaux appelés *laplaciens généralisés* qui déterminent la fonction Δu sur Ω et jouissent des propriétés suivantes (²) :

1° Si u admet des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, le Δu coïncide avec leur somme (laplacien ordinaire), ce qui entraîne que pour une fonction harmonique au sens classique, il existe et soit nul;

2° Si u, v possèdent ce laplacien généralisé, $hu + kv$ (h, k const.) l'admettent et

$$\Delta(hu + kv) = h\,\Delta u + k\,\Delta v;$$

3° Si u admet un maximum en un point, on aura en ce point $\Delta u \leqq 0$;

4° La formule de Poisson est valable, c'est-à-dire que si $\psi(M)$ est

---

(¹) *Voir* Petrini, *Acta math.*, t. 31, 1908, et *Journal de Liouville*, 1909. Il y démontre aussi la validité de la formule de Poisson pour une densité seulement continue, avec une définition convenablement étendue du laplacien, mais qui ne rentre peut-être pas d'ailleurs dans la classe de celles qu'on va considérer.

(²) Voir le *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI (Bouligand), p. 3, 4, 13.

continue sur Ω

$$(1) \qquad \Delta\left(\int\int_\gamma \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}\right) = -2\pi\psi(\mathrm{M})$$

γ étant un cercle complètement intérieur à Ω et M intérieur à γ.

Un *exemple* de tel laplacien est celui de M. Zaremba défini, en prenant deux axes de coordonnées rectangulaires, par

$$\lim_{h=0}\frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)}{h^2}.$$

Il est évident que les conditions 2° et 3° sont remplies; quant à la première il suffit de savoir que si une fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée seconde ordinaire $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, elle admet aussi une dérivée seconde directe

$$\lim_{h=0}\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2}$$

égale à l'autre (1); quant à l'existence de ce laplacien pour le potentiel logarithmique à densité continue et la condition 4°, assez difficiles à établir, je renverrai au Mémoire où M. Zaremba a introduit son laplacien généralisé (2).

Par un raisonnement très simple de M. Zaremba on peut voir que tout laplacien généralisé répondant aux conditions précédentes est tel que si Δu existe et est nul dans un domaine ω, u y est *harmonique* au sens classique (3).

J'ajouterai que si une fonction admet *un certain* laplacien généralisé $\Delta_0 u$ qui soit *continu* sur ω, *tous* les laplaciens généralisés possibles y existeront et seront égaux au précédent. Cela résulte aussitôt du fait que

$$u(\mathrm{M})+\frac{1}{2\pi}\int\int_\gamma \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\Delta_0 u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}$$

---

(1) Cela résulte aussitôt de la formule de Cauchy qui généralise celle des accroissements finis (*voir* DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, t. II, 2e édition, 1912, p. 170, ou 6e édition, p. 120). *Voir* aussi WILKOSZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 435.

(2) *R. di Palermo*, t. XIX, 1905, p. 142.

(3) *R. di Palermo*, t. XIX, p. 147. Voir aussi *Mémorial*, XI, p. 13.

est harmonique à l'intérieur du cercle γ, lui-même complètement intérieur à ω.

2. En vue des applications, on s'assurera d'abord immédiatement, par une approximation des fonctions [1], que *les formules classiques de Green comme*

$$\iint_D (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,d\sigma + \int_{\Gamma_{\mathrm{int}}} \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) ds = 0 \quad (2) \qquad [2]$$

sont valables pour des fonctions continues possédant un laplacien généralisé continu dans un domaine D_1 où D est complètement intérieur.

Dans le même ordre d'idées, *étendons la formule classique de transformation du laplacien par une correspondance conforme* (M, M').

Si $u'(M') = u(M)$ sont douées de dérivées secondes continues au voisinage de M_0, M'_0, on sait que dans ce voisinage, Δ' désignant le laplacien d'une fonction de M', on a

$$\Delta' u'(M') = \Delta u(M).\rho(M') \quad (3)$$

où $\rho(M')$ est le rapport positif et fini $\frac{ds_M^2}{ds_{M'}^2}$ relatif à la transformation *conforme*.

Je vais montrer, en supposant seulement $u(M)$ *continue et douée de laplacien généralisé continu au voisinage de* M_0, *que* $u'(M'_0)$ *admettra au voisinage de* M'_0 *un laplacien généralisé continu donné par la formule précédente* (3) [3].

Au voisinage de M_0

$$u(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\gamma \log\frac{1}{MP}\,\Delta u(P)\,d\sigma_P + H(M),$$

H(M) étant une fonction harmonique à l'intérieur du petit cercle γ de centre M_0. Posant

$$\psi(M) = \iint_\gamma \log\frac{1}{MP}\,\Delta u(P)\,d\sigma_P, \qquad \psi'(M') = \psi(M),$$

---

[1] *Voir* ma Note (*loc. cit.*) *R. dei Lincei*, vol. XI, 1930, p. 376.

[2] Il suffit que le contour soit formé d'un nombre fini d'arcs à tangente continue, deux quelconques ne pouvant avoir de point commun en dehors des extrémités.

[3] Je vais adpater un raisonnement que m'a communiqué M. Bouligand dans le cas plus simple de l'inversion dans l'espace.

il suffira de prouver que $\psi'(M')$ admet tout laplacien généralisé à l'intérieur de γ et que

$$\Delta'\psi'(M') = \rho(M').\Delta\psi(M).$$

Désignons par $\theta(M', P')$ le rapport $\frac{MP}{MP'}$.

Alors en passant pour l'intégrale $\iint_\gamma$ du domaine d'intégration γ au domaine transformé γ', il vient

$$\begin{aligned}\psi(M) = & \iint_{\gamma'} \log\frac{1}{M'P'}[\Delta u(P)]\rho(P')\,d\sigma_{P'} \\ & + \iint_{\gamma'} \log\theta(M', P')[\Delta u(P)]\rho(P')\,d\sigma_{P'},\end{aligned}$$

en considérant $[\Delta u(P)]$ comme fonction de P'.

La démonstration sera achevée si l'on établit que le second terme

$$\iint_{\gamma'} \log\theta(M', P')[\Delta(u(P)]\rho(P')\,d\sigma_{P'}$$

est une fonction harmonique. Mais cela résultera du fait que $\log\theta(M', P')$ est une fonction d'ailleurs symétrique, continue de l'ensemble des deux points, et *harmonique* par rapport à chacun d'eux, même quand le point variable vient coïncider avec le point fixé. Or d'après la relation

$$\log\theta(M', P') = \log\frac{1}{M'P'} - \log\frac{1}{MP}$$

et la conservation de l'harmonicité par transformation conforme, l'harmonicité est évidente quand M' et P' sont distincts. On complétera aussitôt en utilisant la propriété bien connue et qui remonte à Schwarz [1] qu'une fonction *bornée* et harmonique au voisinage d'un point sauf peut-être en ce point, peut y être définie de façon à y être également harmonique. En effet $\theta(M', P')$ lorsque $M' \to P'$ fixé, tend

(1) Schwarz, *Journal de Crelle*, vol. 74, 1872, p. 252. On trouvera plus loin (Chap. II, n° 1) une démonstration très simple de MM. Zaremba-Lebesgue. D'ailleurs ce théorème rentre dans le « principe des singularités positives » de M. Picard (*voir* plus loin, Chap. III, n° 2).

vers $\sqrt{\rho(P')}$ positif et fini. Le théorème est donc établi et dans le *cas de l'inversion* $OM.OM' = 1$ on aura

$$\rho(M') = \frac{1}{\overline{OM'}^4};$$

donc

$$\Delta' u'(M') = \frac{1}{\overline{OM'}^4} \Delta u(M) = \overline{OM}^4 \Delta u(M).$$

3. Considérons l'équation plus générale que $\Delta u = cu$

$$\Delta u = F(u; x, y), \tag{4}$$

où le second membre est fonction continue de l'ensemble des trois variables, u étant quelconque et le point $M(x, y)$ dans un domaine Ω. *Je dirai que u fonction continue de* M *sur un domaine* ω *de* Ω *est sur ce domaine intégrale (généralisée) de l'équation* (4), *s'il existe sur* ω *un laplacien généralisé* Δu *égal à* $F(u;\ x,\ y)$. Alors tous les laplaciens répondant aux conditions précitées existeront pour u et auront même valeur sur ω; et la fonction

$$E(x, y) = u(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_\gamma \log \frac{1}{MP} F(u(P); P)\, d\sigma_P$$

sera harmonique à l'intérieur du cercle γ arbitraire complètement intérieur à ω. Réciproquement si u, continue de M sur ω, est telle que, à l'intérieur de tout cercle γ complètement intérieur à ω, E soit harmonique, u admettra sur ω *tous* les laplaciens généralisés; et ils seront en chaque point égaux à la fonction continue $F[u(M); M]$.

Ainsi *la définition de l'intégrale généralisée*, basée sur l'existence d'un laplacien généralisé, *coïncide avec la suivante : u est intégrale sur* ω *si, à l'intérieur de tout cercle* γ *complètement intérieur à* ω, *la fonction* E *est harmonique*.

Observons maintenant que le $\iint_\gamma$ de l'expression E admet partout dans ω des dérivées premières continues, qui s'obtiennent par dérivation sous le signe $\iint$. *Donc toute intégrale de* (4) au sens généralisé adopté admet des dérivées premières continues. Si maintenant $F(u;\ x,\ y)$ admet des *dérivées partielles premières continues*, on voit que toute intégrale de (4) admettra toutes ses dérivées secondes continues; *donc elle sera intégrale au sens ordinaire*, en entendant par là qu'elle a ses dérivées secondes continues et que le laplacien ordinaire est égal à $F(u; M)$. Et cela subsisterait d'ailleurs avec des conditions sur F plus larges que les précédentes.

Je donnerai encore une *autre définition* équivalente, et très importante, *de l'intégrale généralisée;* il faut et suffit, que sur ω, u admette des dérivées partielles premières continues et que pour tout cercle γ_0 complètement intérieur, on ait

$$(5)\qquad \int_{\text{circonf. }\gamma_0-\text{ext}} \frac{du(M)}{dn}\,ds_M = \iint_{\gamma_0} F(u(M), M)\,d\sigma_M.$$

Cette condition est nécessaire. Prenons en effet l'expression E relative à un cercle γ contenant γ_0 ou à γ_0 lui-même; vu l'harmonicité à l'intérieur, on aura

$$\int_{\gamma_0} \frac{dE}{dn}\,ds = 0;$$

d'autre part, par des opérations faciles à justifier ([1])

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_0\text{ext}} \frac{d}{dn}\left[\iint_{\gamma} \log\frac{1}{MP}\, F(u(P), P)\,d\sigma_P\right] ds_M \\
&\quad = \iint_{\gamma}\left[\int_{\gamma_0\text{ext}} \frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{MP}\right) ds_M\right] F(u(P); P)\,d\sigma_P \\
&\quad = -2\pi \iint_{\gamma_0} F(u(P); P)\,d\sigma_P,
\end{aligned}$$

d'où la condition annoncée.

Elle est suffisante car elle entraîne pour l'expression E relative à γ quelconque, et qui aura des dérivées premières continues, la propriété

$$\int_{\gamma_0} \frac{dE}{dn}\,ds = 0$$

([1]) On pourra isoler la circonférence γ_0 par un voisinage en couronne, puis après des opérations valables dans des conditions ordinaires sous le signe $\iint$, passer à la limite.

pour tout cercle γ_0 contenu dans γ, en vertu de la dernière égalité.

Il en résulte, d'après un théorème de Bocher-Kœbe [1] que E est harmonique à l'intérieur de γ. C. Q. F. D.

Ainsi la dernière équation intégrale locale équivaut à l'équation prise au sens généralisée; elle est plus générale que l'équation aux dérivées partielles prise au sens ordinaire. Nous adoptons ainsi tout à fait un point de vue de Bocher sur le remplacement d'équations aux dérivées partielles par des équations intégrales [2]. J'insiste pour le cas de $F = cu (c \geqq 0)$ sur la *signification* évidente de *l'équation intégrale locale* (5) *dans l'interprétation calorifique;* c'est cette équation (5) qui traduit directement le phénomène d'équilibre thermique et c'est d'elle qu'on tire, moyennant l'hypothèse supplémentaire des dérivées secondes continues de u, hypothèse en fait inutile, l'équation aux dérivées partielles prise au sens ordinaire.

4. Les considérations de ce paragraphe I s'étendent aussitôt au cas de l'espace à $n > 2$ dimensions. On remplacera seulement $\log \frac{1}{MP}$ par $\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}$ et dans la formule de Poisson le coefficient 2π par $(n-2)s_n$ s_n étant la surface de la sphère unité. *Toutefois* en ce qui concerne la transformation du laplacien par transformation conforme, ce qui précède ne peut s'étendre que pour le cas de la similitude; mais pour l'*inversion*, on peut établir la transformation de Lord Kelvin

$$OM.OM' = 1, \qquad v'(M') = \frac{1}{OM'} u(M), \qquad \Delta' v'(M') = \frac{1}{\overline{OM'}^{2n-1}} \Delta u(M)$$

par une démonstration, de principe analogue à celle donnée plus haut, un peu plus simple, et qui m'avait été communiquée par M. Bouligand.

---

(1) Si, sur un domaine, une fonction $\varphi(u)$ possède des dérivées premières continues et satisfait pour toute circonférence γ à la condition $\int_\gamma \frac{d\varphi}{dn} ds = 0$, φ est harmonique (*voir* références et démonstration dans l'Ouvrage de M. Kellog, *Foundations of Potential Theory* (Berlin, 1929), p. 227).

(2) *Voir* par exemple Evans, *The Cambridge Colloquium*, 1916, p. 75.

II. — Propriétés d'impossibilité de certains extrema des intégrales et conséquences immédiates.

5. On connaît depuis longtemps des propriétés de cette nature pour les intégrales d'équations de type elliptique, avec des coefficients soit analytiques (Picard), soit seulement continus (Paraf) [1]. Prenons par exemple l'équation $\Delta u = cu$ où c est continu sur un domaine ω. En supposant $c > 0$, M. Paraf montre l'impossibilité pour une intégrale (et le raisonnement vaut au sens généralisé de l'intégrale) d'avoir un maximum en un point M_0 de ω où elle est positive; il suffit de voir que Δu doit être $\leqq 0$ en ce point tandis que cu y est > 0. On voit le rôle essentiel des hypothèses $c > 0$, $u(M_0) > 0$; et pourtant le résultat subsiste sous les hypothèses $c \geqq 0$, $u(M_0) \geqq 0$, le cas $u = \text{const.}$ étant excepté. M. Lichtenstein a fait dans cet ordre d'idées et pour des équations plus générales, des remarques qui lui ont permis d'étendre des travaux de M. Picard basés sur les seuls théorèmes de Paraf. Mais il a toujours pris d'ailleurs le laplacien dans son sens classique.

Rappelons et précisons quelques théorèmes d'impossibité d'extrema valables dans l'espace à n dimensions [2].

6. Considérons l'équation

$$\Delta u = cu + f \qquad (c \geqq 0), \tag{6}$$

où les fonctions c et f sont continues sur un domaine ω, c étant essentiellement $\geqq 0$.

Pour toute intégrale généralisée *il y a impossibilité d'un maximum* > 0 *en un point* M_0 *dans le voisinage duquel : 1° u n'est pas constante; 2°* $f \geqq 0$; ou bien d'un minimum < 0 en changeant la condi-

---

(1) *Voir* Picard, *Journal de l'École Polytechnique*, 1890, et *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I, § III.

(2) Au cours de l'impression, je ne puis que signaler, suivant l'aimable indication de M. E. Schmidt, la Note récente et très simple sur ce sujet de M. E. Hopf [*Sitz. der Pr. Ak. der W.* (1927)]. *Elementare Bemerkungen....*

tion $f \geqq 0$ en $f \leqq 0$ (¹). Soulignons pour le seul cas de l'équation

$$\Delta u = cu \qquad (c \geqq 0), \tag{7}$$

les *conséquences* importantes qui suivent :

Si sur un domaine ω l'intégrale u n'est pas *partout* constante, il ne peut y avoir de maximum > 0 ou de minimum < 0; sinon on pourrait trouver un point où cette propriété existerait et pour lequel u ne serait pas constante au voisinage. Ainsi, hors le cas $u = \text{const.}$ sur ω, u n'atteint pas sur ω sa borne supérieure si celle-ci est > 0, ou sa borne inférieure si celle-ci est < 0.

Par suite si u considérée sur un domaine borné Ω *prend* (²) sur la frontière Σ, en chaque point, une valeur nulle ou d'un signe déterminé, u sera nulle ou de ce signe sur Ω; et si elle prend en chaque point de Σ une valeur de module $\leqq \mu$, on aura sur Ω $|u| \leqq \mu$, et même $|u| < \mu$ si u n'est pas constante sur Ω.

En conséquence il ne peut y avoir deux intégrales distinctes de (6) ou (7) prenant la même valeur déterminée finie en tout point de la frontière d'un domaine borné considéré.

Considérons maintenant sur Ω les fonctions continues u_1, u_2 telles que :

1° $$\begin{matrix} \Delta u_1 = c_1 u_1 & (c_1 \geqq 0) \\ \Delta u_2 = c_2 u_2 & (c_2 \geqq 0) \end{matrix} \qquad (c_1 \leqq c_2;\ c_1,\ c_2 \text{ continues sur } \Omega);$$

2° u_1, u_2 prennent en tout point de la frontière Σ des valeurs finies satisfaisant à

$$u_1 \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad u_2 \leqq u_1.$$

Sous ces conditions on aura sur Ω

$$u_1 \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad u_2 \leqq u_1.$$

(¹) J'en ai donné une démonstration dans une Note des *Lincei* (vol. XI, 1930. p. 373), puis dans la Note de l'*Ist. Lombardo* (*loc. cit.*); je me suis aperçu ensuite qu'elle était la particularisation de celle qu'avait faite M. Lichtenstein pour l'équation linéaire générale (*Encyklopädie*, *loc. cit.*, p. 1309, Fussnote 73).

La même démonstration fournirait des propriétés analogues pour l'équation $\Delta u = F(u, M)$.

(²) Dire que u définie sur un domaine *prend une valeur* λ (sous-entendue « déterminée ») en un point M_0 de la frontière, c'est-à-dire que $u \to \lambda$ quand M, sur le domaine, tend de façon *arbitraire* vers M_0, c'est-à-dire quand $MM_0 \to 0$.

En effet, l'impossibilité d'un minimum <0 pour u_1 impose bien $u_1 \geqq 0$; mais alors

$$\Delta(u_1 - u_2) = c_2(u_1 - u_2) + (c_1 - c_2)u_1 \qquad \text{où} \qquad (c_1 - c_2)u_1 \leqq 0,$$

et l'impossibilité d'un minimum <0 pour $u_1 - u_2$ impose bien $u_2 \leqq u_1$.

Par suite, si l'on remplace la condition 2° par celle qu'à la frontière

$$u_1 \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad |u_2| \leqq u_1,$$

ces inégalités vaudront aussi à l'intérieur.

7. On verra que le théorème précédent s'étend en remplaçant

$$\Delta u_1 = c_1 u_1 \qquad \text{par} \qquad \Delta u_1 = c_1 u_1 + f \qquad \text{avec } f \leqq 0,$$

et cela permet de *compléter l'énoncé* initial du n° 6; en montrant sous les mêmes conditions la même *impossibilité pour un maximum nul*, ou ce qui revient au même, que *pour toute intégrale* (généralisée) *de* $\Delta u = cu + f$ $(c \geqq 0)$, *il y a impossibilité d'un minimum nul en tout point* M_0 *dans le voisinage duquel* u *n'est pas partout nul et* f *est* $\leqq 0$ (¹).

Soulignons l'impossibilité d'un *extremum* nul pour toute intégrale ($u = 0$ excepté) de l'équation homogène (7) et *complétons les énoncés de la fin du n° 6.*

Une intégrale $\geqq 0$ sur un domaine est partout nulle ou partout > 0, sinon on pourrait trouver un point où elle aurait un minimum nul sans être nulle au voisinage.

Donc si une intégrale sur un domaine prend une valeur déterminée $\geqq 0$ en tout point de la frontière, elle sera positive en tout point du domaine, dès qu'elle ne sera pas nulle sur toute la frontière.

Dans le dernier énoncé du n° 6 *supposons* u_1 *non partout nulle sur* Σ, *donc* > 0 *sur* Ω. Alors, si l'égalité $u_1 = u_2$ a lieu en un point du domaine, elle aura lieu partout et d'après l'équation

$$\Delta(u_1 - u_2) = c_1(u_1 - u_2) + (c_1 - c_2)u_1,$$

(¹) J'en ai donné une démonstration (*R. Ist. Lomb.*, *loc. cit.*, n° 4). M. Lichtenstein avait déjà indiqué la propriété pour l'équation $\Delta u + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = cu$, par une méthode toute différente valable *sans* hypothèse sur le signe de c (*R. di Palermo*, t. 33, 1912, p. 210).

on aura $c_1 = c_2$ sur Ω. En conséquence *il suffira* qu'en *un* seul point de Σ on ait $u_2 < u_1$ ou bien qu'en *un* point du domaine on ait $c_1 < c_2$ pour que en *tout* point du domaine $u_2 < u_1$.

Observons encore pour la suite que, sans hypothèse à la frontière, sous les conditions

$$sur\ \Omega \begin{cases} c_1 \leqq c_2 \qquad (\text{et non } c_1 \equiv c_2), \\ 0 \leqq u_2 \leqq u_1 ; \end{cases}$$

alors, si l'*un* de u_1, u_2 est > 0, on aura *partout* $u_2 < u_1$.

III. — Le problème de Dirichlet relatif à l'équation

$$(7) \qquad \Delta u = cu \qquad (c \geqq 0).$$

Quelques propriétés de la solution. Fonction de Green généralisée.

8. Le problème de Dirichlet classique $\mathcal{D}$ pour un domaine borné Ω de frontière Σ consiste à trouver une fonction harmonique sur Ω et qui prenne des valeurs données en distribution continue sur Σ.

On a un problème plus général ($\mathcal{D}_c$) en remplaçant la condition d'harmonicité par la condition (7), c étant $\geqq 0$ et continue sur le domaine. De même que pour le premier, il n'y a pas toujours de solution sous les seules hypothèses faites; mais nous savons d'après le n° 6 qu'il ne saurait y avoir deux solutions distinctes.

Restreignons les hypothèses pour avoir dès maintenant un cas simple où il y ait une solution. *Nous prendrons, comme domaine*, un domaine borné pour lequel le problème de Dirichlet *harmonique* soit possible, *quelle que soit* la distribution continue donnée sur Σ ou, comme nous dirons, *un domaine (de type)* D_h; il jouit de la propriété suivante, conséquence de travaux modernes sur le problème de Dirichlet : ôtons-en un domaine fermé complètement intérieur et d'extérieur connexe tel que, si on le supprime d'un cercle (ou sphère) où il est complètement intérieur, il reste un domaine D_h; alors il restera aussi un domaine D_h dans l'opération proposée.

Supposons d'autre part sur $c(M)$ qu'il soit *borné* sur le domaine considéré Ω. Alors $h(M)$ étant la solution harmonique pour une distribution donnée sur Σ, et $G(M, P)$ la fonction de Green de Ω [1], *la recherche* d'une solution u du problème $(\mathcal{D}_c)$ *équivaut* à la résolution de l'équation du type de Fredholm,

$$u(M) + \frac{1}{2\pi}\int\int_\Omega G(M, P)\,c(P)\,u(P)\,d\sigma_P = h(M) \tag{8}$$

(cas du plan mais équation analogue pour l'espace) où u est continue et bornée.

Je renvoie pour cela à l'Ouvrage de M. Picard (p. 129) dont les raisonnements peuvent s'étendre aussitôt avec les hypothèses que nous avons adoptées.

Remarquons que l'équation sans second membre ne peut avoir de solution non nulle; sinon ce serait une solution du problème de Dirichlet non nulle partout mais nulle à la frontière. Il en résulte que la théorie de Fredholm dont on sait maintenant que les théorèmes fondamentaux sont valables pour (8) et nos hypothèses, fournit *une solution* du problème. Il suffirait d'ailleurs d'utiliser cette théorie lorsque Ω est un quadrillage (ou polycubique) car un passage à la limite permet de passer de là au cas général.

9. D'ailleurs on peut se passer de la théorie de Fredholm et traiter le problème précédent par des méthodes antérieures au développement de la théorie des équations intégrales. Je renvoie à leur exposé au Chapitre IX de l'Ouvrage de M. Picard. Une première méthode due

---

(1) *Voir*, pour ses propriétés, l'Ouvrage de M. Picard (Chap. VIII) et pour le théorème de symétrie, l'Ouvrage de M. Kellog (p. 238). Soit

$$G = \log\frac{1}{MP} - \omega(M, P) \qquad \left(\text{ou } \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} - \omega\right).$$

Je souligne pour $\omega(M, P)$ $[M(x, y);\ P(\xi, y)]$ que les dérivées de tous ordres en x, y sont continues de (M, P) pour P sur le domaine *fermé* et M au voisinage de tout point intérieur; d'après cela, ψ étant continue et bornée sur Ω, on pourra dériver sous le signe $\int\int$ l'expression $\int\int_\Omega \omega(M, P)\psi(P)\,d\sigma_P$; d'où résulte l'*harmonicité* de cette expression.

à M. Picard (¹) consiste à partir d'un domaine assez petit pour que réussisse un procédé de résolution par approximations successives (*voir* p. 133) et à l'agrandir progressivement jusqu'au domaine proposé grâce à l'emploi d'un procédé alterné (*voir* p. 141); les hypothèses sont plus restreintes que les nôtres, mais on pourrait adapter les raisonnements à notre cas; en particulier on fait tout de suite l'extension $c > 0$ en $c \geqq 0$ (²); pour la seconde méthode exposée (³) (p. 150) l'adaptation est immédiate, les difficultés venant de la généralité du domaine disparaissant parce qu'on raisonne toujours sur le domaine proposé; et c'est sur l'équation qu'on fait des modifications successives par l'introduction d'un paramètre (⁴).

Ainsi, sans la théorie de Fredholm, on peut établir *la résolubilité du problème* $\mathcal{D}_c$ pour l'équation (7) et un domaine D_h, c étant supposé borné et quelle que soit la distribution continue donnée. *Étudions la solution* de ce problème.

10. A une combinaison linéaire homogène de deux distributions sur la frontière Σ, correspond la solution obtenue par la même combinaison des solutions. Autrement dit *la solution* est une *fonctionnelle linéaire* de la distribution donnée.

(¹) *Acta math.*, t. **12**, 1888, où est le premier des nombreux travaux de M. Picard sur les équations du second ordre. Schwarz avait bien étudié auparavant (*Acta Soc. Foen.*, t. **15**) l'équation $\Delta u = cu$, mais pour $c < 0$.

(²) Cette extension de $c > 0$ en $c \geqq 0$ est immédiate pour le lemme fondamental (*loc. cit.*, p. 139) relatif à un domaine à deux contours au moins. Avec une seule courbe limitante, le lemme n'est plus exact pour le cas harmonique; mais M. Picard a fait remarquer qu'il l'est dans le cas $c > 0$ (p. 145). Grâce aux nos **6** et **7**, on verra que cela s'étend à l'hypothèse où c est $\geqq 0$ et *non partout nul* sur le domaine.

(³) Méthode de prolongement analytique donnée pour un type d'équation plus général non linéaire, par M. Le Roy dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale*, t. **14**, 1897, p. 452-462).

(⁴) On peut poursuivre ce genre d'extension des travaux de M. Picard; ainsi dans l'étude de $\Delta u = F(u; x, y)$ (Chap. IX, § III) on peut remplacer l'hypothèse fondamentale $F'_u > 0$ par $F'_u \geqq 0$ tout comme dans le cas $F = cu$; de même au Chapitre X aussi bien pour les problèmes plans que gauches, on peut changer l'hypothèse $c > 0$ en $c \geqq 0$, à condition seulement que, pour les problèmes sans solution harmonique, c ne soit pas partout nul.

Elle est $\geqq 0$ si celle-ci $\geqq 0$ et même alors soit partout nulle, soit partout > 0 (*voir* § II). Toute distribution peut être considérée avec grand arbitraire comme la différence de deux distributions $\geqq 0$; de sorte que toute solution est, soit > 0, soit la différence de deux solutions > 0, ce qui sera utilisé très souvent. On sait d'après le paragraphe II *comparer deux solutions* > 0 relativement aux distributions données, et aussi aux fonctions c.

On voit aussitôt que si une distribution varie infiniment peu, il en est de même de la solution, puisque le module de la différence de deux solutions est au plus égale à son maximum sur Σ. Autrement dit en prenant comme « distance » de deux distributions le maximum du module de la différence en un point, la solution est une *fonctionnelle continue de la* distribution, et cela uniformément sur le domaine, avec uniformité encore par rapport à c.

C'est aussi une *fonctionnelle continue du coefficient* c, *uniformément sur le domaine*, même, *dans le cas du plan*, en prenant comme « *distance* » *de deux fonctions* c, c_1 *et* c_2 *la valeur* $\sqrt{\int\int_\Omega (c_1 - c_2)^2 \, d\sigma}$. Fixons une distribution donnée quelconque de module maximum μ. Soient u_1, u_2 les solutions correspondant à c_1 et c_2. La différence $u_1 - u_2$ s'annule sur la frontière et satisfait à

$$\Delta(u_1 - u_2) = c_1(u_1 - u_2) + (c_1 - c_2)\, u_2.$$

Comparons-la avec la fonction $\geqq 0$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int\int_\Omega \mu \,|\, (c_1(\mathrm{P}) - c_2(\mathrm{P}) \,|\, \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

nulle sur Σ, intégrale de

$$\Delta v = -\,|\, c_1 - c_2 \,|\, \mu.$$

On voit que

$$\Delta(u_1 - u_2 - v) = c_1(u_1 - u_2 - v) + c_1 v + (c_1 - c_2) u_2 + |\, c_1 - c_2 \,|\, \mu,$$

et comme

$$(c_1 - c_2) u_2 + |\, c_1 - c_2 \,|\, \mu \geqq 0,$$

donc

$$c_1 v + (c_1 - c_2) u_2 + |\, c_1 - c_2 \,|\, \mu \geqq 0,$$

la fonction $u_1 - u_2 - v$ nulle sur Σ ne peut prendre de valeurs > 0 sur Ω sinon elle admettrait en un point un maximum > 0 sans être constante au voisinage. Donc

$$u_1 - u_2 - v \leqq 0.$$

En considérant de la même façon $u_2 - u_1 - v$, il viendrait

$$u_2 - u_1 - v \leqq 0.$$

Donc

$$|u_1 - u_2| \leqq v,$$

ou

$$|u_1 - u_2| \leqq \frac{\mu}{2\pi} \iint_\Omega |c_1(P) - c_2(P)|\, G(M, P)\, d\sigma_P, \tag{9}$$

et, par suite, d'après une inégalité de Schwarz bien connue,

$$|u_1 - u_2| \leqq \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{\iint_\Omega [G(M, P)]^2\, d\sigma_P} \sqrt{\iint_\Omega |c_1(P) - c_2(P)|^2\, d\sigma_P};$$

et comme $\iint_\Omega [G(M, P)]^2\, d\sigma_P$ est une fonction de M bornée sur Ω [1], on conclut à la formule très importante, pour la variation δu correspondant à δc,

$$|\delta u| \leqq A \sqrt{\iint_\Omega (\delta c)^2\, d\sigma} \qquad (A > 0), \tag{10}$$

où A ne dépendant *que* du domaine et la distribution sur Σ mais *pas* de c, est même le produit d'une constante attachée au domaine par la borne μ de la distribution.

Cette formule (10) est plus précise que la continuité annoncée : on en déduit

$$|\delta u| \leqq B \max |\delta c|, \tag{10'}$$

où B est une constante analogue à A.

---

[1] En considérant le cercle de centre un point quelconque de Ω et de rayon égal au diamètre D de Ω, on voit qu'une limite supérieure de l'expression est $\int_0^D r\left(\log\frac{D}{r}\right)^2 dr$. D'ailleurs l'expression est continue de M sur Σ et, en raisonnant comme pour $\iint G\, d\sigma$, on verrait qu'elle s'annule sur Σ.

Cela se déduit *directement* d'ailleurs de (9) et démontre la continuité de la fonctionnelle quand on prend comme distance de deux c, $\max|\delta c|$, ce qui est bien moins général que le premier énoncé.

Lorsqu'on impose à c d'être borné par un nombre K, on peut établir la continuité de la fonctionnelle u de c, encore *uniformément* sur le domaine, dans un sens plus étendu que les précédents, en prenant comme « distance » de deux c, $\int\int_\Omega |\delta c|\,d\sigma$, c'est-à-dire que

$$(10'') \qquad |\delta u| \to 0 \quad \text{avec} \int\int_\Omega |\delta c|\,d\sigma.$$

Cela se déduit facilement de la formule (9) en isolant le point M infini de G pour l'intégration; et l'on voit que cette propriété de continuité entraîne celle qui correspond à la distance $\sqrt{\int\int_\Omega |\delta c|^2\,d\sigma}$, *mais* avec les c bornés; il suffit de remarquer que

$$\int\int_\Omega |\delta c|\,d\sigma \leqq \sqrt{\int\int_\Omega |\delta c|^2\,d\sigma}\cdot\sqrt{\int\int_\Omega d\sigma}.$$

Montrons enfin que, *pour une distribution donnée, lorsque c tend uniformément vers* $+\infty$, *la solution tend vers zéro uniformément sur tout domaine complètement intérieur.* Il suffit de le voir pour une distribution $\geqq 0$ et un coefficient $c = \text{const.}\ k > 0$.

Mais alors d'après l'équation

$$u + \frac{k}{2\pi}\int\int_\Omega G(M, P)\,u(P)\,d\sigma_P = h(M)$$

[où $h(M)$ est la solution harmonique fixe $\geqq 0$],

$$k\int\int_\Omega G(M, P)\,u(P)\,d\sigma_P$$

est borné, donc

$$\int\int_\Omega G(M, P)\,u(P)\,d\sigma_P \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{k}.$$

Il en résulte que par tout domaine ω *complètement* intérieur,

$$\int\int_\omega u(P)\,d\sigma_P \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{k}$$

(c'est-à-dire que, sur ω, u tend vers zéro en moyenne). Montrons que $u \to 0$ en tout point. Si en effet $u(M_0)$ restait supérieur à $\varepsilon > 0$, il en serait de même de la valeur moyenne sur toute circonférence γ de centre M_0 puisque cette valeur moyenne est la valeur en M_0 de la fonction harmonique à l'intérieur de γ et prenant sur γ les mêmes valeurs que u; on en déduirait bien aisément que la valeur moyenne dans *l'aire* d'un cercle de centre M_0 resterait supérieure à ε quand $k \to +\infty$. D'où la contradiction. Ainsi $u \to 0$ en tout point avec $\frac{1}{k}$. Et comme u décroît quand k croît, il résulte d'un théorème aisé de Dini ([1]) que u tendra vers zéro avec $\frac{1}{k}$ *uniformément* sur tout domaine *complètement* intérieur à Ω.

11. Parlons maintenant de *l'allure des dérivées premières de la solution au voisinage de la frontière* Σ.

Prenons d'abord (dans le plan) le cas simple d'une portion de Σ formée d'un *arc analytique sur lequel la solution prend des valeurs en succession analytique*. On peut alors *prolonger la fonction à travers l'arc de telle sorte qu'il y ait des dérivées premières continues au voisinage bilatéral;* c'est ce qu'établit un raisonnement très simple de M. Picard ([2]) à l'aide d'une transformation conforme.

Mais *on peut aller beaucoup plus loin* en utilisant des résultats tout à fait récents sur lesquels M. Lichtenstein a eu l'amabilité de me mettre au courant.

Tout d'abord rappelons un *théorème* de Dini ([3]) : Considérons sur un domaine borné Ω une fonction $\psi(P)$ bornée, et continue (ou même simplement intégrable). Le potentiel

$$V(P) = \int\int_{\Omega} \log \frac{1}{MP} \psi(P)\, d\sigma_P$$

admet des dérivées premières partout continues et qui, dans toute

---

([1]) Si sur un domaine borné fermé, une suite de fonctions continues est en chaque point non croissante et tendant vers zéro, il y a convergence *uniforme* vers zéro. Démonstration facile par l'absurde.

([2]) *Journal de Liouville*, 1900, p. 130-132.

([3]) *Acta. math.*, t. **25**, 1902, p. 191-197.

région bornée du plan satisfont à *une condition de Hölder*

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\substack{M_1 \\ (\text{ou } y)}} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\substack{M_2 \\ (\text{ou } y)}} \right| < A\, \overline{M_1M_2}^{\lambda} \qquad (A,\ \lambda \text{ constantes} > 0,\ \lambda \text{ arbitraire} < 1).$$

On verra aisément que sur un arc de courbe possédant une courbure (finie) continue, V admet une dérivée tangentielle $\frac{\partial V}{\partial s}$ qui satisfait à une condition de Hölder avec le *même* exposant λ.

Considérons maintenant une courbe de Jordan simple à courbure finie et continue, et, sur elle, une distribution de valeurs, continue et admettant sur une portion $\widehat{\alpha\beta}$ de la courbe une dérivée par rapport à l'arc s satisfaisant à une condition de Hölder avec un certain exposant λ. Il résulte d'un Mémoire récent de M. J. Schauder ([1]) que la solution W du problème de Dirichlet classique harmonique admet des dérivées premières qui *prennent* des valeurs finies déterminées en tout point de $\widehat{\alpha\beta}$ (extrémités exclues) avec *continuité* sur l'arc. En tout point de $\widehat{\alpha\beta}$ (extrémités exclues), il y aura donc une dérivée de W dans toute direction non tangente ([2]); en particulier il y aura une dérivée normale continue de s qui sera la limite, d'ailleurs avec *uniformité* sur tout arc complètement intérieur à $\widehat{\alpha\beta}$, de la dérivée dans la même direction, en un point infiniment voisin sur la normale.

Revenons maintenant à la solution u de notre problème, intégrale de (7) et *supposons qu'une portion de la frontière soit un arc $\widehat{\alpha\beta}$ à courbure (finie) continue et que la distribution donnée sur cet arc admette sur tout arc $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ complètement intérieur, une dérivée de la longueur s de*

([1]) *Math. Zeitschrift*, 1931. Bd 33, *Potential theoretische Untersuchungen*, S. 602-640, M. Schauder se place dans l'espace à trois dimensions, mais tout s'applique immédiatement au cas du plan. Il étudie d'abord le potentiel de double couche, puis, grâce à une équation de Fredholm, passe au problème de Dirichlet. *Voir* aussi LICHTENSTEIN. *Berichte der Säch. Ak. der W.* 72 (1931), *Ueber einige Hilfsätze der Potentialtheorie*.

Je suppose dans le texte qu'il y a une courbure finie continue; on peut être un peu plus général en introduisant une condition de Hölder pour la tangente.

([2]) Cela résulte de la formule des accroissements finis qui ne suppose l'existence de la dérivée qu'*à l'intérieur* de l'intervalle. On en déduit que si la dérivée a une *limite* à une extrémité, elle existe en ce point et est égale à cette limite.

l'arc qui satisfasse à une condition du type de Hölder. Alors, on peut affirmer que *les dérivées premières de u prendront des valeurs déterminées finies en tout point de* $\widehat{\alpha\beta}$ (extrémités exclues) avec continuité au voisinage, d'où il suit, comme plus haut, les propriétés de dérivation à la frontière, en particulier pour la direction normale.

En effet joignons deux points α_2, β_2 intérieurs à $\widehat{\alpha\beta}$ par un arc tracé sur le domaine, de façon à former avec $\widehat{\alpha_2\beta_2}$ de la frontière, une courbe simple de Jordan Γ à courbure continue. Si δ est le domaine délimité,

$$u + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\delta} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

est harmonique sur δ et prend sur Γ des valeurs formant une distribution continue; mais celle-ci, d'après le théorème de Dini, admettra le long de $\widehat{\alpha_2\beta_2}$ une dérivée en s satisfaisant à une condition de Hölder $\left(\text{l'exposant étant le plus petit des deux qui correspondent aux valeurs prises respectivement par } u \text{ et par } \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}\right)$. Mais alors, d'après les résultats de M. Schauder, cette fonction harmonique et par suite u admettront des dérivées sur δ, prenant des valeurs en tout point de $\alpha_2\beta_2$ (extrémités exclues) avec continuité. D'où le théorème annoncé.

Il nous sera particulièrement utile de connaître *l'existence* d'une *dérivée normale* définie directement sur la frontière et de savoir qu'elle est égale à la *limite* de la dérivée dans le sens de la normale en un point intérieur voisin, ceci ayant lieu *uniformément* sur tout arc complètement intérieur à $\widehat{\alpha\beta}$. Utilisons cela dès maintenant : supposons la frontière Σ formée d'un nombre fini de courbes de Jordan simples sans point commun, à courbure continue et supposons aussi que la distribution sur Σ admette une dérivée en s satisfaisant à une condition de Hölder. Traçons alors des courbes parallèles à celles de la frontière, sur l'intérieur de Ω et à la distance ε assez petite. On délimite ainsi un domaine Ω_ε de frontière Σ_ε et l'on aura

$$\int\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u\, d\omega + \int_{\Sigma_\varepsilon\,\mathrm{int}} \frac{du}{dn}\, ds = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_{\Sigma_\varepsilon\,\mathrm{int}} \frac{du}{dn}\, ds = -\int\int_{\Omega_\varepsilon} c\, u\, d\sigma.$$

En faisant tendre ε vers zéro, il vient alors

$$\int_{\Sigma_{\text{int}}} \frac{du}{dn}\, ds = -\int\int_{\Omega} cu\, d\sigma.$$

Donnons un *cas d'application important* du théorème fondamental sur les dérivées à la frontière. Supposons qu'on trace *sur un domaine d'existence* ω *de l'intégrale* u de (1) *un arc* à courbure continue. Comme

$$u + \frac{1}{2\pi}\int\int_{u} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

est harmonique sur ω, elle prendra sur l'arc considéré des valeurs formant une distribution douée de dérivées secondes continues de l'arc s; d'autre part la fonction $\frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega}$ prend le long de l'arc des valeurs dont la distribution admet une dérivée en s satisfaisant à une condition de Hölder (théorème de Dini); donc u jouira de la même propriété. *Par suite toute fonction continue sur l'arc et l'un des voisinages, prenant sur l'arc les valeurs de* u, *enfin intégrale de* (7) *sur le voisinage considéré* (arc exclu), *jouira le long de l'arc des propriétés de dérivation expliquées.*

On pourrait développer toute cette étude et considérer par exemple la dérivée normale comme fonctionnelle de la distribution et de $c(\mathrm{M})$; je m'en tiendrai à ajouter le *théorème suivant :*

Considérons une solution de notre problème de Dirichlet généralisé pour une distribution $\geqq 0$, non partout nulle, mais *nulle* sur une portion de la frontière formant un arc $\widehat{\alpha\beta}$ à courbure continue. Je vais montrer que le long de $\widehat{\alpha\beta}$, la dérivée *normale* (donc aussi la dérivée *vers l'intérieur* dans toute direction non tangente) est *positive.*

Il est évident qu'elle est $\geqq 0$. Montrons qu'elle est > 0 en tout point P de l'arc (extrémités exclues). Je vais me ramener à un cas simple en faisant des transformations qui ne pourront que diminuer la valeur de cette dérivée normale parce qu'elles diminueront l'intégrale. D'abord on se ramènera au cas de $c = k$ const. > 0. Cela fait, prenons sur la normale en P un point P_0 de Ω, assez voisin de P pour que $\overline{\mathrm{PP}_0}$ soit le minimum de la distance de P_0 à Σ et traçons deux cercles de centre P_0, l'un γ_1 de rayon inférieur à $\overline{P_0P}$, l'autre γ_2 assez grand pour contenir Ω. Soit μ le minimum, qui est >0, de notre intégrale sur le contour de γ_1. Il suffira de prouver que la solution v du problème de Dirichlet pour $(\Omega - \gamma_1)$ la valeur o sur Σ, la valeur μ sur la circonférence γ_1, enfin pour l'équation $\Delta v = kv$, admet le long de $\widehat{\alpha\beta}$ une dérivée normale positive. Or soit v_1 la solution du problème de Dirichlet pour la même équation, la couronne (γ_1, γ_2), la valeur μ sur γ_1 et la valeur o sur γ_2. On voit aisément que v_1 est fonction de P_0M seul et fonction *décroissante* [1] de sorte que le maximum de v_1 sur Σ est atteint au point P. Soit v_2 la solution du problème de Dirichlet pour la même équation, le domaine $(\Omega - \gamma_1)$, les valeurs de v_1 sur Σ et la valeur o sur la circonférence γ_1. On a sur $(\Omega - \gamma_1)$: $v = v_1 - v_2$. Or le maximum de v_2 étant atteint en P, la dérivée normale de v_2 en P sera $\leqq 0$; d'autre part, vu la décroissance de v_1 fonction de $(\overline{P_0M})$, la dérivée en P de v_1 dans le sens $\overrightarrow{PP_0}$ sera positive. D'où le théorème annoncé pour v et l'intégrale u initiale [2].

Sous une autre forme : $c(M)$ *étant continu et borné sur un domaine, voisinage* (d'un certain côté) *d'un arc à courbure continue, toute intégrale de* (7), *positive sur ce domaine et s'annulant sur l'arc, admet le long de l'arc une dérivée normale positive.*

12. Nous dirons qu'une intégrale $u(x, y)$ sur ω, de l'équation

$$\Delta u = cu, \qquad c \geqq 0 \tag{7}$$

admet en O de ω *une singularité logarithmique de valeur* A, si u est intégrale sur $(\omega - O)$ et de la forme $A \log \frac{1}{OM} + v(x, y)$, où v est tel que $\dfrac{v}{\log \frac{1}{OM}} \to 0$ avec $\overline{OM}$.

On peut se poser le *problème* de la détermination d'une intégrale de (7) ayant en O une singularité de valeur *donnée* et prenant les

(1) En effet, si γ_ρ est un cercle concentrique compris entre γ_1 et γ_2, la valeur de v_1 en un point *intérieur* à la couronne (γ_ρ, γ_2) est *inférieure* à la valeur sur la circonférence γ_ρ.

(2) Je me suis inspiré un peu ici d'un raisonnement de M. Lichtenstein (Voir *Math. Zeitschrift*, 1921, Bd 11, p. 319).

valeurs d'une distribution *donnée* continue sur la frontière Σ d'un domaine Ω du type D_h (contenant O) et sur lequel c est continu et *borné*. C'est le problème de Dirichlet généralisé avec une singularité logarithmique.

La méthode d'approximations successives de M. Picard (Ouvr., *loc. cit.*, p. 179-186) [1] établit l'existence d'une telle intégrale avec un v admettant des dérivées premières continues en O, lorsque c est assez petit ou que dans la région de continuité de c, on prend un Ω entourant O de mesure assez petite. La méthode s'applique même à un c de signe quelconque. C'est au fond l'intégration d'une équation de Fredholm dans un cas particulier. Mais on peut, grâce à la théorie de Fredholm, résoudre très simplement le problème proposé en montrant l'existence et l'unicité de la solution [2] et l'on voit même que v admet des *dérivées premières continues en* O; l'unicité entraîne que la différence de deux intégrales admettant en O une singularité logarithmique de même valeur puisse être définie en O de façon à être intégrale sans singularité.

Quant au flux $\int_{\gamma\,\text{int}} \frac{du}{dn}\,ds$ à travers une circonférence γ de centre O, il tend vers $2\pi A$ quand γ se réduit à O; cela peut s'étendre à une courbe quelconque. Ajoutons que si $\psi(M)$ est continue au voisinage de O,

$$\int_{\text{circ.}\,\gamma\,\text{int}} \psi(M)\frac{du}{dn}\,ds_M \to 2\pi A\psi(O).$$

Quant à la solution du problème comme fonctionnelle des données, indiquons que pour une distribution $\geqq 0$ et $A > 0$, la solution, > 0,

(1) L'indication de ce procédé remonte à une Note de M. Picard (*Comptes rendus*, t. 130, 1900, p. 1502), qui avait déjà auparavant (*Comptes rendus*, t. 112, 1891, p. 686) abordé l'étude des singularités ponctuelles des intégrales d'équations du type elliptique. Ce sont les premiers travaux sur le sujet. Plusieurs auteurs s'en occupèrent ensuite (Picard, Hedrick, Holmgren, Hilbert, Hadamard) pour des équations de types divers, généralement à coefficients analytiques. Enfin en 1907, E.-E. Levi (*R. di. Palermo*, 1907) a traité le problème dans le cas le plus général pour l'équation elliptique à n variables, en se ramenant à une équation de Fredholm.

(2) Voir *R. Ist. Lombardo*, *loc. cit.*, n° 15.

diminue partout dès que A diminue ou que c augmente quelque part; et l'on pourra aussi étendre les formules (10), (10'), (10'') [1].

On appelle *fonction de Green généralisée* $G_c(M, P)$ relative au domaine Ω de type D_h, l'intégrale de (7) s'annulant à la frontière et admettant au point P la singularité logarithmique de valeur $+1$. Elle existe et est unique et l'on peut démontrer qu'elle est symétrique [2] en M, P. Elle est partout > 0, et si une portion de la frontière est un arc à courbure continue les dérivées y prendront des valeurs finies déterminées avec continuité (*voir* n° 11); la dérivée normale $\frac{dG_c}{dn}$ y sera > 0.

Considérons un *domaine* Ω limité par un *certain nombre fini de courbes de Jordan* sans points communs *à courbure continue :* et d'autre part une *distribution* continue (sur le contour Σ) possédant une dérivée en s (arc) vérifiant une *condition de Hölder*. Soit u la solution du problème $(\mathcal{D}_c)$ correspondant. Traçons des courbes parallèles aux courbes limitantes de Σ, à l'intérieur de Ω et à la distance ε assez petite. On obtient ainsi un domaine Ω_ε de contour Σ_ε qui contient le point P de Ω choisi à l'avance arbitrairement. Isolons P par un petit cercle γ de centre P et appliquons la formule de Green (2) au domaine $(\Omega_\varepsilon - \gamma)$ et aux fonctions u et $G_c(M, P)$. Il vient

$$\int_{\Sigma_\varepsilon \text{int}} \left(u \frac{dG_c}{dn} - G_c \frac{du}{dn} \right) ds_M = \int_{\gamma \text{int}} \left(u \frac{dG_c}{dn} - G_c \frac{du}{dn} \right) ds_M,$$

ce qui donne en réduisant γ au point O

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_\varepsilon \text{int}} \left(u \frac{dG_c}{du} - G_c \frac{du}{dn} \right) ds_M.$$

---

[1] On se ramène au cas d'une distribution nulle et de $A = +1$. On reprendra alors le raisonnement du n° 10, en remplaçant dans l'expression de la fonction auxiliaire v, la constante μ par la fonction $G(O, P)$.

D'autre part, je signale pour tout cela la possibilité d'introduire de même un nombre *fini* de singularités.

[2] On le démontrera d'abord dans le cas d'une frontière formée d'un nombre fini de courbes de Jordan sans points communs et à courbure continue. On passe ensuite à la limite au moyen d'une suite de tels domaines Ω_n tendant vers le domaine général proposé Ω, parce que la fonction G_c relative à Ω_n tend vers celle qui est relative à Ω (Voir *R. Ist, Lombardo, loc. cit.*, § II).

Faisons tendre ε vers O; il vient d'après les propriétés des dérivées normales

$$u(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_{\mathrm{int}}} u(\mathrm{M})\frac{d\mathrm{G}_c}{dn}\,ds_{\mathrm{M}}. \tag{11}$$

Et il est immédiat que cette formule s'étend au cas d'une *distribution continue quelconque* sur Σ. On peut en effet approcher d'aussi peu qu'on veut les deux membres de l'égalité à établir par deux quantités égales; il suffit d'approcher de moins de ε arbitraire > 0 la distribution continue donnée par une autre satisfaisant aux conditions sous lesquelles la formule (11) a été établie et d'y appliquer cette formule.

13. Il y a à signaler des différences assez importantes dans *l'extension* de ce qui précède au cas de l'espace à n dimensions. D'abord au n° 10, si les formules (9), (10'), (10'') s'étendent, le raisonnement qui fait passer de (9) à (10) est encore *valable pour* $n = 3$, mais pas au delà ($n \geqq 4$) parce que $\int_\Omega [\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})]^2\, d\sigma_{\mathrm{M}}$ est infini dès que $n \geqq 4$; ainsi *la formule* (10) *est encore valable pour* $n = 3$; mais il n'y a même *plus continuité uniforme* sur Ω, de la fonctionnelle u de c, quand on prend $\sqrt{\int_\Omega (\delta c)^2\, d\sigma}$ comme distance de deux c, *dès que* $n \geqq 4$ [1].

Les développements du n° 11 peuvent s'étendre, étant mis à part le raisonnement mentionné de M. Picard, en prenant des surfaces dont les deux courbures sont continues. Il faut au contraire reprendre le n° 12. On dira qu'une intégrale de (7) admet en O une *singularité élémen-*

[1] On raisonnera par l'absurde en partant d'une solution u correspondant à un certain c et par exemple positive au voisinage d'un point M_0. On fera augmenter c en ce voisinage, de δc tel que $\sqrt{\int (\delta_c)^2\, d\sigma}$ soit arbitrairement petit, et l'on considérera $u + \frac{1}{(n-2)s_n}\int \mathrm{G}cu\, d\sigma = h$; u restera > 0 au voisinage de M_0 et l'on fera apparaître la contradiction en montrant qu'on peut choisir δ_c de façon que $\int \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}^{n-2}}\delta c\, d\sigma$ soit arbitrairement grand en même temps que $\int (\delta c)^2\, d\sigma$ soit arbitrairement petit.

taire de valeur A, si elle est intégrale sur le voisinage $(\omega - O)$ et de la forme $A\frac{1}{\overline{OM}^{n-2}} + v$, $(n > 2)$ où v est tel que $\frac{v}{\frac{1}{\overline{OM}^{n-2}}} \to 0$ avec OM. Posons-nous le même problème que plus haut.

Dans l'espace *à trois dimensions*, on pourra utiliser la méthode de M. Picard ou le raisonnement simple auquel on a renvoyé et qui conduit à l'intégration d'une équation de Fredholm; v admettra encore des dérivées premières continues en O.

Mais les raisonnements ne peuvent plus s'étendre au cas de $n > 3$, car l'intégrale $\int \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} d\sigma_P$ est une fonction de M de l'ordre [1] de $\frac{1}{\overline{OM}^{n-4}}$ pour $n > 4$ ou $\log\frac{1}{OM}$ pour $n = 4$, au lieu d'être bornée. Et l'on s'assurera que v n'est plus nécessairement borné pour $n > 3$, en étudiant le cas de $\Delta u = ku$ ($k =$ const.) et les intégrales fonctions de $r = OM$ seul [2]. E. E. Levi a pu se ramener cependant d'une autre manière à une équation de Fredholm pour des équations plus générales [3]; mais j'ai indiqué, pour le cas précis qui nous occupe, un procédé de passage à la limite indépendant de la théorie de Fredholm et qui montre que le problème proposé admet une *solution unique* [4]; c'est d'ailleurs un cas particulier d'une étude plus générale que nous ferons au Chapitre III. Indiquons que les dérivées premières de v sont telles que $\overline{OM}^{n-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|$ tende vers zéro avec $\overline{OM}$. On pourra enfin définir la fonction de Green généralisée et étendre la formule (11).

---

(1) Rappelons que dans l'espace à n dimensions $\int \frac{1}{\overline{OP}^{\alpha}} \frac{1}{\overline{MP}^{\beta}} d\sigma_P$ est une fonction de M telle que :

Si $\alpha + \beta < n$, elle est *bornée* (et même continue) au voisinage de O;

Si $\alpha + \beta = n$, elle est de l'ordre de $\log\frac{1}{OM}$;

Si $\alpha + \beta > n$, elle est de l'ordre de $\log\frac{1}{\overline{OM}^{\alpha+\beta-n}}$ $\left(0 \leqq \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} < n\right)$.

Voir Note A (Hadamard) de l'Ouvrage de Heywood et Fréchet sur l'équation de Fredholm, et une reproduction dans le *Cours d'Analyse* de Goursat, t. III, 3e édition, p. 362.

(2) Pour tout cela, voir *R. Ist. Lomb.*, *loc. cit.*, n° 15.

(3) *Rend. di Palermo*, 1907, p. 276.

(4) *R. Ist. Lombardo*, *loc. cit.*, n° 15.

IV. — Propriétés des suites et familles d'intégrales de

$$\Delta u = cu; \tag{7}$$

$c \geqq 0$ continu sur Ω ouvert [1].

14. On connait les deux théorèmes classiques de Harnack sur les suites de fonctions harmoniques sur un domaine Ω que nous prendrons borné. Nous allons voir qu'ils s'étendent aux intégrales de (7). Tout s'appliquera au cas de n dimensions, mais pour le langage, on se placera dans le cas du plan.

D'abord, comme il est bien connu, *une suite uniformément convergente d'intégrales sur Ω converge vers une intégrale* [2].

Il suffit de voir que la limite v est intégrale sur un domaine quelconque ω complètement intérieur. D'abord

$$h_n(\mathrm{M}) = u_n + \frac{1}{2\pi}\iint_{\omega} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u_n(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} \tag{12}$$

sera harmonique sur ω. Or on voit aisément que

$$\iint_{\omega} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P}) u_n(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

tend pour $n+\infty$ vers

$$\iint_{\omega} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P}) v(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

et cela *uniformément* pour M sur ω.

En effet si k est une limite supérieure de c sur ω et μ une limite supérieure de l'ensemble des $|u_n|$ sur ω, enfin ε_n la borne supérieure

---

(1) On ne fait pas d'hypothèse sur l'allure de c au voisinage de la frontière.

(2) Une démonstration tout analogue à celle du texte établirait le même théorème pour une équation $\Delta u = \mathrm{F}(u, \mathrm{M})$ où F est continue de (u, M) et douée de dérivée $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ bornée pour u borné et M sur tout domaine complètement intérieur.

de $|v - u_n|$ sur ω :

$$\left|\iint_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u_n(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P} - \iint_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, v(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P}\right|$$
$$\leqq k\varepsilon_n \iint_\omega \left|\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right| d\sigma_\mathrm{P}$$

et il suffit de remarquer que $\iint_\omega \left|\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right| d\sigma_\mathrm{P}$ est borné pour M sur ω par $\int_0^\mathrm{D} r\left|\log\frac{1}{r}\right| dr$, D étant le diamètre de ω.

Mais alors h_n converge uniformément sur ω vers une fonction nécessairement harmonique h de sorte que

$$v + \frac{1}{2\pi}\iint_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, v(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P} = h, \tag{13}$$

harmonique sur ω.

Il s'ensuit que v est intégrale de (7) sur ω.

Pour le cas où u prend des valeurs déterminées finies sur la frontière, il suffit de supposer que ces distributions convergent uniformément, en vertu du n° 6. Ajoutons au théorème bien connu qui précède un *complément* important : on sait que dans le cas harmonique les dérivées convergent vers les dérivées correspondantes des limites, *uniformément* sur tout domaine complètement intérieur [1] De même *pour*

---

[1] Il suffit de le voir pour un cercle γ parce qu'on pourra couvrir un domaine complètement intérieur par un nombre fini de cercles également complètement intérieurs. Or prenons γ_1 concentrique un peu plus grand et aussi complètement intérieur et la formule de Poisson :

$$u_n(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta} u_n(\mu)\,\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mu)\, d\theta_\mu,$$

qui donne, en dérivant,

$$\frac{\partial u_n(\mathrm{M})}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta} u_n(\mu)\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\, d\theta_\mu ;$$

$\left|\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right|$ comme H est *borné* dans γ intérieur à γ_1. On en déduit que dans γ :

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_{n'}}{\partial x}\right| < \mathrm{A}\int_0^{\theta} |u_n(\mu) - u_{n'}(\mu)|\, d\theta_\mu,$$

d'où résulte la convergence uniforme dans γ de la série de fonctions *harmoniques* $\frac{\partial u_n}{\partial x}$; d'où la conclusion.

les intégrales de (7), *les dérivées premières de la suite uniformément convergente* u_n *convergent vers les dérivées correspondantes de la limite* v, *uniformément sur tout domaine complètement intérieur.*

Il suffit de le voir pour un cercle γ complètement intérieur; γ_1 étant un cercle concentrique un peu plus grand et complètement intérieur, reprenons pour γ_1 l'équation (12) qui donne en dérivant par rapport à x par exemple

$$\frac{\partial h_n(\mathrm{M})}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)c(\mathrm{P})u_n)\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} \qquad (\mathrm{M} = x, y);$$

$\frac{\partial h_n}{\partial x}$ convergera vers $\frac{\partial h}{\partial x}$ uniformément sur γ; comme en dérivant (13) il vient

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)c(\mathrm{P})v(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}},$$

il suffira de voir que

$$\int\int_{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)c(\mathrm{P})u_n(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$$

tend vers

$$\int\int_{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)c(\mathrm{P})v(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$$

uniformément sur γ ou même γ_1. Et cela résulte en raisonnant comme plus haut, de ce que

$$\int\int_{\gamma_1}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)\right|d\sigma_{\mathrm{P}}$$

est borné sur γ_1.

15. Avant de chercher à étendre le second théorème de Harnack, parlons un peu des *familles d'intégrales*.

On sait qu'une famille de fonctions harmoniques sur Ω, bornées en module dans leur ensemble sur tout domaine complètement intérieur, jouit de la propriété *d'égale continuité* (¹) sur tout domaine complète-

(¹) Pour cette notion classique due à Ascoli, *voir*, par exemple, MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, p. 27 (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

ment intérieur, comme cela résulte aussitôt de la formule classique de l'intégrale de Poisson (¹).

Cela s'étend aussitôt aux intégrales de (7), c'est-à-dire *qu'une famille d'intégrales bornées en module dans leur ensemble sur tout domaine complètement intérieur jouit de la propriété d'égale continuité sur tout domaine complètement intérieur* (²).

Il suffit de le voir pour un cercle γ complètement intérieur; prenons encore γ_1 concentrique un peu plus grand, complètement intérieur; u étant une intégrale quelconque de la famille, considérons

$$u(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\gamma_1} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

Cette expression définit une famille de fonctions harmoniques et bornées dans leur ensemble sur l'intérieur de γ_1; donc elle jouira de la propriété d'égale continuité sur γ. Il suffira donc pour achever de prouver que la famille $\iint_{\gamma_1} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$ est également continue sur γ ou même γ_1. Or puisque

$$\iint_{\gamma_1} \left| \frac{\partial \log \frac{1}{\mathrm{MP}}}{\partial x} \right| d\sigma_{\mathrm{P}}, \qquad \iint_{\gamma_1} \left| \frac{\partial \log \frac{1}{\mathrm{MP}}}{\partial y} \right| d\sigma_{\mathrm{P}}$$

sont bornés sur γ_1, les dérivées en x, y des fonctions de la famille seront bornées dans leur ensemble sur γ_1. Et cela suffit pour établir l'égale continuité.

De l'égale continuité de la famille considérée des intégrales, on déduira par des raisonnements bien connus basés sur le procédé diagonal (³) que *de toute suite appartenant à la famille on peut extraire*

(¹) Il suffit de le voir pour un cercle γ; prenons un cercle γ_1 concentrique un peu plus grand et complètement intérieur. Grâce à la formule de Poisson pour γ_1, on verra que, dans leur ensemble, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ sont bornés sur γ comme les u sur la circonférence γ_1 et *cela suffit* pour l'égale continuité de la famille, d'après la formule des accroissements finis.

(²) Ce théorème s'étend, par la même démonstration, aux intégrales de $\Delta u = \mathrm{F}(u, \mathrm{M})$ déjà considérée plus haut ($|\mathrm{F}'u|$ borné pour u borné et M sur un domaine complètement intérieur).

(³) *Voir* MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, p. 23 à 27.

une suite convergeant uniformément sur tout domaine choisi à l'avance complètement intérieur; puis même, une suite convergeant uniformément sur un domaine arbitraire complètement intérieur; et la limite est intégrale de (7) sur tout le domaine d'après le premier théorème de Harnack généralisé.

D'où l'on déduit l'extension suivante du *second théorème de Harnack* (forme réduite).

Étant donnée une suite d'intégrales de (7), *bornées (dans les deux sens) dans leur ensemble sur tout domaine complètement intérieur, et partout non croissante ou partout non décroissante sur* Ω, *elle tendra vers une intégrale de* (7) *et cela uniformément sur tout domaine complètement intérieur* [1].

---

[1] Ce théorème peut encore s'établir par un passage à la limite sur :

$$u_n(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi}\int\int_\gamma \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, u_n(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P} = h_n(\mathrm{M}) \text{ harmonique.}$$

en prenant l'intégrale au sens de Lebesgue; on en déduit pour la limite la propriété de continuité et d'être intégrale; la propriété d'uniformité de convergence résulte du théorème de Dini rappelé au nº 10. *Voir* ma Note des *Comptes rendus*, t. 190, p. 411, ou celle de l'*Istituto Lombardo* (*loc. cit.*), nº 6.

L'énoncé du texte se trouve à peu près dans la Thèse M. Le Roy (*Ann. de l'École Normale*, t. 14, 1897, p. 422) qui considère des équations de type un peu plus général. Sa démonstration assez longue repose sur l'emploi de la formule de Green généralisée (11).

Comme plus haut cet énoncé et le précédent s'appliquent à l'équation plus générale $\Delta u = \mathrm{F}(u;\, \mathrm{M})$ déjà considérée.

Enfin par le même genre de considérations on peut compléter la démonstration de M. Picard dans son exemple d'approximations successives divergentes (*Bulletin de la Société math.*, t. 28, 1900, p. 137). Il s'agit de $\Delta u = \mathrm{F}(u;\, x, y)$ avec F, F'_u positives et bornées quand $|u|$ est borné; on cherche à résoudre le problème de Dirichlet pour la valeur o sur le contour. La méthode d'approximations successives donne la suite u_n telle que

$$u_n = -\frac{1}{2\pi}\int\int_\Omega \mathrm{GF}(u_{n-1};\, x, y)\, d\sigma.$$

On voit que les u_{2p+1} décroissent vers une limite v, les u_{2p} croissent vers une

La suite a en effet nécessairement une limite; on peut en extraire une suite qui jouisse de la propriété annoncée; et l'on en déduit qu'il en sera de même pour la suite donnée.

Ajoutons en vue de la suite une *remarque* très simple relative à la *frontière*.

Considérons une suite d'intégrales u_n et une portion σ de la frontière, *séparée* du reste s'il y en a (c'est-à-dire que les deux parties sont à une distance *non nulle*); supposons que toutes les intégrales prennent, avec continuité au voisinage de σ, un même système de valeurs sur σ. Prenons une suite extraite convergeant uniformément sur tout domaine complètement intérieur. Je dis qu'elle convergera uniformément sur le voisinage de σ, σ compris; de sorte que la limite de la suite prendra sur σ les valeurs considérées, comme les u_n, avec continuité au voisinage de σ.

On verra aisément qu'on peut délimiter un domaine partiel de frontière constituée seulement par σ, et peut-être d'autres points *intérieurs* au domaine Ω, frontière formant un ensemble sur lequel la suite converge uniformément. Alors d'après le n° 6, il y aura bien convergence uniforme sur l'ensemble de ce domaine partiel et de sa frontière.

16. Mais on peut étendre exactement le second théorème de Harnack et montrer que : *une suite d'intégrales de* (7) *bornées inférieurement dans leur ensemble sur tout domaine complètement intérieur, partout non décroissante, enfin convergeant en un point* (*limite finie*), *tend vers une intégrale, uniformément sur tout domaine complètement intérieur.* Cet énoncé et celui qu'on obtient en changeant u en $-u$ contiennent le précédent. On peut *le compléter en disant que si la même suite tend vers* $+\infty$ *en un point, elle tendra vers* $+\infty$ *uniformément sur tout domaine complètement intérieur.*

---

limite $u \leqq v$. Il restait à prouver dans le cas général *l'uniformité* de convergence de ces deux suites, qu'il suffit même de voir dans tout domaine complètement intérieur. Et cela résulte aisément de ce que la *famille* u_n y est également continue, d'après la relation de récurrence.

On peut aussi conclure par passage à la limite grâce aux propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

D'ailleurs une suite non décroissante d'intégrales est nécessairement à partir d'un certain rang ou constante ou partout croissante, car la différence de deux termes consécutifs est $\geqq 0$; donc partout nulle ou partout > 0. Il suffit d'examiner le cas de la suite croissante; et en retranchant le premier terme, on se ramène au *cas de la suite croissante positive ou encore de la série d'intégrales à termes positifs*. On a alors un théorème dû à M. Lichtenstein, qu'il a d'ailleurs établi pour l'équation de type elliptique homogène général [1]. Sa démonstration est l'extension de celle classique du cas harmonique. Elle résulte immédiatement du premier théorème de Harnack et du lemme suivant très intéressant en lui-même et sur lequel nous allons revenir.

Pour toute intégrale u positive sur Ω, le rapport $\dfrac{u(M_2)}{u(M_1)}$ est, pour tout couple de points M_1, M_2 appartenant à un domaine fixé ω complètement intérieur, borné par un nombre fixe λ indépendant de l'intégrale considérée, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{u(M_2)}{u(M_1)} < \lambda \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda}\, u(M_1) < u(M_2) < \lambda . u(M_1).$$

Mais ce lemme donne même des *propriétés* importantes *des familles d'intégrales positives*. Puisque la limitation en un point entraîne une limitation dans tout domaine complètement intérieur, on voit aussitôt d'après le paragraphe précédent que *si une telle famille positive est bornée en un point, on peut, de toute suite, extraire une suite convergeant uniformément sur tout domaine complètement intérieur*. La remarque finale du n° 15 et relative à la frontière s'appliquera évidemment.

D'autre part si une suite d'intégrales > 0 tend vers $+\infty$, il en est de même uniformément dans tout domaine complètement intérieur; par conséquent, *étant donnée une famille d'intégrales > 0, de toute suite on peut en extraire une, qui converge uniformément sur tout domaine complètement intérieur, soit vers une intégrale, soit vers $+\infty$.*

Revenons au *lemme* de M. Lichtenstein. Dans *le cas harmonique*,

---

[1] Voir *Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, t. 33, 1912, p. 201.

l'inégalité de Harnack (¹) déduite de la formule de Poisson prouve que, si γ est un cercle de centre M_0, rayon R, complètement intérieur à Ω, on aura $\frac{1}{3} < \frac{u(M)}{u(M_0)} < 3$ (²) si $\overline{MM_0} \leqq \frac{R}{2}$. Choisissons R inférieur à la distance de la frontière de ω à celle de Ω. Quels que soient M_1, M_2 de ω tels que $\overline{M_1M_2} \leqq \frac{R}{2}$ on aura donc $\frac{1}{3} < \frac{u(M_2)}{u(M_1)} < 3$. Or faisons un quadrillage du plan, régulier et tel que la distance maximum de deux points de deux carrés contigus soit moindre que $\frac{R}{2}$; alors si N est le nombre des carrés recouvrant ω, on pourra former une chaîne de points de Ω, d'extrémités deux points arbitrairement choisis M, M′ de ω, le pas de la chaîne étant moindre que $\frac{R}{2}$ et le nombre de ces points au plus égal à N.

On en déduit aussitôt

$$\left(\frac{1}{3}\right)^N < \frac{u(M)}{u(M')} < 3^N \quad (^3).$$

Le point essentiel consiste dans l'usage de la formule de Poisson,

---

(¹) De la formule de Poisson :

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{0} u(\mu)\,\frac{R^2-\rho^2}{r^2}\,d\theta_\mu \qquad (\rho = M_0M);\ r = M\mu;\ \text{centre } M_0)$$

ou pour $n > 2$ dimensions

$$u(M) = \frac{1}{(n-2)s_n}\int_\sigma u(\mu)\,\frac{R^2-\rho^2}{Rr^n}\,d\sigma_\mu,$$

il vient aussitôt l'inégalité de Harnack en remplaçant r par $R \pm \rho$:

$$R^{n-2}\frac{R-\rho}{(R+\rho)^{n-1}}\,u(M_0) < u(M) < R^{n-2}\frac{R+\rho}{(R-\rho)^{n-1}}\,u(M_0)$$

($u \geqq 0$ non partout nulle sur la frontière σ).

(²) Dans l'espace à n dimensions il faut remplacer les facteurs $\frac{1}{3}$ et 3 par $\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$ et 3.2^{n-2}, ce qui ne gênerait nullement la suite des raisonnements.

(³) On peut raisonner différemment en employant le lemme de Borel-Lebesgue (*voir* par exemple O. Kellog, Ouv. *loc. cit.*, p. 263). C'est aussi en s'appuyant sur ce lemme que M. Lichtenstein démontre son théorème.

c'est-à-dire de la formule de Green dans un cas particulier, en utilisant deux limites positives inférieure et supérieure de $\frac{dG}{dn}$. M. Lichtenstein emploie la même idée, pour son cas général, avec la formule de Green généralisée et un petit contour convenable; mais il doit surmonter bien des difficultés et, en particulier, il se sert de la *continuité* de la valeur de la dérivée normale de la fonction de Green généralisée G_c en un point de contour, par rapport aux coordonnées du point infini de G_c.

Aussi vais-je donner *pour notre équation* (7) une démonstration assez différente, débarrassée de toutes difficultés relatives à la dérivée normale, qui sera basée sur l'inégalité de Harnack du cas harmonique et sur le lemme suivant :

Pour une distribution continue quelconque de valeurs sur une circonférence fixe γ, il y a un rapport $>$ o constant, c'est-à-dire indépendant de la distribution, entre les valeurs au centre O des solutions du problème de Dirichlet, d'une part, harmonique, d'autre part relatif à l'équation

$$\Delta u = ku, \qquad k = \text{const.} > 0.$$

Le lemme de M. Lichtenstein en résulte aisément; reprenons les notations de son énoncé et soient ω_1 un domaine complètement intérieur à Ω et dans lequel ω soit complètement intérieur, k une limite supérieure de $c(M)$ sur ω_1, enfin R un nombre $>$ o inférieur à la distance de ω à la frontière de ω_1. Considérons deux points M_1, M_2 de ω tels que $\overline{M_1 M_2} \leqq \frac{R}{2}$. Traçons le cercle γ de rayon R et centre M_1, tout entier dans ω_1; soient h et v les fonctions respectivement harmonique et intégrale de $\Delta v = kv$, qui prennent sur le contour de γ les mêmes valeurs ($>$ o) que l'intégrale u que nous étudions.

Alors

$$u(M_1) \geqq v(M_1),$$
$$v(M_1) = \theta h(M_1),$$

θ étant la constante positive du dernier énoncé, relative à R et k.

Puis

$$h(M_1) > \frac{1}{3} h(M_2)$$

d'après l'inégalité de Harnack, enfin

$$h(M_2) \geqq u(M_2),$$

d'où

$$u(M_1) > \frac{\theta}{3} u(M_2).$$

En raisonnant avec le cercle de rayon R et centre M_2 on trouverait de même

$$u(M_2) > \frac{\theta}{3} u(M_1).$$

Ainsi

$$\frac{\theta}{3} < \frac{u(M_2)}{u(M_1)} < \frac{3}{\theta} \quad (^1).$$

Le raisonnement s'achèvera maintenant exactement comme dans le cas harmonique.

Quant au dernier point qui reste en suspens, *on peut plus généralement établir ce théorème de proportionnalité pour un coefficient* $c(M)$ *fonction de* $\overline{OM}$ *seul et borné à l'intérieur du cercle.*

En effet $G_c(M, O)$ étant la fonction de Green généralisée pour le cercle

$$u(O) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma u(M)\frac{dG_c(M, O)}{dn}\,ds_M,$$

d'après ce qu'on a vu au n° 12.

Mais $G_c(O, M)$ est symétrique autour de O, vu l'unicité de la fonction de Green G_c. Donc $\frac{dG_c(O,M)}{dn}$ est invariable le long de γ; c'est une constante θ, positive comme on sait, et comme cela résulterait aussitôt de la considération du cas de la distribution > 0 et de la formule précédente qui s'écrit

$$u(O) = \frac{\theta}{2\pi}\int_\gamma u(M)\,ds_M.$$

On en déduit aussitôt le lemme à démontrer.

On peut d'ailleurs dans le cas de $c =$ const. > 0 se passer des considérations générales des nos 11-12 sur les dérivées normales et G_c; mais

(1) Dans l'espace à n dimensions résultat analogue en remplaçant des deux côtés le nombre 3 par $3 . 2^{n-2}$.

sans développer la démonstration [1], j'en signale l'intérêt suivant; c'est que le lemme de M. Lichtenstein est alors établi dans le cas *général* sans l'emploi de G_c, fonction dont l'existence repose, par la méthode que j'ai proposée pour un nombre n quelconque de dimensions, sur la forme réduite du second théorème de Harnack généralisé. Ainsi la démonstration de la forme la plus générale du second théorème de Harnack généralisé, pour l'espace à n dimensions, peut être rendue indépendante de la forme réduite.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES INTÉGRALES BORNÉES AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER DE $c(M)$ [2].

I. — Théorèmes d'existence et unicité. Propriétés générales de la solution.

1. Comme je l'ai dit dans l'introduction, je considère l'équation (au sens généralisé)

$$\Delta u = c(M)u(M), \qquad c \geqq 0, \tag{1}$$

où $c \geqq 0$ est continu au voisinage d'un point O sauf peut-être en ce point où il n'est pas défini; l'allure de c peut être quelconque quand $M \to O$. Je me placerai pour le langage dans le cas du plan.

Considérons même un domaine Ω, de type D_h, contenant le point O, et supposons $c(M) \geqq 0$, défini et continu sur $(\Omega - O)$ et aussi *borné* au voisinage de la frontière Σ de Ω, sans plus. Donnons-nous sur Σ une distribution quelconque *continue* de valeurs. Alors, le problème de Dirichlet généralisé dans le cas d'une singularité ponctuelle de c est résolu par le théorème suivant :

---

(1) Elle utiliserait seulement, sans parler de G_c, l'intégrale de

$$\Delta u = ku \; (k = \text{const.}),$$

fonction de $r = \overline{OM}$ seul, ayant une singularité en O et de développement en série aisément calculable.

(2) Je reprends ici en grande partie, avec des compléments et sous une forme plus générale, le Mémoire des *R. di Palermo* (*loc. cit.*), d'ailleurs résumé dans une Note des *Comptes rendus*, t. **190**, p. 286.

Il existe une fonction unique bornée en module et intégrale de (1) *sur* $(\Omega - O)$ *qui « prenne » les valeurs données sur* Σ.

Comme on peut considérer la distribution sur Σ comme la différence de deux distributions $\geqq 0$, on voit aussitôt qu'il suffit d'établir le *théorème d'existence* pour une distribution $\geqq 0$ et même non partout nulle. Isolons le point O par un petit cercle γ_ρ de centre O et rayon ρ et soit u_ρ la solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1), le domaine $(\Omega - \gamma_\rho)$ les valeurs $\geqq 0$ considérées sur Σ et la valeur 0 sur le contour de γ_ρ. Il est immédiat (Chap. I, n^{os} 6-7) que $u_\rho > 0$ sur le domaine et qu'en tout point de Ω, u_ρ est fonction *croissante* de ρ; or u_ρ est bornée par le maximum de la distribution sur Σ; donc elle a une limite définie et *bornée* sur $(\Omega - O)$; c'est cette limite qu'on obtiendrait aussi en prenant la suite des u_ρ correspondant à une suite quelconque de nombres $\rho > 0$ et tendant vers zéro. D'après le théorème de Harnack généralisé même sous sa forme réduite (Chap. I, n° 15), il suffit de considérer une suite correspondant à des ρ décroissants pour voir que la limite en question est une intégrale de (1) sur tout domaine complètement intérieur à $(\Omega - O)$, par conséquent sur $(\Omega - O)$; et cette limite v prend sur Σ les valeurs données (avec continuité au voisinage) (*voir* remarque fin du n° 15, Chap. I). Le théorème d'existence est donc établi.

Passons au théorème d'unicité. Je vais montrer, plus généralement, *qu'il n'existe qu'une seule intégrale* v *de* (1) *sur* $(\Omega - O)$, prenant les valeurs données sur Σ, avec continuité au voisinage, *et telle que* $\dfrac{v(M)}{\log \dfrac{1}{\overline{OM}}}$ *tende vers zéro avec* $\overline{OM}$.

Il suffira de prouver qu'une telle intégrale est nulle dans le cas où la distribution sur Σ est partout nulle. Pour cela empruntons à M. Zaremba un type de raisonnement qu'il a utilisé pour les fonctions harmoniques à propos de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet [1].

Considérons la fonction harmonique $h(M) = \varepsilon \log \dfrac{D}{\overline{OM}}$ $(\varepsilon > 0)$, D étant supérieur à la distance maximum de O à Σ de façon que h soit > 0 sur

---

[1] *Ac. des Sc. de Cracovie*, 2 — 1, 5 avril 1909, p. 561. *Voir* la reproduction dans le *Cours d'Analyse* de M. Goursat, t. III, 3^e édition, p. 205-206.

$(\Omega - O)$. Retranchons de Ω un cercle γ_ρ de centre O et rayon ρ assez petit pour que sur le pourtour on ait $h > |v|$; ainsi les fonctions $h \pm v$ prendront des valeurs partout positives sur la frontière de $(\Omega - \gamma_\rho)$; mais sur ce domaine

$$\Delta(h \pm v) = c(h \pm v) - ch \qquad \text{où} \qquad -ch \leqq 0.$$

Il s'ensuit que sur ce domaine $h \pm v > 0$, c'est-à-dire $|v| < h$. Comme ρ est arbitrairement petit, cela vaut en tout point de $(\Omega - O)$. Observons maintenant que ε est un nombre arbitraire > 0 et qu'on peut le choisir tel qu'en un point choisi à l'avance de $(\Omega - O)$, h soit arbitrairement petit. Il en résulte qu'en tout point de $(\Omega - O)$, $|v|$ doit être arbitrairement petit, donc nul.

Conséquence : De ce théorème d'unicité on déduit aussitôt que *si* $c(M)$ *est continu en* O, *toute fonction* v *intégrale de* (1) *sur le voisinage* $(\omega - O)$ *et telle que* $\dfrac{v(M)}{\log \dfrac{1}{\overline{OM}}}$ *tende vers zéro avec* $\overline{OM}$, *peut être définie en* O *de façon à être finie, continue et intégrale sur* ω. Autrement dit l'intégrale est « régulière » en O, proposition que nous avons utilisée déjà dans le cas harmonique [1].

C'est ce qu'on voit immédiatement en comparant v avec l'intégrale « régulière » prenant les mêmes valeurs sur un petit cercle entourant O.

2. *Extension du procédé de passage à la limite.* — On peut étendre beaucoup le procédé qui a fourni la solution du problème proposé.

Imaginons une distribution continue quelconque sur Σ puis une suite quelconque de domaine ω_n, contenant O et s'y réduisant $\Big($c'est-à-dire que la distance maximum ρ_n de O à la frontière σ_n de ω_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}\Big)$ et supposons que $(\Omega - \omega_n - \sigma_n)$ constitue un domaine du type D_h; donnons-nous enfin sur σ_n une distribution continue telle seulement que, en divisant par $\log \frac{1}{\overline{OM}}$, on obtienne une

---

[1] Dans le cas *harmonique*, M. Lebesgue a indiqué le théorème en utilisant le type de raisonnement de M. Zaremba (*Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1270).

nouvelle distribution dont le maximum du module tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Sous ces conditions très larges, la solution u_n du problème de Dirichlet relatif à (1) aux valeurs choisies sur Σ et aux valeurs précédentes sur σ_n, pour le domaine $(\Omega - \omega_n - \sigma_n)$, tend vers la solution unique du problème proposé.

Il suffit de décomposer u_n en deux solutions s'annulant sur l'une des frontières Σ, σ_n et prenant sur l'autre les valeurs considérées.

Prenons d'abord celle u'_n qui s'annule sur σ_n et prend sur Σ les valeurs données; et montrons qu'elle tend vers la solution du problème; on voit aussitôt qu'il suffit de le voir dans le cas d'une distribution sur Σ, $\geqq 0$, non partout nulle. Alors considérons les cercles γ_{ρ_n}, $\gamma_{\rho'_n}$ de centre O ayant comme rayons ρ_n, ρ'_n les distances maximum et minimum de O à σ_n. Il est immédiat que u'_n est compris (au sens large) entre les solutions relatives aux domaines $(\Omega - \gamma_{\rho_n})$, $(\Omega - \gamma_{\rho'_n})$, à la valeur o sur γ_{ρ_n}, $\gamma_{\rho'_n}$ et les valeurs données sur Σ. Mais ces deux dernières fonctions tendent, d'après ce qu'on a vu plus haut, vers la solution de notre problème. D'où le premier point qui était à établir.

Considérons maintenant la solution u''_n s'annulant sur Σ et prenant sur σ_n les valeurs qu'on y a considérées. Un raisonnement tout à fait analogue à celui du théorème d'unicité permet de voir que $u''_n \to 0$.

Ajoutons, comme c'est facile à voir, que *dans ce procédé général* de passage à la limite, *u_n tend vers la limite uniformément* sur tout domaine complètement intérieur, donc *sur tout ensemble fermé appartenant à* $(\Omega + \Sigma - O)$. Il n'y a qu'à le constater séparément pour u'_n et u''_n.

On peut donner un *autre procédé de passage à la limite*. Supposons qu'on rende $c(M)$ continu même en O, mais toujours $\geqq 0$, en ne le changeant qu'en des points intérieurs à un cercle γ_ρ. On peut le faire pour une suite de nombres $\rho_n \to 0$. Soit u_n la solution du problème de Dirichlet pour le domaine Ω, le c continu correspondant à ρ_n et les valeurs données sur Σ. On voit que $|u_n|$ est borné par un nombre indépendant de n et qu'il en est donc de même de ses valeurs sur le contour de γ_{ρ_n}.

Donc d'après le théorème général qui précède, u_n tend sur $(\Omega - O)$ vers la solution φ du problème, d'ailleurs uniformément sur tout ensemble fermé appartenant à $(\Omega + \Sigma - O)$. Avec le procédé *le plus général* de rendre c continu en O en conservant sa continuité et sa propriété $c \geqq 0$, et en ne le changeant peut-être qu'à l'intérieur de γ_{ρ_n}, on obtient un théorème de passage à la limite qui rentre dans le théorème bien plus général précédent.

3. *Propriétés générales de la solution.* — Grâce à un passage à la limite, on peut étendre bien des propriétés relatives au cas où c n'a pas de singularité, en particulier, tous les résultats du n° 10 du Chapitre I. Le passage à la limite par exemple du premier type donné plus haut conserve les propriétés d'inégalité, avec égalité possible. Pour voir si l'égalité est exclue on fait usage des théorèmes d'impossibilité de certains extrema.

Ainsi la solution est toujours fonctionnelle linéaire et continue de la distribution; si elle n'est pas nulle, elle est > 0 ou la différence de deux solutions > 0; pour une distribution $\geqq 0$ non partout nulle, *la solution est* > 0 *et si c augmente quelque part, elle diminue partout*. On généralisera aisément les formules (9), (10), (10′), (10″) et le dernier théorème du n° 10 s'étendra puisqu'on se ramène au cas $c = \text{const}$.

Il y a évidemment *extension* immédiate de tout ce paragraphe *au cas de n dimensions*, avec les mêmes restrictions que dans le cas où c n'a pas de singularités pour ce qui concerne les propriétés de continuité de la solution comme fonctionnelle de c.

II. — Étude directe de l'allure des intégrales au point O.

4. Toute intégrale bornée u est la solution du problème du type de Dirichlet considéré pour un petit contour entourant O et la distribution des valeurs qu'y prend u, ce qui montre en un sens facile à préciser que l'allure de u en O ne dépend de c qu'au voisinage de O. On vient de voir l'influence de la variation de c sur la solution. Il est tout indiqué de *comparer l'intégrale* qu'on étudie avec les solutions relatives à des c de nature simple et de faire se réduire au point O le petit contour considéré.

Comparons d'abord aux *fonctions harmoniques* et prenons une *inté-*

grale $u > 0$ au voisinage de O. Soit h_ρ la fonction harmonique dans le cercle γ_ρ de centre O et rayon ρ, prenant sur γ_ρ les mêmes valeurs que u. Dans le cercle γ_ρ, $0 < u \leqq h_\rho$. On en déduit aisément que $h_\rho(O)$ est non croissante quand ρ décroît et a donc une limite $\lambda \geqq 0$ pour $\rho \to 0$. On verrait alors facilement que, en remplaçant γ_ρ par un domaine ω_n (de type D_h) contenant O et s'y réduisant quand $n \to +\infty$, si h_n est la fonction harmonique prenant sur la frontière de ω_n les valeurs de u, $h_n(O)$ tend aussi vers λ. Mais le cas du cercle montre que *la valeur moyenne de u sur la circonférence γ_ρ tend vers λ quand $\rho \to 0$*. Il en résulte que la *valeur moyenne de u sur une couronne circulaire de centre* O (et en particulier sur l'aire d'un cercle de centre O) tend aussi vers λ quand le rayon extérieur tend vers zéro. Il suffit de considérer

$$\frac{1}{\pi(\rho_1^2-\rho_2^2)}\iint_{\text{couronne } \gamma_{\rho_1}, \gamma_{\rho_2}} u(M)\, d\sigma_M = \lambda + \frac{2}{\pi(\rho_1^2-\rho_2^2)}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r[h_r(O)-\lambda]\, dr$$

et d'utiliser la propriété que $[h_r(O)-\lambda] \to 0$.

Je dirai que *u admet en O une valeur moyenne $u_m(O)$*, égale à λ, limite des moyennes précédentes. On voit que cette limite est atteinte *par non-croissance* (et même décroissance si u n'est pas harmonique au voisinage de O), pour la moyenne sur une circonférence γ_ρ ou sur l'aire du cercle γ_ρ quand ρ décroît à 0.

Ajoutons que *$u_m(O)$ est la plus grande limite de u au point* O, c'est-à-dire la limite Λ de la borne supérieure de $u(M)$ à l'intérieur du cercle γ_ρ quand $\rho \to 0$. En effet, puisque $u(M) \leqq h_\rho(M)$ quel que soit ρ, la plus grande limite Λ est au plus égale à $h_\rho(O)$, donc à $\lambda = u_m(O)$; d'autre part sur toute circonférence γ_ρ il y a des points où

$$u(M) = h_\rho(M) \geqq h_\rho(O) \geqq \lambda,$$

de sorte que Λ ne saurait être inférieure à λ. D'où

$$\Lambda = \lambda = u_m(O).$$

Et l'on voit aussi que *cette plus grande limite $\Lambda = u_m(O)$ ne saurait être, dans un voisinage arbitrairement petit de* O, *supérieure à $u(M)$ et même, en excluant le cas $u = $ const., supérieure ou égale à $u(M)$*. C'est la généralisation pour O singulier de l'impossibilité d'un maximum positif en un point régulier de c.

La coïncidence de Λ et $u_m(O)$ est importante; convenons de dire d'une façon générale qu'une fonction φ continue au voisinage d'un point O sauf en ce point où elle n'est pas définie est *quasi continue* en O si, en supprimant du voisinage de O un ensemble *convenable* E dont la section par une circonférence γ_ρ de centre O a une mesure angulaire tendant vers zéro avec le rayon ρ, φ est telle *sur le voisinage restant* qu'elle tende vers une limite unique finie quand $M \to O$, c'est-à-dire qu'elle prenne une valeur finie en O. Nous allons voir que *l'intégrale u considérée* est *quasi continue* en O *où elle prend* (au sens précédent) *la valeur* $u_m(O)$.

Démontrons en général que si une fonction $\varphi(M)$ continue au voisinage de O, sauf en O, y admet une « valeur moyenne » finie égale à la plus grande Λ ou à la plus petite λ des limites en O, il y a quasi-continuité en O.

Supposons par exemple $\varphi_m(O) = \Lambda$. Soient sur la circonférence γ_ρ de centre O et rayon ρ, μ_ρ et M_ρ la valeur moyenne et le maximum de $\varphi(M)$, qui tendent vers Λ quand $\rho \to 0$; soit $\omega_{\rho,\eta}$ la mesure angulaire de l'ensemble des points de la circonférence γ_ρ où

$$\varphi(M) \leqq \mu_\rho - \eta \qquad (\eta > 0).$$

Il est immédiat que

$$\omega_{\rho,\eta} \cdot \eta \leqq (2\pi - \omega_{\rho,\eta})(M_\rho - \mu_\rho) \leqq 2\pi(M_\rho - \mu_\rho).$$

Prenons η fonction > 0 de ρ, tendant vers zéro avec ρ mais *moins vite* que $(M_\rho - \mu_\rho)$, c'est-à-dire tel que

$$\eta(\rho) \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{M_\rho - \mu_\rho}{\eta(\rho)} \to 0.$$

Alors

$$\omega_{\rho,\eta} \leqq 2\pi \frac{M_\rho - \mu_\rho}{\eta(\rho)}$$

et $\omega_{\rho,\eta}$ tendra vers zéro avec ρ. Et le théorème sera établi en prenant comme ensemble des points à supprimer celui des points où

$$\varphi(M) \leqq \mu_{\overline{OM}} - \eta(\overline{OM}).$$

Dans le cas particulier de l'intégrale $u > 0$, on remarquera que si

$$u_m(O) = \Lambda = 0,$$

l'intégrale s'annulera *régulièrement* en O, c'est-à-dire que $u(M)$ tendra vers zéro avec $\overline{OM}$. Il y a alors continuité en O en posant

$$u(O) = u_m(O) = 0.$$

Considérons maintenant une *intégrale de signe quelconque;* ou bien elle est > 0 ou bien c'est la différence de deux intégrales > 0. On voit aussitôt que subsistent les *théorèmes de la valeur moyenne en* O *et de la quasi-continuité en* O, qui ne font pas intervenir la plus grande limite en O. Ceci justifie l'introduction de la notion de quasi-continuité.

Quant à cette valeur moyenne $u_m(O)$ considérée comme fonctionnelle de la distribution et de c, elle jouit des propriétés de $u(M)$ (où $M \neq 0$), propriétés indiquées au n° 3, avec toutefois la différence suivante : c'est que si la distribution est $\geqq 0$ (et non $\equiv 0$), on peut seulement affirmer que $u_m(O)$ est $\geqq 0$ [elle peut effectivement être nulle (*voir* n° 5)], et que si c augmente quelque part, $u_m(O)$ n'augmente pas. Toutes ces propriétés de $u_m(O)$ s'obtiennent par passage à la limite sur celles de la moyenne sur une circonférence γ_ρ, ces dernières se déduisant aussitôt de celles de $u(M)$ sur $(\Omega - O)$.

La valeur moyenne en O se présentera d'elle-même, comme on verra, dans diverses questions. Montrons déjà, ce qui sera d'ailleurs utile plus loin, comment elle apparait dans le second procédé de passage à la limite fournissant la solution du problème fondamental du n° 1. Reprenons la suite $\rho_n \to 0$ et les cercles γ_{ρ_n} (*voir* n° 2) où l'on rend c continu de façon *arbitraire;* soit u_n la solution correspondant au c ainsi choisi (soit c_n) et à la distribution sur Σ; u_n tend vers la solution v du problème fondamental, uniformément sur tout domaine fermé de $(\Omega + \Sigma - O)$. Montrons que, *lorsque la distribution sur* Σ *est* $\geqq 0$, *la plus grande limite de la suite* $u_n(O)$ *est au plus égale à* $v_m(O)$.

En effet, Γ étant une circonférence de centre O et rayon fixe, $u_n(O)$ est au plus égal à la valeur moyenne de u_n sur Γ qui tend vers celle de v sur Γ; il s'ensuit que la plus grande limite de $u_n(O)$ est au plus égale à la moyenne de v sur Γ. Mais Γ étant arbitrairement petit, celle-ci est aussi voisine qu'on veut de $v_m(O)$. D'où la propriété.

Si maintenant *on suppose que dans* γ_{ρ_n} *le changement qu'on fait subir à* c *pour le rendre continu n'est en aucun point une augmenta-*

tion [1], *on voit que* $u_n(O)$ *tendra vers* $v_m(O)$ (par valeurs au moins égales).

En effet on aura toujours sur $(\Omega - O)$, $u_n(M) \geqq v(M)$; donc $u_n(O)$ sera au moins égale à la plus grande limite de $v(M)$ en O. Ainsi $u_n(O) \geqq v_m(O)$. On conclut aussitôt grâce à la propriété de la plus grande limite de la suite $u_n(O)$.

Si maintenant on considère *une distribution sur* Σ *de signe quelconque, nous pouvons conclure que dans le second procédé de passage à la limite la suite* $u_n(O)$ *tend vers* $v_m(O)$, valeur moyenne en O de la solution v limite de u_n sur $(\Omega - O)$, *pourvu que* c *ne soit toujours rendu continu en* O *que par une diminution possible.*

D'ailleurs il n'y aura aucune restriction à faire dans le cas où *toutes* les intégrales bornées s'annulent régulièrement en O, $u_n(O)$ tendant alors vers zéro.

5. On obtient encore des résultats intéressants *par comparaison avec des fonctions de* $r = \overline{OM}$ *seulement, intégrales de l'équation particulière*

$$\Delta u = f(r)u \qquad f(r) \text{ continue, } > 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire des intégrales de l'équation différentielle en $r > 0$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - f(r)u = 0 \quad \text{[2]}. \tag{3}$$

En effet si $\varphi(r)$ est une intégrale de (3) positive au voisinage de $r = 0$, l'inégalité $c(M) \geqq f(r)$ entraînera que toute intégrale de (1)

---

[1] C'est ce qu'on peut réaliser en prenant c nul au voisinage de O dans un petit cercle et raccordant convenablement. On aura la même opération à faire plus loin (n° 7), pour un théorème essentiel. On voit l'avantage de n'avoir sur c que les hypothèses : c continu et $\geqq 0$.

[2] Toute intégrale de (3) est intégrale de (2) et cela suffirait pour la suite. Mais la réciproque est vraie parce que toute intégrale de (2) au sens *généralisé* et fonction de r *seul* possède une dérivée seconde continue en r. C'est ce qu'on établit aisément en appliquant la formule de Green à la fonction u et une couronne ρ_1, ρ_2, formule qui s'écrit

$$\rho_1\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho_1} - \rho_2\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_1}^{\rho_2} rf(r)u(r)\,dr.$$

prenant sur un contour Σ des valeurs $\geqq 0$ sera au plus égale à $A\varphi(r)$ où A est un nombre > 0 choisi assez grand pour que $A\varphi(r)$ prenne sur Σ des valeurs supérieures à celles considérées. On en conclut que toute intégrale de (1) de signe quelconque sera au voisinage de O de module inférieur à $B.\varphi(r)$, où B est un nombre > 0 qu'on sait choisir dès que l'on connaît les valeurs de l'intégrale sur un contour entourant O.

L'étude de l'équation (3) *et la recherche de systèmes de fonctions* $[f(r), \varphi(r)]$ *où* $\varphi(r)$ *tend vers zéro avec* r *permettront donc de donner des conditions sur* $c(M)$ *sous lesquelles toutes les intégrales (bornées) s'annuleront régulièrement en* O, *avec des limitations de rapidité.*

D'abord si $f(r) = \frac{\alpha^2}{r^2}$, r^α est intégrale.

On en déduit que, si dans un voisinage de O, $c(x, y)r^2 \geqq \alpha$, *toute intégrale bornée de* (1) *est, dans ce voisinage, de module au plus égal à* Br^α, *où* B *est convenablement choisi* > 0. D'une façon plus précise, *si la plus petite limite* l *en* O *de* $c(x, y)r^2$ *est* > 0, *toute intégrale de module inférieur à* M *au voisinage est dans un cercle de centre* O *et rayon* ρ *assez petit, de module inférieur à* $\frac{2M}{\rho^\alpha}r^\alpha$ *où* α *a été choisi à l'avance* > 0 *et* $< \sqrt{l}$.

Ainsi, *si la plus petite limite en* O *de* $c(x, y)r^2$ *est* > 0, *toute intégrale bornée s'annule en* O *régulièrement; et si* $cr^2 \to +\infty$ *quand* $r \to 0$, *elle s'annulera plus vite que toute puissance positive de* r.

Prenons encore le *cas de* $f(r) = \frac{\alpha^2}{r^4}\cdot$ M. Picard a donné pour l'équation $\Delta u = u$ l'expression d'une intégrale fonction de r qui à l'infini se comporte comme $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, r^{-\frac{1}{2}} e^{-r}$ (¹). Le changement de variable $r = \frac{\alpha}{\rho}$ montre que l'équation (3) avec $f(r) = \frac{\alpha^2}{r^4}$ possède au voisinage de $r = 0$ une intégrale équivalente à $\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\sqrt{r}\, e^{-\frac{\alpha}{r}}$. On en déduit que *si* $c(x, y)r^4$ *a dans un voisinage de* O *une borne inférieure* $\alpha^2 > 0$, *toute intégrale*

(¹) *Voir*, par exemple, Ouvrage de Picard, *loc. cit.*, p. 191.

de (1) *y sera de module inférieur à* $A\sqrt{r}e^{-\frac{\alpha}{r}}$ (A > 0 dépendant de l'intégrale) *et si* cr^4 *tend vers* $+\infty$ *avec* $\frac{1}{r}$ *toute intégrale s'annulera plus vite que* $e^{-\frac{\lambda}{r}}$ *quel que soit* $\lambda > 0$.

Après avoir examiné ces deux cas simples où l'on connaît une intégrale de (3) pour les deux formes particulières de $f(r)$, remarquons *qu'il est bien plus simple, pour obtenir des résultats, d'opérer inversement* en partant d'une fonction $\varphi(r) > 0$ s'annulant plus ou moins vite avec r et formant $\dfrac{\varphi''(r) + \frac{1}{2}\varphi'(2)}{\varphi(r)}$ qu'on prendra, si elle est > 0 comme fonction $f(r)$. Par cette voie on obtiendra aisément par exemple les énoncés nouveaux suivants qu'on pourrait multiplier :

Si dans un voisinage de O, $c(x, y)r^{2(1+\alpha)} \geqq \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ *chaque intégrale y sera de module inférieur à* $Ae^{-\left(\frac{1}{r}\right)^\alpha}$.

Si dans un voisinage de O

$$c(x, y)r^2\left(\log\frac{1}{r}\right)^2 \geqq \alpha(\alpha + 1) \qquad (\alpha > 0)$$

chaque intégrale y sera de module inférieur à $\dfrac{A}{\left(\log\frac{1}{r}\right)^\alpha}$ (A const. > 0 dépendant de l'intégrale).

Pour obtenir des *énoncés d'allure plus générale*, il est commode de faire un changement de fonction sur l'équation (3) de façon à faire disparaître le terme de la dérivée première. Posant $u = \varphi(r)v$, il suffira que

$$2\varphi' + \frac{\varphi}{r} = 0.$$

On fera donc le changement $u = \dfrac{v}{\sqrt{r}}$ et il viendra l'équation transformée de (3)

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \left(f(r) - \frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\right)v(r). \tag{4}$$

d'où l'on déduit par exemple l'énoncé :

Soit $\psi(r)$ continue, >0 et tendant vers zéro avec r, telle que

$$\Psi(r) = \frac{\int_0^r dr \int_0^r \psi(r)}{\psi(r)} = \frac{\int_0^r (r-z)\psi(z)\,dz}{\psi(r)}$$

tende vers zéro plus vite que r^2.

Alors si

$$c(x,y) > \frac{1+\varepsilon}{\Psi(r)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

dans un voisinage de O, *toute intégrale y sera de module moindre que*

$$A\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^r dr \int_0^r \psi(r)\,dr \qquad (A>0)$$

et tendra donc vers zéro plus vite que $r^{\frac{3}{2}}\psi(r)$.

6. Quant à l'extension à *l'espace à n dimensions*, elle sera immédiate pour le n° 4 avec des définitions analogues évidentes de la valeur moyenne et de la quasi-continuité en O. Il n'y aura qu'une différence relative aux propriétés de $u_m(O)$ considérée comme fonctionnelle de c, tout à fait comme pour $u(M)$.

Il y a davantage à retoucher au n° 5 pour en faire l'extension, car l'équation (3) doit être remplacée par

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} - f(r)u = 0 \tag{5}$$

qui permettra toutefois des développements analogues.

Si $f(r) = \frac{\alpha^2 + (n-2)\alpha}{r^2}$, r^α est intégrale. On en déduira encore que si la plus petite limite de $c(M)r^2$ en O est >0, toutes les intégrales s'annulent régulièrement en O, et si $cr^2 \to +\infty$ avec $\frac{1}{r}$, elles s'annuleront plus vite que toute puissance >0 de r. On pourrait aussi, pour en tirer des conséquences, essayer de généraliser à l'équation $\Delta u = u$ le procédé qui a fourni à M. Picard, pour $n=2$, une intégrale fonction de r, en passant à l'équation différentielle; on verra que le procédé réussit pour *n pair;* seulement le changement de variable $r = \frac{\alpha}{\rho}$ ne conserve plus la forme de l'équation (5), au coefficient de u près, comme dans le cas $n=2$, mais le facteur $(n-1)$ est remplacé par $(3-n)$, tandis que le coefficient de u se trouve encore multiplié par $\frac{\alpha^2}{\rho^4}\cdot$ On ne peut donc, par cette voie, obtenir une intégrale d'allure connue pour $r \to 0$ dans le cas de $f(r)=\frac{\alpha^2}{r^4}\cdot$

On pourra par contre étendre aisément les autres considérations données dans le cas de $n=2$. Le procédé général indiqué montrera que, quel que soit $n \geqq 2$, si $cr^4 \to +\infty$ avec $\frac{1}{r}$, toute intégrale s'annulera plus vite que $e^{-\frac{\lambda}{r}}$ quel que soit $n \geqq 2$. De même on obtiendra des énoncés voisins de ceux donnés pour $n=2$ comme application de la méthode; le premier subsiste même tel quel si $\alpha \geqq n-2$. Quant à l'énoncé de forme générale, il s'appliquera en remplaçant le facteur $\frac{1}{\sqrt{r}}$ par $\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\cdot$

Au paragraphe suivant, je retrouverai par une autre voie les résultats généraux concernant la valeur moyenne; j'obtiendrai de nouveaux théorèmes en m'aidant d'une équation intégrale dont l'existence constitue en elle-même une propriété importante des intégrales bornées u parce qu'elle précise un peu l'allure de $c.u$; je pourrai donner alors des propriétés générales des dérivées au voisinage de O et aussi pour des formes *simples* du coefficient c, des propriétés plus précises de l'allure de u. Mais il serait intéressant d'avoir pour c, des critères nécessaires et suffisants correspondant à des propriétés générales des u, comme la continuité ou la nullité en O. Il y aurait surtout à élucider la question de savoir *si la continuité de u en* O *ne serait pas toujours vraie.*

Je montrerai seulement au chapitre suivant que le cas où *toutes* les intégrales bornées s'annulent régulièrement en O est identique à celui où *toutes* les intégrales non bornées sont de la forme $f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\mathrm{OM}}$ $\left(\text{ou bien } f(\mathrm{M}) \frac{1}{\mathrm{OM}^{n-2}} \text{ si } n>2 \text{ dim}\right)$ où $|f|$ n'est *pas* borné; alors toute intégrale dont le quotient par $\log \frac{1}{\mathrm{OM}}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{\mathrm{OM}^{n-2}}\right)$ est borné, s'annule en O.

III. — Équation de Fredholm correspondante et applications.

7. Au paragraphe III du Chapitre I on a parlé, à propos du problème de Dirichlet généralisé, d'une certaine équation de Fredholm et d'une formule de Green généralisée. Il est tout indiqué de voir ce qu'elles deviennent lorsque le domaine d'intégration contient un point singulier de c. On se placera dans le cas du plan. Voici d'abord un lemme important :

Pour toute intégrale bornée de (1) *au voisinage* ω *de* O, *les intégrales*

$$\iint_{\omega - 0} c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}, \qquad \iint_{\omega - 0} \log \frac{1}{\mathrm{OP}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

ont un sens et même

$$\iint_{\omega - 0} \log \frac{1}{\mathrm{MP}}\, c(\mathrm{P})\, |u(\mathrm{P})|\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

reste bornée quand M *varie au voisinage de* O [1].

---

[1] Rappelons une notion classique : soit $\psi(\mathrm{M})$ continue sur $(\omega - \mathrm{O})$ et bornée à la frontière du domaine ω contenant O. Supposons d'abord $\psi(\mathrm{M}) \geqq 0$. On dit que $\iint_{\omega - 0} \psi(\mathrm{M})\, d\sigma$ a un sens ou est finie si, γ_ρ étant un cercle de centre O et rayon variable ρ, $\iint_{\omega - \gamma_\rho} \psi(\mathrm{M})\, d\sigma$ est bornée supérieurement. Dans tous les cas on pose

$$\iint_{\omega - 0} \psi(\mathrm{M})\, d\sigma = \lim_{\rho = 0} \iint_{\omega - \gamma_\rho} \psi(\mathrm{M})\, d\sigma, \text{ finie ou infinie.}$$

Si $\psi(\mathrm{M})$ est de signe quelconque, on dit que $\iint \psi\, d\sigma$ a un sens seulement si $\iint_{(\omega - 0)} |\psi|\, d\sigma$ a un sens et l'on pose

$$\iint_{\omega - 0} \psi\, d\sigma = \iint_{\omega - 0} \frac{|\psi| + \psi}{2}\, d\sigma - \iint_{\omega - 0} \frac{|\psi| - \psi}{2}\, d\sigma.$$

Cette définition équivaut à dire que $\psi(\mathrm{M})$ est *sommable* au sens de Lebesgue, la valeur adoptée pour $\iint$ étant celle de l'intégrale de Lebesgue.

Par la suite, pour simplifier l'écriture, on écrira $\iint_{\omega}$ au lieu de $\iint_{\omega - 0}$.

Puisque toute intégrale u est soit > 0, soit la différence de deux intégrales > 0, il suffira d'examiner le cas d'une intégrale u positive.

Prenons sur le voisinage de O un cercle γ_0 de centre O et diamètre moindre que 1; soit $g(M, P)$ sa fonction de Green, considérons un cercle concentrique γ_ρ *arbitrairement* petit, et, à l'intérieur, changeons c en le conservant $\geqq 0$ et sans l'augmenter nulle part, mais de façon à le rendre continu; c'est facile en prenant le nouveau coefficient nul au voisinage de O et en raccordant convenablement. On obtient ainsi un coefficient c_ρ continu et $\geqq 0$ dans γ_ρ, égal à c à l'extérieur de γ_ρ et au plus égal à c à l'intérieur. Soit enfin u_ρ la solution du problème de Dirichlet pour $\Delta u = c_\rho u$, le cercle γ_0 et sur son contour les valeurs de u. On a

$$u_\rho(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\gamma_0} g(M, P) c_\rho(P) u_\rho(P)\, d\sigma_P = h_0(M),$$

où le second membre est la fonction harmonique > 0 prenant les valeurs de u sur γ_0. Mais puisque dans $(\gamma_0 - \gamma_\rho)$: $c_\rho = c$ et $0 < u \leqq u_\rho$ on aura successivement

$$\begin{aligned}\iint_{(\gamma_0-\gamma_\rho)} g(M, P) c(P) u(P)\, d\sigma_P &\leqq \iint_{(\gamma_0-\gamma_\rho)} g(M, P) c_\rho(P) u_\rho(P)\, d\sigma_P \\ &\leqq \iint_{\gamma_0} g(M, P) c_\rho(P) u_\rho(P)\, d\sigma_P \leqq 2\pi h_0(M).\end{aligned}$$

Donc si μ est le maximum de u sur la circonférence γ_ρ

$$\iint_{(\gamma_0-\gamma_\rho)} g(M, P) c(P) u(P)\, d\sigma_P \leqq 2\pi\mu,$$

quel que soit M intérieur à γ_0 et *quel que soit* $\rho > 0$.

En prenant M différent de O, $g(M, P)$ sera fonction > 0 et continue de P au voisinage de O, d'où il résulte que $\iint_\omega c(P) u(P)\, d\sigma_P$ *a un sens*.

Mais puisque

$$g(M, P) = \log\frac{1}{MP} - \omega(M, P),$$

on tire de l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}\iint_{\gamma_0-\gamma_\rho} \log\frac{1}{MP}\, c(P) u(P)\, d\sigma_P &\leqq 2\mu\pi + \iint_{(\gamma_0-\gamma_\rho)} \omega(M, P) c(P) u(P)\, d\sigma_P \\ &\leqq 2\pi\mu + \iint_{\gamma_0} \omega(M, P) c(P) u(P)\, d\sigma_P\end{aligned}$$

et comme $\omega(M, P) > 0$ est bornée quand M varie au voisinage de O et P dans γ_0, on achève aussitôt la démonstration.

8. Reprenons le problème fondamental du paragraphe I et soit u la solution. D'après ce qui précède

$$\int\int_{\Omega} G(M, P) c(P) u(P) \, d\sigma_P$$

aura un sens quel que soit la position de M sur Ω et elle sera même *bornée* en module; si l'on remarque que, lorsque M varie au voisinage d'un point de la frontière la partie de l'intégrale relative à un petit cercle de centre O tend uniformément vers zéro avec le rayon ρ, il sera facile en reprenant le raisonnement ordinaire (Chap. I, n° 8. Picard, Ouvrage *loc. cit*, p. 129) et séparant Ω en γ_ρ et $\Omega - \gamma_\rho$ de voir que

$$\int\int_{\Omega} G(M, P) c(P) u(P) \, d\sigma_P$$

tend encore vers zéro quand M tend vers un point de la frontière.

D'autre part, en séparant Ω en deux parties dont l'une est le voisinage d'un point M_0 distinct de O et considérant les deux parties de l'intégrale qui y correspondent, on verra que l'on peut dériver sous le signe $\int\int_{\Omega}$ et que cette fonction de M

$$\int\int_{\Omega} G(M, P) c(P) u(P) \, d\sigma_P$$

admet un laplacien généralisé $-2\pi . cu$ [1]. Finalement l'expression

$$u + \frac{1}{2\pi}\int\int G(M, P) c(P) u(P) \, d\sigma_P$$

---

[1] Soit sur un domaine borné *fermé* Δ, $f(M, \lambda)$ continue de (M, λ) quand M varie sur Δ et λ au voisinage de λ_0, et admettant une dérivée $f'_\lambda(M, \lambda)$ jouissant de ces mêmes propriétés; alors si $\psi(M)$ est continue sur Δ sauf en O intérieur et telle que $\int\int \psi \, d\sigma$ ait un sens, $I(\lambda) = \int\int_{\Delta} f(M, \lambda) \psi(M) \, d\sigma_M$ admettra au voisinage de λ la dérivée $I'(\lambda) = \int\int_{\Delta} f'_\lambda(M, \lambda) \psi(M) \, d\sigma_M$.

La démonstration élémentaire s'étendra parce que $\int\int |\psi| \, d\sigma$ a un sens. Comme est harmonique sur $(\Omega - O)$, prend sur Σ les valeurs de u et est de plus *bornée* en module au voisinage de O. C'est donc la solution harmonique $h(M)$ du problème. Ainsi la solution du problème proposé satisfait à *l'équation de Fredholm*

$$u(M) + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega} G(M, P)c(P)u(P)\,d\sigma_P = h(M), \tag{6}$$

tout comme s'il n'y avait pas de singularité pour $c(M)$.

Et réciproquement si u continue et bornée sur $(\Omega - O)$ donne un sens à l'intégrale $\int\int_{\Omega} G(M, P)c(P)u(P)d\sigma$ quel que soit M de $(\Omega - O)$ et vérifie l'équation qui précède, ce sera *la* solution du problème du paragraphe I; car en étudiant $\int\int_{\Omega}$ comme on l'a fait dans le raisonnement direct, on verrait que u prend les valeurs données sur la frontière et admet sur $(\Omega - O)$ un laplacien généralisé égal à cu.

Ainsi subsiste l'équivalence du problème de Dirichlet généralisé et de l'équation de Fredholm, telle qu'on l'avait vue au Chapitre I (§ III) pour un domaine sans point singulier de c.

9. Afin d'utiliser cette équation de Fredholm pour en tirer des propriétés en O de la solution, *nous sommes conduits à étudier le potentiel logarithmique*

$$V(M) = \int\int_{\omega} \log\frac{1}{MP}\,\psi(P)\,d\sigma_P,$$

dans le cas où la densité $\psi(P)$ est continue (et bornée à la frontière de ω) *sauf* en un point O du domaine ω où elle n'est pas définie et

---

conséquence on verra que $\int\int_{\delta} \log\frac{1}{MP}\,\psi(P)\,d\sigma_P$ est harmonique à l'extérieur du domaine partiel δ contenant O; que, si Δ_i de type D_h donne Δ par fermeture, et admet $G(M, P) = \log\frac{1}{MP} - \omega(M, P)$, comme fonction de Green, la fonction $\int\int_{\Delta} \omega(M, P)\,\psi(P)\,d\sigma_P$ est harmonique sur Δ_i *même* en O; on se rappellera pour ce point les propriétés de $\omega(M, P)$ (*voir* Chap. I, n° 8). On obtiendra alors aisément les propositions du texte en décomposant G et aussi le domaine Ω en deux parties dont l'une sera le voisinage d'un point M_0 différent de O.

pour lequel on suppose seulement que $\int\int \psi \, d\sigma$ *a un sens*. Sans autre hypothèse cette étude sera utile au chapitre suivant.

En séparant le voisinage d'un point, on voit d'après une remarque précédente qne *l'on peut dériver sous* $\int\int$ ailleurs qu'en O et que, *de plus*, V(M) *admet, ailleurs qu'en* O *sur* ω, *un laplacien généralisé*

$$\Delta V = -2\pi\psi,$$

tandis que V est harmonique à l'extérieur de ω. *De sorte que l'étude de* V(M) *est aussi celle des intégrales de* $\Delta V = \theta(M)$ lorsque θ continue admet un point singulier O tel que $\int\int \theta \, d\sigma$ *ait un sens*.

A. *Étudions l'allure de* V(M) *quand* $M \to O$. Puisqu'on peut considérer $\psi(M)$ comme la différence de deux densités $\geqq 0$, continues sauf en O, *nous supposerons d'abord* $\psi(M) \geqq 0$.

a. Étudions la *valeur moyenne* sur une circonférence γ_ρ de centre O et rayon ρ. Isolons O par un petit cercle γ, la circonférence γ_ρ par une couronne $\chi(\gamma_{\rho_1}, \gamma_{\rho_2})(\rho_1 < \rho < \rho_2)$.

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma} V(M)\, ds_M = {} & \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}\left[\int\int_{(\omega-\chi-\gamma)} \log\frac{1}{MP}\psi(P)\, d\sigma_P\right] ds_M \\ & + \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}\left[\int\int_{\chi} \log\frac{1}{MP}\psi(P)\, d\sigma_P\right] ds_M \\ & + \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}\left[\int\int_{\gamma} \log\frac{1}{MP}\psi(P)\, d\sigma_P\right] ds_M.\end{aligned}$$

On voit facilement que les derniers termes tendent vers zéro quand χ se réduit à la circonférence γ_ρ et γ au point O. Quant au premier terme, il s'écrit en permutant les signes $\int$

$$\int\int_{(\omega-\chi-\gamma)}\left[\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} \log\frac{1}{MP}\, ds_M\right]\psi(P)\, d\sigma_P,$$

ou en remarquant que

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}\log\frac{1}{MP}\,ds_M = \begin{cases}\log\dfrac{1}{OP} & \text{si P est extérieur à } \gamma_\rho,\\[2mm] \log\dfrac{1}{\rho} & \text{si P est intérieur à } \gamma_\rho,\end{cases}$$

$$\iint_{(\omega-\gamma_{\rho_2})}\log\frac{1}{OP}\psi(P)\,d\sigma_P + \log\frac{1}{\rho}\iint_{(\gamma_{\rho_1}-\gamma)}\psi(P)\,d\sigma.$$

Par un passage à la limite, il vient donc

$$(7)\quad \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}V(M)\,ds_M = \iint_{(\omega-\gamma_\rho)}\log\frac{1}{OP}\psi(P)\,d\sigma_P + \log\frac{1}{\rho}\iint_{\gamma_\rho}\psi(P)\,d\sigma_P.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\displaystyle\iint_{(\omega-\gamma_\rho)}\log\frac{1}{OP}\psi(P)\,d\sigma}{\log\dfrac{1}{\rho}} \to 0 \quad \text{avec } \rho.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons en effet ρ' tel que $\iint_{\gamma_{\rho'}}\psi(P)d\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$; alors pour $\rho < \rho'$

$$\frac{\displaystyle\iint_{(\omega-\gamma_\rho)}\log\frac{1}{OP}\psi(P)\,d\sigma}{\log\dfrac{1}{\rho}} < \frac{\displaystyle\iint_{(\omega-\gamma_{\rho'})}\log\frac{1}{OP}\psi(P)\,d\sigma}{\log\dfrac{1}{\rho}} + \frac{\varepsilon}{2},$$

quantité qui deviendra moindre que ε dès que ρ sera assez petit.

On conclut que

$$\frac{\dfrac{1}{2\pi\rho}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}V(M)\,ds}{\log\dfrac{1}{\rho}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho}\frac{V(M)}{\log\dfrac{1}{OM}}\,ds$$

tend vers zéro avec ρ. Autrement dit, *la valeur moyenne de* V(M) *sur la circonférence* γ_ρ *est, pour* $\rho \to 0$, *d'un ordre de croissance moindre que* $\log\frac{1}{\rho}$.

Observons maintenant que

$$\log\frac{1}{\rho}\iint_{\gamma_\rho}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma \leqq \iint_{\gamma_\rho}\log\frac{1}{\mathrm{OP}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma.$$

Donc si $\mathrm{V}(\mathrm{O}) = \iint_{\omega}\log\frac{1}{\mathrm{OP}}\psi(\mathrm{P})d\sigma$ *est fini,* $\iint_{\gamma_\rho}\psi(\mathrm{P})d\sigma \to 0$ *plus vite que* $\dfrac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$ *et la valeur moyenne de* $\mathrm{V}(\mathrm{M})$ *sur* γ_ρ *tend vers* $\mathrm{V}(\mathrm{O})$ $(\rho \to 0)$; il en sera donc de même de la valeur moyenne sur une couronne circulaire se réduisant au point O (*voir* n° 4); au sens du n° 4, il y a pour $\mathrm{V}(\mathrm{M})$ une *valeur moyenne en* O, justement égale à $\mathrm{V}(\mathrm{O})$.

b. Montrons maintenant que $\mathrm{V}(\mathrm{O})$, *qu'il soit fini ou infini, est la plus petite limite de* $\mathrm{V}(\mathrm{M})$ *quand* $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ *tend vers* O.

D'abord cette plus petite limite est au plus égale à $\mathrm{V}(\mathrm{O})$ puisque, si $\mathrm{V}(\mathrm{O})$ est fini, c'est, d'après sa propriété de valeur moyenne en O, la limite relative à une suite de points qu'on peut former. Il suffira donc de voir que la plus petite limite est au moins égale à $\mathrm{V}(\mathrm{O})$. Cela résulte de la *remarque* suivante : Soit M_n une suite de points $\neq \mathrm{O}$ tendant vers O et $\rho_n > 0$ tendant vers zéro mais moins vite que $\overline{\mathrm{OM}_n}$, c'est-à-dire telle que $\rho_n \to 0$, $\dfrac{\overline{\mathrm{OM}_n}}{\rho_n} \to 0$. Si γ_{ρ_n} est le cercle de centre O et rayon ρ_n,

$$\left|\iint_{(\omega-\gamma_{\rho_n})}\log\frac{1}{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} - \iint_{(\omega-\gamma_{\rho_n})}\log\frac{1}{\mathrm{OP}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}\right| \to 0.$$

En effet cette différence est moindre que

$$\iint_{(\omega-\gamma_{\rho_n})}\left|\log\frac{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}{\mathrm{OP}}\right|\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

Mais

$$1-\frac{\mathrm{OM}_n}{\mathrm{OP}} \leqq \frac{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}{\mathrm{OP}} \leqq 1+\frac{\mathrm{OM}_n}{\mathrm{OP}},$$

donc à l'extérieur de γ_{ρ_n}

$$1-\frac{\mathrm{OM}_n}{\rho_n} \leqq \frac{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}{\mathrm{OP}} \leqq 1+\frac{\mathrm{OM}_n}{\rho_n},$$

ce qui entraîne que $\left|\log\dfrac{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}{\mathrm{OP}}\right|$ tende vers zéro uniformément sur

$(\omega - \gamma_{\rho_n})$. Comme $\int\int \psi(\mathrm{M})\,d\sigma$ a un sens, on conclut à la remarque annoncée. Mais alors, puisque

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}_n) \geqq \int\int_{(\omega-\gamma_{\rho_n})} \log\frac{1}{\mathrm{M}_n\mathrm{P}}\,\psi(\mathrm{P}(\,d\sigma_{\mathrm{P}},$$

quantité de limite V(O), on obtient le théorème en vue :

En conséquence : Si V(O) *est infini,* V(M) tendra vers $+\infty$ régulièrement quand $\mathrm{M} \to \mathrm{O}$;

Si V(O) *est fini,* il y a coïncidence [avec V(O)] de la valeur moyenne en O et de la plus petite limite en O, donc (*voir* n° 4) quasi-continuité en O.

c. Donnons maintenant quelques *critères de continuité en* O; un critère nécessaire et suffisant qui se prête aux applications est que

$$\int\int_{\gamma_\rho} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$$

tende vers zéro avec le rayon ρ du cercle γ_ρ uniformément par rapport à M dans γ_ρ; *ou bien* qu'étant donné $\varepsilon > 0$ on puisse trouver ρ et ρ' $(\rho' \leqq \rho)$ tels que $\mathrm{OM} < \rho'$ entraîne

$$\int\int_{\gamma_\rho} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} < \varepsilon.$$

C'est ce qu'on démontrera aisément en s'aidant de la *remarque* faite plus haut (*b*). Une conséquence immédiate est *qu'il y aura continuité en* O *pour* $\int\int_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$ *si elle a lieu pour* $\int\int_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\theta(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$ où θ est au voisinage de O au moins égal à $\psi(\mathrm{P})$.

D'autre part si $\psi(\mathrm{P})$ *est au voisinage de* O *fonction de* $\overline{\mathrm{OP}}$ *seul,* il faut et suffit pour qu'il y ait continuité que V(O) *soit fini:* car on peut se ramener au cas d'un domaine ω, cercle assez petit de centre O et il suffit de remarquer alors que V(M) coïncide avec la valeur moyenne sur la circonférence de centre O et rayon OM.

En conséquence :

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}) = \int\int_\omega \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$$

sera continu en O, si, $\rho(\overline{\mathrm{OP}})$ étant une fonction continue de OP, au moins égale à $\psi(P)$ au voisinage de O, l'intégrale $\int\int_{\omega} \log \frac{1}{OP} \rho(\overline{OP})\, d\sigma_P$ a un sens. Comme *application :* si, au voisinage de O,

$$\psi(P) \leqq \frac{A}{\overline{OP}^{\alpha}} \qquad (\alpha < 2),$$

il y aura continuité en O de $V(M)$.

B. Supposons maintenant $\psi(M)$ *de signe quelconque*. On voit aussitôt que si $\int\int_{\omega} \log \frac{1}{OP} |\psi(P)|\, d\sigma$ est fini, $V(M)$ admettra en O une *valeur moyenne* égale à

$$V(O) = \int\int_{\omega} \log \frac{1}{OP} \psi(P)\, d\sigma,$$

avec la propriété de *quasi-continuité* en O; puis qu'une condition *suffisante* de continuité en O pour

$$V(M) = \int\int_{\omega} \log \frac{1}{MP} \psi(P)\, d\sigma,$$

est que $\int\int_{\omega} \log \frac{1}{MP} |\psi(P)|\, d\sigma_P$ y soit continue

On aura donc aussitôt des critères *suffisants* de continuité; par exemple, il y aura continuité si

$$|\psi(M)| < \frac{A}{\overline{OM}^{\alpha}} \qquad (\alpha < 2)$$

au voisinage de O.

10. Étudions maintenant sous les mêmes hypothèses *l'allure des dérivées du potentiel logarithmique* $V(M)$ *quand* $M \to O$. Laissons $\psi(M)$ de signe quelconque.

Généralisons la formule de Gauss relative *au flux* du potentiel lorsque la densité a une singularité. Considérons un domaine δ de frontière Γ formée d'un nombre *fini* d'arcs (sans points intérieurs communs) à tangente continue. Lorsque $\psi(M)$ est continue et bornée sur ω, on sait que, en prenant $\psi = 0$ à l'extérieur de ω,

$$(8) \qquad \int_{\Gamma_{\text{int}}} \frac{dV}{dn}\, ds = 2\pi \int\int_{\delta} \psi(M)\, d\sigma.$$

Montrons que cela subsiste quand ψ admet une singularité en O *non sur* Γ, intérieur ou extérieur à δ, $\int\int|\psi|\,d\sigma$ ayant un sens.

Isolons O, par un petit cercle γ; si O est extérieur à δ, la partie de V(M) relative à γ étant harmonique sur δ, on est aussitôt ramené au cas où il n'y a pas de singularité; si O est sur δ on décomposera encore V(M) en

$$\int\int_{\gamma}\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma \quad \text{et} \quad \int\int_{\delta-\gamma}\log\frac{1}{\mathrm{MP}}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}},$$

et il suffira de voir que les dérivées de la première portion tendent vers zéro avec le rayon de γ, uniformément sur Γ. C'est ce qui résulte de leurs expressions

$$\int\int_{\gamma}\frac{\partial\log\frac{1}{\mathrm{PM}}}{\partial x\,(\text{ou }y)}\psi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}, \quad \text{où} \quad \left|\frac{\partial\log\frac{1}{\mathrm{PM}}}{\partial x\,(\text{ou }y)}\right|$$

est borné quand M et P varient sur deux ensembles à distance non nulle.

Le flux $\int_{\Gamma_{\mathrm{int}}}\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ *ds tend donc vers zéro quand* Γ *se réduit au point* O, et en considérant ψ comme la différence des fonctions $\frac{|\psi|\pm\psi}{2}$, on voit d'après le n° 9, *lorsque* Γ *est une circonférence de centre* O *et rayon* ρ, *et si* $\int\int_{\omega}\log\frac{1}{\mathrm{OP}}|\psi(\mathrm{P})|\,d\sigma$ *est fini, que le flux tend vers zéro plus vite que* $\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$.

Comme application supposons *qu'au voisinage de* O, ψ *soit fonction de* $\overline{\mathrm{OP}}$ *seul*, $\psi=\rho(\overline{\mathrm{OP}})$ et considérons la partie

$$\mathrm{V}_1=\int\int_{\gamma}\log\frac{1}{\mathrm{PM}}\rho(\overline{\mathrm{OP}})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$$

relative à un petit cercle γ de centre O qui ne diffère de V que par une fonction harmonique à l'intérieur de γ. V_1, symétrique autour de O, est une fonction de $\mathrm{OM}=r$ et il résulte alors de la formule de Gauss

$$\frac{d\mathrm{V}_1}{dr}=-\frac{2\pi}{r}\int_0^r r\rho(r)\,dr. \tag{9}$$

Par exemple si $\rho(r) = \frac{1}{r^\alpha}$ $(\alpha < 2)$ on aura

$$\frac{dV_1}{dr} = -\frac{2\pi}{2-\alpha} r^{1-\alpha}. \tag{10}$$

D'autre part la dérivée de V_1 dans le sens perpendiculaire à OM est nulle; de sorte qu'on obtiendra une expression très simple de la dérivée dans une direction quelconque et le maximum en valeur absolue est atteint pour les directions $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MO}$,

Reprenons un ψ *quelconque*. Il vient aussitôt, pour la dérivée dans une direction $\vec{s}$,

$$\left|\frac{dV}{d\vec{s}}\right| \leqq \iint_\omega \frac{1}{MP} |\psi(P)| \, d\sigma_P.$$

Lorsque

$$|\psi(P)| < \frac{A}{\overline{OP}^\alpha} \qquad (\alpha < 2),$$

il vient donc

$$\left|\frac{dV}{d\vec{s}}\right| \leqq A \iint_\omega \frac{1}{MP} \frac{1}{\overline{OP}^\alpha} \, d\sigma_P.$$

On en déduit (¹) que : si $\alpha > 1$,

$$\left|\frac{dV}{d\vec{s}}\right|_M \leqq B \frac{1}{\overline{OM}^{\alpha-1}};$$

si $\alpha = 1$,

$$\left|\frac{dV}{d\vec{s}}\right|_M \leqq B \log \frac{1}{OM};$$

si $\alpha < 1$,

$$\left|\frac{dV}{d\vec{s}}\right|_M \text{ est borné.}$$

Dans ce dernier cas, on peut même montrer que pour toute direction $\vec{s}$,

---

(¹) *Voir* le résultat général rappelé au Chapitre I, n° 13, en note, sur

$$\iint \frac{1}{\overline{OP}^\alpha} \frac{1}{\overline{MP}^\beta} \, d\sigma_P.$$

il y a une *dérivée* en O égale à

$$\iint_{\omega} \frac{\cos(\overrightarrow{OP}, \vec{s})}{OP} \psi(P)\, d\sigma_P$$

et que $\left(\dfrac{dV}{d\vec{s}}\right)_M$ est *continue de* M *en* O.

11. *Appliquons* maintenant cette étude du potentiel logarithmique à celle *de la solution de notre problème de Dirichlet au voisinage de* O, en utilisant l'équation de Fredholm établie plus haut :

$$u(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} G(M, P)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma_P = h(M). \tag{6}$$

On décomposera

$$\iint_{\Omega} G(M, P)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma_P \quad \text{en} \quad -\iint_{\Omega} \omega(M, P)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma_P$$

harmonique sur Ω et $\iint_{\Omega} \log \frac{1}{MP} [c(P)\, u(P)]\, d\sigma_P$ potentiel logarithmique du type précédemment étudié avec la propriété que

$$\iint_{\Omega} \log \frac{1}{OP} |c(P)\, u(P)|\, d\sigma_P$$

est *fini*.

A. On obtient alors aussitôt pour u les propriétés, en O, *de la valeur moyenne* et de la *quasi-continuité* et l'on voit de plus que

$$u_m(O) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} G(O, P)\, c(P)\, u(P)\, d\sigma_P = h(O) \quad [1]. \tag{11}$$

Si la distribution est $\geqq 0$ sur Σ on retrouve aussi la propriété que la *plus grande limite* en O est égale à $u_m(O)$.

D'autre part pour tout petit domaine δ de contour Γ entourant O et formé d'un nombre *fini* d'arcs à tangente continue (sans points intérieurs communs), il vient grâce à la formule de Gauss (8)

$$\int_{\Gamma_{\text{int}}} \frac{du}{dn}\, ds = -\iint_{\delta} c(M)\, u(M)\, d\sigma = -\iint_{\delta} \Delta u\, d\sigma. \tag{12}$$

---

[1] Ceci peut d'ailleurs s'obtenir sans l'étude précédente du potentiel logarithmique, *seulement avec* le n° 4 du paragraphe II *et l'équation de Fredholm* (6). *Voir* pour cela, le Mémoire des *R. di Palermo* (*loc. cit.*), n° 13.

Ce flux $\int_{\Gamma_{\text{int}}} \frac{du}{dn}\,ds$ *tend donc vers zéro quand* Γ *se réduit au point* O; et si Γ est *une circonférence* γ_ρ *de centre* O *et rayon* ρ, *il tend vers zéro plus vite que* $\dfrac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$ (¹).

Cette formule (12) *peut d'ailleurs se généraliser de la façon suivante :* soient au voisinage de O deux coefficients c_1, c_2, $\geqq 0$, continus sauf en O, et deux intégrales bornées correspondantes u_1, u_2; avec le contour Γ du domaine δ, on aura

$$(13)\qquad \iint_\delta (u_1\Delta u_2 - u_2\Delta u_1)\,d\sigma = \iint_\delta (c_1-c_2)u_1u_2\,d\sigma = -\int_{\Gamma_{\text{int}}}\left(u_1\frac{du_2}{dn} - u_2\frac{du_1}{dn}\right)ds.$$

Considérons un domaine Ω de type D_h dans le voisinage considéré, mais où δ soit complètement intérieur, et marquons sur la frontière Σ les valeurs que prennent u_1 et u_2. Reportons-nous au *second* procédé de passage à la limite (*voir* n° 2) qui fournit u_1, u_2 comme limites des suites $(u_1)_n$, $(u_2)_n$ correspondant aux coefficients continus $(c_1)_n$, $(c_2)_n$ égaux à c_1 et c_2 en dehors du cercle γ_{ρ_n}. On aura

$$\iint_\delta [(u_1)_n\Delta(u_2)_n - (u_2)_n\Delta(u_1)_n]\,d\sigma = \iint_\delta [(c_1)_n - (c_2)_n](u_1)_n(u_2)_n\,d\sigma = -\int_\Gamma \left[(u_1)_n\frac{d(u_2)_n}{dn} - (u_2)_n\frac{d(u_1)_n}{dn}\right]ds.$$

Sans développer la démonstration du cas général, à partir de cette formule et grâce à (12), j'observerai que l'on conclut aussitôt dans le cas $c_1 = c_2$ en prenant $(c_1)_n = (c_2)_n$.

B. A côté de ces résultats généraux, *donnons-en d'autres plus précis en particularisant* $c(\mathrm{M})$, et définissons $u(\mathrm{O})$ comme égal à $u_m(\mathrm{O})$.

(¹) Cette propriété peut s'établir par un raisonnement direct simple à partir de (11) et du fait que $\iint \log\frac{1}{\mathrm{OP}}c(\mathrm{P})\,u(\mathrm{P})\,d\sigma$ a un sens, donc indépendamment aussi de l'étude des n$^{\text{os}}$ 9-10. Voir *R. dei Lincei* (*loc. cit.*), 2 février 1930, vol. XI, p. 270-272.

α. Si $c(M) \leqq \dfrac{A}{\overline{OM}^\alpha}$ $(0 \leqq \alpha < 2)$ on aura

$$|c(M)\,u(M)| \leqq \frac{B}{\overline{OM}^\alpha}.$$

Donc il y aura *continuité en* O et de plus, pour les dérivées $\dfrac{du}{d\vec{s}}$:

si $\alpha > 1$,

$$\left|\frac{du}{d\vec{s}}\right| \leqq \frac{R}{\overline{OM}^{\alpha-1}};$$

si $\alpha = 1$,

$$\left|\frac{du}{d\vec{s}}\right| \leqq R \log \frac{1}{\overline{OM}};$$

si $\alpha < 1$,

$$\left|\frac{du}{d\vec{s}}\right| \text{ est borné,}$$

et dans ce cas la fonction u continue en O y admettra même des *dérivées premières continues;* on aura le droit de dériver sous le signe $\int\int$ de (6) même en O.

β. *Si au voisinage de* O

$$c(M) \geqq \frac{\lambda^2}{\overline{OM}^2} \qquad (\lambda^2 > 0),$$

on sait (n° 5) que toutes les intégrales s'annulent régulièrement en O de sorte qu'il y a *continuité en* O.

Signalons que cette propriété de nullité en O, qu'il suffit de voir pour une intégrale $u > 0$ résulte aussi de ce que $\int\int cu\, d\sigma$ *a un sens* et de la propriété de la valeur moyenne, ou bien de la quasi-continuité de u en O; car il y aurait contradiction si $u_m(O) > 0$.

On sait même que, au voisinage de O, $|u| < A\overline{OM}^\lambda$, de sorte que, si $\lambda < 1$, il y aura en O, dans toute direction, une dérivée qui sera *nulle*. En faisant des hypothèses plus restrictives sur c, on aura, d'après le n° 5, des précisions sur l'allure de u donc de cu, et par suite des dérivées de u.

Par exemple si, au voisinage de O :

$$\frac{\lambda^2}{\overline{OM}^2} \leqq c(M) \leqq \frac{\mu^2}{\overline{OM}^2},$$

on aura sur ce même voisinage

$$|u| \leqq A.\overline{OM}^{\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad |cu| \leqq A\frac{\mu^2}{\overline{OM}^{2-\lambda}}.$$

Donc, si $\lambda > 1$, continuité en O des dérivées premières qui s'y annulent, et dérivation possible en O sous $\int\int$;

si $\lambda = 1$,

$$\left|\frac{du}{\overrightarrow{ds}}\right| < R \log \frac{1}{OM};$$

si $\lambda < 1$,

$$\left|\frac{du}{\overrightarrow{ds}}\right| < R \frac{1}{\overline{OM}^{1-\alpha}},$$

etc.

12. On peut compliquer un peu le problème fondamental du paragraphe I en imposant à l'intégrale d'avoir ailleurs qu'en O une ou plusieurs singularités logarithmiques données. La question est facile à traiter par divers procédés (passage à la limite par isolement de O, ou introduction des singularités logarithmiques par la méthode alternée). On pourra en particulier introduire *la fonction de Green généralisée* G_c du domaine initial (encore symétrique) puis établir la formule de Green généralisée (11) du Chapitre I dans le cas actuel d'une singularite de c [1]. La formule

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_{\text{int}}} u(M)\frac{dG_c(M, P)}{dn}\, ds_M$$

n'a de sens que pour P sur $(\Omega - O)$; nous examinerons au chapitre suivant ce qu'elle devient lorsque P vient en O.

Je n'ai considéré qu'un problème de Dirichlet « intérieur ». On peut se poser des problèmes analogues pour un domaine non borné. En

[1] On raisonnera comme au n° 12, en isolant O par une petite circonférence γ_ρ et l'on remarquera que

$$\int_{\gamma_\rho \text{ext}} \left[u(M)\frac{dG_c}{dn} - G_c(M, P)\frac{du}{dn}\right] ds_M = 0$$

d'après la formule (13).

particulier le « problème extérieur » est celui relatif à un domaine tel que les points du plan qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble borné contenant des points intérieurs; une *inversion* par rapport à l'un de ces derniers O nous ramène au premier problème, O étant singulier pour c. On peut aussi étudier le problème relatif au *plan entier* avec des singularités logarithmiques données. Dans les deux cas l'intégrale doit seulement être bornée à l'infini. Le « point à l'infini » joue le rôle d'un point singulier pour c et l'on peut d'ailleurs introduire un nombre quelconque de points singuliers de c. Je renvoie pour tout cela au Mémoire des *R. di Palermo* (*loc. cit.*), où l'on pourra élargir les hypothèses qui y sont adoptées grâce au Chapitre I, en particulier remplacer la condition $c > 0$ par $c \geqq 0$, mais *non partout nul dans le cas du plan entier*. Il apparaît une distinction intéressante entre ce cas et le cas harmonique. Je signale aussi la particularité que présente l'équation de Fredholm équivalente au problème du plan entier : c'est que la « valeur moyenne » à l'infini de la solution apparaît d'elle-même au second membre de l'équation sous la forme d'une constante additive.

13. L'*extension* de tout ce paragraphe III *au cas de n dimensions* comporte peu de changements. Signalons que dans l'étude du potentiel « newtonien »

$$V(M) = \int_{\omega} \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} \psi(P)\, d\sigma_P,$$

l'exemple qui correspond à celui de

$$|\psi(P)| \leqq \frac{A}{\overline{OP}^{\alpha}} \qquad (0 \leqq \alpha < 2)$$

sera

$$|\psi(P)| \leqq \frac{A}{\overline{OP}^{\alpha}} \qquad (0 \leqq \alpha < n-1).$$

Il y aura continuité en O et les mêmes trois cas à examiner $\alpha \gtreqqless 1$ pour les dérivées. Dans l'application à l'étude de l'intégrale v, il n'y aura à reprendre que les résultats relatifs *aux formes* particulières de c et les modifications sont faciles.

Quant au n° 12, il y a au contraire une *différence* importante pour les problèmes relatifs à des domaines *non bornés*. Cela vient de la différence des allures à l'infini de $\log \frac{1}{\mathrm{OM}}$ et $\frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}^{n-2}}$ et de ce que la transformation de Lord Kelvin *change la fonction*. Je parlerai à la fin du chapitre suivant de l'allure des intégrales bornées à l'infini ($c \geqq 0$ continu à distance finie) dans l'espace à $n > 2$ dimensions.

CHAPITRE III.

INTÉGRALES NON BORNÉES AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER DE $c(\mathrm{M})$. SOURCE PONCTUELLE SIMPLE. EXTENSION DU PRINCIPE DE PICARD [1]

I. — Intégrales bornées dans un sens et notion de source ponctuelle simple. Forme nécessaire des intégrales.

1. On considérera toujours l'équation au sens généralisé

$$\Delta u = cu \qquad (c \geqq 0), \tag{1}$$

où c est définie et continue au voisinage $(\omega - \mathrm{O})$ de O singulier et l'on se placera d'abord dans le cas du plan. A la base de l'étude des intégrales bornées dans un sens, par exemple inférieurement, est le *théorème de décomposition qui suit :*

Toute intégrale de (1) *non identiquement nulle au voisinage de* O *et bornée inférieurement est la somme d'une intégrale* $\geqq 0$ *et d'une intégrale bornée en module; donc* [2] *elle est soit* > 0, *soit la différence d'une intégrale* > 0 *et d'une seconde intégrale* > 0 *et bornée.*

Soit Ω de type D_h sur lequel $c(\mathrm{M})$ est continue sauf en O intérieur, et bornée à la frontière Σ; u, intégrale sur $(\Omega - \mathrm{O})$ bornée inférieurement et prenant des valeurs en distribution continue sur Σ. Soit v l'intégrale de module borné prenant ces valeurs sur Σ; $u - v$ est intégrale bornée inférieurement et nulle sur Σ; il suffira de voir que $u - v \geqq 0$. En effet :

---

(1) Une grande partie des résultats de ce chapitre ont été publiés dans trois Notes des *Lincei*, *loc. cit.*, 1er sem. 1930, vol. XI, fasc. 3, 5, 9.

(2) Car, ou bien elle est bornée, cas connu; ou bien elle ne l'est pas et le premier terme de la somme, étant $\geqq 0$ et non identiquement nul, sera > 0.

Si une intégrale w *de* (1) *sur le domaine* $(\omega - O)$ *est limitée inférieurement par* $-A - \varepsilon \log \frac{1}{\overline{OM}}$ $(A > 0, \varepsilon > 0)$, *où* A *est une constante fixe et* ε *une constante arbitraire, et si elle s'annule sur la frontière de* ω, *elle est partout* $\geqq 0$.

C'est ce qu'on voit par un raisonnement du type Zaremba. D étant le diamètre de ω, considérons

$$\varphi(M) = \eta \log \frac{D}{\overline{OM}} \qquad (\eta > 0);$$

η étant fixé, on pourra trouver une circonférence γ_ρ de centre O arbitrairement petite sur laquelle $(-w) < \varphi$. Mais alors sur le domaine $(\omega - \gamma_\rho)$:

$$\Delta(w + \varphi) = c(w + \varphi) - c\varphi \qquad \text{où} \qquad (-c\varphi) \leqq 0,$$

tandis que $w + \varphi$ prend sur la frontière de ce domaine des valeurs déterminées > 0. D'après la propriété d'impossibilité de minimum < 0 (*voir* Chap. I, n° 6), on aura sur $(\omega - \gamma_\rho)$, $w + \varphi \geqq 0$.

En tout point déterminé de $(\omega - O)$ on aura donc $w \geqq -\varphi$ où φ a été choisi avec un η arbitraire. Il s'ensuit bien $w \geqq 0$.

2. Dans le cas des *fonctions harmoniques* on connaît l'allure des intégrales bornées dans un sens au voisinage d'un point singulier.

M. Picard a démontré très simplement, en utilisant les fonctions analytiques d'une variable complexe [1], que si $u(M)$ harmonique au voisinage de O, sauf au point O, est telle que $u(M) \to +\infty$ quand $\overline{OM} \to 0$, $u(M)$ est de la forme

$$A \log \frac{1}{\overline{OM}} + \text{fonct. harmonique en O} \qquad (A = \text{const.} > 0).$$

La même démonstration légèrement retouchée montre même que si u est harmonique et bornée inférieurement au voisinage $(\omega - O)$:

$$u = A \log \frac{1}{\overline{OM}} + \text{fonct. harmonique en O} \qquad (A \geqq 0).$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. **176**, avril 1923, p. 933, et *Bulletin de la Soc. math.*, t. LII, 1924, p. 162.

On en déduit aussitôt la proposition plus générale qu'on pourra appeler, à l'instar de M. Bouligand, *principe de Picard* ou bien *principe des singularités positives.*

Si $u(M)$ *harmonique au voisinage de* O *sauf peut-être en* O *est telle que, en ce voisinage :*

$$u(M) > \alpha \log \frac{1}{OM} + \text{const.} \qquad (\alpha \text{ const. quelc. même } < 0),$$

elle est de la forme

$$\beta \log \frac{1}{OM} + \text{fonct. harmonique en O} \qquad (\beta = \text{const.}) \quad (^1).$$

Il suffit de considérer la fonction $u - \alpha \log \frac{1}{OM}$ harmonique et bornée inférieurement.

3. L'étude des intégrales de (1) bornées dans un sens est étroitement liée à la notion de *source ponctuelle de chaleur.* Lorsque, à propos de l'équilibre thermique de la plaque rayonnante, régi par l'équation (1), on s'est occupé de cette notion, on s'en est toujours à peu près tenu, me semble-t-il, à prendre le cas d'un point O régulier de c et à identifier cette notion avec celle de singularité logarithmique pour l'intégrale [2]; dans ce dernier cas, $\int_\gamma \frac{du}{dn} ds$, flux à travers un contour γ entourant O, a une limite finie déterminée quand γ se réduit au point O dans une suite quelconque de contours [3]. Mais je ne pense pas que l'on ait étudié le problème inverse de la détermination de la forme de u sachant que $\int_\gamma \frac{du}{dn} ds$ a une limite déterminée, propriété qui correspond à l'intuition physique de source ponctuelle.

Je vais résoudre ici la question pour le cas des intégrales *bornées*

---

[1] D'autres démonstrations ont été données ensuite, qui s'appliquent au cas de l'espace à n dimensions. *Voir* Stozek, *Comptes rendus*, 9 mars 1925, et *Annales de la Soc. Pol. de Math.*, 1925, p. 51. — Bouligand, *Mémorial*, XI, Chap. VII, et *Annales de l'École Normale*, mars 1931.

[2] *Voir* par exemple Ouvrage de Picard, *loc. cit.*, Chap. X.

[3] *Voir* Chap. I, n° 12.

dans un sens, en me plaçant même dans le cas d'un point O *singulier pour* c.

Je dirai que pour une intégrale u de (1) sur le voisinage $(\omega - O)$, O est *source ponctuelle simple* si :

1° u est bornée dans un sens;

2° pour toute suite de courbes simples de Jordan γ_n entourant O, formées d'un nombre fini d'arcs à tangente continue, γ_n se réduisant à O quand $n \to +\infty$ [1]. $\int_{\gamma_n \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$ a une *limite* finie ou infinie Φ, *indépendante* de la suite γ_n, et qu'on appellera *flux* de la source O.

La source sera dite *finie* ou *infinie* suivant que le flux est fini ou infini.

D'après le chapitre précédent (n° 11), *pour une intégrale bornée en module,* O *est source simple de flux nul;* et d'autre part l'intégrale

$$\iint \Delta u \, d\sigma = \iint cu \, d\sigma$$

a un sens. On en déduit, comme on va voir, le théorème fondamental :

Pour toute intégrale bornée dans un sens, O *est source simple ; le flux* Φ *est* $\geqq 0$ *ou* $\leqq 0$ *suivant que l'intégrale est bornée inférieurement ou supérieurement (source respectivement chaude ou froide); et il n'est nul que si l'intégrale est bornée en module.*

Prenons le cas de l'intégrale bornée inférieurement et traçons un petit cercle γ_R de centre O. Retranchons de l'intégrale l'intégrale de module borné prenant les mêmes valeurs sur γ_R; on obtient ainsi (n° 1) une intégrale $u \geqq 0$ s'annulant sur γ_R, il suffira d'établir que si $u > 0$, donc non borné, $\Phi > 0$.

Considérons un cercle $\gamma_{R'}$ concentrique plus petit que γ_R et une suite de cercles γ_{ρ_n} concentriques de rayon $\rho_n \to 0$. Par une formule de Green, il vient pour la couronne $D_{\gamma_{R'}, \gamma_{\rho_n}}$

$$\iint_{D_{\gamma_{R'}, \gamma_{\rho_n}}} cu \, d\sigma = \iint_{D_{\gamma_{R'}, \gamma_{\rho_n}}} \Delta u \, d\sigma = -\int_{\gamma_{R'} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds + \int_{\gamma_{\rho_n} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds.$$

---

[1] C'est-à-dire que la distance maximum de O à γ_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$.

Faisons tendre R' vers R; d'après l'existence et les propriétés de $\frac{du}{dn}$ le long de γ_R (*voir* Chap. I, n° 11) :

$$\int\int_{D_{\gamma_R, \gamma_{\rho_n}}} cu\, d\sigma = -\int_{\gamma_R \text{ int}} \frac{du}{dn} ds + \int_{\gamma_{\rho_n} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds.$$

Donc, pour $n \to +\infty$,

$$\int_{\gamma_{\rho_n} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds \to \int\int_{\gamma_R} cu\, d\sigma + \int_{\gamma_R \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$$

limite finie ou non, indépendante de la suite γ_{ρ_n} et *positive* parce que $\int_{\gamma_R \text{ int}} \frac{du}{dn} ds > 0$ à cause de $u > 0$ (*voir* Chap. I, n° 11).

Prenons maintenant une suite de courbes γ_n (définition de la source simple) et soit γ_{ρ_n} contenant γ_n et tel que $\rho_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$. D'après l'égalité

$$\int\int_{D_{\gamma_{\rho_n}, \gamma_n}} \Delta u\, d\sigma = -\int_{\gamma_{\rho_n} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds + \int_{\gamma_n \text{ int}} \frac{du}{dn} ds,$$

$\int_{\gamma_n \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$ est au moins égale à $\int_{\gamma_{\rho_n} \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$ et, lorsque $\int\int_{\gamma_R} cu\, d\sigma$ est fini, la différence tend vers zéro. On conclut aussitôt.

Soulignons que, *pour que* O *soit source simple finie, il faut et suffit que u soit bornée dans un sens et que l'intégrale*

$$\int\int \Delta u\, d\sigma = \int\int cu\, d\sigma$$

ait un sens. Alors δ étant un domaine contenant O, limité par une frontière Σ, formée d'un nombre fini d'arcs à tangente continue et sans points intérieurs communs :

$$\int\int_{\delta} \Delta u\, d\sigma = \int\int_{\delta} cu\, d\sigma = -\int_{\Sigma \text{ int}} \frac{du}{dn} ds + \Phi.$$

4. Dans le *cas harmonique*, pour toute intégrale bornée dans un sens, O est source simple *finie*, et si Φ est le flux, l'intégrale est de la forme

$$\frac{\Phi}{2\pi} \log \frac{1}{\text{OM}} + \text{fonct. harmonique en O}.$$

Nous allons voir comment cela se généralise *pour l'équation* (1) et les sources *finies*. Nous nous ramenons par le théorème de décomposition *au cas* $u > 0$. Cherchons donc la forme des intégrales $u > 0$ de (1) telles que

$$\int\int \Delta u \, d\sigma = \int\int cu \, d\sigma$$

ait un sens.

Considérons un petit cercle γ de centre O et l'intégrale

$$\int\int_{\gamma} \log \frac{1}{\mathrm{MP}} c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

En nous reportant aux propriétés du potentiel logarithmique (Chap. II, n^{os} 9-10), nous voyons successivement que

$$u' + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma} \log \frac{1}{\mathrm{MP}} c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$

est sur le domaine (γ — O), positive et harmonique, donc (n° 2) de la forme

$$\mathrm{A} \log \frac{1}{\mathrm{OM}} + h(\mathrm{M}) \qquad (\mathrm{A} \geqq 0), \qquad h(\mathrm{M}) \text{ harmonique même en O},$$

puis en considérant le flux à travers une petite circonférence γ_ρ de centre O et rayon $\rho \to 0$, que $\Phi = 2\pi \mathrm{A}$; on retrouve ainsi la propriété que $\Phi \geqq 0$ et même > 0 si l'intégrale u n'est pas bornée; et il vient :

$$u + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma} \log \frac{1}{\mathrm{MP}} c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{\Phi}{2\pi} \log \frac{1}{\mathrm{OM}} + h(\mathrm{M}); \tag{4}$$

u est donc de la forme $f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\mathrm{OM}}$ où $f \geqq 0$, donc $f > 0$ (puisque $u > 0$) et bornée.

En prenant les valeurs moyennes sur une circonférence γ_ρ de centre O et rayon $\rho \to 0$ on voit de plus que $f(\mathrm{M})$ admet une « valeur moyenne » en O égale à $\frac{\Phi}{2\pi}$ et comme d'après (4) sa plus grande limite en O est au plus égale à $\frac{\Phi}{2\pi}$, elle lui sera juste égale. D'où le théorème :

Si pour l'intégrale $u > 0$ *au voisinage de* O, O *est source simple finie* *de flux Φ, u est de la forme*

$$u = f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}},$$

où f bornée > 0 admet une « valeur moyenne » en O, $f_m(\mathrm{O})$ et une plus grande limite, $\overline{f(\mathrm{O})}$ égales à $\frac{\Phi}{2\pi}$:

$$f_m(\mathrm{O}) = \overline{f(\mathrm{O})} = \frac{\Phi}{2\pi},$$

de sorte qu'il y a *quasi-continuité de f en O.*

On retrouve alors la propriété que si $\Phi = 0$, u est bornée parce que $\dfrac{u}{\log \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}}} \to 0$ avec $\overline{\mathrm{OM}}$, ce qui suffit (Chap. II, n° 1); c'est aussi une conséquence immédiate de (4).

On passe aussitôt au *cas le plus général de la source simple finie, par exemple chaude : toute intégrale correspondante doit alors être au voisinage de O de la forme $f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}}$ où f admet une « valeur moyenne » $f_m(\mathrm{O})$ et des limites plus petite $\left[\underline{f(\mathrm{O})}\right]$ et plus grande $\left[\overline{f(\mathrm{O})}\right]$ telles que :*

$$0 \leqq \underline{f(\mathrm{O})} \leqq \overline{f(\mathrm{O})} = f_m(\mathrm{O}) = \frac{\Phi}{2\pi}.$$

Il y a pour f *quasi-continuité* en O; f s'annulera régulièrement en O si la valeur moyenne $f_m(\mathrm{O})$ est nulle; c'est le cas où $|u|$ est bornée.

D'après ce qu'on sait des intégrales bornées, on voit que u vérifiera encore une équation du type (4).

Cela permet d'étudier le *cas particulier*

$$c(\mathrm{M}) \leqq \frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{OM}}^{\alpha}} \qquad (0 \leqq \alpha < 2).$$

Alors

$$|c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})| \leqq \frac{\mathrm{B}}{\overline{\mathrm{OM}}^{\beta}} \qquad (0 \leqq \alpha < \beta < 2)$$

et, par suite (Chap. II, n° 9), $\displaystyle\iint_{\gamma} \log \frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}}\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$ est continue de M même en O; de sorte que u est de la forme

$$\frac{\Phi}{2\pi} \log \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}} + \text{fonct. } \theta(\mathrm{M}) \text{ continue en O},$$

et $\theta(M)$ satisfait à l'équation intégrale

$$\begin{aligned}\theta(M) &+ \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma} \log\frac{1}{MP}\,c(P)\,\theta(P)\,d\sigma_P \\ &= h(M) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{\gamma} \log\frac{1}{MP}\,c(P)\,\frac{\Phi}{2\pi}\log\frac{1}{OP}\,d\sigma_P.\end{aligned}$$

On en déduit aisément, après dérivation, des limitations de l'ordre de croissance des dérivées de θ. En particulier, si $\alpha < 1$, θ admettra des dérivées premières continues en O.

Ajoutons que si c est *continue* en O, la différence de deux intégrales pour lesquelles O est source simple finie de *même* flux est bornée en O, donc (Chap. II, n° 1) y est régulière.

5. Passons au cas de la *source simple infinie;* je vais montrer que *u est alors de la forme* $f(M)\log\frac{1}{OM}$ *où* $f(M)$ *possède en* O *une « valeur moyenne » infinie*, égale à $+\infty$ ou $-\infty$ en même temps que le flux et suivant que u est bornée inférieurement ou supérieurement.

On se ramène aussitôt au cas $u > 0$; traçons une circonférence γ_ρ de centre O et rayon ρ, et montrons que

$$\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}\int_{\gamma_\rho} u\,ds\right] \to +\infty$$

quand $\rho \to 0$.

Considérons la couronne circulaire limitée aux deux cercles concentriques, γ_ρ variable et γ_R fixe. Appliquant la formule de Green (n° 4 du Chapitre I) à ce domaine $D_{R,\rho}$ et aux deux fonctions u et $\log\frac{1}{OP}$, il vient

$$\begin{aligned}\int\int_{D_{R,\rho}} \log\frac{1}{OP}\,c(P)\,u(P)\,d\sigma_P &+ \log\frac{1}{R}\int_{\gamma_R\,\mathrm{int}}\frac{du}{dn}\,ds - \frac{1}{R}\int_{\gamma_R} u\,ds \\ &= \log\frac{1}{\rho}\int_{\gamma_\rho\,\mathrm{int}}\frac{du}{dn}\,ds - \frac{1}{\rho}\int_{\gamma_\rho} u\,ds.\end{aligned}$$

Il suffit de voir que

$$\int_{\gamma_\rho\,\mathrm{int}}\frac{du}{dn}\,ds - \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}\int\int_{D_{R,\rho}} \log\frac{1}{OP}\,cu\,d\sigma \to +\infty, \quad \text{quand } \rho \to 0$$

ou encore que

$$E = \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}\left[\log\frac{1}{\rho}\iint_{D_{R,\rho}} cu\,d\sigma - \iint_{D_{R,\rho}} \log\frac{1}{OP}\,cu\,d\sigma\right] \to +\infty.$$

Introduisons un cercle γ_{ρ_1}, intermédiaire entre γ_ρ et γ_R ; le crochet est au moins égal à

$$\log\frac{1}{\rho}\iint_{D_{R,\rho}} cu\,d\sigma - \log\frac{1}{\rho}\iint_{D_{\rho_1,\rho}} cu\,d\sigma - \log\frac{1}{\rho_1}\iint_{D_{R,\rho_1}} cu\,d\sigma$$

ou

$$\left(\log\frac{1}{\rho} - \log\frac{1}{\rho_1}\right)\iint_{D_{R,\rho_1}} cu\,d\sigma = \log\frac{\rho_1}{\rho}\iint_{D_{R,\rho_1}} cu\,d\sigma.$$

Prenons par exemple $\rho_1 = \sqrt{\rho}$: on voit que le crochet est au moins égal à

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}\iint_{D_{R,\sqrt{\rho}}} cu\,d\sigma;$$

donc

$$E \geqq \frac{1}{2}\iint_{D_{R,\sqrt{\rho}}} cu\,d\sigma \to +\infty \quad \text{quand } \rho \to 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi *toute intégrale bornée dans un sens est de la forme* $f(M)\log\frac{1}{OM}$, *où* $f(M)$ *admet une valeur moyenne en* O *toujours égale à* $\frac{\Phi}{2\pi}$, Φ *étant le flux de* O *fini ou infini; et* $|f(M)|$ *est borné ou non suivant que la source est finie ou infinie.*

6. *Extension à l'espace à n dimensions.* — Extension immédiate du n° 1. Au n° 2 la démonstration citée de M. Picard ne peut évidemment s'adapter, mais l'énoncé du « principe de Picard » s'étend cependant[1] ; et l'on peut, suivant M. Stozek (*loc. cit.*), le démontrer de façon élémen-

---

[1] M. Picard a établi pour l'espace le théorème analogue à celui qu'il a donné dans le plan, c'est-à-dire en supposant que la fonction *tende vers* $+\infty$ quand $M \to O$ singulier. Mais sa démonstration (*Comptes rendus*, t. 176, p. 1025, ou *Bull. de la Soc. math.*, *loc. cit.*) ne peut s'adapter pour donner l'énoncé de forme plus générale et dont on a besoin.

taire en utilisant seulement la formule de Green et des domaines limités par des sphères; la méthode peut s'appliquer au cas du plan et fournit d'autre part un énoncé un peu plus général.

Le n° 3 s'étend aussitôt, sauf l'interprétation physique; au n° 4 on changera aussi le facteur 2π en $[(n-2)s_n]$ et il faudra reprendre l'étude du *cas particulier* qui termine et qui ne s'étend pas tel quel.

On conclura que u est de la forme $f(M)\dfrac{1}{\overline{OM}^{n-2}}$ où f est continue en O et mieux de la forme

$$u = \frac{\Phi}{(n-2)s_n}\,\frac{1}{\overline{OM}^{n-2}} + \theta(M),$$

où $|\theta(M)|$, dont on obtiendra aisément des limitations suivant les valeurs de n, est toujours d'un ordre de croissance moindre que $\dfrac{1}{\overline{OM}^{n-2}}$ et vérifie

$$\theta(M) + \frac{1}{(n-2)s_n}\int_\gamma \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\,c(P)\,u_P)\,d\sigma_P = \text{fonction harmonique.}$$

Soulignons que pour $n=3$, $\alpha<1$, $\theta(M)$ est continue en O.

En dérivant l'équation précédente on obtiendra une équation fournissant des limitations pour l'ordre de croissance des dérivées premières de θ.

En particulier on aura *toujours* $\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|\cdot\overline{OM}^{n-1}\to 0$ avec OM.

On verra encore que si c est continue, la différence de deux intégrales correspondant à un même Φ est régulière en O.

Quant au n° 5 concernant les sources infinies, il s'étend aisément au cas $n\geqq 3$; les logarithmes seront remplacés par les puissances $(n-2)$ des mêmes quantités, et à la fin de la démonstration on prendra par exemple $\rho_1 = 2\rho$ au lieu de $\rho_1=\sqrt{\rho}$.

II. — Problèmes de Dirichlet. Questions d'existence et unicité.

7. Un problème tout naturel pour le cas de la source *finie* est le *problème de Dirichlet* suivant :

Soit le domaine Ω de type D_h sur lequel $c(M)$ est définie et continue sauf en O, et bornée à la frontière Σ. Déterminer une intégrale de (1) sur $(\Omega - O)$, prenant sur Σ des valeurs en *distribution* continue *donnée*, et pour laquelle O soit source simple finie de *flux donné* Φ *différent de* o.

Dans le cas *harmonique*, il y a une solution unique égale à

$$\frac{\Phi}{2\pi} G(O, M) + h(M),$$

où $h(M)$ est la solution harmonique bornée correspondant à la distribution donnée ; c'est qu'en effet la différence de deux intégrales correspondant à une source simple de même flux est harmonique en O.

Dans le cas *général* de l'équation (1), le problème équivaut à trouver une fonction u continue sur $(\Omega - O)$, bornée dans un sens, de module borné à la frontière Σ, intégrale de l'équation

$$(5) \qquad u(M) + \frac{1}{2\pi}\int\int_\Omega G(M, P)c(P)u(P)\,d\sigma_P = \frac{\Phi}{2\pi} G(O, M) + h(M).$$

L'existence ne peut dépendre que de l'allure de c au voisinage de O et pas de Ω, de la distribution ou de Φ; car pour qu'il existe une solution *il faut et suffit qu'il existe une intégrale au voisinage de* O *pour laquelle* O *soit source simple finie de flux non nul*. La condition suffit en effet car on obtiendra aussitôt une intégrale au voisinage correspondant au flux $\Phi \neq 0$ donné et, traçant deux petites circonférences de centre O, on pourra ensuite par le procédé alterné en déduire une solution cherchée dans Ω.

Les deux cas d'existence et non-existence sont effectivement possibles : dans le cas $c = 0$ il y a existence ; au contraire si $c \geq \frac{A}{\overline{OM}^2}$ $(A > 0)$, il y a impossibilité; sinon en effet pour une intégrale $u = f(M) \log \frac{1}{OM} > 0$, $\int\int cu\, d\sigma$ aurait un sens et par suite, μ_r désignant la valeur moyenne de $f(M)$ sur la circonférence de centre O et rayon r,

$$\int_r^R \frac{1}{r^2} \log\frac{1}{r}\, \mu_r r\, dr = \int_r^R \frac{1}{r} \log\frac{1}{r}\, \mu_r d_r \qquad (\text{où } \mu_r \to \Phi \neq 0 \text{ quand } r \to 0)$$

aurait une limite finie pour $r = 0$, ce qui est faux.

Lorsqu'il y a existence, elle est unique; il suffit de se placer dans le cas d'une distribution nulle et de $\Phi > 0$ et je vais montrer que la solution qui est > 0 est la limite d'une suite de fonctions qu'on peut former en connaissant seulement Ω, c et Φ, ce qui prouvera l'unicité.

Considérons une suite de couronnes circulaires de centre O $(\gamma_{\rho_n}, \gamma'_{\rho_n})$ $(0 < \rho'_n < \rho_n)$ telle que $\rho_{n+1} < \rho'_n$ et que $\rho_n \to 0$. Définissons sur Ω, c_n continue telle que :

$$\begin{array}{ll} c_n = c & \text{à l'extérieur de } \gamma_{\rho_n}, \\ c_n \leqq c & \text{dans la couronne } \gamma_{\rho_n}, \gamma_{\rho'_n}, \\ c_n = 0 & \text{dans le cercle } \gamma_{\rho'_n}. \end{array}$$

On peut former, grâce au procédé alterné, une intégrale u_n de $\Delta u = c_n u$ sur Ω prenant la valeur 0 sur Σ et, au voisinage de O, égale à $\frac{\Phi}{2\pi} \log \frac{1}{\mathrm{OM}} +$ f. harm. Comme c_n est non décroissante, u_n est *non croissante* : en effet, en tout point de $(\Omega - \mathrm{O})$: $0 < u_n < \lambda u_{n+1}$ quel que soit $\lambda > 1$ comme on le voit en isolant O par un petit cercle. u_n aura donc une limite sur $(\Omega - \mathrm{O},)$ intégrale de $\Delta u = cu$ et s'annulant sur Σ (conséquences du théorème de Harnack généralisé sous forme réduite) et cette limite sera de la forme au voisinage de O :

$$v = f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\mathrm{OM}},$$

où $f(\mathrm{M})$ est $\geqq 0$ et de plus grande limite en O au plus égale à $\frac{\Phi}{2\pi}$. Mais nous avons supposé l'existence d'une solution u; on voit en considérant λu_n avec λ arbitraire > 1 que $u_n \geqq u$. Donc $v \geqq u$, ce qui impose que $f(\mathrm{M})$ ait comme plus grande limite en O justement celle $\frac{\Phi}{2\pi}$ de $\dfrac{u}{\log \frac{1}{\mathrm{OM}}}$; v et u sont donc des intégrales pour lesquelles O est source simple finie de même flux ; donc $v - u$ est une intégrale $\geqq 0$, pour laquelle O sera source simple de flux *nul;* et comme $v - u$ s'annule sur Σ il vient $v = u$, ce qui établit notre théorème.

On remarquera que s'il n'existait pas de solution u, la même suite u_n devrait tendre vers zéro sur $(\Omega - \mathrm{O})$; sinon v non partout nul ne serait pas borné ; comme c'est une intégrale pour laquelle O est source simple finie, le flux correspondant serait non nul, ce qui contredit l'hypothèse de non-existence.

Conséquence : La différence de deux intégrales au voisinage de O pour lesquelles O est source simple finie de même flux est *bornée* en O.

Cas particulier d'existence :

$$c(\mathrm{M}) \leqq \frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{OM}}^{\alpha}} \qquad (0 \leqq \alpha < 2).$$

Il n'y a qu'à voir que la suite u_n de la démonstration qui précède ne peut tendre vers zéro. Or

$$u(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\Omega} G(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, c_n(\mathrm{P})\, u_n(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{\Phi}{2\pi} G(\mathrm{O}, \mathrm{M}),$$

où, puisque

$$c_n(\mathrm{P}) \leqq \frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{OP}}^{\alpha}} \; (\alpha < 2) \qquad \text{et} \qquad u_n \leqq \mathrm{B} \log \frac{1}{\mathrm{OM}}$$

au voisinage de O, la fonction de M, $\int\!\!\int_{\Omega}$ est *bornée* relativement à n et M voisin de O.

Vu la forme du second membre, $u_n(\mathrm{M})$ est donc, dans un voisinage assez petit de O, supérieure à un nombre fixe arbitrairement choisi, indépendant de u. D'où la conclusion que u_n ne tend pas vers zéro.

On a vu (n° 4) que l'intégrale solution doit être de la forme

$$\frac{\Phi}{2\pi} \log \frac{1}{\mathrm{OM}} + \theta(\mathrm{M}),$$

où $\theta(\mathrm{M})$ est de module borné et admet même, si $\alpha < 1$, des dérivées premières continues en O.

Lorsque c est *continue en* O, on obtient donc le théorème d'existence et unicité pour le problème de Dirichlet avec singularité logarithmique donnée, posé au Chapitre I, n° 12, et cela par une voie indépendante de la théorie de Fredholm et qui s'étendra aussitôt au cas de l'espace à n dimensions (*voir* plus loin, n° 12).

8. Indiquons brièvement des *propriétés de la solution* du problème précédent lorsqu'il est résoluble.

Rappelons-nous le théorème de décomposition (n° 1) et remarquons d'autre part que, dans le cas d'une distribution nulle, *deux solutions du problème* (7) *sont dans un rapport constant égal à celui des deux flux*. Donc pour une distribution quelconque, *la solution* est *fonction linéaire de* Φ, de coefficients égaux respectivement à *l'intégrale bornée* prenant sur Σ les valeurs données et *l'intégrale* s'annulant sur Σ et correspondant à une source O simple *de flux* 1.

On a donc ainsi aussitôt des propriétés de la solution considérée comme fonctionnelle de la distribution ou de Φ. Pour étudier la solution comme fonctionnelle de c on prendra le cas de la distribution nulle et de $\Phi > 0$ puis on utilisera le passage à la limite de la démonstration du théorème d'unicité.

Lorsque le problème est possible pour un c, *il l'est pour tout autre* c *au plus égal; et quand la distribution est* $\geqq 0$ *et* $\Phi > 0$, *une diminution de* c *quelque part entraîne une augmentation partout de la solution.*

Le passage à la limite fournit la propriété avec égalité possible. On complète grâce au n° 7 (Chapitre I).

En ce qui concerne *la continuité de la solution comme fonctionnelle de* $c(\mathrm{M})$, il vient avec une distribution nulle et $\Phi > 0$, en raisonnant comme au n° 10 (Chapitre I) où μ serait remplacé par $\frac{\Phi}{2\pi}\mathrm{G}(\mathrm{O}, \mathrm{P})$:

$$|(u_1)_n - (u_2)_n| = \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega} |(c_1)_n - (c_2)_n| \frac{\Phi}{2\pi} \mathrm{G}(\mathrm{O}, \mathrm{P})\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}},$$

Fixons $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$: on peut disposer de la couronne $(\gamma_{\rho_n}, \gamma'_{\rho_n})$ en prenant ρ'_n assez voisin de ρ_n pour que la partie de l'intégrale relative à cette couronne tende vers zéro quand $n \to +\infty$. Il vient alors

$$|(u_1)_n - (u_2)_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Phi}{2\pi} \int\int_{(\Omega - \gamma_{\rho_n})} |c_1 - c_2|\, \mathrm{G}(\mathrm{O}, \mathrm{P})\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} + \varepsilon_{n \to 0}.$$

On en déduira aisément que, *dans le champ des* c *pour lesquels il existe une solution, on aura pour une distribution quelconque et un flux donné* Φ *fini l'extension des formules* (10) — (10′) — (10″) du

Chapitre I, c'est-à-dire, avec uniformité sur $(\Omega - O)$,

$$|\delta u| \leqq A\sqrt{\iint_\Omega (\delta c)^2\, d\sigma} \quad \text{si} \quad \iint_\Omega (\delta c)^2\, \delta\sigma \;\text{ est fini}$$

$$|\delta u| \leqq B \max |\delta c|,$$

où A et B sont indépendants des c (et de M sur Ω), enfin pour des c *bornés* par un nombre fini : $|\delta u| \to 0$ avec $\iint_\Omega |\delta c|\, d\sigma$.

9. *Généralisation du procédé de passage à la limite.* — Supposons que dans le cercle γ_{r_n} de centre O et de rayon $r_n \to 0$, on rende c continu en O *sans augmentation possible;* soit, pour le c obtenu, k_n, et une distribution continue *quelconque* fixée, la solution v_n du problème relatif à une singularité logarithmique en O égale à $\frac{\Phi}{2\pi} \neq 0$. Lorsque $n \to +\infty$, u_n tend *uniformément* sur tout ensemble *fermé* de $(\Omega + \Sigma - O)$ vers la solution du problème de Dirichlet, soit relative à une source *simple* de flux Φ, soit *bornée* en module, suivant qu'il existe ou non des intégrales correspondant à une source simple de flux fini non nul.

On se ramène aussitôt au cas de la distribution nulle et de $\Phi > 0$. On considérera alors une suite de couronnes $(\gamma_\rho, \gamma_{\rho'_n})$ du n° 7 telle que

$$\rho'_n \geqq r_n,$$

Ainsi

$$c_n \leqq k_n \leqq c,$$

d'où

$$v \leqq v_n \leqq u_n,$$

où v est la limite de la suite u_n du n° 7, limite nulle ou non suivant les deux hypothèses de l'énoncé. D'où le théorème.

10. Ce théorème de passage à la limite, même pris sous sa forme réduite du n° 7, permet d'établir *l'équivalence* remarquable du *cas où il existe des intégrales pour lesquelles* O *est source simple finie non nulle* et de celui où *toutes les intégrales de module borné ne s'annulent pas régulièrement en* O, ce cas équivalant à dire qu'il existe *une* intégrale >0 bornée de valeur moyenne en O non nulle ou bien que *toute* intégrale >0 bornée jouit de cette propriété.

Soit Γ un petit cercle fixe de centre O et, correspondant à γ_{r_n} et k_n, l'intégrale régulière u_n prenant la valeur 1 sur Γ et de limite u, et l'intégrale $U_n = G_{k_n}(M, O)$ fonction de Green généralisée relative à Γ.

Soit Γ' cercle concentrique un peu plus petit, on sait que

$$u_n(O) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'_{\text{int}}}\left(u_n \frac{dG_{k_n}}{dn} - G_{k_n}\frac{du_n}{dn}\right) ds_M.$$

Quand $n \to +\infty$, $u_n(O) \to u_m(O)$ valeur moyenne en O de u (*voir* Chapitre II, n° 4), et $G_{k_n}(M, O) = U_n$ a une limite U, soit nulle, soit > 0 et correspondant alors à un flux 2π de O. La convergence est uniforme sur tout domaine complètement intérieur à $(\Gamma - O)$ et il en est de même des dérivées premières. Donc :

$$u_m(O) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'_{\text{int}}}\left(u \frac{dU}{dn} - U\frac{du}{dn}\right) ds_M.$$

Faisons tendre Γ' vers Γ. D'après ce qu'on sait des dérivées normales à la frontière (*voir* Chapitre I, n° 11), il vient :

$$u_m(O) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\text{int}}} \frac{dU}{dn} ds_M,$$

où $\frac{dU}{dn}$ est > 0 lorsque $U > 0$; on conclut aussitôt.

Définissons la *fonction de Green généralisée en* O, $G_e(M, O)$ pour le domaine Ω, comme égale à 0 ou à la solution du problème de Dirichlet du n° 7 pour une distribution nulle et un flux 2π. Alors la démonstration qui précède, légèrement modifiée, fournira le théorème suivant qui complète la formule de Green du Chapitre II, n° 12 :

Σ étant formée d'un nombre fini de courbes simples de Jordan sans points communs et à courbure continue, soit u l'intégrale bornée du problème de Dirichlet correspondant *à une distribution continue quelconque :* alors, pour sa valeur moyenne en O,

$$u_m(O) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_{\text{int}}} u \frac{dG_e(M, O)}{dn} ds_M.$$

Le théorème d'équivalence énoncé plus haut est d'ailleurs une conséquence de la *symétrie* de la fonction de Green $G_e(M, P)$. Reprenons le théorème du passage à la limite même sous sa forme réduite du n° 7, avec une distribution nulle et un flux 2π.

On aura en $M_0 \neq O$

$$G_{k_n}(M_0, O) = G_{k_n}(O, M_0),$$

d'où en passant à la limite, par des raisonnements faciles,

$$G_c(M_0, O) = \text{val. moy. en } O \text{ de } G_c(P, M_0),$$

où $G_c(P, M_0)$, fonction de P, est intégrale > 0 au voisinage de O.

Et *le théorème d'équivalence équivaut à exprimer la symétrie de* $G_c(M, P)$ *quand l'un des points est* O, *à condition de prendre en* O *la valeur moyenne.*

On voit comment cela permettrait de faire autrement l'étude de la solution du problème de Dirichlet du n° 7 comme fonctionnelle de $c(M)$, en étudiant la valeur moyenne en O de $G_c(M, M_0)$ comme fonctionnelle de c (*voir* Chapitre II, n° 12).

11. Le problème de Dirichlet du n° 7 n'a donc pas toujours de solution. Mais en considérant *les intégrales bornées* dans un sens sans les astreindre à correspondre à une source *finie*, on a le *théorème d'existence général* suivant :

Étant donnée sur la frontière du même domaine Ω *une distribution continue quelconque, il existe sur* $(\Omega - O)$ *une intégrale bornée dans un sens* (qu'on ne fixe pas), *prenant les valeurs données sur* Σ *et, en un point donné arbitraire de* $(\Omega - O)$, *une valeur donnée arbitraire.*

On se ramène aussitôt à prouver que *sur* $(\Omega - O)$ *il y a des intégrales positives qui s'annulent à la frontière.* On y parvient par le procédé très général suivant:

Imaginons une suite de domaines ω_n contenant O, de frontière σ_n, tels que $(\Omega - \omega_n - \sigma_n)$ soit de type D_h, enfin se réduisant au point O quand $n \to +\infty$; prenons sur σ_n une distribution $\geqq 0$ non partout nulle assujettie seulement à la condition que la solution u_n du problème de Dirichlet généralisé pour $(\Omega - \omega_n - \sigma_n)$ et les valeurs considérées sur Σ et σ_n prenne en un certain point P fixe de $(\Omega - O)$ une valeur comprise entre deux nombres positifs a et b. Sur tout domaine δ contenant P et complètement intérieur à $(\Omega - O)$ les u_n, qui à partir d'une valeur assez grande de n sont définis dans un domaine où δ est complètement intérieur, y seront, d'après le lemme de M. Litchtenstein (*voir* Chapitre I, n° 16), bornés dans leur ensemble supérieurement et inférieurement par deux nombres *positifs;* on peut donc en extraire une suite qui, sur tout domaine δ' complètement intérieur à δ, converge uniformément vers une intégrale > 0.

Or δ' peut être choisi à l'avance arbitrairement, complètement intérieur à $(\Omega - O)$. Considérons une suite de tels δ' tendant vers $(\Omega - O)$; par des extractions successives de suites d'u_n et le procédé diagonal, on formera *une* suite extraite de u_n possédant la propriété que, sur *tout* domaine complètement intérieur à $(\Omega - O)$, elle converge uniformément vers une intégrale > 0. Il y aura même convergence uniforme sur tout ensemble fermé de $(\Omega + \Sigma - O)$ et la limite est intégrale > 0 sur $(\Omega - O)$ et s'annule sur Σ (*voir* Chapitre I, n° 15 fin).

Signalons qu'un autre procédé, moins général consisterait à rendre c continu en O en le modifiant au voisinage et à prendre l'intégrale ayant en O une singularité logarithmique convenable pour que l'intégrale satisfasse en P à la condition indiquée plus haut. On voit comment on formerait une suite u_n dont une suite extraite convergerait vers une intégrale cherchée ; au lieu de rendre c continu en O, on pourrait le rendre simplement tel que le problème de Dirichlet du n° 7 soit possible.

Lorsque le problème précédent n'est pas résoluble avec une source finie, il l'est donc avec une source *infinie*. *Un cas d'existence des sources infinies* est donc $c \geqq \frac{A}{\overline{OM}^2}$ au voisinage de O ; par exemple si $c = \frac{\alpha^2}{\overline{OM}^2}$ $(\alpha > 0)$, $u = \frac{1}{\overline{OM}^\alpha}$ est intégrale et fournira par multiplication par une constante et le procédé alterné une solution du problème.

12. *Extension au cas de n dimensions.* — Comme différence signalons que dans le cas de possibilité du problème du n° 7

$$c(M) \leqq \frac{A}{\overline{OM}^\alpha} \quad (0 \leqq \alpha < 2),$$

$\int\int_\Omega G_n c u_n d\sigma_P$ ne peut plus être affirmée bornée mais seulement d'un ordre moindre que $\frac{1}{\overline{OM}^{n-2}}$, ce qui suffit pour conclure. Au contraire on ne peut plus faire l'extension générale des résultats du n° 8, pour la solution considérée comme *fonctionnelle* de c ; toutefois, pour un point *fixé* de $(\Omega - O)$ on aura :

pour $n = 3$,

$$|\delta u| \leqq A' \sqrt{\int\int_{\Omega} (\delta c)^2 \, d\sigma};$$

pour n quelconque,

$$|\delta u| \leqq B' \max |\delta c|$$

et si $n = 3$ il y aura uniformité sur $(\Omega - O)$.

Enfin pour des c bornés, $|\delta u| \to 0$ avec $\int\int_{\Omega} |\delta c| \, d\sigma$, pour n quelconque et il y aura uniformité si $n = 3$.

Comme cas d'existence de sources infinies indiquons $c \geqq \frac{A}{\overline{OM}^2}$ et plus particulièrement $c = \frac{\alpha(\alpha - n + 2)}{\overline{OM}^2}$ $(\alpha > n - 2)$ avec l'intégrale $\frac{1}{\overline{OM}^{\alpha}}$.

III. — Extension du principe de Picard.

13. Ce que l'on appelle le « principe de Picard » pour les fonctions harmoniques (n° 2) peut, grâce à ce qui précède, s'étendre sous la forme suivante pour les intégrales de (1).

Si au voisinage du point singulier O *de* c, u *est intégrale, et telle que* $\left| \frac{u(M)}{\log \frac{1}{OM}} \right|$ *soit borné, c'est-à-dire encore*

$$-\alpha \log \frac{1}{OM} < u(M) < +\alpha \log \frac{1}{OM} \qquad (\alpha < 0),$$

le point O *est source simple finie;* c'est-à-dire que *u est bornée dans un sens* et, *si elle l'est par exemple inférieurement, de la forme* $f(M) \log \frac{1}{OM}$ *où* $f(M)$ *admet en* O *une valeur moyenne et une plus grande limite égales et finies.*

Par l'addition d'une intégrale de module borné, on se ramène à démontrer le théorème dans le cas où *u s'annule* sur un petit cercle γ de centre O. Soit A const. positive $> \left| \dfrac{u(\mathrm{M})}{\log \frac{1}{\mathrm{OM}}} \right|$ au voisinage de O et considérons la suite u_n du n° 7, de la forme en O :

$$\mathrm{B} \log \frac{1}{\mathrm{OM}} + \text{fonct. harm.},$$

où $\mathrm{B} > \mathrm{A}$.

On verra que : $u_n > u$, donc pour la limite v de u_n : $v \geqq u$.

Ou bien $v = 0$; alors $u \leqq 0$; O est source simple, nécessairement finie.

Ou bien $v > 0$; v correspond à une source de flux $2\pi\mathrm{B}$; alors $v - u \geqq 0$ et $\left| \dfrac{v-u}{\log \frac{1}{\mathrm{OM}}} \right|$ est borné ; donc pour l'intégrale $v - u$ qui s'annule sur γ, O est source simple finie ; par suite $v - u$ est proportionnelle à v; donc u est proportionnelle à v, ce qui achève la démonstration.

En conséquence : dire qu'il n'y a pas d'intégrales pour lesquelles O est source simple finie équivaut à dire que toute intégrale non bornée (il en existe toujours) est de la forme $f(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\mathrm{OM}}$ où $|f(\mathrm{M})|$ n'est pas borné. D'où l'énoncé déjà donné au Chapitre II (n° 6, fin), qu'il y a *équivalence* entre le cas où toutes les intégrales bornées s'annulent régulièrement en O et celui où toutes les intégrales non bornées sont de la forme précédente.

M. Bouligand [1] a désigné sous le nom de *principe de Picard sous forme intégrale* la proposition suivante, conséquence immédiate du n° 2 :

Ω étant un domaine borné de type D_h *et* O *un point de ce domaine, les fonctions harmoniques positives sur* $(\Omega - \mathrm{O})$ *et s'annulant à la frontière de Ω sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il y en a une seule à un facteur constant près.*

Il serait très important de généraliser cet énoncé *aux intégrales de l'équation* (1) où c admettrait une singularité en O et serait ailleurs continu, et borné à la frontière de Ω. L'exactitude probable de la pro-

---

(1) *Mémorial*, fasc. XI, *loc. cit.*, p. 17.

position entrainerait pour le théorème du n° 11 la propriété importante *d'unicité*.

14. Le théorème démontré plus haut s'étend au cas de n dimensions en remplaçant $\log \frac{1}{\overline{\text{OM}}}$ par $\frac{1}{\overline{\text{OM}}^{n-2}}$. Il a une application immédiate *dans l'étude à l'infini des intégrales bornées* de $\Delta u = cu$ où c est définie et continue au voisinage de l'infini, c'est-à-dire à l'extérieur d'une certaine sphère.

Dans le plan, l'inversion $\overline{\text{OM}}.\overline{\text{OM}'} = 1$ ramène la question à l'étude des intégrales *bornées* au voisinage de O de l'équation

$$\Delta v(\text{M}') = \frac{[c(\text{M})]}{\overline{\text{OM}'}^4} v(\text{M}'), \qquad v(\text{M}') = u(\text{M}),$$

$[c(\text{M})]$ étant considérée comme fonction de M', et c'est le Chapitre II qui s'appliquera.

Pour $n \geqq 3$ *dimensions* la transformation de Lord Kelvin :

$$\overline{\text{OM}}.\overline{\text{OM}'} = 1, \qquad v(\text{M}') = \frac{1}{\overline{\text{OM}'}^{n-2}} u(\text{M}),$$

ramène la question à l'étude de l'équation (*voir* Chap. I, n° 4) :

$$\Delta v(\text{M}') = \frac{[c(\text{M})]}{\overline{\text{OM}'}^{n+4}} v(\text{M}')$$

pour les intégrales v telles que $\left| \dfrac{v}{\frac{1}{\overline{\text{OM}'}^{n-2}}} \right|$ *soit borné;* et c'est le Chapitre actuel III qui s'applique et donne les résultats suivants :

Toute intégrale u bornée à l'infini est la somme d'une intégrale u_1 s'annulant régulièrement à l'infini, et s'il n'en est pas ainsi pour u, d'une autre u_2 d'un signe déterminé admettant une « valeur moyenne à l'infini » égale, si par exemple $u_2 > 0$, à la plus grande limite de u_2 à l'infini.

Quant au *problème de Dirichlet généralisé extérieur* pour intégrales bornées et un domaine dont l'inverse est de type D_h, il sera possible avec unicité pour les intégrales assujetties à s'annuler régulièrement à l'infini ; il ne sera pas toujours possible lorsqu'on se donne à l'infini une valeur moyenne non nulle; mais s'il est possible, ce qui dépend seulement de l'allure de c à l'infini, il y a une solution unique.

On étudiera aisément les cas particuliers de possibilité et impossibilité de ce dernier problème :

$$c(\mathrm{M}) \leqq \frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{OM}}^{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \alpha > n-1 \quad \text{et} \quad c(\mathrm{M}) \geqq \frac{\mathrm{A}}{\overline{\mathrm{OM}}^{n-1}}.$$

15. Je n'ai donc étudié que les intégrales *bornées dans un sens;* encore resterait-il avant tout à élucider l'importante question signalée plus haut.

L'étude des intégrales ayant en O un infini des deux signes semble beaucoup plus difficile. On connaît pour les fonctions *harmoniques* un développement au voisinage d'un point singulier, analogue à celui de Laurent pour les fonctions analytiques; je renverrai pour son étude à un travail ancien de M. Appell [1] et un mémoire récent de M. Bouligand [2]. On peut songer à quelque extension aux intégrales de (1), au moins lorsque c a un ordre de croissance assez faible.

CONCLUSION.

Je ne rappellerai pas les divers points signalés qu'il serait important de développer ou de trancher. Mais j'ajouterai quelques remarques générales.

D'abord il ne semble pas qu'on puisse aller beaucoup plus loin dans l'étude entreprise par *les méthodes utilisées* qui reposent en partie sur la considération d'équations de Fredholm *non résolues;* on peut espérer obtenir des résultats plus précis en résolvant l'équation de Fredholm dans le cas d'un domaine *sans* singularité, puis en passant *à la limite* sur la résolvante, de façon à obtenir pour la solution du problème avec singularité de c une expression qui en permettrait peut-être une étude plus poussée. Mais ce procédé qui demanderait à être approfondi est d'un ordre d'idées tout différent.

D'autre part une extension naturelle de ce travail est l'étude du cas où c, au lieu d'avoir une singularité ponctuelle, est singulier sur un

---

(1) *Acta math.*, 1884, p. 313.

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XLVIII, mars 1931, p. 95.

ensemble de points non nécessairement isolés. Lorsque cet ensemble est de «capacité nulle (¹)» on peut étendre à peu près tous les résultats du Chapitre II, les intégrales *bornées* se comportant au voisinage d'un de ces points comme s'il était isolé. La question qui a un rapport étroit avec l'extension que j'ai faite (²) au cas de notre équation de travaux récents de M. Wiener sur le problème de Dirichlet est développée dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* et déjà étudiée dans une Note des *Comptes rendus* (³). Une généralisation ultérieure serait l'étude des intégrales bornées ou non sur un domaine ouvert (où c est défini continu $\geqq 0$) *au voisinage* d'un point frontière *quelconque*.

Enfin on peut songer à étendre toute l'étude qui précède à des équations de type elliptique plus général et l'on en aperçoit aussitôt la possibilité sur certains points grâce aux travaux de M. Lichtenstein concernant des types étendus — en particulier sa généralisation du théorème de Harnack. — Mais une extension plus complète ne saurait avoir lieu sans certains changements ou restrictions comme le montre l'exemple suivant auquel je me bornerai pour finir :

Considérons dans le plan l'équation $\Delta u = u$ et une petite courbe Γ entourant O. Soit u l'intégrale nulle sur Γ admettant en O une singularité logarithmique $+ 1$. En posant $u = v \log \frac{1}{\mathrm{OM}}$, on voit que v est > 0 et s'annule sur Γ, et d'autre part que

$$\Delta v \log \frac{1}{\mathrm{OM}} - \frac{2}{\overline{\mathrm{OM}}^2}\left[(x - x_0)\frac{\partial v}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial v}{\partial y}\right] - v \log \frac{1}{\mathrm{OM}} = 0$$

$$(\mathrm{M} : x, y;\ \mathrm{M}_0 : x_0, y_0).$$

Cette équation en v qui peut encore s'écrire

$$\Delta v - 2\,\frac{x - x_0}{\overline{\mathrm{OM}}^2 \log \frac{1}{\mathrm{OM}}}\,\frac{\partial v}{\partial x} - 2\,\frac{y - y_0}{\overline{\mathrm{OM}}^2 \log \frac{1}{\mathrm{OM}}}\,\frac{\partial v}{\partial y} - v = 0$$

admet donc une intégrale *s'annulant* sur Γ, *bornée* au voisinage de O, et cependant *non nulle*.

(¹) Un exemple simple dans l'espace est une ligne rectifiable.
(²) *R. Ist. Lombardo, loc. cit.*
(³) *Comptes rendus*, t. **191**, 1930, p. 697.