GEORGES BOULIGAND

Sur l'application d'équations intégro-différentielles à l'étude des singularités de certains champs scalaires et sur divers problèmes linéaires propices à l'étude de la causalité topologique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 95-152
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__95_0>

SUR

L'APPLICATION D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

A L'ÉTUDE DES

SINGULARITÉS DE CERTAINS CHAMPS SCALAIRES

ET

SUR DIVERS PROBLÈMES LINÉAIRES

PROPICES A L'ÉTUDE DE LA CAUSALITÉ TOPOLOGIQUE

PAR M. GEORGES BOULIGAND

Introduction.

1. Le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques* fait connaître les éléments essentiels d'une méthode que j'ai imaginée pour l'étude des singularités des fonctions harmoniques dans des conditions variées. Elle consiste dans l'introduction d'une équation intégro-différentielle correspondant à un champ d'intégration constitué par l'une des sections obtenues en stratifiant le domaine de régularité de la fonction. On a ainsi une classe très vaste d'équations intégro-différentielles, jouissant de propriétés générales solidaires de celles des fonctions harmoniques. Notamment au principe de Dirichlet correspond le fait qu'une solution de l'équation intégro-différentielle est déterminée entre deux sections par les valeurs qu'elle prend dans ces sections.

Je reprends dans ce travail un exposé détaillé des principaux cas où l'on peut appliquer commodément cette méthode. Ces cas sont ceux où l'équation intégro-différentielle est l'analogue d'un système linéaire à coefficients constants. Le cas le plus simple consiste en l'étude d'une fonction harmonique uniforme autour d'un point singulier isolé. C'est par lui que je commence, dans la Section I, sans supposer au lecteur d'autre connaissance que les théorèmes usuels sur les équations intégrales linéaires et sur les systèmes orthogonaux. Ceci m'amène notamment à montrer de quelle manière on peut effectuer la distinction entre les pôles et les singularités essentielles des fonctions harmoniques, déjà indiquée par Paul Appell dans son beau Mémoire des *Acta mathematica* de 1884 (1). J'ai publié mes premiers résultats dans une Note, présentée à l'Académie des Sciences le 16 novembre 1925 (2). Un corollaire des conséquences générales de ce travail a fait l'objet d'une démonstration directe et indépendante de M. P. Noaillon dans sa Note aux *Comptes rendus* du 14 février 1927 (3).

J'étudie ensuite, dans la Section II, un problème fonctionnel d'un type général où apparaît la distinction des pôles et des points singuliers essentiels. Je donne divers théorèmes sur la discrimination des pôles, dont l'un met en jeu la notion d'égale continuité. Un autre, qui correspond à un cas particulier, déclenche le principe des singularités positives de Picard (4). M. Picard a publié à ce sujet deux Notes dans les *Comptes rendus* en 1923, t. 176, p. 933 et 1025, et un Mémoire dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 52, 1924.

Les Sections III, IV, V me fournissent des applications de cette théorie générale à des problèmes dont les conditions géométriques sont extrêmement variées. Ces problèmes se trouvent réunis ici dans un même schème, un peu comme les problèmes dynamiques le sont par les équations de Lagrange.

Les résultats obtenus dans chaque cas particulier, et qu'on peut interpréter comme étant de nature locale, me permettent de passer à des théorèmes intégraux, rassemblés dans la Section VI, et notamment au principe de Picard sous sa forme intégrale. A cette occasion j'ai traité, avec quelque détail, de divers cas où le principe de Picard est en défaut.

(1) Tome IV, pages 313-374.

(2) Tome 181, page 705 (*voir* en général la série de mes Notes citées au fascicule XI du *Mémorial*, p. 49).

(3) *Voir* le n° 15 du présent travail.

(4) Les considérations développent une Note présentée à l'Académie des Sciences le 2 juin 1930.

Dans ces résultats de la Section VI, interviennent des modalités topologiques intéressantes, par exemple le fait qu'une fonction harmonique et positive dans un domaine à n branches coniques ou cylindriques infinies, nulle sur la frontière de ce domaine, est une combinaison linéaire homogène à coefficients positifs de n fonctions, constituant un système fondamental de solutions. J'ai donc cherché à substituer le dénombrable au continu et, dans cette voie, j'ai obtenu facilement des systèmes d'une infinité dénombrable d'équations linéaires à une infinité dénombrable d'inconnues pour lesquels se présentent des effets analogues. Il suffit de passer des fonctions harmoniques aux fonctions préharmoniques.

J'apporte donc ainsi une première et très humble contribution à ce programme important de la mathématique à venir : *étudier comment intervient en Analyse la causalité topologique*.

I. — Étude d'une fonction harmonique uniforme autour d'un point singulier isolé.

2. Je me placerai pour fixer les idées dans l'espace à trois dimensions. Le point singulier O sera pris pour origine. Désignons par M un point courant et prenons des coordonnées sphériques de centre O. Appelons r la distance OM. La fonction harmonique U(M) peut être regardée comme dépendant de la trace m de la demi-droite OM sur la sphère unitaire ainsi que de la variable r. L'équation de Laplace peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\delta_2 U = 0, \tag{1}$$

en appelant $\delta_2 U$ le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami pour la sphère unitaire. Posons

$$r = e^{-\rho}, \qquad U = e^{\frac{\rho}{2}} V, \tag{2}$$

on est ramené à l'étude d'une fonction V dépendant du point m de la sphère unitaire ainsi que de la variable ρ. Nous aurons

$$V = U e^{-\frac{\rho}{2}},$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = e^{-\frac{\rho}{2}}\left(\frac{U}{2} + r\frac{\partial U}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = e^{-\frac{\rho}{2}}\left[\frac{U}{4} + \frac{r}{2}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{r}{2}\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right]$$

$$= \frac{V}{4} + e^{-\frac{\rho}{2}}\left(2r\frac{\partial U}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{V}{4} - \delta_2 V.$$

Telle est la transformée de (1) par la transformation (2). Nous l'écrirons en définitive

$$(4) \qquad \delta_2 V - \frac{V}{4} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}.$$

3. Lorsque ρ varie de $-\infty$ à $+\infty$, alors r décroît de $+\infty$ à 0. De chaque solution connue de l'équation de Laplace, on déduit une solution de l'équation (4). Partons de la solution élémentaire $\frac{1}{AM}$ de l'équation de Laplace, en appelant A un point fixe, tel que

$$NA = l = e^{-\lambda}.$$

Soient a la trace de la demi-droite OA sur la sphère unitaire et γ l'angle des demi-droites OA et OM. Nous aurons

$$\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 - 2\,OA \times OM \cos\gamma = l^2 + r^2 - 2lr\cos\gamma$$

et, par suite, notre équation en V admet la solution

$$(5) \qquad \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\gamma}} = \frac{e^{\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{e^{-2\lambda} + e^{-2\rho} - 2e^{-(\lambda+\rho)}\cos\gamma}}.$$

Considérons l'équation (4) : pour en obtenir des solutions, on peut chercher à partir de fonctions de la forme

$$v_t(m)\cos t\rho,$$

on obtient l'équation

$$(6) \qquad \delta_2 v - \frac{v}{4} = t^2 v$$

et par son intermédiaire, au moyen d'un processus de composition linéaire, on est conduit à envisager des intégrales de Fourier telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(m) \frac{\cos}{\sin} l\rho \, dl.$$

Considérons, pour $l = 1$, la solution (5), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \rho - 2 \cos \gamma}};$$

puisqu'elle est paire en ρ, le processus qui vient d'être mentionné va nous amener à l'écrire

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \rho - \cos \gamma)}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_l(m, a) \cos l\rho \, dl.$$

Puisque le premier membre de l'équation (7) est une solution élémentaire de l'équation (4), on prévoit que la fonction $g_l(m, a)$ sera pareillement une solution élémentaire de l'équation (6).

4. Justifions ce dernier point. Pour cela, résolvons l'équation intégrale (7), du type de Fourier, par rapport à $g_l(m, a)$, fonction qui ne dépend de a et de m que par l'angle γ et qu'on peut écrire

$$(8) \qquad g_l(m, a) = \varphi_l(\gamma).$$

Il nous vient

$$(9) \qquad \varphi_l(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{\cos l\rho \, d\rho}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \rho - \cos \gamma)}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos l\rho \, d\rho}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}.$$

Nous allons prouver que, γ tendant vers zéro, la fonction $\varphi_l(\gamma)$ possède la singularité logarithmique propre à une solution élémentaire. En effet, si nous écrivons

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos l\rho \, d\rho}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} = \int_0^k + \int_k^{\infty},$$

la dernière intégrale est, quelle que soit la constante positive k, une fonction holomorphe de γ. Or nous pouvons écrire

$$(10)\quad \frac{\cos kt}{\operatorname{ch}\frac{k}{2}}\int_0^k \frac{\operatorname{ch}\frac{\rho}{2}\,d\frac{\rho}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}} < \int_0^k \frac{\cos t\rho\,d\rho}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}} < \int_0^k \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}$$

ou encore

$$\frac{\cos kt}{\operatorname{ch}\frac{k}{2}}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{sh}\frac{k}{2}+\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{k}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$< \int_0^k \frac{\cos t\rho\,d\rho}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}} < \operatorname{Log}\frac{k+\sqrt{k^2+4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}{2\sin\frac{\gamma}{2}};$$

donc l'intégrale proposée est comprise entre deux quantités, qui, pour γ infiniment petit, équivalent respectivement (comme infiniment grands) à

$$\frac{\cos kt}{\operatorname{ch}\frac{k}{2}}\operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \qquad \operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Or on peut toujours fixer la constante k de manière que le rapport de $\cos kt$ à $\operatorname{ch}\frac{k}{2}$ reste arbitrairement voisin de 1. Il est donc établi que $\varphi_t(\gamma)$ est un infiniment grand équivalent à

$$\operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

d'où il suit bien que $\varphi_t(\gamma)$ est une solution élémentaire de l'équation proposée.

Cette fonction, que nous avions écrite aussi précédemment $g_t(a, m)$, est, pour chaque position de a, une fonction du point m, régulière sur toute la sphère, exception faite du point a où elle devient infinie comme

$$\operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

5. Cette expression $g_t(m, a)$ nous permettrait de trouver une fonction, uniforme sur toute la sphère et telle que

$$\left[\delta_2 v - \left(\frac{1}{4} + t^2\right) v\right]_p = \Psi_p, \tag{11}$$

où le second membre est une fonction donnée. Il suffirait de poser

$$v_p = -\frac{1}{2\pi}\int\int \Psi_m g_t(m, p)\, d\sigma_m. \tag{12}$$

Remarquons maintenant que l'équation (4) peut s'obtenir en remplaçant v dans (11) par V et Ψ par $-\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}$, après y avoir fait $t = 0$.

Or, nous avons, d'après (9),

$$g_0(a, m) = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\rho - \cos\gamma)}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{\frac{\rho}{2}}\, d\rho}{\sqrt{e^{2\rho} + 1 - 2e^\rho \cos\gamma}} = \int_0^\infty \frac{e^\rho\, d\rho}{\sqrt{e^\rho(e^{2\rho} + 1 - 2e^\rho\cos\gamma)}}$$

ou finalement

$$g_0(a, m) = \int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(s^2 - 2s\cos\gamma + 1)}}.$$

D'après cela, la fonction V du point p et du paramètre ρ sera donc une solution de l'équation intégro-différentielle

$$2\pi V_p(\rho) = \int\int \frac{\partial^2 V_m}{\partial \rho^2} g_0(m, p)\, d\sigma_m, \tag{13}$$

où l'intégrale est étendue à la totalité de la sphère unitaire.

6. L'étude des fonctions harmoniques et uniformes autour d'un point singulier isolé se trouve donc ramenée à celle de l'équation intégro-différentielle (13). Depuis les travaux de J. Le Roux, V. Volterra, H. Poincaré, J. Fredholm, D. Hilbert, etc., lorsqu'on se trouve en présence d'une telle équation, l'attention se porte naturellement sur les systèmes finis dont elle dériverait, par un passage à la limite.

Nous aurons ici à considérer un système de la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} V_1 = a_{11}\dfrac{d^2V_1}{d\rho^2} + a_{12}\dfrac{d^2V_2}{d\rho^2} + \ldots + a_{1n}\dfrac{d^2V_n}{d\rho^2}, \\ V_2 = a_{21}\dfrac{d^2V_1}{d\rho^2} + a_{22}\dfrac{d^2V_2}{d\rho^2} + \ldots + a_{2n}\dfrac{d^2V_n}{d\rho^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_n = a_{n1}\dfrac{d^2V_1}{d\rho^2} + a_{n2}\dfrac{d^2V_2}{d\rho^2} + \ldots + a_{nn}\dfrac{d^2V_n}{d\rho^2}, \end{cases}$$

où les coefficients figurant dans les seconds membres sont des constantes positives, formant un tableau symétrique par rapport à sa diagonale principale. Mais nous sommes fondés à imposer à ces constantes d'autres conditions.

Considérons la double sommation

$$(15)\qquad I_\varphi = \int\!\!\int \int\!\!\int \varphi(m)\,\varphi(p)\,g_0(m, p)\,d\sigma_m\,d\sigma_p$$

étendue à la sphère unitaire. Si nous posons

$$\int\!\!\int \varphi(m)\,g_0(m, p)\,d\sigma_m = 2\pi\,\psi(p),$$

nous aurons

$$\varphi = -\Delta\psi,$$

d'où, en utilisant la formule de Green sur la sphère unitaire,

$$I_\varphi = -2\pi\int\!\!\int \psi\,\Delta\psi\,d\sigma = 2\pi\int\!\!\int \overline{\mathrm{grad}}^2\,\psi\,d\sigma,$$

le gradient étant défini conformément à la métrique de la sphère unitaire [1]. Il s'ensuit que la fonctionnelle quadratique I_φ est positive pour toute fonction φ.

Donc, pour que le système différentiel (14) présente avec l'équation intégro-différentielle (13) les analogies que nous recherchons, il faut

---

[1] *Cf.* Bouligand, *Leçons de Géométrie vectorielle*, nos 217 et 218.

supposer que la forme quadratique

$$\sum_{ik} a_{ik} u_i u_k \tag{16}$$

(où i, k est un arrangement binaire des entiers $1, 2, \ldots, n$) soit définie et positive, ou encore que l'équation

$$\sum_{ik} a_{ik} u_i u_k = 1$$

représente, dans l'espace lieu du point de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, un ellipsoïde.

7. C'est dans ces conditions que nous allons faire tout d'abord l'étude du système (14). Si l'on y fait jouer à ρ le rôle du temps, il définit le mouvement du point $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ dans un champ de forces, dont les composantes se déduisent des coordonnées de ce point par la substitution linéaire inverse de celle qui intervient dans les formules (14). Ce champ de forces dérive d'un potentiel, qui est la forme quadratique adjointe de (16) et qui a pour surfaces de niveau des ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Les n directions principales de ces quadriques constituent des trajectoires rectilignes de notre problème de dynamique, dont chacune correspond à une classe de mouvements dépendant de deux constantes arbitraires. Un mouvement quelconque s'obtiendra par composition linéaire de ces $2n$ solutions rectilignes du système (14).

Pour les former, il nous suffit de poser

$$V_1 = c_1 e^{\alpha\rho}, \qquad V_2 = c_2 e^{\alpha\rho}, \qquad \ldots, \qquad V_n = c_n e^{\alpha\rho},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant les paramètres d'une de nos directions principales. En portant dans (14), nous aurons un système

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \alpha^2(a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \ldots + a_{1n} c_n), \\ c_2 = \alpha^2(a_{21} c_1 + a_{22} c_2 + \ldots + a_{2n} c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_n = \alpha^2(a_{n2} c_1 + a_{n2} c_2 + \ldots + a_{nn} c_n), \end{array}\right. \tag{17}$$

de n équations linéaires et homogènes par rapport à nos paramètres de direction. Les α seront racines de l'équation

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{\alpha^2} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{\alpha^2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui se déduit de l'équation en S attachée à la forme quadratique (16) en posant

$$S = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Donc $|\alpha|$ est la longueur d'un axe de l'ellipsoïde

$$(19) \qquad \sum_{ik} a_{ik} u_i u_k = 1.$$

Il résulte de là que nous obtiendrons pour α un ensemble de $2n$ valeurs réelles, et deux à deux opposées. La plus petite en module de ces valeurs est fournie par le petit axe de notre ellipsoïde : il importe d'observer que celui-ci a des paramètres directeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tous de même signe, et qu'on peut prendre positifs. Cela tient à ce que les a_{ik} sont tous positifs : car, dans ces conditions, le minimum du rayon vecteur de notre ellipsoïde, pour un système fini de rayons issus de O et deux à deux symétriques par rapport aux variétés de coordonnées, a nécessairement lieu et au sens strict pour celui de ces rayons qui traverse la région des coordonnées positives. Il s'ensuit que le petit axe traverse cette région, ainsi que nous l'avions annoncé, et qu'il constitue un minimum strict du rayon vecteur.

8. Nous pouvons dès maintenant apercevoir la propriété des intégrales du système (14) qui se prolongera suivant le principe des singularités positives de Picard pour les fonctions harmoniques, au voisinage d'un point singulier isolé. Ce principe énonce que si une telle fonction est positive au voisinage du point, la singularité qu'elle y éprouve est nécessairement celle de la solution élémentaire.

Avec les notations que nous avons adoptées, cette question nous amène à l'étude des solutions de l'équation intégro-différentielle (13) qui restent positives sur toute la sphère unitaire, lorsque ρ tend vers $+\infty$.

Le problème analogue pour le système (14) consistera dans l'étude d'une trajectoire sur laquelle le point $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ s'éloigne indéfiniment de manière que toutes ses coordonnées soient positives. D'après ce qui précède, lorsque les racines α de l'équation (18) sont distinctes, il est immédiat qu'une trajectoire quelconque a une direction asymptotique : c'est un axe de l'ellipsoïde (19) correspondant à la racine positive α, la plus grande qui intervienne en exposant caractéristique dans les solutions rectilignes combinées linéairement. Or, le petit axe est dans la région des coordonnées positives, et en raison de l'orthogonalité, il a le monopole de cette propriété. Donc, en appelant $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ses paramètres directeurs, essentiellement positifs, et α_1 sa longueur, on voit que les différences

$$V_1 - c_1 e^{\alpha_1 \rho}, \qquad \ldots, \qquad V_n - c_n e^{\alpha_1 \rho}$$

tendront nécessairement vers zéro lorsque ρ tendra vers $+\infty$. Il est donc bien prouvé que le fait, pour une trajectoire, de demeurer, en s'éloignant indéfiniment, dans la région des coordonnées positives, lui impose une direction asymptotique Δ_1 bien déterminée, celle du petit axe de notre ellipsoïde (19), en même temps qu'il implique pour le mobile cette propriété : sa distance à l'origine est un infiniment grand de l'ordre de $e^{\alpha_1 \rho}$.

Nous avons admis implicitement, au cours du raisonnement qui précède, que la racine α_1 est simple. Ce point se justifie sans difficulté : il résulte immédiatement de la propriété du petit axe, soulignée à la fin du n° 7, de constituer un minimum strict du rayon vecteur.

9. Il s'agit maintenant, passant du fini à l'infini, d'étudier parallèlement l'équation intégro-différentielle (13), que nous écrirons en supprimant l'indice zéro dans le noyau :

$$(20) \qquad 2\pi\, V_p(\rho) = \iint_\sigma \frac{\partial^2 V_m}{\partial \rho^2}\, g(m, p)\, d\sigma_m,$$

σ désignant la sphère unitaire, prise dans sa totalité.

Cherchons les solutions de la forme

$$V_p(\rho) = e^{\alpha\rho}\,\varphi(p). \tag{21}$$

Alors la fonction $\varphi(p)$ sera une solution de l'équation intégrale homogène

$$2\pi\,\varphi(p) = \alpha^2 \int\int_\sigma \varphi(m)\,g(m, p)\,d\sigma_m \tag{22}$$

et α^2 sera une constante caractéristique du noyau. Puisque la fonctionnelle I_φ, représentée par l'équation (15), est définie et positive, tous les α^2 sont réels et positifs.

D'ailleurs, il est facile de prouver que l'on a ici

$$\alpha^2 = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2,$$

où ν est un entier et qu'une fonction $\varphi(m)$ attachée à un α, est une fonction Y_ν de Laplace. En effet, considérons l'équation intégrale

$$2\pi\,\varphi(p) = \alpha \int\int_\sigma \frac{\varphi(m)}{mp}\,d\sigma_m, \tag{23}$$

pour laquelle les constantes caractéristiques sont les nombres

$$\alpha_\nu = \nu + \frac{1}{2} \qquad (\nu \text{ entier})$$

et dont les fonctions fondamentales sont précisément les fonctions sphériques [1]. Par une itération du noyau, nous en déduisons une nouvelle équation vérifiée par la fonction $\varphi(p)$, à savoir

$$4\pi^2\,\varphi(p) = \alpha^2 \int\int \varphi(m)\,k(m, p)\,d\sigma_m, \tag{24}$$

en posant

$$k(m, p) = \int\int_\sigma \frac{1}{mq}\,\frac{1}{qp}\,d\sigma_q.$$

L'intégrale au second membre envisagée comme fonction du point m

---

[1] E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, p. 235.

sur la sphère unitaire, lorsqu'on y laisse fixe le point p, présente en ce point une singularité logarithmique, correspondant à la partie principale

$$2\pi \log \frac{1}{mp}.$$

D'ailleurs, soit M un point, situé ou non sur la sphère unitaire. Puisque l'inverse de la distance Mq est une fonction harmonique de M, la fonction

$$\frac{\sqrt{OM}}{Mq} = \frac{e^{-\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{1+e^{-2\rho}-2e^{-\rho}\cos\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\rho - 2\cos\gamma}}$$

satisfait à l'équation

$$\delta_2 V - \frac{V}{4} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}.$$

Raisonnons maintenant en considérant par exemple un point M situé à l'intérieur de la sphère unitaire, un point P situé à l'extérieur. Formons, pour une position déterminée de P, l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_\sigma \frac{\sqrt{OM}}{Mq}\,\frac{\sqrt{OP}}{Pq}\,d\sigma_q,$$

qui est une fonction paire de la distance $\rho = OM$. La dérivée de l'élément différentiel, prise par rapport à ρ, s'annule pour $\rho = 0$. Mais l'intégrale de cet élément se comporte comme un potentiel de simple couche : il s'ensuit que sa dérivée prise par rapport à ρ, pour la valeur $\rho = 0$, est égale à

$$-\frac{\sqrt{OP}}{Pm},$$

d'où il suit que l'on a l'identité [1]

$$(25) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_\sigma \frac{\sqrt{OM}}{Mq}\,\frac{\sqrt{OP}}{Pq}\,d\sigma_q = \int_\rho^{+\infty} \frac{\sqrt{OP}}{PM}\,d\rho,$$

---

[1] Cette identité exprime un théorème d'addition intégro-différentiel analogue à celui que j'ai donné pour la fonction de Green du cylindre dans ma Thèse [égalité (26) du n° **33**].

car les deux membres sont des fonctions de M (ou si l'on préfère de la trace m de OM sur la sphère unitaire, et du paramètre ρ), définies dans la totalité du domaine σ et pour les valeurs non négatives de ρ, évanescentes avec ρ infini positif, ayant la même dérivée par rapport à ρ pour $\rho = 0$ et satisfaisant chacune à l'équation

$$\delta_2 V - \frac{V}{4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 0.$$

Ramenons maintenant P en p, et faisons $\rho = 0$. Le second membre de (25) devient, d'après les calculs du n° 5,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\rho - \cos\gamma)}}\, d\rho = g(m, p)$$

et, par suite, nous avons finalement

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_\sigma \frac{1}{mq}\,\frac{1}{pq}\, d\sigma_q = g(m, p) = \frac{1}{2\pi} k(m, p). \tag{26}$$

De cette relation, il résulte bien que l'équation intégrale (23) conduit bien, par itération, à (22).

10. En résumé, si dans l'équation intégro-différentielle (20), nous cherchons les solutions de la forme (21), nous sommes conduits à l'équation intégrale homogène (22) dont les α sont donnés par la formule

$$\alpha_\nu = \pm\left(\nu + \frac{1}{2}\right),$$

où ν est un entier et où la fonction φ correspondant à un α_ν est la fonction de Laplace Y_ν la plus générale attachée à l'entier ν. Cette fonction comporte $2\nu + 1$ coefficients : nous désignerons plus spécialement par Y_ν la fonction de Laplace dans laquelle on lie ces $2\nu + 1$ coefficients de manière que son carré ait l'unité pour intégrale, sur la sphère σ.

D'après un théorème connu concernant la possibilité du développement d'une fonction arbitraire, soumise, ainsi que ses dérivées, à des conditions de continuité, en série procédant suivant les fonctions fondamentales, notre fonction harmonique, analytiquement régulière sur une sphère de rayon non nul, est développable en une série absolument et uniformément convergente qui se déduit par les formules (2) de la suivante ([1]) :

$$(27)\quad \mathrm{V} = c_0 e^{-\frac{\rho}{2}} + d_0 e^{\frac{\rho}{2}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\rho} \mathrm{Y}_\nu(p) + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\rho} \mathrm{Y}_\nu(p),$$

d'où, en revenant aux notations premières,

$$(28)\qquad \mathrm{U} = c_0 + \frac{d_0}{r} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{d_\nu}{r^{\nu+1}} + c_\nu r^\nu\right] \mathrm{Y}_\nu(p).$$

On retrouve la forme classique de développement, déjà connue de P. Appell. A l'exemple de l'illustre géomètre, nous dirons que la série

$$\frac{d_0}{r} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu r^{-\nu-1} \mathrm{Y}_\nu(p)$$

est la partie singulière de la fonction. Lorsqu'elle ne comprend qu'un nombre fini de termes, l'origine sera dite un *pôle* de la fonction harmonique dont l'ordre est, par définition, la valeur la plus élevée de l'entier ν augmentée de 1. Lorsque la partie singulière comprend une infinité de termes, nous dirons que l'origine est un *point singulier essentiel*. Dans ce cas, la partie singulière est une série de puissances en $\frac{1}{r}$, qui converge, si petit que soit r : elle représente donc une fonction entière en $\frac{1}{r}$.

11. Montrons maintenant comment un certain nombre de lois gouvernant les singularités se rattachent à l'analyse précédente.

Nous allons d'abord nous occuper du principe de Picard, ou ce qui

---

([1]) Pour justifier la forme exponentielle du coefficient de $\mathrm{Y}_\nu(p)$ dans le développement (27), il suffit de l'écrire $\int\int_\sigma \mathrm{Y}_\nu(p)\, \mathrm{V}_\rho(p)\, d\sigma_p$. On en tire facilement l'équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifiée par cette fonction de ρ. On peut aussi, à l'exemple de M. Picard, qui, dans son cours de 1930, a donné dans cette voie une démonstration de son théorème, tirer (28) de la formule de Green.

revient au même, nous allons rechercher la solution du problème suivant :

Trouver la partie singulière d'une fonction harmonique qui demeure constamment positive aux environs du point singulier O.

Nous allons établir que cette partie singulière est précisément celle qui correspond à un pôle du premier ordre, ou, si l'on préfère, à la solution élémentaire de l'équation.

En effet, nous tirons de la relation (28) (en tenant compte de l'orthogonalité de nos fonctions fondamentales)

$$\int\int_{\sigma} \mathrm{U}(p, r)\, d\sigma_p = 4\pi\left(c_0 + \frac{d_0}{r}\right). \tag{29}$$

Par hypothèse, la fonction U est positive à partir d'une certaine valeur de r; nous voulons prouver que les coefficients

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \ldots$$

du développement (28) sont nuls.

Considérons en effet l'intégrale

$$\int\int_{\sigma} \mathrm{U}(p, r)\, \mathrm{Y}_\nu(p)\, d\sigma_p = \frac{d_\nu}{r^{\nu+1}} + c_\nu r^\nu.$$

Elle est moindre, en valeur absolue, que

$$\max \mathrm{Y}_\nu(p) \int\int_{\sigma} \mathrm{U}(p, r)\, d\sigma_p$$

et par suite, en vertu de (29), que

$$4\pi\left(c_0 + \frac{d_0}{r}\right)(\max \mathrm{Y}_\nu).$$

Il faut donc qu'à partir de $\nu = 1$, on ait

$$d_\nu = 0.$$

12. Introduisons maintenant la notion de l'*égale continuité relative*. Considérons une famille de fonctions, telle que chaque fonction de la famille soit continue et bornée, bien que ces fonctions ne soient pas bornées dans leur ensemble. Considérons une nouvelle famille obtenue

en divisant chaque fonction de la première par son module maximum. Si cette nouvelle famille est formée de fonctions également continues, nous dirons, pour abréger, que la première possède l'*égale continuité relative*.

Cette notion va jouer dans ce qui va suivre un rôle essentiel.

13. Je me propose, à sa faveur, d'établir mon théorème fondamental, communiqué à l'Académie des Sciences en novembre 1925, permettant de distinguer les singularités polaires des fonctions harmoniques. Ce théorème s'énonce, dans le cas actuel, de la manière suivante :

Pour qu'une fonction harmonique et uniforme autour d'un point singulier isolé O *admette ce point pour pôle, il faut et il suffit qu'en la mettant sous la forme* $U(p, r)$, *la famille de fonctions du point p, dépendant du paramètre r, ainsi obtenue, jouisse de l'égale continuité relative.*

On vérifie immédiatement que la condition est nécessaire. En effet, supposons que l'origine soit un pôle. Nous aurons alors une partie singulière de la forme suivante :

$$\frac{d_0}{r} + \frac{d_1}{r^2} Y_1(p) + \ldots + \frac{d_{n-1}}{r^n} Y_{n-1}(p).$$

Il est clair que, pour prouver l'égale continuité relative d'une famille de fonctions, il est permis de multiplier chaque fonction de la famille par une constante. Il nous suffit donc de raisonner sur la famille de fonctions

$$d_{n-1} Y_{n-1}(p) + r d_{n-2} Y_{n-2}(p) + \ldots + d_0 r^{n-1}.$$

Ces fonctions tendent uniformément vers $d_{n-1} Y_{n-1}(p)$ lorsque r tend vers zéro. Donc elles sont également continues, ce qui entraîne bien l'égale continuité relative que nous cherchions à établir.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Nous supposons donc l'égale continuité relative des fonctions $U(p, r)$, ou, ce qui revient au même, l'égale continuité des fonctions

$$\frac{U(p, r)}{\mu(r)} \qquad [\mu(r) = \max |U(p, r)| \text{ pour } r \text{ donné}].$$

Considérons le développement (28) de la fonction $U(p, r)$.

Ce développement entraîne la relation (30) :

$$(30) \quad \iint_\sigma U^2(p, r)\, d\sigma_p = 4\pi\left(c_0 + \frac{d_0}{r}\right)^2 + \sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(c_\nu r^\nu + \frac{d_\nu}{r^{\nu+1}}\right)^2 \leqq 4\pi\,\mu^2(r).$$

D'autre part, vu l'égale continuité des fonctions

$$\frac{U(p, r)}{\mu(r)},$$

il est impossible de trouver une suite évanescente de valeurs de r telles que le rapport

$$(31) \quad \frac{\iint_\sigma U^2(p, r)\, d\sigma_p}{\mu^2(r)}$$

tende vers zéro, car les fonctions

$$\frac{U^2(p, r)}{\mu^2(r)},$$

comprises entre o et 1 sur la sphère unitaire, atteignant la valeur 1 en un point p au moins pour chaque valeur de r, ne pourraient être également continues si leur moyenne sur cette sphère tendait vers zéro.

Donc l'égale continuité exige que l'ensemble des valeurs limites du rapport (31), ensemble qui est essentiellement fermé, ne contienne pas la valeur zéro, et par suite que ce rapport ait une borne inférieure positive. Donc l'égale continuité des fonctions

$$\frac{U(p, r)}{\mu(r)}$$

entraîne l'égale continuité des fonctions

$$(32) \quad \frac{U(p, r)}{\sqrt{\iint_\sigma U^2(p, r)\, d\sigma_p}} = \psi(p, r).$$

En vertu de cette égale continuité, on peut déterminer une suite évanescente de valeurs de r telles que les $\psi(p, r)$ correspondantes convergent uniformément, sur la sphère unitaire, vers une fonction limite continue $\Psi(p)$. Puisque l'on a

$$\int\int_{\sigma} \psi^2(p, r)\, d\sigma_p = 1,$$

il s'ensuivra que l'on a aussi

$$\int\int_{\sigma} \Psi^2(p)\, d\sigma_p = 1.$$

Or à la fonction $\Psi(p)$, est attaché un développement

$$\Psi(p) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i \mathrm{Y}_i(p) \quad (^1)$$

qui converge en moyenne vers cette fonction.

Le coefficient

$$\lambda_i = \int\int \Psi(p)\, \mathrm{Y}_i(p)\, d\sigma_p$$

est la limite de

$$\int\int \psi(p, r)\, \mathrm{Y}_i(p)\, d\sigma_p$$

pour les r de la suite considérée, lorsqu'on progresse indéfiniment dans cette suite. Or cette dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{c_i r^i + \dfrac{d_i}{r^{i+1}}}{\sqrt{4\pi\left(c_0 + \dfrac{d_0}{r}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(c_\nu r^\nu + \dfrac{d_\nu}{r^{\nu+1}}\right)^2}}.$$

Si le développement indiqué par la sommation sous le radical comportait une infinité de coefficients d_r, tous les coefficients λ_i seraient nuls; donc, la fonction continue vers laquelle convergent uniformé-

---

(1) Où $\mathrm{Y}_i(p)$ est la fonction de Laplace la plus générale dont le carré admet l'unité pour intégrale étendue à la sphère, les coefficients qui subsistent dans cette fonction étant déterminés par notre fonction $\Psi(p)$, suivant un processus devenant très simple lorsque $\mathrm{Y}_i(p)$ est mis sous forme d'une combinaison linéaire de $2i + 1$ fonctions orthogonales et normales.

ment les $\psi(p, r)$, pour notre suite évanescente de valeurs de r, serait identiquement nulle. L'intégrale de son carré serait nulle, contrairement à ce qui précède, et, par conséquent, le point O est un pôle.

C. Q. F. D.

14. Nous allons maintenant justifier le *principe de la séparation des croissances*, qui s'exprime ici au moyen du théorème suivant :

Soit une fonction harmonique $U(p, r)$, *uniforme autour du point singulier isolé* O. *Si cette fonction satisfait à une inégalité telle que par exemple*

$$U(p, r) \leqq \frac{K}{r^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > 0) \tag{33}$$

satisfaite, quel que soit le point p *de la sphère unitaire et quel que soit* r, $(< r_0)$, *inégalité qui limite les valeurs positives de* r, *le point singulier est un pôle dont l'ordre est le plus grand entier contenu dans* α.

En effet, en vertu de la relation (28), nous avons encore

$$\int\int_{\sigma} U(p, r)\, d\sigma_p = 4\pi\left(c_0 + \frac{d_0}{r}\right).$$

Supposons vérifiée l'inégalité (33) où l'exposant α est positif. Dans l'intégrale du premier membre de la relation ci-dessus, la contribution des éléments positifs est moindre que

$$\frac{4\pi K}{r^{\alpha+1}}.$$

Donc, en module, celle des éléments négatifs, pris dans leur ensemble, admet une limitation de la forme

$$\frac{h}{r^{\alpha+1}},$$

h étant une nouvelle constante positive. Nous aurons donc le même type de limitation pour les intégrales

$$\int\int_{\sigma} U(p, r)\, Y_\nu(p)\, d\sigma_p,$$

desquelles disparaîtra donc le terme en

$$\frac{d_\nu}{r^{\nu+1}}$$

à partir du moment où ν surpassera α.

Le théorème est donc établi. Il se présente comme une extension du principe de Picard, car pour ce dernier, on suppose l'absence de valeurs négatives. Donc, on a bien, en vertu du raisonnement précédent,

$$d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = 0.$$

15. Tout ce que nous venons de dire au sujet d'une fonction harmonique uniforme au voisinage d'un point singulier isolé à distance finie pourrait se transposer avec la plus grande facilité et s'appliquer à l'étude d'une fonction qui serait harmonique à l'extérieur d'une certaine sphère. On pourrait remarquer que cette fonction satisfait à la même équation intégro-différentielle que précédemment et reprendre point par point, sur celle-ci, tout le raisonnement qui vient d'être exposé. Ou bien encore, on pourrait déduire l'étude des propriétés à l'infini de l'étude au voisinage d'un point O par la transformation de Lord Kelvin.

Quoi qu'il en soit, on sera ainsi amené à séparer la partie singulière de la fonction à l'infini, laquelle sera une certaine fonction entière

$$\sum_\nu r^\nu . \mathrm{Y}_\nu(p).$$

On sera conduit comme ci-dessus à distinguer, des points singuliers essentiels, les pôles pour lesquels ce développement est fini : ces points se discriminent encore au moyen de l'égale continuité relative.

Notamment, *pour qu'une fonction harmonique, régulière dans tout l'espace*, soit un *polynome*, il faut et il suffit que ses empreintes sur des sphères concentriques de rayon infiniment grand, ramenées par homothétie faite du centre sur une même sphère, jouissent de l'égale continuité relative.

Mais on peut encore donner à la condition cherchée une autre forme, procédant du principe de la séparation des croissances : il faut et il suffit que les valeurs positives prises par la fonction restent inférieures à une expression de la forme Kr^{α}. On aurait un énoncé facile à déduire du précédent et relatif à une limitation analogue des valeurs négatives.

Comme je l'ai dit dans l'Introduction, ce théorème particulier a été directement établi par M. Noaillon dans une Note communiquée à l'Académie le 14 février 1927, un an après l'apparition du fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, où j'ai donné les points essentiels de l'analyse qui précède.

Il va de soi que les raisonnements exposés sont extensibles au cas de l'espace à n dimensions.

II. — Sur un problème déjà très général où se présente la distinction des pôles et des singularités essentielles, indépendamment de tout champ fonctionnel spécial.

16. Dans la section précédente, nous avons appris à faire la distinction des pôles et des singularités essentielles pour les fonctions harmoniques de l'espace euclidien, à trois dimensions par exemple, étudiées ou bien dans le voisinage d'un point à distance finie, ou bien dans le domaine du point à l'infini.

En réalité, il y a un intérêt manifeste à présenter une théorie des pôles et points essentiels, rendue aussi indépendante que possible de la considération de champs fonctionnels, qui, dès le premier abord, se trouvent trop étroitement délimités comme, par exemple, celui des fonctions analytiques, ou encore celui des fonctions harmoniques.

C'est pourquoi, sans chercher la généralité maxima, nous poserons un problème, qui est déjà d'une certaine ampleur et offre l'avantage de procéder directement de l'analyse fonctionnelle. C'est ce problème que nous allons maintenant formuler.

17. Désignons par p un point d'un certain continu borné R à K — 1 dimensions, auquel nous supposons assignée une métrique riemannienne. Ce continu peut être pris comme champ d'intégration : nous appellerons $d\tau$ un élément d'étendue, c'est-à-dire la mesure d'un domaine infiniment petit, relativement à ce continu. Moyennant ces

conventions, nous attribuons un sens précis au fait que des fonctions

$$Y_1(p), \quad Y_2(p), \quad \ldots, \quad Y_\nu(p), \quad \ldots$$

forment sur R un système orthogonal et normal. Ce système ne sera pas nécessairement *complet* [1], mais sera contenu dans un système complet.

Toutefois il importe pour la suite de s'accorder une latitude : permettre à chaque Y_ν d'être une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions, pourvu que les coefficients de ladite combinaison respectent la normalité. C'est ce qui se présente dans l'analyse de notre section I, où l'on a $K = 3$, où R est la sphère unitaire σ, et où Y_ν est la fonction de Laplace la plus générale d'ordre ν dont le carré a pour intégrale l'unité, fonction qui dépend de 2ν paramètres.

Soit maintenant une classe linéaire de fonctions, dont chaque représentant

$$\begin{aligned}\varphi_u(p) = {} & [c_0 f_0(u) + d_0 g_0(u)] Y_0(p) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [c_\nu f_\nu(u) + d_\nu g_\nu(u)] Y_\nu(p) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{34}$$

dépend du point p et de la variable u, ou encore d'un point P dans un continu à K dimensions. La série (34) est supposée *uniformément convergente* dans R.

Supposons que, u tendant par exemple vers $+\infty$, soient réalisées simultanément les conditions suivantes :

a. Les $f_\nu(u)$ sont également bornées;

b. Les $g_\nu(u)$ croissent indéfiniment;

c. Les rapports $\dfrac{g_{\nu+1}(u)}{g_\nu(u)}$ croissent indéfiniment.

Pour $u = +\infty$, nous dirons que la fonction $\varphi_u(p)$ présente un PÔLE s'il n'y a qu'un nombre fini de d_ν non nuls. Sinon, la singularité sera dite ESSENTIELLE.

Nous désignerons par μ_u le maximum de $|\varphi_u(p)|$ sur R pour la valeur u.

---

[1] *Voir* au n° 37 une application des théorèmes généraux de cette section à un exemple dans lequel le système des Y_ν n'est pas complet.

A la faveur de ces définitions, nous allons maintenant établir des théorèmes importants. Ces théorèmes se présentent comme la généralisation presque immédiate de ceux que nous avons établis aux nos 13 et 14 sur les fonctions harmoniques. Ils ont pour objet de donner des critères permettant de discerner les singularités polaires.

18. Théorème A. — *Pour que $u = +\infty$ corresponde à un pôle de la fonction $\varphi_u(p)$, il faut et il suffit que les fonctions $\varphi_u(p)$ du point p, dépendant du paramètre u, possèdent l'égale continuité relative, c'est-à-dire que les fonctions*

$$\frac{\varphi_u(p)}{\mu_u}$$

soient également continues.

La condition est nécessaire. En effet, supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de d_ν non nuls. Soit $\nu = n$ l'entier maximum (positif) pour lequel d_ν n'est pas nul. Alors, en vertu des hypothèses a, b, c, la fonction $\varphi_u(p)$ est un infiniment grand équivalent à

$$d_n g_n(u) \, Y_n(p).$$

Donc, les fonctions

$$\frac{\varphi_u(p)}{d_n g_n(u)}$$

tendent vers $Y_n(p)$. La convergence vers cette limite est d'ailleurs uniforme dans R : en effet, cela serait immédiat si le développement (34) était réduit à ses $n+1$ premiers termes et persiste du fait que l'ensemble des termes suivants représente dans R une fonction continue du point p, admettant une borne supérieure de son module indépendante de u, lorsqu'on fait tendre u vers $+\infty$. Donc les fonctions

$$\frac{\varphi_u(p)}{d_n g_n(u)}$$

sont également continues, et par suite, d'après notre définition du n° 12, il y a bien égale continuité relative des $\varphi_u(p)$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Nous aurons à faire usage de l'identité

$$(35) \qquad I_u = \int_R \varphi_u^2(p) \, d\tau_p = \sum_{\nu=0}^{+\infty} [c_\nu f_\nu(u) + d_\nu g_\nu(u)]^2 \leqq \mu^2(u) \int_R d\tau.$$

Notons d'abord que l'égale continuité des fonctions

$$\frac{\varphi_u(p)}{\mu_u}$$

exclut toute suite $\{u_i\}$ tendant vers $+\infty$ et faisant tendre vers zéro

$$\frac{I_{u_i}}{\mu_{u_i}^2}.$$

Pour le prouver, il suffit d'établir que les fonctions

$$\frac{\varphi_u^2}{\mu_u^2}$$

comprises entre o et 1 sur R, atteignant la valeur 1 en un point p_i au moins, pour chaque u_i, ne seraient pas également continues si leur moyenne sur R tendait vers zéro. Or, en un point ϖ de R où s'accumulent les points p_i (compris le cas où ces points finissent par se confondre avec ϖ), l'oscillation de la fonction de rang i tend vers 1 pour i infini, ce qui met obstacle à l'égale continuité.

De l'impossibilité de suites possédant les propriétés indiquées, découle ce fait important :

L'ensemble, essentiellement fermé, des valeurs limites de

$$\frac{I_u}{\mu_u^2}$$

a une borne inférieure positive.

Cet énoncé nous montre que l'égale continuité des

$$\frac{\varphi_u(p)}{\mu_u}$$

entraîne celle des

$$\frac{\varphi_u(p)}{\sqrt{I_u}}.$$

Il existe donc une suite $\{u_i\}$, tendant vers $+\infty$ et telle que les

$$\frac{\varphi_{u_i}(p)}{\sqrt{I_{u_i}}}$$

convergent uniformément, sur R, vers une fonction continue $\varphi(p)$, telle que l'intégrale, étendue à R, de son carré soit l'unité, comme pour les fonctions de la suite précédente. Si le système des $Y_\nu(p)$ n'est pas complet, $\varphi(p)$ sera orthogonale à chacune des fonctions de fermeture.

Dès lors, d'après le théorème de Fischer-Riesz, le développement attaché d'après ce système à $\varphi(p)$ converge en moyenne vers cette fonction; la série infinie des carrés de ses coefficients est l'intégrale dans R du carré de la fonction.

Dans ces conditions, supposons qu'il y ait une infinité de d_ν non nuls. Alors, dans le développement de

$$\frac{\varphi_{u_i}(p)}{\sqrt{I_{u_i}}}$$

suivant les Y_ν, en vertu des hypothèses a et c, tous les coefficients tendent vers zéro avec u_i^{-1}. Il en résulterait donc que le développement attaché à $\varphi(p)$ est nul, car il a pour coefficients (dans les conditions actuelles de convergence uniforme) les limites des coefficients du développement précédent. Par suite, contrairement à ce qui précède, nous aurions

$$\int_R \varphi^2(p)\, d\tau = 0.$$

Donc, si l'égale continuité relative des $\varphi_u(p)$ a bien lieu, il s'ensuit qu'il n'y a qu'un nombre fini de d_ν non nuls. Et, pour $u = +\infty$, l'on a bien un pôle. C. Q. F. D.

18 *bis*. Tout ce que nous venons de dire est encore applicable, si les conditions b, c au lieu d'être vérifiées à partir de la valeur $\nu = 0$ le sont seulement à partir d'un certain rang n, les fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ étant simplement bornées.

On a encore dans ces conditions la possibilité de définir les pôles et de les distinguer au moyen du théorème A.

19. Nous allons maintenant envisager un cas particulier, important pour la suite : c'est celui où la fonction $Y_0(p)$, supposée unique, conserve un signe constant et ne s'annule pas, par exemple satisfait sur R à l'inégalité au sens strict

$$Y_0(p) > 0,$$

Cela s'est présenté pour les fonctions harmoniques, qui nous amenaient à envisager les fonctions Y_ν de Laplace : on a alors Y_0 constant. Au bénéfice de l'hypothèse $Y_0 > \beta > 0$, nous allons établir un nouveau critère permettant de distinguer les pôles.

THÉORÈME B. — *Si $Y_0(p)$, supposée unique, reste supérieure à un nombre positif fixe β, pour que $u = +\infty$ corresponde à un pôle de $\varphi_u(p)$, il faut et il suffit que les valeurs d'un signe déterminé, acquises par $\varphi_u(p)$, admettent une limitation proportionnelle à $|g_n(u)|$ (n entier positif).*

D'après les définitions posées au n° 17, la condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante, car en vertu de

$$\int_R Y_0(p)\,\varphi_u(p)\,d\tau_p = c_0 f_0(u) + d_0\,g_0(u) \tag{36}$$

l'existence d'une limitation

$$K\,|g_n(u)|$$

pour les éléments d'un signe déterminé du premier membre de (36) entraîne une limitation analogue pour la contribution totale des éléments de l'autre signe. Ce genre de limitation subsiste, si l'on barre $Y_0(p)$, à cause de l'existence de la borne inférieure positive β, de $Y_0(p)$. Donc le même genre de limitation continue à s'appliquer pour toutes les intégrales

$$\int_R Y_\nu(p)\,\varphi_u(p)\,d\tau_p,$$

c'est-à-dire pour tous les coefficients du développement (34). Et par suite, en vertu des définitions, on a

$$d_{n+1} = d_{n+2} = \ldots = 0. \tag{37}$$

La singularité de $\varphi_u(p)$ pour $u = +\infty$ est donc bien un pôle.

C. Q. F. D.

20. Très important dans diverses applications, *le théorème* B *entraîne le principe des singularités positives de Picard.*

En effet, supposons que pour

$$u > u_0$$

on ait

$$\varphi_u(p) > 0.$$

Alors, les valeurs négatives (absentes) admettent (et pour cause) une limitation en $|g_0(u)|$. Donc, les relations (37) deviennent ici

$$(38) \qquad d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = 0.$$

Donc, *si la fonction $\varphi_u(p)$ est positive à partir d'une certaine valeur de u, sa singularité pour $u = +\infty$ est un pôle du premier ordre.*

On pourrait donner un énoncé moins restrictif et supposer seulement que les valeurs négatives sont telles que leur rapport à $g_0(u)$ tend vers zéro avec l'inverse de u.

Faisons encore une remarque importante :

Le fait que $\varphi_u(p)$ reste positive à partir d'une certaine valeur de u implique pour la fonction $|g_0(u)|$ le fait de tendre vers $+\infty$, et non pas seulement d'avoir pour limite supérieure $+\infty$.

On voit que cette théorie englobe celle qui a été exposée dans la section I de ce Mémoire. Nous allons maintenant en donner de nouvelles applications.

III. — Étude d'une solution de l'équation $\Delta U = \lambda(r)U$ au voisinage d'un point singulier O ou à l'infini.

21. En coordonnées sphériques de centre O, l'équation proposée s'écrira

$$(39) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\delta_2 U = \lambda(r)U.$$

Posons comme précédemment

$$(40) \qquad r = e^{-\rho}, \qquad U = e^{\frac{\rho}{2}}V.$$

Nous aurons

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \frac{V}{4}\right)e^{\frac{\rho}{2}}$$

et par suite, l'équation (39) deviendra

$$(41)\qquad \delta_2 V - V\left[\frac{1}{4} + \lambda(e^{-\rho})\, e^{-2\rho}\right] + \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} = 0.$$

Nous poserons

$$(42)\qquad \lambda(e^{-\rho})\, e^{-2\rho} = \mu(\rho),$$

où $\mu(\rho)$ est une fonction connue. Nous aurons donc l'équation

$$(43)\qquad \delta^2 V - \frac{V}{4} = \mu(\rho) V - \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}$$

et par suite, l'équation intégro-différentielle du problème sera

$$(44)\qquad 2\pi V_p(\rho) = \int\int_\sigma \left[\frac{\partial^2 V_m}{\partial\rho^2} - \mu(\rho) V_m\right] g(m, p)\, d\sigma_m,$$

σ désignant encore la surface de la sphère unitaire dans sa totalité, et $g(m, p)$ le même noyau que dans (13).

Pour résoudre (44), nous poserons

$$(45)\qquad V_m(\rho) = f(\rho)\, \varphi(m).$$

Il nous viendra

$$(46)\qquad 2\pi f(\rho)\, \varphi(p) = [f''(\rho) - \mu(\rho) f(\rho)] \int\int_\sigma \varphi(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m,$$

nous aurons les solutions de la forme (45) en posant

$$(47)\qquad 2\pi\, \varphi(p) = \alpha^2 \int\int_\sigma \varphi(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m$$

et

$$(48)\qquad f''(\rho) - [\alpha^2 + \mu(\rho)] f(\rho) = 0.$$

Les fonctions fondamentales $\varphi(p)$ sont des fonctions $Y_\nu(p)$, comme dans le cas précédent, attachées aux valeurs caractéristiques

$$(49)\qquad \alpha_\nu = \pm\left(\nu + \frac{1}{2}\right),$$

ν désignant un entier.

Il nous reste à étudier les intégrales des équations (48) lorsque ρ tend vers $+\infty$. Le cas le plus immédiat est celui où la fonction $\mu(\rho)$

définie par l'équation (42) tend vers une limite bien déterminée μ_0 : nous allons montrer que dans le développement d'une solution $V_p(\rho)$ de l'équation (44) suivant les fonctions fondamentales $Y_\nu(p)$, soit

$$(50) \qquad V_p(\rho) = c_0 f_0(\rho) + d_0 g_0(\rho) + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [c_\nu f_\nu(\rho) + d_\nu g_\nu(\rho)] Y_\nu(p),$$

les intégrales générales

$$c_\nu f_\nu(\rho) + d_\nu g_\nu(\rho)$$

des équations (48) mettent en jeu des fonctions $f_\nu(\rho)$ et $g_\nu(\rho)$ satisfaisant aux conditions a, b, c déjà formulées au nº 17, tout au moins, *à partir d'une certaine valeur de* ν.

En effet, reprenons les équations différentielles (48). Il est facile de préciser l'allure de leurs intégrales à l'infini, sachant que la fonction $\mu(\rho)$ tend vers une limite μ_0. L'une de ces équations peut s'écrire

$$(51) \qquad f''(\rho) - \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu(\rho)\right] f(\rho) = 0.$$

Donc le coefficient de $f(\rho)$ tend, pour ρ positif et infiniment grand, vers

$$\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu_0.$$

Il s'ensuit qu'*à partir d'une certaine valeur de* ν, ce coefficient sera positif. Il existe alors, pour l'équation (51), d'une part, des intégrales $f_\nu(\rho)$ tendant vers zéro, et cela de manière que le rapport

$$\frac{f'_\nu(\rho)}{f_\nu(\rho)}$$

tende vers

$$-\sqrt{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu_0}$$

et, d'autre part, des intégrales $g_\nu(\rho)$ croissant indéfiniment, et cela de manière que le rapport

$$\frac{g'_\nu(\rho)}{g_\nu(\rho)}$$

tende vers

Dans ces énoncés (¹), nous avons supposé essentiellement que l'on a

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+\mu_0>0.$$

Cela a lieu pour toutes les valeurs de l'entier ν si μ_0 dépasse $-\frac{1}{4}$.

22. L'analyse qui précède nous amène à des conclusions très importantes. Étudions d'abord le cas où

$$(52)\qquad \mu_0=\lim_{r\to 0} r^2\lambda(r)>-\frac{1}{4},$$

alors, les conditions a, b, c sont satisfaites pour toute valeur de l'indice ν, à partir de $\nu=0$. En plus la fonction Y_0 se réduit à une constante.

Dans ces conditions, on peut appliquer au cas actuel, non seulement le théorème A, mais encore le théorème B et le principe des singularités positives de Picard.

Notamment, lorsque λ se réduit à une constante, on obtient la classe des *fonctions méta-harmoniques*, suivant une dénomination que j'ai proposée (²) et qui a été adoptée par divers géomètres.

23. Considérons maintenant le cas où l'on a

$$(53)\qquad \mu_0=\lim_{r\to 0} r^2\lambda(r)<-\frac{1}{4}.$$

Alors pour $\nu=0$, et s'il y a lieu, pour

$$\nu=\pm 1,\qquad \nu=\pm 2,\qquad \ldots,\qquad \nu=\pm h,$$

où h désigne le plus grand entier tel que

$$\left(h+\frac{1}{2}\right)^2+\mu_0$$

soit négatif, les solutions des équations (50) sont oscillantes et essentiellement bornées. On peut maintenir ici la distinction des pôles. Le

(¹) Pour leur justification, *voir* BOREL, *Leçons sur les Séries divergentes*, 2ᵉ édition, p. 46.

(²) *Voir* l'année 1927 du *Bulletin de la Société mathématique*.

théorème A est encore applicable. Mais nous ne sommes plus dans les conditions qui nous ont permis d'établir le théorème B et de justifier le principe de Picard.

En fait, il est facile de parachever cette étude dans le cas où $r^2\lambda(r)$ a une valeur constante inférieure à $-\frac{1}{4}$. Les solutions des équations (50) sont alors des fonctions trigonométriques, et l'on voit facilement qu'une solution de l'équation initiale (39) ne peut conserver un signe constant autour du point O, quelle que soit la singularité qu'elle offre en ce point.

24. Les mêmes considérations s'appliquent à l'étude, dans le domaine du point à l'infini, des solutions de l'équation (39), régulières à l'extérieur d'une certaine sphère. Tout à l'heure, le rôle du paramètre générique u de la section II était joué par ρ. Il le sera donc dorénavant par $-\rho$, ou si l'on préfère, nous allons faire tendre ici ρ vers $-\infty$, ou r vers $+\infty$.

Étudions le cas où $r^2\lambda(r)$ possède une limite finie μ_0 quand r tend vers $+\infty$. Si μ_0 surpasse $-\frac{1}{4}$, non seulement nous pourrons faire la distinction des singularités polaires au moyen du théorème A, mais nous aurons la possibilité d'appliquer aussi le théorème B et le principe de Picard. Mais ces deux derniers résultats ne valent plus pour le cas où μ_0 est inférieur à $-\frac{1}{4}$.

24 *bis*. Le champ que nous atteignons ainsi n'englobe pas les fonctions méta-harmoniques, pour lesquelles l'équation différentielle (51) devient

$$f''(\rho)-\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+\lambda e^{-2\rho}\right]f(\rho)=0.$$

Si λ est négatif, toutes les solutions de cette équation sont oscillantes. Nous ne sommes donc pas dans les conditions où se trouvent vérifiées les conditions b et c. Elles ne le sont pas davantage lorsque λ est positif, car pour ρ infiniment grand et négatif, les intégrales de ces équations ont la même rapidité de croissance (surexponentielle) quel que soit ν. Cette fusion de croissances [1] s'oppose à ce que l'on ait la condition c et l'on ne voit plus ici se manifester la distinction entre pôles et points singuliers essentiels.

IV. — Sur les solutions de $\Delta U = U f(z)$ régulières dans un cylindre indéfini, parallèle à Oz, au delà d'une section droite s'annulant sur le cylindre.

25. L'ordre d'idées auquel nous allons maintenant appliquer les notions et propositions générales de la section II s'apparente étroitement aux questions étudiées dans ma Thèse de Doctorat, *sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre* [2].

Aux n^{os} 17 et suivants de ce travail, j'ai étudié, en appelant A une constante, les solutions de $\Delta U = AU$ qui sont régulières au delà d'une certaine section droite, par exemple pour $z > z_0$ et qui sont soumises sur la surface du cylindre à une condition supplémentaire, consistant dans l'annulation de la fonction U elle-même, ou bien dans celle de sa dérivée normale. Le processus dont je me suis alors servi coïncide avec celui qui est mis en œuvre dans le présent Mémoire, si ce n'est que, dans ce premier travail, mon attention ne s'était portée explicitement ni sur l'équation intégro-différentielle du problème, ni sur la distinction entre les pôles et les singularités essentielles.

26. Considérons un cylindre (dans l'espace euclidien à trois

---

(1) La séparation ne s'exerce ici qu'entre les intégrales croissant indéfiniment et les intégrales tendant vers zéro. La scission ainsi produite a, dans certains cas, un rôle important. Notamment, cette propriété est la source de ce théorème d'unicité de détermination d'une fonction méta-harmonique dans un domaine infini : Soit l'équation $\Delta U = \omega^2 U$. Si une solution de cette équation, régulière dans un domaine infini, s'annule sur sa frontière et admet en module une limitation de la forme $K \dfrac{\operatorname{sh} \omega r}{r}$ en un point situé à la distance r d'un point fixe, elle est identiquement nulle [(*Voir* Bouligand, *Sur les fonctions méta-harmoniques* (*Bull. de la Soc. math.*, 1927)].

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 42, 1914, p. 168 et suiv.

dimensions) ayant ses génératrices parallèles à l'axe des z. Et proposons-nous d'étudier une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + U f(z), \tag{54}$$

régulière dans ce cylindre aux points de cote z positive et s'annulant sur la surface de ce cylindre.

Les points situés à l'intérieur du cylindre seront génériquement désignés par des grandes lettres, la petite lettre correspondante représentant leur projection sur le plan de la section droite $z = 0$. Désignons par $g(m, p)$ la fonction de Green harmonique de la section droite. En convenant de regarder une fonction d'un point P comme une fonction de sa projection p et de sa cote z, assimilée à une variable supplémentaire, nous aurons ici pour équation intégro-différentielle du problème

$$2\pi U(p, z) = \int\int_\Sigma \left[\frac{\partial^2 U(m, z)}{\partial z^2} - f(z) U(m, z) \right] g(m, p) \, d\sigma_m, \tag{55}$$

où Σ désigne la section droite $z = 0$. Pour résoudre cette équation, cherchons les solutions de la forme

$$U(p, z) = \varphi(p) \, v(z). \tag{56}$$

On s'aperçoit aisément que les fonctions $\varphi(p)$ sont des fonctions fondamentales de la section droite, c'est-à-dire des solutions de l'une des équations intégrales homogènes

$$2\pi \varphi_i(p) = \alpha_i^2 \int\int_\Sigma \varphi_i(m) \, g(m, p) \, d\sigma_m, \tag{57}$$

les fonctions $v_i(z)$ correspondantes étant déterminées par les équations différentielles

$$v_i''(z) - v_i(z) [\alpha_i^2 + f(z)] = 0 \tag{58}$$

auxquelles les lois de répartition des α_i confèrent des propriétés analogues à celles que nous avons rencontrées dans la section précédente à propos des équations (51).

En effet, envisageons la fonctionnelle quadratique

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_\varphi &= \int\!\!\int_\Sigma \int\!\!\int_\Sigma \varphi(m)\,\varphi(p)\,g(m,p)\,d\sigma_m\,d\sigma_p \\
&= -2\pi \int\!\!\int_\Sigma \varphi\,\Delta\varphi\,d\sigma = 2\pi \int\!\!\int_\Sigma \overline{\mathrm{grad}}^2\,\varphi\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

Du fait que cette fonctionnelle est positive, il découle que tous nos α_i^2 sont des constantes réelles et positives.

Supposons que la fonction $f(z)$ tende vers une limite finie lorsque z tend vers $+\infty$. Les conditions a, b, c du n° 16 se trouvent dès lors vérifiées à partir d'un certain rang i. Donc, on pourra définir les pôles et les distinguer au moyen du théorème A. Si de plus la limite λ en question est telle que l'on ait

$$\lambda + \alpha_0^2 > 0,$$

le théorème B et le principe des singularités positives de Picard s'appliqueront. Si l'on a

$$\lambda + \alpha_0^2 < 0,$$

l'équation n'admettra pas de solution s'annulant sur le cylindre et restant positive au delà d'une certaine section droite.

27. Toutefois, en supposant réalisée l'hypothèse

$$\lambda + \alpha_0^2 > 0,$$

la démonstration du théorème B nécessite un raisonnement complémentaire, du fait suivant : si nous considérons la fonction fondamentale $\varphi_0(p)$ (unique et essentiellement non négative) qui correspond à la constante caractéristique α_0^2, la borne inférieure de cette fonction dans la section droite devient nulle. Et par suite, il faut reprendre la démonstration sous une nouvelle forme : à cet effet, il suffit simplement d'observer que *les rapports des diverses fonctions $\varphi_\nu(p)$ à la première d'entre elles $\varphi_0(p)$, pris séparément, sont des fonctions bornées dans toute l'étendue de la section droite Σ.*

C'est un fait dont nous allons établir l'exactitude pour une section Σ simplement connexe, en profitant de ce que les hypothèses actuelles (Σ à deux dimensions) nous permettent de recourir à la représentation conforme.

Nous pouvons écrire

$$\frac{\varphi_\nu(p)}{\varphi_0(p)} = \frac{\alpha_\nu^2 \displaystyle\int\int_\Sigma \varphi_\nu(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m}{\alpha_0^2 \displaystyle\int\int_\Sigma \varphi_0(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m}.$$

Appelons σ une portion de l'aire Σ où $\varphi_0(m)$ reste supérieur à un nombre $h > 0$.

Nous aurons

$$\left|\frac{\varphi_\nu(p)}{\varphi_0(p)}\right| < \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_0^2} \frac{\left|\displaystyle\int\int_\Sigma \varphi_\nu(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m\right|}{h \displaystyle\int\int_\sigma g(m, p)\, d\sigma_m}.$$

On est ainsi ramené à prouver que le rapport

$$\frac{\displaystyle\int\int_\Sigma g(m, p)\, d\sigma_m}{\displaystyle\int\int_\sigma g(m, p)\, d\sigma_m}$$

demeure borné. Il suffit évidemment d'établir cette propriété lorsque p se maintient dans un certain voisinage du contour délimitant Σ.

L'aire Σ a été supposée simplement connexe. Alors, en considérant sa représentation conforme sur un cercle, il nous suffit de montrer qu'en appelant S l'aire de ce cercle et s une aire strictement intérieure (transformée de σ) le rapport

$$\frac{\displaystyle\int\int_S \log\left(\frac{mp'}{mp}\,\frac{op}{R}\right) \varpi(m)\, ds_m}{\displaystyle\int\int_s \log\left(\frac{mp'}{mp}\,\frac{op}{R}\right) \varpi(m)\, ds_m},$$

où $\varpi(m)$ est une fonction positive du point m (jacobien de la transformation) demeure borné. Pour la démonstration, on peut d'ailleurs faire en sorte de choisir σ de manière que l'aire s en laquelle σ se transforme soit un cercle s concentrique à S. Dans la couronne γ définie par

$$\frac{R + r}{2} \leqq op \leqq R,$$

et pour

$$om \leqq r,$$

nous aurons dès lors

$$K_1 \log \frac{op}{R} \leqq \log\left(\frac{mp'}{mp}\frac{op}{R}\right) \leqq K_2 \log \frac{op}{R}$$

en appelant K_1 et K_2 deux constantes (qu'il serait facile d'évaluer).

Il s'ensuivra que, pour p choisi dans la couronne γ, le dénominateur de notre dernier rapport sera une quantité de la forme

$$\theta(p) \log \frac{op}{R},$$

les fonctions positives $\theta(p)$ et $\frac{1}{\theta(p)}$ restant bornées. Quant au numérateur, il admet une limite supérieure proportionnelle à

$$\int\int_S \log\left(\frac{mp'}{mp}\frac{op}{R}\right) ds_m$$

(car ϖ a une intégrale finie), c'est-à-dire à

$$R^2 - \overline{op}^2 < 2R(R - op).$$

Il s'ensuit qu'au voisinage de la frontière, le rapport proposé reste borné, puisque

$$\frac{R - op}{\log \frac{op}{R}}$$

possède lui-même cette propriété. Le résultat est donc établi.

28. Au lieu d'étudier les solutions de l'équation

$$\Delta U = U f(z) \tag{59}$$

qui s'annulent sur le cylindre et qui sont régulières au delà d'une section droite, on pourrait se poser d'autres problèmes, en supposant par exemple l'annulation de la dérivée normale sur le cylindre. Dans le cas où $f(z)$ tend vers une limite finie, on serait encore amené à définir des pôles et à les distinguer au moyen du théorème A.

Par contre, dans ce dernier problème, aussi bien que dans celui que nous avons étudié au n° 26, si $f(z)$ croît indéfiniment, nous observons, dans des conditions très générales, la fusion des croissances des fonctions $v_i(z)$ satisfaisant aux équations (58). Il ne se présentera plus de singularités polaires.

V. — Étude, au voisinage du sommet d'un cône, des fonctions méta-harmoniques dans ce cône, nulles sur sa surface.

29. Pour traiter ce problème, il nous suffit de reprendre ici l'analyse et les notations que nous avons utilisées dans les sections I et III.

Partant de l'équation méta-harmonique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\delta_2 U = \lambda U \tag{60}$$

et posant

$$r = e^{-\rho}, \qquad U = e^{\frac{\rho}{2}} V,$$

nous aurons une nouvelle équation aux dérivées partielles

$$\delta_2 V - V\left[\frac{1}{4} + \lambda e^{-2\rho}\right] + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 0.$$

En appelant maintenant $g(m, p)$ la fonction de Green de la section droite sphérique σ du cône, pour l'équation

$$\delta_2 V - \frac{V}{4} = 0,$$

nous aurons l'équation intégro-différentielle

$$2\pi V_p(\rho) = \int\int_\sigma \left(\frac{\partial^2 V_m}{\partial \rho^2} - \lambda e^{-2\rho} V_m\right) g(m, p)\, d\sigma_m$$

qui se laisse résoudre par combinaison linéaire de solutions de la forme

$$V_m(\rho) = f(\rho)\,\varphi(m),$$

où les $\varphi(m)$ sont les fonctions fondamentales de la section droite sphérique σ définies par les équations intégrales homogènes

$$2\pi\,\varphi(p) = \alpha^2 \int\int_\sigma \varphi(m)\, g(m, p)\, d\sigma_m.$$

Tous les α_i^2 sont encore réels et positifs, à cause de la propriété de la fonctionnelle quadratique

$$\int\int_\sigma \int\int_\sigma \varphi(m)\,\varphi(p)\,g(m,p)\,d\sigma_m\,d\sigma_p$$

d'être définie positive. A chaque α_i, correspond une équation différentielle

$$f_i''(\rho) - [\alpha_i^2 + \lambda\, e^{-2\rho}]\, f_i(\rho) = 0$$

et les intégrales de ces équations qui augmentent indéfiniment avec ρ ont leurs croissances séparées, de manière que les conditions *a*, *b*, *c* du n° 17 soient satisfaites (¹).

Nous aurons donc à distinguer des singularités polaires, et nous pourrons appliquer à leur discrimination les théorèmes A et B. Toutefois, pour ce dernier, la démonstration appellera une précaution supplémentaire analogue à celle qui a fait l'objet du n° 27. A des modalités d'écriture près, le raisonnement suivra la même marche. Comme conséquence du théorème B, on pourra donc aussi appliquer le principe des singularités positives de Picard.

30. A la suite de la question que nous venons d'étudier, le moment est favorable pour dire quelques mots de la fonction de Green du cône.

Il importe d'abord d'observer que si l'on veut avoir une théorie d'un caractère isomorphe à celle de la fonction de Green du cylindre, ce n'est pas sur l'équation méta-harmonique (²)

(61) $$\Delta U = \lambda\, U$$

(¹) Plus généralement, il en serait ainsi, si au lieu de supposer λ constant, on en faisait une fonction de r telle que

$$r^2 \lambda(r)$$

tende vers une limite surpassant $-\frac{1}{4}$ lorsque r tend vers zéro.

(²) Si l'on cherchait la fonction de Green du cône pour l'équation méta-harmonique, on aurait un problème isomorphe à une question se présentant, pour le cylindre, sous la forme suivante : trouver la fonction de Green d'un cylindre indéfinie pour l'équation

$$\Delta U = U f(z).$$

Une telle fonction de Green ne peut plus se représenter sous la forme d'une qu'il convient de porter son attention, mais bien sur l'équation

$$\Delta U - \frac{K}{r^2} U = 0, \tag{62}$$

K désignant une constante. Moyennant quoi il serait facile, grâce au changement de variables défini par les équations (2), d'obtenir, comme dans ma Thèse de Doctorat, une représentation de la fonction de Green au moyen de l'tntégrale de Fourier. Soient les deux points M et P à l'intérieur du cône : en posant

$$OP = r \quad \text{et} \quad OM = s$$

nous aurions pour fonction de Green de l'équation (62)

$$G_k(M, P) = \frac{1}{\pi\sqrt{rs}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p; \lambda^2 + K) \cos\left(\lambda \log \frac{r}{s}\right) d\lambda, \tag{63}$$

où le noyau g est la fonction de Green de l'équation beltramienne

$$\delta_2 V - \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 + K\right) V = 0. \tag{64}$$

La fonction $G_k(M, P)$ est une fonction non méromorphe de K comme le montre son développement suivant les fonctions fondamentales. On pourrait donner pour elle des propriétés fonctionnelles, analogues à celles que j'ai indiquées pour la fonction de Green du cylindre, et englobant comme cas particulier les considérations rencontrées au n° 9 du présent travail. Je ne m'y arrêterai pas.

31. Je préfère signaler l'intérêt offert par la transposition à l'équation (42) des résultats du Chapitre V de ma Thèse. Considérons la transformée en V de (62), c'est-à-dire l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \Delta_2 V - \left(\frac{1}{4} + K\right) V = 0. \tag{65}$$

Supposons donné un cône de sommet O par sa section droite sphérique.

---

intégrale de Fourier, mais on peut la développer en série de fonctions fondamentales, en généralisant les méthodes du Chapitre III de ma Thèse, Soit

$$\alpha_1^2, \quad \alpha_2^2, \quad \alpha_3^2, \quad \ldots$$

la suite des constantes caractéristiques correspondantes, provenant de l'équation intégrale homogène dont le noyau est la fonction de Green de l'équation (44), attachée à cette section droite, pour $\lambda^2 + K = 0$. Si l'on a

$$K + \alpha_1^2 > 0, \tag{66}$$

il y aura toujours une solution et une seule du problème suivant :

Trouver une fonction V *définie dans la section droite sphérique et pour* $\rho > 0$; *régulière dans ce domaine, prenant pour* $\rho = 0$ *des valeurs données dans la section droite, et pour* ρ *quelconque des valeurs* $H(s, \rho)$ *sur son contour, la fonction* $H(s, \rho)$ *étant continue et bornée et* V *vérifiant* (65)

De là découle immédiatement ce corollaire :

Considérons un domaine dont la frontière, à l'intérieur d'une sphère ayant pour centre O, *est une surface conique de sommet* O. *Il existe, moyennant l'hypothèse* (66), *une solution et une seule de l'équation* (62), *avec valeurs périphériques données, toutes les fois que, sur la partie conique de la frontière, les valeurs périphériques de* $U\sqrt{r}$ *demeurent continues et bornées.*

Mais ce théorème cesse de valoir dans le cas où la condition (66) n'est plus vérifiée. Il faut alors, dans la discussion, si $-K$ est entre α_p^2 et α_{p+1}^2, écrire $2p$ conditions de possibilité.

Je signale enfin l'ordre d'idées (important pour la formation d'équations intégro-différentielles pour lesquelles on ait d'emblée un fil conducteur) qui consisterait à ramener la résolution du problème de Dirichlet, pour un cylindre ou pour un cône, à l'étude d'une équation intégro-différentielle formée à l'aide de la section droite, plane ou sphérique. En particulier, dans le cas du cône, on pourrait se proposer le problème pour l'équation

$$\Delta U = U f(r)$$

et pour des fonctions ayant, en fonction de r, telle ou telle allure au voisinage du sommet. Mais je me contente d'indiquer cette question.

VI. — Obtention de théorèmes applicables à la totalité d'un domaine. Le principe de Picard sous sa forme intégrale. Ses cas d'exception.

32. Les propositions que nous avons établies dans les sections précédentes sont des théorèmes applicables aux solutions de certaines équations aux dérivées partielles, solutions qui sont supposées régulières dans un domaine, au voisinage d'un point, à distance finie ou à l'infini, de la frontière de ce domaine. Il importe pour la suite de déduire de ces propositions des conséquences applicables à la totalité d'un domaine.

Par exemple, adoptons ainsi les résultats de la section I. Envisageons un domaine Ω de frontière Σ, et supposons, pour simplifier, que pour un tel domaine, le problème de Dirichlet soit résoluble au sens classique. Soit O un point appartenant au domaine Ω, Alors $\Omega - O$ est un nouveau domaine, de frontière $\Sigma + O$. Proposons-nous de déterminer une fonction harmonique dans $\Omega - O$, continue sur Σ et prenant sur celle-ci des valeurs données, et spécifions qu'aux environs de O, la fonction reste positive, ou, plus généralement, que ses valeurs négatives admettent une limite inférieure de la forme $\frac{-K}{r^\alpha}$ Alors, le point O sera un pôle d'ordre α au plus de la solution ; celle-ci dépendra donc d'un nombre fini de constantes arbitraires figurant linéairement. Ce nombre sera l'unité si la fonction reste positive aux environs de O. Si la fonction s'annule sur Σ et est positive dans Ω, elle sera proportionnelle à la fonction de Green de Ω pour le pôle O. *Cette détermination à un facteur constant près est la forme intégrale du principe des singularités positives de Picard,* que j'ai envisagée systématiquement au fascicule XI du *Mémorial* Villat.

33. Une variante se présente lorsqu'on suppose que Ω est le domaine extérieur à un nombre fini de surfaces fermées, bornées et disjointes. On cherche une fonction harmonique dans Ω prenant des valeurs données sur ces surfaces, sachant en outre qu'à l'infini, ou bien cette fonction reste positive en dehors d'une certaine sphère, ou plus généralement, que ses valeurs négatives (par exemple) admettent une limi-

tation de la forme $-Kr^{\alpha-1}$. Le point à l'infini est alors un pôle au plus d'ordre α de la fonction, qui dépend encore d'un nombre fini de constantes arbitraires, réduit à un, si la fonction reste positive à l'infini.

Dans ce dernier cas, si la fonction s'annule sur les surfaces délimitant Ω, elle est encore déterminée à un facteur constant près. Elle est de la forme

$$C[1 - V(P)],$$

où $V(P)$ est le potentiel d'équilibre prenant la valeur 1 sur chacun des conducteurs délimités par nos surfaces et s'éteignant à l'infini.

34. Les résultats que nous avons exposés dans la section V nous permettent de faire l'étude de certains cas-limites du problème étudié au n° 32. On suppose que le point O, au lieu d'appartenir au domaine Ω, appartienne à sa frontière Σ. Choisissons toujours (pour simplifier) Ω et Σ de manière que le problème de Dirichlet soit résoluble au sens classique et cherchons une fonction harmonique dans Ω, qui soit continue sur toute portion de Σ ne contenant pas le point O et s'annule sur une telle portion. Supposons également que la partie de la frontière située dans une certaine sphère de centre O se réduise à une surface conique de sommet O. Supposons enfin qu'au voisinage du point O, la fonction considérée, ou bien soit assujettie à demeurer constamment positive, ou bien que ses valeurs négatives admettent une limitation proportionnelle à une certaine puissance de $\frac{1}{r}$.

Dès lors, le point O sera un pôle pour une telle fonction et par suite, nous pouvons affirmer que son expression sera une combinaison linéaire et homogène d'un nombre fini de solutions particulières. Notamment, si la fonction reste toujours positive aux environs de O, ce point sera pour elle un pôle du premier ordre, et par suite, la fonction sera déterminée à un facteur constant près. Dans le cas particulier où un certain voisinage de O, sur Σ, est plan, la dérivée normale de la fonction de Green au point O, c'est-à-dire

$$\frac{dG}{dn_O}(O, P),$$

est une fonction de P, harmonique dans Ω, constamment positive, et tendant vers zéro lorsque P tend vers un point de Σ distinct de O. De ce qui précède, il suit que, dans les conditions particulières où nous nous sommes placés, cette fonction se trouve déterminée à un facteur constant près.

Reprenons l'hypothèse plus générale d'un point O autour duquel la frontière Σ affecte la forme d'un cône ayant pour sommet ce point. Il peut évidemment arriver qu'aux environs de O, le domaine Ω soit constitué par la réunion d'un ensemble de cônes dont les sections par une sphère de rayon suffisamment petit et de centre O (considérées en tant que domaines ouverts de la surface de cette sphère) sont des ensembles disjoints. Le point O est alors accessible de l'intérieur de Ω d'autant de manières qu'il existe de voisinages (coniques) mutuellement indépendants de ce point. En formulant les conclusions du début de ce numéro, nous avons implicitement supposé que le point O n'était accessible que par un seul voisinage conique. Dans le cas où ce point est accessible par n voisinages coniques, une fonction harmonique et positive dans Ω, s'annulant sur Σ où elle est continue, sauf en O, se présentera comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de n solutions particulières dont chacune ne devient infinie que dans un seul des voisinages coniques, et tend vers zéro dans les autres. Au fond, tout se passe ici comme si l'on considérait le cas limite où n points O_1, O_2, ..., O_n à voisinage conique unique viennent se confondre.

35. On peut se poser d'autres problèmes relatifs à des domaines infinis Δ présentant n branches infinies, coniques ou cylindriques. En partant de l'étude, faite dans la section V, d'une fonction harmonique dans une branche conique indéfinie au delà d'une sphère ayant son centre au sommet du cône, nous aboutirons à ce résultat :

Soit un domaine Δ dont la frontière Σ à l'extérieur d'une certaine sphère, est formée par n surfaces coniques délimitant autant de branches infinies. Les fonctions, harmoniques dans Δ, nulles sur Σ, et telles que leurs valeurs négatives demeurent supérieures à une quantité de la forme $-\mathrm{K}r^{\alpha}$ *sont des combinaisons linéaires et homogènes d'un nombre fini de solutions particulières. Notamment, celles qui sont partout positives sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients positifs de n fonctions pré-*

sentant les mêmes caractères et dont chacune tend vers zéro dans toutes les branches à l'exception d'une seule.

D'après l'analyse qui a été développée dans la section IV, ce théorème subsiste si quelques-unes de nos branches infinies coniques deviennent cylindriques.

Il est encore vrai si, passant du cas des fonctions harmoniques à celui des fonctions méta-harmoniques, on suppose que toutes les branches infinies deviennent cylindriques, et que le coefficient λ de l'équation

$$\Delta U = \lambda U$$

satisfasse aux inégalités

$$\lambda + \alpha_0'^2 > 0, \qquad \lambda + \alpha_0''^2 > 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda + \alpha_0^{(n)^2} > 0,$$

en appelant $\alpha_0'^2$, $\alpha_0''^2$, ..., $\alpha_0^{(n)^2}$ les premières constantes caractéristiques attachées respectivement aux diverses branches. Dans ce cas, le principe des singularités positives de Picard s'applique sous cette forme : *toute solution de* (1), *régulière et positive dans le domaine* Δ, *nulle sur sa frontière* Σ, *est une combinaison linéaire et homogène, à coefficients positifs, de n solutions particulières.* D'autre part les solutions régulières dans Δ, nulles sur Σ, dont les valeurs négatives surpassent une quantité de la forme

$$-Ke^{\omega r},$$

sont des combinaisons linéaires et homogènes de solutions, en nombre fini, présentant les mêmes caractères.

36. Dans ces énoncés, aussi bien que dans ceux de la section V, il est d'ailleurs sous-entendu que le cylindre est à section droite bornée. Considérons un cylindre dont la section droite serait une bande plane indéfinie comprise entre deux droites parallèles, ou si l'on préfère, considérons le domaine Δ dont la frontière Σ serait constituée par deux plans parallèles. Nous pouvons toujours supposer l'unité de longueur et les axes choisis de telle manière que ces plans aient respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad x = \pi.$$

Cherchons les fonctions harmoniques dans le domaine Δ et s'annulant sur chacun de ces plans. Une telle fonction peut se prolonger dans tout l'espace : elle donne lieu de ce fait à une fonction harmonique entière, impaire en x, périodique en x et de période 2π; cette fonction admet donc un développement de la forme

$$(67) \qquad \sin x\, U_1(y, z) + \sin 2x\, U_2(y, z) + \ldots + \sin nx\, U_n(y, z) + \ldots = U(x, y, z).$$

où la fonction $U_n(y, z)$, qui se déduit de $U(x, y, z)$ par

$$(68) \qquad U_n(y, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(x, y, z) \sin nx\, dx$$

satisfait à l'équation méta-harmonique à deux dimensions

$$(69) \qquad \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} = n^2 U_n,$$

Proposons-nous par exemple de chercher les fonctions $U(x, y, z)$ de la forme (67) qui demeurent positives entre nos deux plans. La fonction

$$U_1(y, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(x, y, z) \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} U \sin x\, dx$$

sera donc positive. Elle devra vérifier l'équation

$$(70) \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = U_1.$$

D'ailleurs toute fonction

$$U_1(y, z) \sin x$$

est une solution. Or, pour l'équation (50), il existe une infinité de solutions positives, régulières dans tout le plan des yz, par exemple les fonctions représentées par l'intégrale de Stieltjes

$$U_1(y, z) = \int_0^{2\pi} e^{y\cos\alpha + z\sin\alpha}\, df(\alpha),$$

où $f(\alpha)$ est croissante.

Au fond, dans cet exemple, l'étude à l'infini des diverses fonctions U_n n'introduirait pas la distinction entre pôles et points singuliers essentiels, que la section II nous a révélée comme la source du principe des singularités positives de Picard (*voir* n° 24 *bis*), L'exemple pourrait être varié de différentes manières. On pourrait prendre comme section droite du cylindre, non plus une bande indéfinie, mais une demi-bande

$$0 \leqq x \leqq \pi, \qquad 0 < y.$$

Les $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ seraient encore des solutions d'équations (69), lesquelles seraient assujetties à s'annuler avec y. Pour un tel domaine Δ, on aurait des fonctions harmoniques positives, nulles sur la frontière de la forme

$$\sin x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(y \cos\alpha)\, e^{z \sin\alpha}\, df(\alpha).$$

On pourrait envisager aussi le domaine

$$0 \leqq x \leqq \pi, \qquad 0 < y, \qquad 0 < z.$$

Les fonctions harmoniques suivantes

$$\sin x \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(y \cos\alpha)\operatorname{sh}(z \sin\alpha)\, df(\alpha)$$

seraient positives dans ce domaine, nulles sur sa frontière.

37. Il est intéressant de rechercher, en passant, si dans ce qui précède, nous avons bien obtenu toutes les fonctions positives. Posons

$$(71) \qquad y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta.$$

Considérons l'expression

$$\int_0^{2\pi} U_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, d\theta\,;$$

elle représente l'intégrale d'une solution U_n de (69) étendue à la circonférence de centre O et de rayon r. La fonction de Green de l'équation (69) pour cette circonférence et pour le pôle O est une fonction de la seule distance à O, donc sa dérivée normale est constante sur le cercle et par suite, on a :

$$(72) \qquad \int_0^{2\pi} U_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, d\theta = U_n(0,\ 0)\, \varphi_n(r),$$

où $\varphi_n(r)$ est une fonction indépendante de la solution U_n de (69) actuellement considérée, donc proportionnelle à la solution, régulière dans tout le plan, qui ne dépend que de la distance au point O, à savoir la solution holomorphe de

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - n^2\varphi = 0, \tag{73}$$

soit

$$J_0(nir),$$

fonction qui, pour r infini, est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{e^{nr}}{\sqrt{r}}.$$

Cela posé, soit $U(x, y, z)$ une fonction harmonique entière définie par un développement (67), dont les coefficients satisfont aux équations (69). Si $U(x, y, z)$ est constamment positive, il en sera de même de

$$\int_0^{2\pi} U(x, r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta,$$

fonction qui admet un développement de la forme

$$a_1 \sin x\, J_0(ir) + a_2 \sin 2x\, J_0(2ir) + \ldots + a_n \sin nx\, J_0(nir) + \ldots, \tag{74}$$

où les coefficients des termes en $\sin nx$ sont des fonctions à croissances séparées. Nous sommes ici dans les conditions d'application du théorème B et par suite, du principe de Picard. Il faut donc que l'on ait

$$a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 0.$$

Donc, si la fonction U est positive, son développement (67) ne contiendra que le terme en $\sin x$. Ce résultat s'applique indifféremment à nos trois domaines

$$0 < x < \pi,$$
$$0 < x < \pi, \qquad y > 0,$$
$$0 < x < \pi, \qquad y > 0, \qquad z > 0.$$

38. Il ne nous reste donc qu'à chercher les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = U_1 \tag{75}$$

qui sont positives, soit dans tout le plan, soit dans le demi-plan $y > 0$, soit dans le quart de plan $z_1 > 0$. Prenons d'abord la première hypothèse. A l'intérieur de tout cercle, ayant son centre à l'origine, une telle fonction est représentée par l'intégrale

$$\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(\alpha)\frac{dG}{dn}\,d\alpha,$$

où $\frac{dG}{dn}$ est la dérivée normale de fonction de Green de l'équation $\Delta U = U$. Supposons maintenant que R croisse indéfiniment, et cherchons la limite du rapport

$$\frac{\frac{dG}{dn_M}(M, P)}{\frac{\partial G}{dn_M}(M, O)}$$

en appelant M le point de coordonnées $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$ (α fixe). Un calcul facile donne justement, en appelant y, z les cordonnées de P,

$$e^{y\cos\alpha + z\sin\alpha}.$$

D'ailleurs, en raison de la constance de $\frac{dG}{dn_M}(M, O)$, nous pouvons écrire

$$U_1(P) = \mathcal{F}(R)\int_0^{2\pi}\frac{\frac{dG}{dn_M}(M, P)}{\frac{dG}{dn_M}(M, O)}U_1(\alpha)\,d\alpha$$

avec

$$\mathcal{F}(R) = \frac{R}{2\pi}\frac{dG}{dn_M}(M, O).$$

L'expression U_1 a un sens quel que soit R, dont elle est indépendante. Le rapport des valeurs $\frac{dG}{dn}$ tend vers une limite $e^{y\cos\alpha+z\sin\alpha}$, et la même propriété appartient à la quantité indépendante de R

$$U_1(o) = \int_0^{2\pi}\mathcal{F}(R)\,U_1(\alpha)\,d\alpha.$$

Le fait que toutes les U harmoniques, positives entre nos plans et s'annulant sur ces plans sont données par

$$U = \sin x \int_0^{2\pi} e^{y\cos\alpha + z\sin\alpha} d f(\alpha),$$

serait donc établi si l'on prouvait que, pour chaque α, l'intégrale

$$\int_0^{\alpha} \mathcal{F}(R)\, U_1(\alpha)\, d\alpha$$

possède une limite, c'est-à-dire si l'on pouvait énoncer le théorème suivant.

Soit une fonction entière et positive U_1, *satisfaisant à l'équation* (75). *On considère un certain angle ayant pour sommet le point* O. *On détermine la solution de* (75), *régulière dans le cercle de centre* O *et de rayon* R, *prenant les mêmes valeurs que* U_1, *sur l'arc de ce cercle intérieur à l'angle donné, et s'annulant sur le reste de la circonférence. La valeur de cette fonction au point* O *tend vers une limite lorsque* R *croît indéfiniment.*

J'ai établi le fait que la question ainsi posée se résout par l'affirmative dans ma Communication du 13 avril 1931 à l'Académie de Cracovie (voir le *Bulletin international de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres*).

39. Les exemples précédents sont très suggestifs. Reprenons l'étude des fonctions harmoniques positives dans le domaine

$$0 < x < \pi, \qquad 0 < y, \qquad 0 < z,$$

et nulles sur sa frontière. Ce problème est un cas limite du problème analogue, pour le domaine demi-prismatique

$$0 < x < \pi, \qquad 0 < y < \pi L, \qquad 0 < z,$$

lorsque L croît indéfiniment. Dans ce cas, on a des fonctions fondamentales

$$\sin m x \sin n \frac{y}{L}$$

avec des exposants caractéristiques

$$\sqrt{m^2 + \frac{n^2}{L^2}},$$

on voit qu'il y a confluence d'une infinité d'exposants caractéristiques lorsque L croît indéfiniment. De là résulte la fusion de croissances que nous avons signalée.

40. Si l'un des plans restant fixe, l'autre, toujours parallèle au premier, s'en écarte indéfiniment, nous aurons à considérer l'un des domaines

$$x > 0,$$
$$x > 0, \qquad y > 0,$$
$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad z > 0.$$

qui rentrent dans le type des domaines coniques et pour lesquels le principe des singularités positives de Picard redevient exact. (Une démonstration élémentaire en paraîtra dans *Mathematica*).

VII. — Résultats parallèles relatifs à des problèmes linéaires dénombrables.

41. Les systèmes linéaires d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues ont été étudiés principalement dans les conditions qui permettent de présenter leur théorie comme un prolongement direct de l'Algèbre (1).

Or, l'une des différences les plus essentielles entre les systèmes finis d'une part et les systèmes infinis de l'autre est justement la suivante : dans le premier cas, domine la notion du *nombre cardinal* sous les formes : nombre des équations, nombre des inconnues et (éventuellement) ordre d'indétermination.

Par contre, dans le cas des systèmes infinis, le nombre cardinal, envisagé exclusivement, devient inopérant, et l'on voit se manifester dans la discussion des *considérations d'ordre* (2).

(1) A ce point de vue, *voir* le beau livre de M. F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, 1913.

(2) *Voir* mes articles :

A. Sur les fonctionnelles linéaires positives (*Bull. Scienc. math.*, mai 1927).

B. Le finitisme et son efficacité dans la recherche mathématique (*Rev. scient.*, octobre 1928).

C. Sur certains aspects de notions fondamentales en Analyse (*Ens. Math.*, février 1929).

Quoique très simples, ces vérités importantes sont rarement mises en évidence ([1]). Il importe de pouvoir donner des exemples faciles de leur application : tel sera le but de cette dernière section, où l'on verra intervenir activement, dans les problèmes traités, des circonstances d'ordre topologique.

42. Les systèmes dont nous allons nous occuper sont des systèmes d'une infinité dénombrable d'équations à une infinité dénombrable d'inconnues. A ces équations, pourront être adjointes des conditions d'inégalité. Nous allons considérer d'abord, dans le plan, un réseau déterminant une infinité de carrés égaux. Nous construirons un domaine infini par association de ces carrés, conformément aux conditions suivantes :

1° Nous appellerons *bande* le domaine particulier dont la frontière est fermée par deux droites, parallèles à l'une des directions principales du réseau, et contenant chacune une infinité de nœuds de ce réseau ; *demi-bande*, l'un des domaines obtenus en subdivisant le précédent par un segment parallèle à l'autre direction principale et contenant plusieurs nœuds.

2° *Nous appellerons domaine à n branches* la figure obtenue en prenant n demi-bandes non empiétantes et en les rendant mutuellement connexes par adjonction de carrés, en nombre fini. Chacune de ces demi-bandes peut être orientée indifféremment suivant l'une ou l'autre direction principale du réseau. Selon cette terminologie, une bande est un domaine particulier à deux branches, une demi-bande un domaine particulier à une branche.

Cela posé, notre système d'équations sera celui que vérifient les fonctions qui s'annulent aux nœuds périphériques du domaine considéré et qui sont préharmoniques dans ce domaine, c'est-à-dire telles que leur valeur en un nœud interne soit la moyenne arithmétique de

([1]) On peut même dire qu'elles risqueraient d'être méconnues, si l'on en venait à généraliser outre mesure certaines tendances comme celle exprimée au début du fascicule XX du *Mémorial* Villat, par M. André Bloch en ces termes :

Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.

leurs valeurs aux quatre nœuds adjacents [1]. Ces fonctions ne sont ici définies qu'aux nœuds du réseau non extérieurs à notre domaine. Donc le système des inconnues et l'ensemble des équations sont dénombrables.

Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Parmi les fonctions précédentes, celles qui ne sont jamais négatives se déduisent par une combinaison linéaire à coefficients positifs de n fonctions particulières remplissant toutes les conditions indiquées.

D'une telle proposition, il résulte bien que l'organisation topologique du domaine influence les propriétés du système actuel, dans lesquelles les modalités d'interconnexion des inconnues jouent un rôle essentiel. A ce point de vue, le système garde en lui-même une sorte d'empreinte du domaine qui a permis de l'engendrer, au point qu'un archéologue, ayant à sa disposition le système précédent, pourrait, après un cataclysme venant éparpiller les mailles du domaine, en tenter (dans l'éternité) la reconstitution.

43. La démonstration découlera très simplement de l'étude d'une fonction préharmonique et positive dans une demi-bande, fonction s'annulant aux nœuds latéraux de cette demi-bande et prenant des valeurs non négatives quelconques aux nœuds situés sur le segment de base de cette demi-bande. Pour simplifier l'écriture nous supposerons que ces derniers sont au nombre de six : il n'y en aura donc que quatre distincts des extrémités de ce segment. Appelons u_0, v_0, w_0, t_0 les valeurs assignées à ces points ; appelons nœuds internes de rang n ceux qui se déduisent respectivement des quatre précédents par une translation parallèle à la bande et d'amplitude égale à n fois le côté d'une des mailles élémentaires. Aux nœuds internes de rang n qui se

---

(1) Partant d'une répartition quelconque sur le réseau ou sur une partie du réseau, on peut en déduire une nouvelle dont la valeur, en un nœud, soit la moyenne arithmétique des valeurs de l'ancienne aux quatre nœuds adjacents. On définit ainsi, lorsque la répartition affecte une infinité de nœuds, *une substitution linéaire infinie à cœfficients positifs*. Pour de telles substitutions, l'étude du cas où toutes les variables sont positives offre un intérêt spécial. *Voir* à ce sujet mon Mémoire A cité en note, page 145.

trouvent respectivement en regard des nœuds précédents, sont assignées les valeurs u_n, v_n, w_n, t_n. La préharmonicité et l'ànnulation aux nœuds latéraux donnent les conditions récurrentes

$$(1)\qquad \begin{cases} 4\,u_n = u_{n-1} + u_{n+1} + v_n, \\ 4\,v_n = v_{n-1} + v_{n+1} + u_n + w_n, \\ 4\,w_n = w_{n-1} + w_{n+1} + v_n + t_n, \\ 4\,t_n = t_{n-1} + t_{n+1} + w_n, \end{cases}$$

pour la détermination simultanée des quatre suites $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ et $\{t_n\}$. On obtient huit solutions linéairement indépendantes de ce problème (d'où toute autre solution se déduit par un processus linéaire) en exprimant que nos quatre suites sont des progressions géométriques de même raison λ, ce qui donne

$$(2)\qquad \begin{cases} 4\,u_n = u_n\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + v_n, \\ 4\,v_n = u_n + v_n\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + w_n, \\ 4\,w_n = v_n + w_n\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + t_n, \\ 4\,t_n = w_n + t_n\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \end{cases}$$

système qui doit avoir des solutions non toutes nulles en u_n, v_n, w_n, t_n. En annulant son déterminant, nous aurons une équation du quatrième degré en $\lambda + \frac{1}{\lambda}$; en posant

$$(3)\qquad \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = s,$$

les équations (2) prennent une nouvelle forme qu'on peut rattacher à la recherche des directions principales de la quadrique (dans l'espace u_n, v_n, w_n, t_n) :

$$(4)\qquad u_n^2 + (u_n - v_n)^2 + (v_n - w_n)^2 + (w_n - t_n)^2 + t_n^2 = 1,$$

l'équation précédente en $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ devenant l'équation en s de cette quadrique. Le premier membre de (4) est une *forme quadratique définie*, dont la génération peut être conçue de la manière suivante : partir de la somme des carrés des différences des valeurs en deux nœuds contigus quelconques (expression formelle qui contient une infinité de termes, mais dont quelques-uns seulement vont nous être utiles), puis, dans celles de nos différences contenant u_n, v_n, w_n, t_n, faire

$$u_{n+1} = u_n = u_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad t_{n+1} = t_n = t_{n-1}.$$

D'après tout cela, notre quadrique (4) est donc un *ellipsoïde*, et par suite, l'équation en s correspondante a ses quatre racines réelles et positives. En vertu de (3). chacune de ces racines fournira un couple de valeurs de λ, qui seront également réelles et positives, en même temps qu'inverses.

Notons enfin (en vertu du mode de génération précédent) que dans le premier membre de l'équation (4), tous les coefficients des termes rectangles sont négatifs. Coupons l'ellipsoïde par une droite issue de l'origine et dont les cosinus directeurs ne sont donnés qu'en valeur absolue ; parmi les 2^3 droites répondant à ce système de conditions, celle qui fournira le rayon vecteur maximum sera nécessairement celle pour laquelle le coefficient de ρ^2 dans l'équation

$$2\rho^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\delta) = 1$$

sera le plus petit possible, c'est-à-dire celle qui traversera la région des coordonnées positives (où l'on a le maximum de termes soustractifs). Donc, le grand axe de notre ellipsoïde est situé dans la région des coordonnées positives : la direction principale correspondante (en vertu de la forme de la condition d'orthogonalité, à coefficients tous positifs) est la seule traversant cette région et elle s'attache à la plus petite racine de l'équation en s, laquelle est nécessairement simple, en vertu des mêmes remarques (*cf.* n° 7).

Finalement, nos huit solutions fondamentales dériveront de huit valeurs de λ, réelles et positives, deux à deux inverses. A chacun de ces couples de valeurs de λ, correspond un système de quatre nombres a, b, c, d, auxquels seront proportionnelles les valeurs, sur toute section droite de la demi-bande, d'une fonction préharmonique réduite, sur chaque file interne, à une progression géométrique de raison λ (ou λ^{-1}). *Une seule de ces répartitions sur la section droite est formée d'éléments tous de même signe*, qu'on pourra prendre positifs : *c'est celle* *qui correspond* au grand axe de notre ellipsoïde, c'est-à-dire à la plus petite des racines de l'équation en s, ou encore *au plus petit de nos λ surpassant l'unité*.

Cela posé, en appelant $\lambda_1 < \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4$ les quatre valeurs de λ supérieures à l'unité, l'ensemble des fonctions préharmoniques s'annulant aux nœuds latéraux de notre demi-bande et prenant des *valeurs quelconques* aux quatre nœuds situés sur son segment de base pourra s'écrire :

$$
\begin{aligned}
u_n &= a_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + a_2\left(h_2\lambda_2^n + \frac{k_2}{\lambda_2^n}\right) + a_3\left(h_3\lambda_3^n + \frac{k_3}{\lambda_3^n}\right) + a_4\left(h_4\lambda_4^n + \frac{k_4}{\lambda_4^n}\right),\\
v_n &= b_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + b_2\left(h_2\lambda_n^2 + \frac{k_2}{\lambda_2^n}\right) + b_3\left(h_3\lambda_3^n + \frac{k_3}{\lambda_3^n}\right) + b_4\left(h_4\lambda_4^n + \frac{k_4}{\lambda_4^n}\right),\\
w_n &= c_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + c_2\left(h_2\lambda_2^n + \frac{k_2}{\lambda_2^n}\right) + c_3\left(h_3\lambda_3^n + \frac{k_3}{\lambda_3^n}\right) + c_4\left(h_4\lambda_4^n + \frac{k_4}{\lambda_4^n}\right),\\
t_n &= d_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + d_2\left(h_2\lambda_2^n + \frac{k_2}{\lambda_2^n}\right) + d_3\left(h_3\lambda_3^n + \frac{k_3}{\lambda_3^n}\right) + d_4\left(h_4\lambda_4^n + \frac{k_4}{\lambda_4^n}\right),
\end{aligned}
$$

les a, b, c, d intervenant ici avec l'indice du λ correspondant et les h, k désignant des coefficients arbitraires. Pour que u_n, v_n, w_n, t_n soient positifs quel que soit n, il faut que l'on ait simultanément

$$h_2 = h_3 = h_4 = 0,$$

puisque seuls (à l'exclusion de $a_2, \ldots, d_4$) les valeurs a_1, b_1, c_1, d_1 sont simultanément positives. En résumé, *l'expression générale des fonctions qui sont préharmoniques et positives dans la demi-bande considérée et nulles aux nœuds latéraux est donc de la forme*

$$
\begin{aligned}
u_n &= a_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + \frac{k_2 a_2}{\lambda_2^n} + \frac{k_3 a_3}{\lambda_3^n} + \frac{k_4 a_4}{\lambda_4^n},\\
v_n &= b_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + \frac{k_2 b_2}{\lambda_2^n} + \frac{k_3 b_3}{\lambda_3^n} + \frac{k_4 b_4}{\lambda_4^n},\\
w_n &= c_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + \frac{k_2 c_2}{\lambda_2^n} + \frac{k_3 c_3}{\lambda_3^n} + \frac{k_4 c_4}{\lambda_4^n},\\
t_n &= d_1\left(h_1\lambda_1^n + \frac{k_1}{\lambda_1^n}\right) + \frac{k_2 d_2}{\lambda_2^n} + \frac{k_3 d_3}{\lambda_3^n} + \frac{k_4 d_4}{\lambda_4^n},
\end{aligned}
$$

pour une telle solution, u_n, v_n, w_n, t_n auront des expressions asymptotiques $a_1 h_1 \lambda_1^n$, $b_1 h_1 \lambda_1^n$, $c_1 h_1 \lambda_1^n$, $d_1 h_1 \lambda_1^n$, l'ensemble des termes négligés tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

44. De ce lemme, découle maintenant, de la manière la plus facile, le théorème énoncé. Considérons un domaine à n branches et une fonction de réseau s'annulant aux nœuds périphériques et préharmoniques dans le domaine lui-même. Si l'on impose à cette fonction de s'évanouir à l'infini dans chaque branche, elle est, de ce fait, identiquement nulle, en raison de l'impossibilité d'un extremum en un nœud à distance finie. Supposons qu'elle s'évanouisse dans $n-1$ branches, mais qu'elle soit non bornée dans la $n^{\text{ième}}$, et enfin, qu'elle ne soit jamais négative : je dis qu'elle est déterminée à un facteur constant près. En effet, concevons deux solutions de ce type, et leurs expressions asymptotiques dans la $n^{\text{ième}}$ branche. En multipliant l'une des solutions par un facteur positif convenable, on peut égaler leurs expressions asymptotiques. Après cette multiplication, la différence des deux solutions considérées sera une fonction préharmonique dans le domaine, s'annulant aux nœuds périphériques, et (en vertu des raisonnements précédents) évanescente à l'infini. Ainsi que nous l'avons dit, une telle fonction est identiquement nulle, ce qui établit le résultat annoncé : car toute solution apparaît comme la somme des solutions ayant même partie asymptotique qu'elle dans chaque branche et évanescente dans les autres.

45. Somme toute, ce théorème concerne un système infini d'équations linéaires, auquel on adjoint le système d'inégalités

$$u_n \geqq 0, \qquad v_n \geqq 0, \qquad w_n \geqq 0, \qquad t_n \geqq 0$$

quel que soit n. Chemin faisant, nous avons d'ailleurs rencontré tous les éléments qui permettaient de résoudre le problème identique au précédent, à la suppression près de ces diverses inégalités. Dans chaque branche, la partie singulière (c'est-à-dire formée des termes non évanescents) comprendrait autant de termes que nous aurions de files intérieures à la branche en question. Soient $f_1, \ldots, f_n$ les nombres de files relatifs aux diverses branches. Une solution au sens actuel, c'est-à-dire une fonction préharmonique dans le domaine et nulle périphériquement (sans plus), à partir du moment où elle est évanescente dans toutes les branches sauf une (la première par exemple), dépend de f_1 constantes arbitraires. Donc, le degré d'indétermination de l'ensemble total des solutions correspond à

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

constantes arbitraires. Ce nouvel exemple montre, d'une manière plus complète encore que le précédent, l'influence des circonstances topologiques.

46. Dans ces exemples simples, l'ordre d'indétermination du problème est une quantité finie, à l'encontre du nombre des équations et du nombre des inconnues, qui sont infinis. Il serait assez difficile de donner l'idée générale de *tous* les systèmes linéaires infinis qui, étudiés au même point de vue que le précédent, fourniraient une discussion isomorphe. Mais il est un moyen simple de construire de tels systèmes. C'est de passer du cas des fonctions préharmoniques du plan à celui des fonctions préharmoniques dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, en y prenant un domaine à n branches prismatiques. Si l'organisation topologique d'un tel domaine, du point de vue géométrique usuel, diffère de celle du domaine plan considéré plus haut, n'y a-t-il aucune différence en ce qui concerne les propriétés du système que nous lui attachons, la démonstration précédente ayant reçu une forme indépendante du nombre des dimensions de l'espace où est tracé le réseau initial. Dans tous les cas, pour tous les domaines ayant le même nombre de branches, contenant chacune intérieurement le même nombre de files nodales, la discussion est la même.

On voit que ces résultats s'apparentent étroitement à nos théorèmes des sections précédentes sur les fonctions harmoniques. Dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, une fonction harmonique et positive dans un domaine à n branches infinies, coniques ou cylindriques, nulle sur sa frontière, est, comme nous l'avons vu, une combinaison linéaire de n solutions particulières. L'obtention de ce théorème (où le continu se substitue au dénombrable) a précédé dans mes recherches, celle des résultats beaucoup plus simples que je viens d'établir. Mais justement, cette simplicité m'a engagé à donner ici un raisonnement autonome, pour souligner des faits dont l'importance paraît capitale.