ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

Sur quelques majorantes utiles dans la théorie des fonctions analytiques ou harmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 15-64

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__15_0>

SUR QUELQUES MAJORANTES UTILES

DANS

LA THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES OU HARMONIQUES

PAR M. GASTON JULIA

Introduction. — En exposant cette année le principe de Phragmén-Lindelöf et certaines propositions connexes d'Analyse qui fournissent des majorantes commodes, notamment la majorante que M. Carleman a donnée à la page 4 de son livre *Sur les fonctions quasi-analytiques*, j'ai fait quelques remarques que je crois nouvelles et qu'on trouvera dans le présent Mémoire.

Il s'agit ici d'une fonction $f(z)$ holomorphe en tout point z intérieur à un domaine borné D de frontière F. Si le domaine est multiplement connexe, $|f(z)|$ est supposé uniforme dans D. *Sur une partie* F_1 *de la frontière d'un seul tenant, on suppose* $|f(z)| \leqq m$ *et sur le reste* F_2 *on suppose* $|f(z)| \leqq M$, m *et* M *étant deux constantes différentes; cela veut dire que, par exemple*, pour tout point f_1 appartenant à F_1, on peut, quel que soit ε positif, donné à l'avance (si petit qu'il soit), trouver $\rho_1(\varepsilon)$, un rayon tel qu'en tout point z de D distant de f_1, de moins de ρ_1, on ait

$$|f(z)| < m + \varepsilon;$$

dire qu'en un point f_1 de F_1, on a $|f| \leqq m$ ne signifie donc pas nécessairement que f est continue en f_1, et y prend une valeur $\leqq m$; mais simplement que, dans un voisinage intérieur à D et suffisamment restreint de f_1, les valeurs de f sont inférieures à toute constante donnée *a priori* supérieure à m.

MM. Nevanlinna et Ostrowski ont, sous les hypothèses précédentes, démontré le théorème suivant qu'ils appellent *théorème des deux constantes*.

D étant limité par un nombre fini de courbes de Jordan simples et fermées (de manière que le problème de Dirichlet soit possible), si Δ désigne un domaine quelconque *dont tous les points, ainsi que les points frontière, sont intérieurs à* D, il existe une constante β positive et < 1, ne dépendant que de la configuration géométrique (à savoir D, Δ, F_1 et F_2) telle que, pour toute fonction f soumise aux hypothèses précédentes, on ait, à l'intérieur et sur la frontière de D :

$$|f(z)| \leqq m^\beta M^{1-\beta} \qquad \text{ou encore} \qquad \left|\frac{f}{M}\right| \leqq \left(\frac{m}{M}\right)^\beta.$$

D'autre part, à la page 4 de son livre *Sur les fonctions quasi-analytiques*, en supposant que D est un secteur limité :

1° Par 2 segments de droite, AO, OB faisant en O l'angle $\alpha\pi (\alpha > 0)$.

2° Par un arc de courbe de Jordan ACB unissant A et B; si sur les segments frontière AOB on a $|f(z)| \leqq M$ et sur l'arc ACB on a $|f(z)| \leqq m$ (au sens précédent), avec la condition $m < M$, M. Carleman montre qu'on a, en tout point ζ de la bissectrice du secteur D, l'inégalité

$$|f(\zeta)| \leqq m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

r désignant la distance, et R le *maximum* de la distance à O d'un point de l'arc ACB.

En écrivant la formule de M. Carleman sous la forme

$$\left|\frac{f(\zeta)}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

on voit apparaître l'analogie avec la formule de MM. Nevanlinna-Ostrowski, la constante β étant égale à $\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et ne dépendant effectivement que du secteur D, du point ζ de la bissectrice, et des 2 arcs, rectiligne et curviligne de la frontière du secteur. Seulement, la formule de M. Carleman est valable sur *toute la bissectrice*, c'est-à-dire sur un domaine qui touche en O la frontière de D. On peut encore envisager cette formule de M. Carleman comme donnant *l'ordre de l'infiniment petit* β *lorsque le point* z *tend vers* f_1 *de la frontière de* D *où* $|f(z)| \leq M$. Et c'est là, nous semble-t-il, qu'est l'intérêt et la nouveauté de la formule de M. Carleman (indépendamment, bien entendu, de ses utiles applications).

Le but de la présente recherche est de donner, dans tous les cas possibles et avec des hypothèses aussi générales que possibles sur la frontière F de D, une borne supérieure de $|f(z)|$ qui, comme celle que M. Carleman a donnée pour un secteur et sa bissectrice, soit valable *dans des domaines* Δ *ayant des parties de frontière communes avec* D, voire dans D tout entier.

Pour cela (Chap. I), nous donnerons d'abord du théorème de M. Carleman une nouvelle démonstration qui nous conduira, pour le cas du secteur, à une borne supérieure du type de celle donnée par M. Carleman, mais valable dans tout le secteur D et non plus seulement sur la bissectrice. Nous nous affranchirons aussi de la restriction $m < M$ et nous donnerons à notre nouvelle majorante une forme très générale susceptible d'extension à des domaines quelconques. Chemin faisant, nous donnerons diverses majorantes assez simples et maniables dans le cas du secteur.

Ensuite (Chap. II), grâce aux résultats acquis à ce jour sur la représentation conforme, nous étendrons la borne supérieure trouvée à des domaines D possédant des frontières assez générales, par exemple des arcs de Jordan simples dont certains pourront être supposés avoir une tangente variant continûment de manière que l'angle de contingence satisfasse en fonction de l'arc, à une condition de Lipschitz.

CHAPITRE I.

CAS DU SECTEUR D'OUVERTURE $\alpha\pi (\alpha > 0)$.

D est ici limité par les deux segments AOB faisant l'angle $\alpha\pi$ et par l'arc de Jordan ACB.

Si $\alpha < 2$, D est donc une aire ordinaire à un seul feuillet, si $\alpha \geq 2$ ce sera un morceau de surface de Riemann. Au voisinage de tout point de AOB on a $|f(z)| < M + \varepsilon$, et au voisinage de tout point de ACB on a $|f(z)| < m + \varepsilon$. Nous distinguons 2 cas : $m < M$ et $m > M$.

Premier cas : $m < M$.

1. En posant $u = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, ζ étant un point de D situé sur la bissectrice de AOB, à la distance r de O, u étant pris égal à 1 pour $z = \zeta$, le domaine D devient un domaine D_1 du plan u situé à droite de l'axe imaginaire, limité par un segment $A_1O_1B_1$ de cet axe (A_1, B_1 transformés de A, B) et par un arc de Jordan, $A_1C_1B_1$ transformé de ACB (¹). Le domaine D_1 est un domaine ordinaire, à un seul feuillet, dont la frontière est une courbe de Jordan fermée simple; on peut donc résoudre le problème de Dirichlet pour D_1 avec des données bornées n'ayant sur le contour qu'un nombre fini de points de discontinuité. Si R était le maximum de la distance à O d'un point de l'arc ACB,

$$P_1 = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

sera le maximum de la distance à O_1 d'un point de l'arc $A_1C_1B_1$; par conséquent D_1 sera une partie du domaine D'_1 limité à droite de l'axe imaginaire par cet axe et par le demi-cercle de centre O_1 de rayon P_1. Envisageons la fonction $\log|f(z)|$, harmonique dans D avec pour seuls points singuliers les zéros de f où elle devient égale à $-\infty$; elle devient par la substitution $[z|u]$ une fonction $\log|f[z(u)]|$, harmonique dans D_1, sauf aux transformés des zéros de f où elle devient égale à $-\infty$. Au voisinage des points de $A_1O_1B_1$ on aura

$$\log|f[z(u)]| < \log M + \varepsilon,$$

et au voisinage des points de $A_1C_1B_1$ on a

$$\log|f[z(u)]| < \log m + \varepsilon.$$

(¹) La substitution $(z|u)$ a essentiellement pour but de ramener le cas général α quelconque au cas particulier $\alpha = 1$ pour lequel sont beaucoup plus simples les majorations qu'on va faire dans la suite.

Si donc on considère la fonction $\varphi(u)$, harmonique et régulière dans D_1, prenant sur $A_1O_1B_1$ la valeur constante $\log M$, sur $A_1C_1B_1$ la valeur constante $\log m$ (Problème de Dirichlet possible), elle majore partout dans D_1 notre $\log|f[z(u)]|$

$$\log|f[z(u)]| \leqq \varphi(u)$$

partout dans D_1.

2. Il est impossible, en général, de donner l'expression exacte de $\varphi(u)$, mais on a une première majorante simple de $\varphi(u)$ en passant de D_1 à D'_1 limitée par l'axe imaginaire et par le demi-cercle de rayon P_1, de centre O_1. Soit $\varphi_1(u)$ la fonction régulière et harmonique dans D'_1, égale à $\log M$ sur l'axe imaginaire et à $\log m$ sur le demi-cercle de rayon P_1, on aura *en tout point u de l'arc* $A_1C_1B_1$,

$$\log m \leqq \varphi_1(u) \leqq \log M,$$

tandis que

$$\log m = \varphi(u).$$

Par suite $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ en tout point de $A_1O_1B_1$ et $\varphi(u) \leqq \varphi_1(u)$ en tout point de $A_1C_1B_1$, donc on aura $\varphi(u) \leqq \varphi_1(u)$ en tout point de D_1, l'égalité n'étant d'ailleurs possible que si D_1 se confond avec D'_1, c'est-à-dire si $A_1C_1B_1$ (et par suite ACB) est un arc de cercle de centre O. $\varphi_1(u)$ constitue donc une première majorante harmonique de

$$\log|f[z(u)]|$$

dans tout D_1. Nous la calculerons tout à l'heure.

3. Nous majorons encore $\varphi_1(u)$ en appliquant une deuxième fois ce procédé de *recul de la partie de la frontière qui porte la donnée constante la plus petite*. Envisageons le domaine D''_1 compris entre l'axe imaginaire du plan u et la parallèle à cet axe tangente au demi-cercle qui limitait D'_1, cette parallèle a pour équation $R(u) = P_1$, $R(u)$ désignant la partie réelle de u. Sur la sphère classique de Riemann, le domaine correspondant à D''_1 serait compris entre 2 cercles tangents entre eux au pôle, et d'ailleurs, dans le plan u, D''_1 se transforme par substitution linéaire $\left[u \middle| \frac{au+b}{cu+d}\right]$ en un domaine limité par 2 cercles tangents entre eux. Le problème de Dirichlet est donc possible

pour D''_1 : il existe une fonction $\varphi_2(u)$ et une seule, harmonique dans D''_1, prenant sur l'axe imaginaire la valeur $\log M$, sur la droite $R(u) = P_1$ la valeur $\log m$. L'arc de cercle qui limite D'_1 étant intérieur à D''_1 on a, sur lui,

$$\log M \geqq \varphi_2 \geqq \log m,$$

tandis que, sur lui, $\varphi_1(u) = \log m$. On en conclut comme précédemment que, dans D'_1, et par suite dans D_1, on aura

$$\varphi_1(u) < \varphi_2(u),$$

l'égalité *n'étant pas possible* puisque D'_1 n'est jamais confondu avec D''_1.

En définitive, on a dans D_1

$$\log|f[z(u)]| \leqq \varphi(u) \leqq \varphi_1(u) < \varphi_2(u).$$

Le calcul de $\varphi_2(u)$ est immédiat : $\varphi_2(u)$ est une fonction *linéaire* de $R(u)$ qui prend les valeurs $\log M$ et $\log m$ respectivement pour

$$R(u) = 0 \quad \text{et} \quad R(u) = P_1,$$

$$\varphi_2(u) = \log M + \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right] \cdot \frac{R(u)}{P_1}.$$

4. *Le retour de u à z* est aisé en envisageant les modules et les arguments de ces variables, c'est donc ainsi qu'il convient d'opérer pour ramener la majorante

$$\log|f[z(u)]| < \log M + \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right] \cdot \frac{R(u)}{P_1}$$

au plan z.

Posons $\rho = |z|$ et soit ω l'angle, dont il faut faire tourner autour de O la bissectrice intérieure de D pour l'amener sur Oz; on a

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \omega < \alpha\frac{\pi}{2},$$

en tout point intérieur à D.

L'argument de $\frac{z}{\zeta}$ sera précisément ω et sa valeur absolue sera $\frac{\rho}{r}$

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{\rho}{r} e^{i\omega}.$$

Donc

$$u = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\omega}{\alpha}}$$

et

$$R(u) = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha}$$

avec

$$P_1 = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Donc

$$\frac{R(u)}{P_1} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha}$$

et il vient la majorante très simple *valable dans tout* D

$$\text{(1)} \qquad \boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right] \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha}}$$

sans égalité possible.

Lorsque $\omega = 0$ et $\rho = r$, c'est-à-dire en tout point ζ de la bissectrice, on a

$$\log\left|\frac{f(\zeta)}{M}\right| < \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

formule qui n'est autre que la formule de M. Carleman.

5. On aurait eu une majorante $\psi_2(u)$ du même type que $\varphi_2(u)$ en général inférieure, en tout cas *non supérieure*, si l'on avait considéré le domaine Δ''_1, limité par l'axe imaginaire du plan u et par la parallèle à cet axe qui est une *droite d'appui* (stützgerade de Minkowski) de l'arc $A_1C_1B_1$, son abscisse correspond au maximum de $R(u)$ sur $A_1C_1B_1$, lequel est en général inférieur au maximum de $|u|$ sur cet arc. On serait alors conduit à introduire le maximum de $\rho^{\frac{1}{\alpha}}.\cos\frac{\omega}{\alpha}$ lorsque le point z décrit l'arc ACB, et l'on perdrait en général dans ce calcul le bénéfice de la petite amélioration que procurerait la substitution de ψ_2 à φ_2. C'est pourquoi nous n'insistons pas là-dessus.

6. Mais nous allons calculer la majorante $\varphi_1(u)$ moins simple, mais plus serrée que $\varphi_2(u)$. C'est une fonction harmonique et régulière

dans le demi-cercle D'_1 limité par le segment $(-iP_1, +iP_1)$ de l'axe imaginaire et par le demi-cercle de centre O_1, de rayon P_1, situé à droite. Par une transformation de la forme $\left[u \middle| \frac{au+b}{cu+d}\right]$ (qui conserve l'harmonicité), D'_1 est équivalent à l'aire comprise entre 2 arcs de cercle orthogonaux unissant 2 points u_1 et u_2 du plan u. Sur un tel arc, il est bien connu que l'argument de $\frac{u-u_1}{u-u_2}$ est constant et c'est une fonction harmonique.

La fonction harmonique cherchée est donc de la forme

$$\lambda \arg\left[\frac{u-u_1}{u-u_2}\right] + \mu,$$

λ et μ étant 2 constantes réelles convenables.

Ici, elle sera de la forme

$$\varphi_1 = \lambda \arg \frac{u-iP_1}{u+iP_1} + \mu$$

et l'on déterminera λ et μ en écrivant que : sur $A_1O_1B_1$,

$$\varphi_1(u) = \log M\,;$$

sur $A_1C_1B_1$,

$$\varphi_1(u) = \log m.$$

Or, sur $A_1O_1B_1$

$$\arg \frac{u-iP_1}{u+iP_1} = -\pi$$

et sur $A_1C_1B_1$

$$\arg \frac{u-iP_1}{u+iP_1} = -\frac{\pi}{2}.$$

On en tire

$$\lambda = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{m}{M}\right), \qquad \mu = 2\log m - \log M.$$

On a donc

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi}\cdot\log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\arg\frac{u-iP_1}{u+iP_1} + 2\log m - \log M. \tag{2}$$

7. Il faut maintenant exprimer $\arg\left[\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right]$ en fonction du module et de l'argument de u afin de permettre ensuite le passage à la variable z.

Nous poserons donc $u = \rho_1 e^{i\omega_1}$ et nous devons évaluer

$$\arg\left[\frac{u - iP_1}{u + iP_1}\right] = -\theta$$

compris entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ dans le demi-cercle D'_1. On peut calculer θ par son sinus ou sa tangente, le triangle constitué par les 3 points u, iP_1, $-iP_1$ étant connu. Considérant par exemple les angles v et w en u des 2 triangles partiels en lesquels le segment O_1u divise le triangle précédent, on aura

$$\sin v = \frac{P_1 \cos\omega_1}{\sqrt{P_1^2 + \rho_1^2 - 2P_1\rho_1 \sin\omega_1}}, \qquad \cos v = \frac{P_1 - \rho_1 \sin\omega_1}{\sqrt{P_1^2 + \rho_1^2 - 2P_1\rho_1 \sin\omega_1}}$$

et les expressions analogues

$$\sin w = \frac{P_1 \cos\omega_1}{\sqrt{P_1^2 + \rho_1^2 + 2P_1\rho_1 \sin\omega_1}}, \qquad \cos w = \frac{P_1 + \rho_1 \sin\omega_1}{\sqrt{P_1^2 + \rho_1^2 + 2P_1\rho_1 \sin\omega_1}}$$

et comme

$$\theta = v + w, \qquad \sin\theta = \frac{2P_1\rho_1 \cos\omega_1}{\sqrt{(P_1^2 + \rho_1^2)^2 - 4P_1^2\rho_1^2 \sin^2\omega_1}}.$$

Par conséquent

$$\theta = \pi - \operatorname{Arc\,sin} \frac{2P_1\rho_1 \cos\omega_1}{\sqrt{(P_1^2 + \rho_1^2)^2 - 4P_1^2\rho_1^2 \sin^2\omega_1}},$$

*l'*Arc sin *étant choisi entre* o *et* $\frac{\pi}{2}$ (détermination principale).

(Le calcul de θ par sa tangente est aussi très aisé en envisageant les 2 angles en lesquels la parallèle à l'axe réel décompose θ.)

Portant cette valeur de $\theta = -\arg\left[\frac{u - iP_1}{u + iP_1}\right]$ dans l'expression (2) de φ_1 on aura, après réductions,

$$(3) \qquad \varphi_1(u) = \frac{2}{\pi} \cdot \log\left(\frac{m}{M}\right) \cdot \operatorname{Arc\,sin} \frac{2P_1\rho_1 \cos\omega_1}{\sqrt{(P_1^2 + \rho_1^2)^2 - P_1^2\rho_1^2 \sin^2\omega_1}} + \log M.$$

8. On passe aisément de $u = \rho_1 e^{i\omega_1}$ à z (*voir* n° 4).

On a

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{\rho}{r} e^{i\omega};$$

donc

$$u = \rho_1 e^{i\omega_1} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot e^{i\frac{\omega}{\alpha}}$$

c'est-à-dire

$$\rho_1 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \omega_1 = \frac{\omega}{\alpha}.$$

D'autre part $P_1 = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et la formule (3) fournit dans le secteur D la majorante cherchée

$$(4) \qquad \boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leqq \frac{2}{\pi} \cdot \log\left(\frac{m}{M}\right) \cdot \operatorname{Arc\,sin}\left\{\frac{2 \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2 - 4\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\}}$$

valable dans D, qui est plus précise que (1) mais moins maniable.

9. Signalons en passant la forme de la majorante (4) lorsque l'Arc sin est remplacé par l'Arc tang de même valeur. On verra aisément par des calculs élémentaires que l'on a

$$\operatorname{Arc\,sin}\left\{\frac{2 \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2 - 4\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\} = \operatorname{Arc\,tang}\left\{\frac{2 \cdot \cos\frac{\omega}{\alpha} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}$$

l'Arc sin et l'Arc tang étant pris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour $\left|\frac{\omega}{\alpha}\right| < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \rho < R$.

Sur la bissectrice du secteur, la formule en Arc tang devient très simple et donne la majorante

$$(5) \qquad \log\left|\frac{f(\zeta)}{M}\right| \leqq \frac{4}{\pi} \cdot \log\left(\frac{m}{M}\right) \cdot \operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

un peu plus serrée que celle de M. Carleman.

Reprenons d'ailleurs la forme (4′) de (4) avec l'Arc tang c'est-à-dire

$$(4') \qquad \boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\cdot\log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot \text{Arc tang}\left\{\frac{2.\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}}$$

et remarquons qu'ici $m < M$. Donc $\log\left(\frac{m}{M}\right) < 0$.

On augmente donc le deuxième membre de (4′) en remplaçant l'Arc tang qui y figure par une fonction positive et plus petite pour $0 \leqq \rho \leqq R$ et $\left|\frac{\omega}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$.

Or, on voit sans peine que l'on a

$$\text{Arc tang}\left\{\frac{2.\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\} \geqq \text{Arc tang}\left\{\frac{2.\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\cos^2\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}$$

c'est-à-dire

$$\text{Arc tang}\left\{\frac{2.\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\} \geqq 2\,\text{Arc tang}\left\{\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\},$$

l'égalité *n'étant pas possible à l'intérieur de* D car $\cos\frac{\omega}{\alpha} > 0$ à l'intérieur.

D'autre part, dans D, on a

$$0 < \cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 1$$

et l'on démontre aisément que $\frac{\text{Arc tang}}{\theta}$, fonction décroissante de θ de 0 à 1 atteignant son minimum pour $\theta = 1$, satisfait dans (0, 1) à

$$\frac{\text{Arc tang}\,\theta}{\theta} > \frac{\pi}{4}.$$

Il en résulte

$$\operatorname{Arc\,tang}\left\{\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\} > \frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et par suite, en portant dans (4′) cette borne inférieure de l'Arc tang précédent, on a

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

la dernière égalité ne pouvant jamais être égalité *à l'intérieur de* D.

On retrouve ainsi en partant de (4) ou (4′), et à l'aide des majorations successives précédentes, la formule (1) antérieurement donnée.

10. La majoration (1) n'est pas une borne exacte, susceptible d'être atteinte par une fonction $f(z)$ et un domaine D convenables, tandis que (4) ou (4′) est une *borne exacte*. Par quelles fonctions $f(z)$ et quels domaines D est-elle atteinte. Il faut s'adresser à un domaine D, du plan u et à une fonction $f[z(u)]$ tels que l'on ait partout

$$\log|f[z(u)]| = \varphi(u) = \varphi_1(u).$$

Or, pour que $\varphi(u) = \varphi_1(u)$, il faut que D_1 coïncide avec D'_1, c'est-à-dire que le secteur D soit circulaire (ACB arc de cercle de centre O). Ensuite, il faut chercher une fonction holomorphe dans D_1, et dont la partie réelle soit $\varphi_1(u)$, et ce sera la fonction $\log f[z(u)]$.

Or, on a vu que

$$\varphi_1(u) = \frac{2}{\pi}\cdot\log\left(\frac{m}{M}\right).\arg\frac{u-iP_1}{u+iP_1} + 2\log m - \log M$$

et la fonction conjuguée de $\arg\left[\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right]$ étant $-i\log\left|\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right|$ en vertu de ce fait que

$$-i\log\left|\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right| + \arg\left[\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right] = -i\log\left[\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right]$$

est fonction analytique de u dans D_1, il est clair que la fonction conjuguée de $\varphi_1(u)$ sera

$$-\frac{2i}{\pi}\cdot\log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\log\left|\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right|+iC$$

(C constante réelle quelconque).

On aura donc

$$\log f[z(u)]=\frac{-2i}{\pi}\cdot\log\left(\frac{m}{M}\right)\log\left[\frac{u-iP_1}{u+iP_1}\right]+2\log m-\log M+iC.$$

Donc

$$f[z(u)]=\frac{m^2}{M}\cdot\left[\frac{u+iP_1}{u-iP_1}\right]^{\frac{2i}{\pi}\log\left(\frac{m}{M}\right)}\cdot e^{iC}.$$

Il n'y a plus qu'à poser

$$u=\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\qquad\text{et}\qquad P_1=\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

pour obtenir la fonction $f(z)$ correspondant à la *borne exacte*, où (4) est une égalité.

11. A partir de (4) ou de (1) il est possible de donner des majorantes de $f(z)$ commodes, valables non plus dans tout le domaine D, mais dans des domaines Δ intérieurs à D et *ayant avec* D *des points frontière communs*. En voici un exemple simple.

Envisageons la majorante (1) dans un secteur D′ de sommet O, de même bissectrice que D, limité au même arc de Jordan ACB et par deux rayons OA′, OB′ intérieurs à D, *faisant respectivement avec* OA et OB *l'angle* η. On a, dans D′, $|\omega|<\frac{\alpha\pi}{2}-\eta$. Donc

$$\cos\frac{\omega}{\alpha}>\sin\left(\frac{\eta}{\alpha}\right),$$

par suite, $\log\left(\frac{m}{M}\right)$ étant négatif, on aura dans D′

$$(1')\qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right|<\log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sin\left(\frac{\eta}{\alpha}\right).$$

Si l'on compare cette formule (1′) à la formule de M. Carleman

$$\log\left|\frac{f(\zeta)}{M}\right|<\log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

valable lorsque ζ est sur la bissectrice de D, on voit que *la majorante de M. Carleman, multipliée par la constante* $\sin\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)$ *est valable non seulement sur la bissectrice mais dans tout le secteur* D′ *intérieur à* D *et dont l'écart angulaire à* D *est* η *de part et d'autre de la bissectrice commune* (l'écart angulaire est l'angle des rayons extrêmes des deux secteurs).

12. Il est possible de donner à la formule (1) une forme susceptible de généralisation.

Reprenons la borne

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dans l'expression $\left[\cos\frac{\omega}{\alpha}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ nous avons pu, au n° 11, borner inférieurement $\cos\frac{\omega}{\alpha}$ par la constante $\sin\frac{\eta}{\alpha}$ lorsque z restait dans D′ intérieur à D et d'écart angulaire η à D, et faire apparaître, dans la majorante (1′) le point z par sa seule distance ρ à O, les autres termes de la majorante (1′) ne dépendant plus du point z mais seulement de $\frac{m}{M}$ et de la figure globale (D et D′). Cela est impossible lorsque le domaine D′ intérieur à D n'a pas un écart angulaire fini avec D, car $\cos\frac{\omega}{\alpha}$ reçoit alors dans D′ des valeurs arbitrairement voisines de zéro. Mais il est possible *de remplacer l'angle* ω *par une* distance qui se prête mieux que ω à la généralisation qui fera l'objet du deuxième chapitre de ce Mémoire. On est conduit à introduire une distance qui tende vers zéro avec $\cos\frac{\omega}{\alpha}$, c'est-à-dire *la distance de* z *au côté* AO *ou* OB *du secteur le plus voisin*. D'une façon précise, nous appellerons *d la plus courte distance du point* z *à la partie rectiligne* AOB *de la frontière de* D, *sur laquelle* on a, par hypothèse $|f|\leqq M$. On a plusieurs cas à distinguer.

13. 1° $|\omega|\leqq\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$ avec $\alpha>1$, alors il est clair que les rayons d'argument $\omega+\frac{\pi}{2}$ et $\omega-\frac{\pi}{2}$ sont intérieurs à D ou confondus avec un rayon frontière AO ou OB. Tout chemin conduisant de z à la frontière AOB doit donc franchir au moins un des rayons ci-dessus, si ledit

chemin n'est pas confondu avec le segment zO : la plus courte distance de z à la frontière rectiligne AOB est donc ici la distance zO, et l'on a $d = \rho$.

2° Lorsque $\alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < |\omega| < \frac{\alpha\pi}{2}$ en supposant $\alpha > 1$, ou lorsque $|\omega| < \frac{\alpha\pi}{2}$ en supposant $\alpha \leqq 1$ (c'est-à-dire alors dans tout D), il est clair que la plus courte distance de z à la partie AOB de la frontière, tout au moins lorsque z est à une distance de O inférieure à R_0 (R_0 minimum de la distance à O d'un point de l'arc frontière ACB), est le segment mené par z perpendiculaire à AO si $\omega > 0$ et à OB si $\omega < 0$. On a donc

$$d = \rho \sin\alpha\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{\alpha}\right]$$

en supposant par exemple $\omega > 0$, ce qui est possible sans introduire de restrictions.

Il faut étudier le rapport $\dfrac{d}{\cos\frac{\omega}{\alpha}}$. Nous poserons $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{\alpha} = \theta$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2\alpha} \qquad \text{si } \alpha > 1$$

en sorte que

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{si } \alpha \leqq 1$$

et le rapport précédent devient

$$\frac{d}{\cos\frac{\omega}{\alpha}} = \rho \cdot \frac{\sin\alpha\theta}{\sin\theta}.$$

Une étude élémentaire de la fonction $\frac{\sin\alpha\theta}{\sin\theta}$ prouve que si $\alpha > 1$ elle décroît lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2\alpha}$ et l'on a dans cet intervalle

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\alpha}} < \frac{\sin\alpha\theta}{\sin\theta} < \alpha;$$

si $\alpha \geqq 1$ elle croît lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et l'on a dans cet intervalle

$$\alpha < \frac{\sin\alpha\theta}{\sin\theta} < \sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

On aura donc, dans les deux cas, dans l'intervalle de variation de θ qu'il faut envisager

$$K_1(\alpha) < \frac{\sin\alpha\theta}{\sin\theta} < K_2(\alpha),$$

$K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha)$ étant deux fonctions positives de α seul dont l'expression nous est connue.

On aura donc dans ce deuxième cas :

$$K_1(\alpha) < \frac{d}{\rho\cos\frac{\omega}{\alpha}} < K_2(\alpha),$$

et par suite

$$\frac{d}{\rho K_2(\alpha)} < \cos\frac{\omega}{\alpha} < \frac{d}{\rho K_1(\alpha)}.$$

14. Reprenons maintenant la majorante

$$(1) \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\cos\frac{\omega}{\alpha}.\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

valable dans tout D et qui provient par élargissements successifs de la majorante de base égale à $\log M$ sur AOB, à $\log m$ sur ACB, c'est-à-dire, pour $\log\left|\frac{f}{M}\right|$, de la majorante φ_μ égale à zéro sur AOB et à $\mu = \log\left(\frac{m}{M}\right)$ sur ACB.

1° Dans la partie de D où $|\omega| \leqq \alpha\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ lorsque $\alpha > 1$, on a

$$\cos\frac{\omega}{\alpha} > \sin\frac{\pi}{2\alpha},$$

$$d = \rho;$$

par suite, $\log\left(\frac{m}{M}\right)$ étant < 0

$$(1'') \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\left[\sin\frac{\pi}{2\alpha}.\frac{1}{R^{\frac{1}{\alpha}}}\right].d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

2° Dans la partie de D où

$$\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < |\omega| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha > 1,$$

$$|\omega| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha \leqq 1,$$

et pour laquelle $\rho \leqq R_0$, on a

$$\cos\frac{\omega}{\alpha} > \frac{d}{\rho}\cdot\frac{1}{K_2(\alpha)},$$

par suite

$$(1''') \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\cdot\left[\frac{1}{K_2(\alpha).R^{\frac{1}{\alpha}}}\right].d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$K_2(\alpha)$ étant α si $\alpha > 1$ et $\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ lorsque $\alpha \leqq 1$. Les deux formules $(1'')$ et $(1''')$ peuvent être réunies en une seule en désignant par λ la plus petite des deux quantités positives

$$\frac{1}{R^{\frac{1}{\alpha}}}\sin\frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{K_2(\alpha)},$$

λ étant une fonction de α seul, c'est-à-dire ne dépendant que du domaine D : on a la majorante

$$(6) \qquad \boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\lambda.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1},}$$

où dans le second membre, z n'intervient que par l'expression $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ où figurent ses deux distances ρ et d à O et à la frontière rectiligne de D. (6) s'écrit encore

$$(6') \qquad \boxed{\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}},}$$

la constante positive λ ne dépendant que du domaine D.

15. A vrai dire, en ce qui concerne les points z pour lesquels

$$\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < |\omega| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha > 1,$$
$$|\omega| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha \leqq 1,$$

nous avons dû nous borner à considérer seulement les points de D pour lesquels $\rho \leqq R_0$ (minimum de la distance à O d'un point de l'arc ACB) et, jusqu'ici, la formule (6) ou (6′) n'est valable pour les points en question qu'avec cette restriction.

Mais un raisonnement général va nous prouver que la formule (6) ou (6′) est valable dans tout le domaine D à l'exception peut-être de la partie de D, intérieure à deux cercles de centres respectifs A et B, de rayon arbitrairement petit ε. Autrement dit, excluons de D la partie intérieure à ces deux cercles et soit D_ε le domaine restant, il existe alors une constante λ, positive et non nulle, ne dépendant que de D_ε (c'est-à-dire de D et de ε) telle que pour tout z dans D_ε, on ait

$$(6) \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\lambda.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

16. Nous poserons $\mu = \log\left(\frac{m}{M}\right)$ et considérerons la fonction $\log\left|\frac{f(z)}{M}\right|$ harmonique dans D; on a en vertu des hypothèses faites sur $f(z)$

$$\log\left|\frac{f}{M}\right| \leqq 0 \text{ sur AOB},$$

$$\log\left|\frac{f}{M}\right| \leqq \mu \text{ sur ACB}.$$

Elle est majorée dans D par la fonction $\varphi_\mu(z)$, harmonique et régulière dans D, égale à o sur AOB et à μ sur ACB. Si $\Phi(z)$ désigne la fonction harmonique et régulière dans D, égale à o sur AOB, à 1 sur ACB, on a évidemment

$$\varphi_\mu(z) = \mu.\Phi(z).$$

Il est clair que $\Phi(z)$ *ne dépend que du domaine* D, Φ est comprise entre o et 1 en tout point z intérieur à D.

Nous avons

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \mu.\Phi(z)$$

en tout point intérieur à D.

Il nous suffit de montrer que, dans tout D_ε, la fonction $\dfrac{\Phi(z)}{d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ est bornée inférieurement par un nombre *positif* λ (lequel ne dépendra évidemment que de D et ε) pour montrer la validité de (6) dans D_ε.

17. Nous raisonnerons par l'absurde. Si λ n'existait pas, *il existerait une suite* z_n *de points intérieurs à* D_ε *pour lesquels* $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n\rho_n^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ *tendrait vers zéro*.

D_ε étant borné, ces z_n ont au moins un point limite, et, en prélevant au besoin parmi les z_n une suite partielle, on peut supposer que les z_n ont un seul point limite que nous appellerons z_0.

z_0 ne peut être intérieur à D car $\Phi(z)$ étant régulière en tout point intérieur $\dfrac{\Phi(z)}{d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ a une limite positive finie et $\neq 0$ si z tend vers un point intérieur.

z_0 est donc nécessairement un point frontière. Ce n'est pas un point de l'arc ACB car $\Phi(z_n)$ tendrait vers 1, d_n et ρ_n ayant des limites $\neq 0$ (car A et B sont exclus par les cercles de rayon ε). Donc z_0 est nécessairement un point de AOB distinct de A et B. Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

18. *a.* D'abord, supposons que z_0 *est distinct* de o et appartient par exemple à OA. La fonction harmonique $\Phi(z)$ étant nulle sur OA y est analytique et se prolonge au delà de OA par symétrie, conformément au principe de Schwarz. En deux points z et z_1 symétriques par rapport à OA on aura $\Phi(z_1) = -\Phi(z)$. L'hypothèse faite sur les z_n exige que $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n}$ ait pour limite *zéro* lorsque $z_n \rightarrow z_0$ (car ρ_n a pour limite $\overline{Oz_0} \neq 0$) et dès que z_n est assez voisin de z_0, d_n représente la distance de z_n à la droite OA. Montrons que cela est impossible. Cela revient à prouver, $\Phi(z)$ étant *harmonique, régulière et nulle sur un segment* de droite OA, que le rapport $\dfrac{\Phi(z)}{d}$ ne peut avoir pour limite zéro lorsque z tend vers un point z_0 de OA, d étant la distance de z à OA.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer maintenant que OA est l'axe imaginaire, appeler Ψ la fonction conjuguée de Φ et $F(z) = \Phi + i\Psi$, la fonction holomorphe sur OA dont Φ est la partie réelle. Qu'arriverait-il si $\dfrac{\Phi}{d} \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow z_0$; cela voudrait dire que, en z_0, on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$ en posant, comme d'habitude, $z = x + iy$. Mais sur Oy ou OA on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \equiv 0$, car $\Phi(z) \equiv 0$ sur OA. Par conséquent, en vertu des équations de Cauchy-Riemann, on aurait $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$ en z_0 et par suite $F'(z_0) = 0$.

Envisageons la correspondance $Z = F(z)$ entre les deux plans z et Z au voisinage de z_0 auquel correspond un point Z_0 de l'axe imaginaire du plan $Z = X + iY$.

A cause de $X = \Phi(z)$, à tout point de Oy correspond un point de OY, Par conséquent, à la direction $z_0 t$ orientée comme Oy correspond une direction Z_0T portée par OY. De plus, pour $x > 0$ et assez petit on a $X > 0$ et pour $x < 0$ on a, en vertu du principe de symétrie, $X < 0$, donc Z_0T est orientée aussi comme OY. Mais la fonction $F(z)$ holomorphe en z_0, ayant sa dérivée nulle en z_0 et $p \geqq 2$ étant l'ordre de la première dérivée $F^{(p)}(z)$ qui ne s'annule pas en z_0, la transformation $Z = F(z)$ multiplie par p les angles issus de z_0. Si donc on envisage une direction $z_0 t_1$ telle que $\widehat{t z_0 t_1} = \frac{\pi}{p} + \eta$ (γ très petit), il lui correspondra une direction $Z_0 T_1$, telle que $\widehat{T Z_0 T_1} = \pi + p\eta$; or $z_0 t_1$ appartient au demi-plan $x < 0$ et $Z_0 T_1$ appartient au demi-plan $X > 0$, ce qui contredit le fait que les demi-plans $x > 0$ et $X > 0$ se correspondent au voisinage de z_0 et Z_0 ainsi que les demi-plans $x < 0$ et $X < 0$. On ne peut donc supposer $F'(z_0) = 0$, ni par conséquent $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ en z_0. On a donc nécessairement $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$ en z_0 et par suite $\frac{\Phi(z)}{d}$ *a une limite positive finie et* $\neq 0$ *lorsque* z *tend vers* z_0, ce qui contredit l'hypothèse faite sur les z_n. Donc z_0 ne peut pas être un point de AOB distinct de O.

b. Montrons maintenant que ce n'est pas le point O lui-même. En effet, la formule (6) a été déjà démontrée dans tout l'intérieur du secteur de même ouverture que D et de rayon R_0.

On a, *au voisinage de* O, $\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \mu.\lambda_0.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$, λ_0 étant une certaine constante positive $\neq 0$. En réalité, la manière même dont on a obtenu aux n^{os} 13 et suivants la formule (6) par majorations successives à partir d'une majorante harmonique fondamentale qui est précisément la fonction $\varphi_\mu(z) = \mu\Phi(z)$ prouve que, en tout point de D à une distance de O moindre que R_0 on a

$$\mu\Phi(z) < \mu.\lambda_0.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

c'est-à-dire, μ étant < 0,

$$\Phi(z) > \lambda_0.d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

donc, au voisinage de O dans D, $\dfrac{\Phi(z)}{d.\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ reste supérieure au nombre positif λ_0 et par conséquent une suite z_n ayant O pour limite et telle que $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n.\rho_n^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ tende vers zéro ne peut pas exister.

19. *En définitive*, il est prouvé qu'aucune suite infinie z_n telle que $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n.\rho_n^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ tende vers zéro, ne peut exister dans D_ε. *On en conclut donc l'existence d'une constante positive et non nulle* $\lambda(D, \varepsilon)$ *ne dépendant que de* D *et* ε *et telle que dans tout* D_ε *on ait*

$$\mu.\Phi(z) < \mu.\lambda.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1};$$

c'est-à-dire que la formule

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right).\lambda.d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \tag{6}$$

est valable dans tout D_ε.

Reste à voir si $\lambda(D, \varepsilon)$ peut tendre effectivement vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire s'il existe une suite z_n ayant A par exemple pour point limite, et telle que $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n}$ tende vers zéro. Nous y reviendrons dans la suite (n° 29).

20. Mais, en vue de la généralisation de (6) que nous ferons au Chapitre II, nous allons donner une démonstration directe du fait que nous avons démontré au n° 18 (*b*) en utilisant les résultats acquis dans les n^{os} 13 et suivants.

Montrons pour cela qu'une fonction $g(z)$ harmonique et régulière dans un secteur circulaire A′OB′ d'angle $\alpha\pi$ ($\alpha > 0$) et sur sa frontière sauf en O, positive dans le secteur, nulle sur les segments A′O et OB′ est telle que dans tout le secteur

$$\frac{g(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} > \lambda_0 > 0,$$

d étant la plus courte distance de z à la frontière A′OB′.

En effet, si λ_0 n'existait pas, il y aurait une suite z_n telle que $\dfrac{g(z_n)}{d_n \rho_n^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ tendrait vers zéro et l'on verrait, comme dans 18 (a), qu'elle ne peut pas avoir d'autre limite que le point O.

Or, l'étude géométrique de d faite au n° 13 prouve que : 1° ou bien $\dfrac{d_n}{\rho_n}$ est égal à 1, ou bien 2° $\dfrac{d_n}{\rho_n \cos \frac{\omega_n}{\alpha}}$ est compris entre deux limites positives $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha)$ ne dépendant que de α. D'ailleurs, $\dfrac{d_n}{\rho_n}$ n'est $= 1$ que si $\alpha > 1$ et $\cos \frac{\omega_n}{\alpha} > \sin \frac{\pi}{2\alpha}$, donc, le 1° rentre dans le 2°.

On en conclut que, si λ_0 n'existait pas, il existerait une suite z_n tendant vers O pour laquelle $\dfrac{g(z_n)}{\rho_n^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\omega_n}{\alpha}}$ tend vers zéro.

Or, faisons la transformation $u = \left(\dfrac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, ζ point de la bissectrice intérieure du secteur; le secteur devient un demi-cercle $A'_1 O_1 B'_1$ du plan u à droite de l'axe imaginaire et $g(z)$ devient une fonction de u, $g[z(u)]$ harmonique et régulière dans le demi-cercle et sur sa frontière, sauf peut-être en O'_1, positive dans le demi-cercle, nulle sur le diamètre $A'_1 O_1 B'_1$; mais alors $g[z(u)]$ est aussi régulière en O_1 (principe de symétrie).

Le module de u est $\rho' = \dfrac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}}$ (r module de ζ) et son argument est $\omega' = \dfrac{\omega}{\alpha}$, si ω est l'angle de la bissectrice avec Oz. L'existence de la suite des z_n entraîne donc l'existence d'une suite de points u_n tendant vers O_1 et tels que $\dfrac{g[z(u_n)]}{\rho'_n \cos \omega'_n}$, c'est-à-dire $\dfrac{g[z(u_n)]}{d'_n}$ tende vers zéro, d'_n étant la distance de u_n à $A'_1 O_1 B'_1$. Or, $g[z(u_n)]$ étant régulière en O_1 on a vu par le raisonnement général du n° 18 (a) que cela est impossible.

Donc, λ_0 positif et $\neq 0$ existe tel que dans le secteur $A'OB'$ d'ouverture $\alpha\pi$ ($\alpha > 0$) on ait

$$\frac{g(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} > \lambda_0 > 0,$$

C. Q. F. D.

21. On peut remarquer maintenant que les démonstrations données aux nos 19 et 20 prouvent non seulement que $\dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ est bornée inférieurement dans D_ε par un nombre positif $\lambda(D, \varepsilon) \neq 0$, mais encore que cette fonction est bornée *supérieurement* dans D_ε par un nombre positif fini $\lambda_1(D, \varepsilon)$ car elles excluent l'hypothèse d'une suite z_n de points de D_ε pour laquelle $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n\rho_n^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ deviendrait infinie, une telle suite z_n ne pouvant, en vertu de raisonnements analogues à ceux faits dans 19 et 20, avoir de point-limite intérieur à D_ε, ou situé sur ACB, ou situé sur AOB.

On a donc dans D_ε

$$\lambda(D, \varepsilon) < \frac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} < \lambda_1(D, \varepsilon).$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser plus loin cette remarque (dans le cas où $m > M$, c'est-à-dire $\mu > 0$).

Second cas : $m > M$.

22. Nous effectuons la transformation $u = \left(\dfrac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Comme dans le premier cas, nous avons toujours dans D_1 la majorante $\varphi(u)$

$$\log|f[z(u)]| \leq \varphi(u).$$

Mais la majoration de φ par $\varphi_1(u)$ effectuée au n° 2 du premier cas n'est plus ici valable. Nous considérons alors, non plus D'_1, mais, à droite de l'axe imaginaire, le domaine $\mathcal{D}'_1$ limité par le demi-cercle $A_2C_2B_2$ de rayon P_2, P_2 étant le *minimum* de la distance à O_1 d'un point de l'arc $A_1C_1B_1$:

$$P_2 = \left(\frac{R_0}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

R_0 *étant le minimum de la distance à* O *d'un point de l'arc* ACB. Le domaine $\mathcal{D}'_1$ est intérieur à D_1. Soit $\psi_1(u)$ la fonction harmonique régulière et harmonique dans $\mathcal{D}'_1$, égale à $\log M$ sur l'axe imaginaire et à $\log m$ sur le demi-cercle $A_2C_2B_2$; il est clair que, sur ce demi-cercle, on a

$$\log M \leqq \varphi_1(u) \leqq \log m.$$

Par suite,

$$\varphi_1(u) = \psi_1(u) \qquad \text{(en tout point de } A_2O_1B_2\text{)},$$
$$\varphi_1(u) \leqq \psi_1(u) \qquad \text{(en tout point de } A_2C_2B_2\text{)}.$$

Par suite, on aura $\varphi_1(u) \leqq \psi_1(u)$ en tout point de $\mathcal{D}'_1$, l'égalité n'étant possible que si $A_1C_1B_1$ se confond avec $A_2C_2B_2$, c'est-à-dire si ACB est un arc de cercle de centre O.

Donc, dans $\mathcal{D}'_1$ on aura

$$\log|f[z(u)]| \leqq \psi_1(u).$$

Dans la partie de D_1 extérieure à $\mathcal{D}'_1$ on pourrait prendre le prolongement analytique de $\psi_1(u)$ comme majorante, mais cette majorante y serait $> \log m$ et *il est plus simple de prendre la constante* $\log m$ *elle-même pour majorante de* $\log|f[z(u)]|$ *dans cette partie de* D_1.

Le calcul de $\psi_1(u)$ dans $\mathcal{D}'_1$ est identique à celui des nos 6 et suivants et l'on aura, en revenant à z,

$$(7) \quad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{m}{M}\right) \text{Arc sin}\left\{\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2 - 4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\}$$

ou encore

$$(7') \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{m}{M}\right) \text{Arc tang}\left\{\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\},$$

les Arcsin et Arctang étant pris entre O et $\frac{\pi}{2}$ pour $\left|\frac{\omega}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqq \rho \leqq R_0$, *ces formules étant valables dans le plus grand secteur circulaire* $\mathcal{D}'$ *de sommet* O *intérieur à* D, *c'est-à-dire dans le secteur circulaire* $\mathcal{D}'$ *de rayon* R_0.

Il faut remarquer que les formules (7) et (7′) ne donnent de majorante précise et simple que dans une partie de D et même dans une partie de D n'ayant pour frontière qu'une partie de la frontière rectiligne de D; *il y a en général toute une partie de la frontière de* D sur laquelle $|f| \leqq M$ (frontière rectiligne) qui échappe ici au domaine de la majorante, aux extrémités A et B de cette partie de la frontière.

23. On peut chercher des majorantes moins précises que (7) ou (7′) mais plus maniables. Nous chercherons pour cela à majorer la fonction

$$\operatorname{Arc\,sin}\left\{\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2-4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\}.$$

La quantité entre { } est $\leqq 1$ dans $\mathcal{D}'$. On peut d'ailleurs le voir en écrivant la quantité sous le radical sous la forme

$$\left[1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2+4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\cos^2\frac{\omega}{\alpha},$$

évidemment supérieure au carré de $2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, excepté sur la frontière circulaire de $\mathcal{D}'$ où elle lui est égale.

Or, pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, on a

$$0 \leqq \operatorname{Arc\,sin}\theta \leqq \frac{\pi}{2}\theta.$$

On aura ainsi la nouvelle majorante, valable dans $\mathcal{D}'$,

$$\boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2-4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}}, \tag{8}$$

l'égalité n'étant plus possible à l'intérieur de $\mathcal{D}'$.

Dans la formule (8) le facteur de $\log\left(\frac{m}{M}\right)$, au deuxième membre, est toujours $\leqq 1$ dans $\mathcal{D}'$. Par conséquent, dans $\mathcal{D}'$, la formule (8) entraîne $|f(z)| < m$ et la majoration faite de (7) à (8) ne donne pas dans $\mathcal{D}'$ un résultat moins bon que la majorante élémentaire $|f(z)| < m$.

Nous allons faire une nouvelle majoration du deuxième membre de (8) pour simplifier l'expression, mais, pour ne pas dépasser la majorante élémentaire $|f(z)| \leqq m$, la nouvelle majorante aura un domaine de validité moins grand que $\mathcal{D}'$ de (8).

24. Nous écrivons en effet (8) sous la forme

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2+4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\cos^2\frac{\omega}{\alpha}}},$$

et nous majorons le deuxième facteur du deuxième membre en supprimant la quantité $4\cos^2\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\alpha}$ sous le radical, il vient

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}, \tag{9}$$

qui devient illusoire pour ρ voisin de R_0. Nous pouvons d'ailleurs améliorer la formule (9) en partant non de (7) mais de (7′).

On a en effet

$$\operatorname{Arc\,tang}\theta < \theta \qquad \text{pour } \theta < 0.$$

Donc on élargit (7′) en écrivant

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}, \tag{9′}$$

l'égalité étant impossible à l'intérieur de $\mathcal{D}'$, et qui est une forme améliorée de (9) due au coefficient $\frac{2}{\pi} < 1$ mais, comme (9), devenant illusoire pour ρ voisin de R_0. Nous la restreindrons au secteur $\mathcal{D}''$ homothétique de $\mathcal{D}'$ par rapport à o et de rayon R'_0 tel que, pour $0 \leqq \rho \leqq R'_0 < R_0$, on ait

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}} \leqq 1,$$

c'est-à-dire

$$0 \leqq \rho \leqq R'_0 \qquad \text{avec } R'^{\frac{1}{\alpha}}_0 = R_0^{\frac{1}{\alpha}}(\sqrt{2}-1).$$

La formule (9') sera donc valable dans $\mathcal{D}''$ de même ouverture que D, de rayon $R'_0 = R_0(\sqrt{2}-1)^\alpha$, elle donnera une majorante de $|f(z)|$ plus étroite que la majorante élémentaire $|f(z)| < m$ et d'un type analogue au type simplifié donné pour le premier cas.

On aura, par conséquent, dans $\mathcal{D}''$,

$$\frac{2\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}} < \frac{2\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{R'_0}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}} = \frac{2\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{2}-1},$$

ce qui donne

$$\text{(10)} \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \frac{2}{\pi(\sqrt{2}-1)} \log\left(\frac{m}{M}\right) \cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

valable dans le secteur circulaire $\mathcal{D}''$ de rayon $R'_0 = R_0(\sqrt{2}-1)^\alpha$ et intérieur à D.

Cette majorante est absolument du type de la majorante (1) *donné dans le premier cas, mais elle n'est valable que dans une partie* $\mathcal{D}''$ *du domaine* D *primitif,* $\mathcal{D}''$ *et* D *ayant une partie de frontière commune, la partie des segments* AO *et* OB *de longueur* R'_0.

25. On peut alors se demander s'il n'est pas possible de remplacer le coefficient $\frac{2}{\pi(\sqrt{2}-1)}$ qui figure dans (10) par un coefficient inférieur, notamment par $\frac{4}{\pi}$ quitte à restreindre encore le rayon du secteur $\mathcal{D}''$ de

validité de (10). On va voir que le choix de $\frac{4}{\pi}$ *n'est pas possible dans toute l'ouverture de* D. C'est un coefficient trop faible.

Il faudrait en effet, la formule (7) ou (7') étant exacte, c'est-à-dire susceptible de devenir égalité (lorsque D est un secteur circulaire et $f(z)$ une fonction convenable dont le calcul est indiqué au n° 10), que l'on eût

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\left\{\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}\leqq C\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

dans toute la région $\rho < R''_0 < R_0$ (R''_0 suffisamment petit) du secteur D, pour que le coefficient C pût convenir dans une majorante du type (10).

En particulier, sur la bissectrice, $\omega = 0$, on devrait avoir

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\left\{\frac{2\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}\leqq C\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqq C\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\theta\leqq C\theta \qquad \text{pour } \theta > 0 \textit{ assez petit.}$$

Cela exige $C\geqq\frac{4}{\pi}$. Et, en effet, $\frac{2}{\pi(\sqrt{2}-1)} > \frac{4}{\pi}$ dans (10). Prenons exactement $C=\frac{4}{\pi}$. On a bien, sur la bissectrice,

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqq\frac{4}{\pi}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{pour } \rho\leqq R_0$$

et $C=\frac{4}{\pi}$ est possible sur la bissectrice de D, pour $\rho\leqq R_0$.

Au contraire, sur un rayon du secteur D, distinct de la bissectrice, on devrait avoir, en posant $\theta = \cos\frac{\omega}{\alpha}$, $(0 < \theta < 1)$ et $\eta = \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) \leqq \frac{4}{\pi}\theta\eta$$

pour que $C = \frac{4}{\pi}$ pût convenir. On devrait donc avoir

$$\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) \leqq 2\theta\eta \qquad \text{pour } \eta \text{ assez petit.}$$

Or, on a

$$\operatorname{Arc\,tang}\sigma = \sigma - \frac{\sigma^3}{3} + \ldots$$

et

$$\sigma = \frac{2\theta\eta}{1-\eta^2} = 2\theta\eta(1+\eta^2+\eta^4+\ldots).$$

θ étant pris fixe, cherchons le développement de $\operatorname{Arc\,tang}\sigma$ en puissances de η autour de $\eta = 0$.

Un calcul facile donne

$$\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) = 2\theta\eta + \eta^3\left(2\theta - \frac{8}{3}\theta^3\right) + \ldots.$$

Donc

$$\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) - 2\theta\eta = 2\theta\eta^3\left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right) + \ldots.$$

Pour que, sur le rayon fixe $\cos\frac{\omega}{\alpha} = \theta$, on puisse trouver un segment $0 < \eta < \eta_0(\theta)$ sur lequel $\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) \leqq 2\theta\eta$, il faut et il suffit que dans le développement qui précède, le coefficient $2\theta\left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right)$ de η^3 soit < 0, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{4}{3}\theta^2 > 1 \qquad \text{ou} \qquad \theta > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\omega}{\alpha}\right| < \frac{\pi}{6}.$$

On voit donc que *le choix de* $C = \frac{4}{\pi}$ *n'est pas valable dans tout un secteur d'ouverture* $\alpha\pi$ *comme* D, mais seulement dans un secteur d'ouverture $< \frac{\alpha\pi}{3}$ et de même bissectrice que D; cette ouverture peut être aussi voisine de $\frac{\alpha\pi}{3}$ que l'on voudra, à condition de réduire convenablement le rayon du secteur de validité de la majorante, le rayon de ce secteur tendant vers zéro lorsque l'ouverture du secteur tend vers $\frac{\alpha\pi}{3}$.

Au contraire, *tout coefficient* $C > \frac{4}{\pi}$ *peut convenir dans un secteur circulaire de même bissectrice et ouverture que* D, *mais de rayon suffisamment petit.* Il faut montrer pour cela que

$$\frac{2}{\pi}\,\text{Arc tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) \leqq C\theta\eta$$

est possible quel que soit θ entre o et 1 pour $0 < \eta < \eta_1$ (η_1 assez petit) dès que $C > \frac{4}{\pi}$.

A l'aide du développement précédent en puissances de η, on aura

$$\begin{aligned}\text{Arc tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) - \frac{C\pi}{2}\theta\eta &= \left(2 - \frac{C\pi}{2}\right)\theta\eta + 2\theta\eta^3\left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right) + \ldots \\ &= \theta\eta\left[\left(2 - \frac{C\pi}{2}\right) + 2\eta^2\left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right) + \ldots\right].\end{aligned}$$

θ étant pris fixe et > 0, si $\frac{C\pi}{2} > 2$ ou $C > \frac{4}{\pi}$, le premier terme du crochet du second membre est négatif; par conséquent, la différence qui est au premier membre sera < 0 pour $0 < \eta < \eta_0(\theta)$, $\eta_0(\theta)$ *existant pour toute valeur positive de* θ.

D'ailleurs, le crochet $\left[2 - \frac{C\pi}{2} + 2\eta^2\left(1 - \frac{4}{3}\theta^2\right) + \ldots\right]$ étant holomorphe en (η, θ) au voisinage de tout point $\eta = 0$, $\theta = \theta_0$ (θ_0 quelconque dans o, 1 extrémités comprises) gardera le signe $(-)$ de son premier terme dans toute une région $|\eta| < \eta_1$ quel que soit θ dans o, 1. Par suite

$$\text{Arc tang}\left(\frac{2\theta\eta}{1-\eta^2}\right) - \frac{C\pi}{2}\theta\eta$$

sera < 0 comme on le désire, pour $\eta < \eta_1$ quel que soit θ dans (o, 1). On aura donc bien

$$(10') \qquad \boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < C\log\left(\frac{m}{M}\right)\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

pour toute constante $C > \frac{4}{\pi}$ en se bornant à $[\rho < \rho_0(C)]$, c'est-à-dire à un secteur convenable de même *bissectrice et ouverture que* D, mais dont le rayon $\rho_0(C) < R_0$ dépend naturellement de la constante C et tend vers zéro lorsque C tend vers $\frac{4}{\pi}$.

26. On peut, à partir d'ici, raisonner comme au n° 11 du premier cas, pour avoir des majorantes valables dans des domaines intérieurs à D et aboutissant en O avec un écart angulaire arbitrairement petit, mais $\neq 0$, des segments OA et OB. Nous n'insisterons pas là-dessus. Nous remarquerons ensuite, comme au n° 13, que l'on peut remplacer $\cos\frac{\omega}{\alpha}$ en fonction des distances d et ρ et l'on a vu que dans tout le secteur $\mathcal{D}'$ le rapport $\frac{d}{\rho\cos\frac{\omega}{\alpha}}$ est compris entre deux limites positives $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha)$.

On en conclut comme au n° 14 que la formule (10′) peut être remplacée par

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\frac{m}{M}\lambda' d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

dans un certain secteur homothétique à D par rapport à o et dans un rapport convenable, *la constante positive* λ' *ne dépendant que du domaine* D.

27. Mais on peut élargir le domaine de validité d'une telle formule, car les raisonnements généraux faits aux n^{os} 19 et 20 nous ont montré que la fonction harmonique et régulière fondamentale $\Phi(z)$ introduite alors satisfait *dans le domaine* D_ε *obtenu en retranchant de* D *la partie intérieure aux cercles de* centres A et B de rayon ε (arbitrairement petit) à l'inégalité double

$$\lambda(D, \varepsilon) < \frac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} < \lambda_1(D, \varepsilon),$$

les deux constantes positives $\lambda(D, \varepsilon)$ et $\lambda_1(D, \varepsilon)$ ne dépendant que de D et de ε. Or $\varphi_\mu(z) = \mu\Phi(z)$ où $\mu = \log\left(\frac{m}{M}\right)$ majore $\log\left|\frac{f(z)}{M}\right|$ dans tout D.

On a donc ici, *dans tout* D_ε,

$$\boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \mu\,\Phi(z) < \log\left(\frac{m}{M}\right)\lambda_1(D,\varepsilon)\,d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1},} \tag{11}$$

qui est une formule analogue à la formule (6) du premier cas, valable dans D_ε pour $m > M$.

28. *Dans les deux cas* $m < M$ *et* $m > M$, *nous avons en définitive prouvé l'existence d'une constante positive* $\Lambda(D, \varepsilon)$ *dépendant seulement de* D *et* ε, *telle que dans tout* D_ε *on ait la majorante*

$$\boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\Lambda(D,\varepsilon)\,d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1};} \tag{12}$$

lorsque $m < M$ *la constante* $\Lambda(D, \varepsilon)$ *est la borne inférieure positive* λ *de* $\dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ dans D_ε; *lorsque* $m > M$, $\Lambda(D, \varepsilon)$ *sera la borne supérieure positive* λ_1 *de la même quantité dans* D_ε.

29. *Remarque.* — Examinons maintenant si $\lambda(D, \varepsilon)$ peut tendre vers zéro et si $\lambda_1(D, \varepsilon)$ peut tendre vers l'∞, lorsque ε tend vers zéro, afin de savoir si des formules telles que (6) et (11) peuvent s'étendre à tout le domaine D. Il faut pour cela examiner si le rapport $\dfrac{\Phi(z)}{d}$ peut avoir pour limite zéro ou l'∞ pour les points z_n d'une suite tendant vers A ou B, A par exemple. On voit d'abord qu'une suite telle que $\dfrac{\Phi(z_n)}{d_n} \to \infty$ existe toujours. En effet $\Phi(z)$ ayant pour limite 1 lorsque z tend vers un point de l'arc ACB, distinct de A et B, on peut choisir d'abord une suite de points $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de l'arc ACB ayant A pour limite, puis, une suite positive ε_n tendant vers zéro étant donnée arbitrairement, choisir, dans D, z_i tel que la distance

$$\overline{C_i z_i} < \varepsilon_i \quad \text{et} \quad |\Phi(z_i) - 1| < \varepsilon_i.$$

Alors, la suite des z_i aura pour seul point limite A, donc $d_i \to$ zéro; de plus $\Phi(z_i)$ tendra vers 1, donc $\dfrac{\Phi(z_i)}{d_i}$ tendra vers l'∞.

Examinons maintenant le cas de la limite zéro pour $\frac{\Phi(z_n)}{d_n}$. D'abord, on pourra, par la transformation déjà employée $u = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, ramener au domaine D_1 situé dans le plan u à droite de l'axe imaginaire, limité par l'arc de Jordan, $A_1C_1B_1$ et par le segment $A_1O_1B_1$ de l'axe imaginaire. $\Phi[z(u)]$ est la fonction $\psi(u)$ harmonique et régulière dans D_1 égale à *zéro* sur $A_1O_1B_1$, à *un* sur $A_1C_1B_1$. Les points A_1 et A, les segments A_1O_1 et AO se correspondent, la transformation $z(u)$ étant régulière en A_1. Par suite, si u et z sont deux points correspondants, dont les plus courtes distances respectives à A_1O_1 et à AO sont δ et d, le rapport $\frac{\delta}{d}$ a pour limite la valeur absolue finie et $\neq$ o de $\frac{du}{dz}$ au point $z = A$. Donc, si la suite z_n existe dans le plan z, la suite u_n correspondante sera telle que $\frac{\psi(u_n)}{\delta_n} \to 0$. Considérons la fonction $\chi(u)$ égale à *zéro sur* A_1O_1 *et son prolongement au delà de* O_1 *jusqu'à l'infini*, égale à *un sur le prolongement de* O_1A_1 *depuis* A_1 *jusqu'à l'infini*, $\chi(u)$ étant harmonique et régulière à droite de l'axe imaginaire. $\chi(u)$ est bien déterminée, c'est la fonction $\frac{\theta}{\pi}$, θ étant l'angle du vecteur $\overrightarrow{A_1O_1}$ avec le vecteur $\overrightarrow{A_1u}$. Sur $A_1C_1B_1$ on a

$$0 \leqq \chi(u) \leqq 1;$$

par suite, $\chi(u) \leqq \psi(u)$. Donc dans D_1 on a

$$0 < \chi(u) < \psi(u).$$

Par suite, si la suite u_n existe, on devra avoir

$$\lim \frac{\chi(u_n)}{\delta_n} = 0.$$

Or, soit une suite quelconque u_n du demi-plan à droite tendant vers A_1, on a

$$\frac{\chi(u_n)}{\delta_n} = \frac{\theta_n}{\pi\delta_n}.$$

Si la limite du quotient est zéro, il faudra que $\lim \theta_n = 0$ puisque $\lim \delta_n = 0$.

Dès que θ_n est assez petit, on a

$$\delta_n = \rho_n \sin\theta_n;$$

par suite

$$\frac{\chi(u_n)}{\delta_n} = \frac{\theta_n}{\pi\rho_n \sin\theta_n}$$

qui devient infini lorsque $\theta_n \to 0$. On arrive donc à une contradiction en supposant l'existence d'une suite z_n ayant A pour limite telle que

$$\frac{\Phi(z_n)}{d_n} = 0.$$

30. *Conclusion.* — 1° Lorsque $m < M$ il résulte de ce qui précède que $\dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ a *une borne inférieure positive* $\lambda_0(D)$, non seulement dans D *mais dans* D *lui-même* (¹). Il existe donc dans ce cas un nombre λ_0 positif et $\neq 0$ tel que

$$\boxed{\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\lambda_0\, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} \tag{6}$$

dans tout D, c'est-à-dire que, pour $m < M$, la formule (6) VAUT DANS TOUT D *pour une constante convenable* $\lambda_0(D)$ *ne dépendant que de* D.

Il n'est pas sans intérêt de noter que l'on a $0 < \lambda_0 d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} < 1$ dans tout D.

En effet, λ_0 étant la borne inférieure de $\dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ dans D on aura, en tout point intérieur à D, $\lambda_0 \leqq \dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$, c'est-à-dire $\lambda_0 d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \leqq \Phi(z)$, et puisque, en tout point intérieur à D, on a $0 < \Phi(z) < 1$, il résulte bien que

$$0 < \lambda_0\, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} < 1.$$

(¹) $\lambda(D, \varepsilon)$, borne inférieure de $\dfrac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ dans D_ε tend, en décroissant, vers $\lambda_0(D) > 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$.

La majorante (6) est donc bien du type $\left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^\beta$ avec $0 < \beta < 1$, signalé au début.

Mais il convient de noter que, sur l'arc ACB, on a $\Phi(z) = 1$, par suite

$$\lambda_0 \leqq \frac{1}{\max d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \text{ sur ACB}}.$$

Par suite, en tout point de ACB, où $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ n'est pas maximum, on aura

$$\beta = \lambda_0 \, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} < 1;$$

la majorante obtenue pour $|f|$ étant

$$|f| \leqq m^\beta M^{1-\beta} = m\left(\frac{M}{m}\right)^{1-\beta}.$$

le deuxième membre $m\left(\frac{M}{m}\right)^{1-\beta}$ est, en ces points, *supérieur à* m par conséquent, la formule (6) donne *sur* ACB une majorante en général trop forte, comme c'était à prévoir : il sera donc bon de ne l'utiliser que dans des domaines faisant partie de D, pouvant avoir avec D des points ou segments frontière situés sur AOB, mais non sur ACB.

2° Lorsque $m > M$, il résulte de ce qui précède (n° 29) que $\frac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ *n'a pas de borne supérieure finie dans tout* D et par conséquent *la formule* (11) *n'est valable que pour* D_ε et non pour D tout entier, le nombre $\lambda_1(D, \varepsilon)$ qui y figure devenant infini lorsque $\varepsilon \to 0$. On peut aussi le voir en plaçant z sur la partie γ de l'arc frontière ACB qui limite D_ε, et sur laquelle $\Phi(z) = 1$; on a alors

$$\lambda_1(D, \varepsilon) \geqq \frac{1}{\min \text{ de } d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \text{ sur } \gamma}$$

et il est clair que, si $\varepsilon \to 0$, le minimum de $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ sur γ tend vers zéro, donc $\lambda_1(D, \varepsilon) \to \infty$.

De plus, P_0 étant le point de γ où $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ atteint son minimum, on aura, en tout autre point de γ, $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} > d_0\rho_0^{\frac{1}{\alpha}-1}$. Donc

$$\lambda_1 \, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} > \lambda_1 \, d_0\rho_0^{\frac{1}{\alpha}-1} \geqq 1,$$

par conséquent la majorante (11) conduit pour ces points de γ (*et par suite pour les points de* D_ε *qui en sont voisins*) à une majorante de $\left|\frac{f(z)}{M}\right|$ qui est $> \frac{m}{M}$, c'est-à-dire à une majorante de $|f(z)|$ qui, étant $> m$, est moins bonne que la majorante élémentaire $|f(z)| \leqq m$.

On devra donc, dans l'emploi de la formule (11), *se borner aux parties de* D_ε *pour lesquelles* $\lambda_1 d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} < 1$, c'est-à-dire *à un voisinage plus ou moins étendu de la partie rectiligne* AOB.

3° Les formules précédentes (6) ou (11) ne sont donc avantageuses que pour des domaines Δ, intérieurs à D, mais pouvant avoir avec D un ou plusieurs segments frontière rectilignes communs γ, sur lesquels on a supposé $|f| \leqq M$. Lorsque $m < M$, ce ou ces segments γ peuvent coïncider avec la *totalité de la frontière rectiligne* AOB de D. Lorsque $m > M$, γ doit exclure les points A et B, mais peut comporter un ou des segments *quelconques intérieurs* à AOB.

A chaque domaine, tel que Δ, correspondent deux constantes $\lambda(\Delta, D)$, $\lambda_1(\Delta, D)$, bornes inférieure et supérieure de $\frac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ dans Δ et telles que dans Δ on ait

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{M}{m}\right)\lambda\, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

si $m < M$ [formule avantageuse dans tout Δ] et

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\lambda_1\, d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

si $m > M$ $\left[\text{formule avantageuse seulement dans la partie de } \Delta \text{ où } \lambda_1 d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} < 1\right]$.

CHAPITRE II.

DOMAINES QUELCONQUES.

1. Montrons maintenant que, sous certaines propriétés d'ailleurs très générales des frontières, les formules (6), (11), (12) s'étendent à un domaine quelconque D.

D sera supposé simplement ou multiplement connexe, ses frontières étant formées d'arcs de courbes de Jordan. Sur une partie F_1 de la frontière, on suppose $|f| \leqq M$ et sur le reste F_2 on suppose $|f| \leqq m$. Alors $\log \left| \frac{f(z)}{M} \right|$ est majorée par la fonction $\mu\Phi(z)$, $\Phi(z)$ harmonique et régulière dans D, prenant *sur* F_1 *la valeur zéro*, *sur* F_2 *la valeur un*, μ désignant la constante $\log\left(\frac{m}{M}\right)$. Les majorations (6), (11), (12) résultent, comme on l'a vu au chapitre précédent, de l'étude de l'ordre infinitésimal de $\Phi(z)$ lorsque z tend vers un point z_0 de F_1. Nous désignons par d la plus courte distance de z à F_1, et nous supposons que z *tend vers un point* z_0 de F_1. Il y a plusieurs cas à examiner selon que z_0 est intérieur à un arc de F_1 ou bien appartient à la fois à F_1 et à F_2, c'est-à-dire sépare deux arcs frontière appartenant l'un à F_1, l'autre à F_2.

2. *Supposons d'abord* z_0 *intérieur à un arc de* F_1. — Nous supposerons cet arc *rectifiable*, doué en chaque point d'une tangente variant à la Lipschitz. De façon précise, s étant l'arc de F_1, compté à partir de z_0, la courbe F_1 étant, au voisinage de z_0, représentée par $z = z(s)$, on supposera que $z' = \frac{dz}{ds}$ satisfait à la condition (L)

$$|z'(s) - z'(0)| < K|s|^\nu,$$

ν étant une constante telle que $0 < \nu \leqq 1$, pour $|s| < \sigma$. Dans ces conditions, si à l'aide d'un tel arc Az_0B de F_1 voisin de z_0 et d'un deuxième arc de Jordan ACB intérieur à D, on délimite un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, la fonction de Green $g(z)$ de $\mathcal{D}$, singulière en un point ζ arbitrairement fixé dans $\mathcal{D}$, possède en tout point z de l'arc Az_0B *une dérivée normale* $\frac{dg}{dn}$ *comprise entre deux limites positives* g_0 *et* g_1 lorsque z décrit un arc quelconque $A'z_0B'$ intérieur (extrémités comprises) à Az_0B.

Par $u = e^{-(g+ih)}$, le domaine $\mathcal{D}$ devient le cercle $\mathcal{D}_1 (|u| < 1)$ du plan u (h est la fonction conjuguée de g). A l'arc Az_0B correspond un arc $A_1u_0B_1$ du cercle précédent. Comme

$$\frac{du}{dz} = -e^{-(g+ih)}\left[\frac{dg}{dz} + i\frac{dh}{dz}\right],$$

il s'ensuit, lorsqu'on dérive suivant la normale dn, que

$$\left|\frac{du}{dn}\right| = \frac{dg}{dn},$$

puisque

$$\frac{dh}{dn} = \frac{dg}{ds} = 0 \qquad \text{et} \qquad |e^{-(g+ih)}| = 1 \text{ sur } Az_0B.$$

La fonction $u(z)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ est une fonction continue dans $\mathcal{D}$ et sur sa frontière, ayant une dérivée en tout point intérieur de l'arc Az_0B, ayant pour valeur

$$\frac{du}{dz} = u(z)\frac{dg}{dn}e^{-i\theta},$$

θ étant l'angle avec l'axe réel de la normale extérieure à $\mathcal{D}$. En tout point intérieur de l'arc Az_0B, la dérivée de u (prise vers l'intérieur de $\mathcal{D}$) a pour module $\left|\frac{du}{dz}\right| = \frac{dg}{dn}$.

Soient alors z et u deux points correspondants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$, d et δ leurs plus courtes distances aux arcs Az_0B et $A_1u_0B_1$. Lorsque z et u sont suffisamment voisins de z_0 et u_0, ces plus courtes distances sont *normales aux arcs précédents* (et tendent vers zéro avec $z - z_0$ et $u - u_0$). Soient zz_1 et uu'_1 ces plus courtes distances. A zz_1 la transformation $u = u(z)$ fait correspondre un arc uu_1 allant de u à un certain point u_1 de $A_1u_0B_1$, on aura donc

$$\delta \leqq \text{arc}\, uu_1 = \int_{z_1}^{z}\left|\frac{du}{dz}\right| |dz|.$$

Lorsque z reste à l'intérieur d'un domaine $\mathcal{D}'$, intérieur à $\mathcal{D}$, ayant avec $\mathcal{D}$ un arc frontière commun $A'z_0B'$ intérieur à l'arc Az_0B (les autres points frontière de $\mathcal{D}'$ étant intérieurs à $\mathcal{D}$), on aura *dans $\mathcal{D}'$ et sur sa frontière*

$$G_0 < \left|\frac{du}{dz}\right| < G_1,$$

G_0 et G_1 étant deux nombres positifs finis et $\neq 0$.

On en déduit d'abord

$$\delta \leqq d\,G_1.$$

Ensuite, en envisageant le chemin zz_2 qui correspond, par la transformation $[z \mid u]$, à la plus courte distance $\delta = uu_1$, on aura

$$d \leqq \operatorname{arc} zz_1 = \int_{u_1}^{u} \left| \frac{dz}{du} \right| |du|$$

et par suite

$$d \leqq \frac{\delta}{G_0}.$$

En définitive, on a, pourvu que z soit assez voisin de z_0 dans $\mathcal{D}$,

$$dG_0 \leqq \delta \leqq dG_1.$$

Considérons $\Phi(z)$; par $[z \mid u]$ elle devient

$$\psi(u) = \Phi[z(u)],$$

harmonique, positive et régulière dans $\mathcal{D}_1$, prenant la valeur zéro sur l'arc $A_1 u_0 B_1$, de la frontière du cercle $\mathcal{D}_1$. Donc $\psi(u)$ (principe de symétrie) *est analytique sur l'arc* $A_1 u_0 B_1$ et le raisonnement fait antérieurement (Chapitre I, n° 18) montre que $\frac{\psi(u)}{\delta}$ a une limite finie et $\neq$ o lorsque u tend vers u_0; cette limite étant la valeur $\neq$ o de $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ prise en u_0 suivant la normale ∂n intérieure au cercle $\mathcal{D}_1$. Il en résulte que, dans tout le domaine $\mathcal{D}'_1$ correspondant à $\mathcal{D}'$, on aura

$$\gamma_0 < \frac{\psi(u)}{\delta} < \gamma_1,$$

γ_0 et γ_1 étant deux constantes positives finies et $\neq$ o. Par suite

$$\frac{\Phi(z)}{d} = \frac{\Phi[z(u)]}{\delta} \frac{\delta}{d} = \frac{\psi}{\delta} \frac{\delta}{d}$$

restera dans $\mathcal{D}'$ compris entre deux bornes positives finies et $\neq$ o

$$\gamma_0 G_0 < \frac{\Phi(z)}{d} < \gamma_1 G_1.$$

Notre première conclusion est donc que $\frac{\Phi(z)}{d}$ *ne peut tendre ni vers zéro, ni vers l'∞, lorsque z tend vers un point z_0 intérieur à un arc de* F_1 *doué d'une tangente variant à la Lipschitz*, et dans tout domaine $\mathcal{D}'$ intérieur à D, ayant en commun avec D un arc frontière formé de points tels que z_0 de F_1, le rapport $\frac{\Phi(z)}{d}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies et $\neq 0$.

3. Supposons maintenant z_0 point de jonction de deux arcs de F_1 possédant chacun les propriétés du n° 2, mais faisant entre eux un angle $\alpha\pi$ (c'est-à-dire que l'ensemble des directions émanées de z_0 vers l'intérieur de D couvre un angle $\alpha\pi$, α peut être une constante quelconque positive, car ce que nous disons d'un domaine D s'applique évidemment à des surfaces de Riemann). Ici F_1 est rectifiable aux environs de z_0, si s est l'arc compté à partir de z_0, $z(s)$ est continue pour $|s| < s_0$, $z'(s)$ continue sauf en o est telle que $z'(+0)$ *et* $z'(-0)$ *sont différents;* on a

$$|z'(+0)| = |z'(-0)| = 1,$$

mais

$$\arg z'(+0) = \arg z'(-0) - \pi - \alpha\pi,$$

On a aussi

$$|z'(s) - z'(+0)| < K_1 |s|^{\nu_1} \quad \text{pour} \quad 0 < s < s_0, \; 0 < \nu_1 \leq 1,$$
$$|z'(s) - z'(-0)| < K_2 |s|^{\nu_2} \quad \text{pour} \; -s_0 < s < 0, \; 0 < \nu_2 \leq 1.$$

Nous désignerons par AOB l'ensemble des deux arcs F_1 ainsi envisagés au voisinage de z_0, z_0 pouvant, sans nuire à la généralité, être supposé placé à l'origine.

Faisons la transformation $z = v^{\alpha}$, le domaine D devient un domaine Δ du plan v (ou une surface de Riemann étalée sur le plan v), les arcs F_1 et F_2 de la frontière de D deviennent des arcs frontière φ_1 et φ_2 de Δ. $\Phi(z)$ devient $\Psi(v) = \Phi(v^{\alpha})$, harmonique et régulière dans Δ, prenant la valeur *zéro* sur les arcs φ_1, la valeur *un* sur les arcs φ_2.

Le point $z_0 = 0$ devient $v = 0$ et l'arc AOB de F_1 contenant $z_0 = 0$ devient un arc $A_1O_1B_1$ composé de deux arcs φ_1 *tangents en* $v = 0$. (Les arcs de F_1 et φ_1 voisins de l'origine sont désignés par s et σ.) On a entre les arcs correspondants la relation $ds = \alpha |v|^{\alpha-1} d\sigma$ provenant de $dz = \alpha v^{\alpha-1} dv$ puisque $ds = |dz|$ et $d\sigma = |dv|$. On a aussi

$$\arg \frac{dz}{ds} = (\alpha - 1) \arg v + \arg \frac{dv}{d\sigma},$$

les modules $\left|\frac{dz}{ds}\right|$ et $\left|\frac{dv}{d\sigma}\right|$ étant égaux à l'unité.

On a

$$\arg v'(+0) = \frac{1}{\alpha}\arg z'(+0) = \frac{1}{\alpha}\lim_{s=+0}\arg z,$$
$$\arg v'(-0) = \pi + \frac{1}{\alpha}\lim_{s=-0}\arg z,$$

car

$$\arg z'(+0) = \lim_{s=+0}\arg z,$$
$$\arg z'(-0) = \lim_{s=-0}\arg z + \pi,$$

et comme

$$\lim_{s=-0}\arg z = \lim_{s=+0}\arg z + \alpha\pi,$$

il vient

$$\arg v'(-0) = 2\pi + \frac{1}{\alpha}\lim_{s=+0}\arg z = \arg v'(+0) + 2\pi.$$

Donc

$$v'(+0) = v'(-0).$$

L'arc $A_1 O_1 B_1$ possède donc les propriétés de l'arc F_1 envisagé au n° 2. Si donc d_1 désigne la plus courte distance de v à cet arc φ_1, *le rapport* $\frac{\Psi(v)}{d_1}$ *reste, en vertu du n° 2 précédent, compris entre deux limites positives finies et non nulles dans tout le domaine Δ' découpé* dans Δ par un arc $A_1 C_1 B_1$ joignant dans Δ les points A_1 et B_1 extrémités du deuxième arc frontière $A_1 O_1 B_1$ de Δ'.

Il reste à trouver dans le plan z un infiniment petit qui soit constamment du même ordre que d_1, lorsque z décrit la partie D' de D, voisine de z_0, qui correspond à Δ'. D' est limitée par AOB et par l'arc de Jordan ACB qui à travers D réunit A à B.

L'étude du Chapitre I fait pressentir que $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ (où d désigne la plus courte distance du point z à l'arc AOB et ρ sa distance à z_0) est du même ordre que d_1. Démontrons, en toute rigueur, que le rapport $\frac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1}$ reste compris entre deux limites positives finies et $\neq 0$ lorsque z reste dans D' voisin de z_0.

Nous désignons par ρ_1 la distance de v à l'origine, en sorte que $\rho = \rho_1^\alpha$. Il faut donc prouver que, lorsque v parcourt Δ', le rapport

$$\frac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1} = \frac{d}{d_1\rho_1^{\alpha-1}}$$

reste compris entre deux limites positives finies et $\neq 0$.

Si cela n'était pas vrai, il existerait une suite infinie v_n de points de Δ' pour laquelle le rapport $\left(\frac{d}{d_1 \rho_1^{\alpha-1}}\right)_{v_n}$ tendrait vers zéro ou vers ∞. Une telle suite aurait un point-limite dans Δ' ou sur sa frontière. Ce point-limite ne peut être ailleurs qu'à l'origine O_1, sans quoi, en vertu de ce qu'on a vu au n° 2 précédent, ρ_1 ne tendant pas vers zéro, le rapport $\left(\frac{d}{d_1}\right)$ resterait compris entre deux limites finies et $\neq 0$, puisque autour du point-limite la transformation $z = v^\alpha$ et son inverse sont toutes les deux holomorphes. Prouvons donc que, *lorsque z est assez voisin de o*, le rapport précédent reste compris entre deux limites positives finies et $\neq 0$.

Nous pouvons toujours supposer, en restreignant au besoin Δ', que l'arc $A_1C_1B_1$ qui le délimite avec $A_1O_1B_1$ est un arc de cercle de centre O_1 de rayon suffisamment petit. Il en est alors de même de l'arc ACB qui, avec AOB, délimite le petit domaine D' voisin de O. On peut aussi supposer pour la brièveté de l'exposition que la normale intérieure en O_1 à l'arc $A_1O_1B_1$ est l'axe réel du plan v, la bissectrice intérieure du secteur curviligne D' étant l'axe réel du plan z.

L'arc $A_1O_1B_1$ ayant une tangente continue à la Lipschitz, la plus courte distance d_1 de v à cet arc sera fournie par une normale vv_1, menée de v à l'arc $A_1O_1B_1$ lorsque v est assez voisin de O_1. Évidemment, v_1 et v tendent vers O_1 en même temps. Au segment de normale vv_1 correspond, par $z = v^\alpha$, un arc allant de z au point z_1, homologue de v_1 et il est clair que $d \leqq \text{arc}\, zz_1$.

Donc

$$d \leqq \text{arc}\, zz_1 = \int_{v_1}^{v} \left|\frac{dz}{dv}\right| |dv| = \alpha \int_{v_1}^{v} |v|^{\alpha-1} |dv|,$$

intégrale prise sur le segment $v_1 v$. Sur ce segment $|v|$ est certainement au plus égal à la plus grande des deux distances $\overline{O_1 v}$ ou $\overline{O_1 v_1}$, c'est-à-dire à la plus grande des deux quantités $\rho_1 = |v|$ et $\rho'_1 = |v_1|$.

Donc

$$d \leqq \text{la plus grande des deux quantités} \begin{cases} \alpha \rho_1^{\alpha-1} d_1, \\ \alpha \rho_1'^{\alpha-1} d_1. \end{cases}$$

Or, ω désignant l'angle, infiniment petit avec l'arc $A_1O_1B_1$, que fait O_1v_1 avec la tangente en v_1 à cet arc, $\rho'_1 \cos\omega$ représente la distance de

O_1 à la normale $v_1 v$, par suite

$$\rho_1 \geqq \rho'_1 \cos\omega.$$

Donc, si l'arc $A_1 O_1 B_1$ est pris assez petit, on a $\cos\omega > 1 - \varepsilon$ sur tout cet arc, par suite $\rho_1 > \rho'_1(1-\varepsilon)$. Donc,

$$d \text{ sera } \leqq \text{ la plus grande des deux quantités } \begin{cases} \alpha\rho_1^{\alpha-1} d_1 \\ \dfrac{\alpha\rho_1^{\alpha-1} d_1}{(1-\varepsilon)^{\alpha-1}} \end{cases}$$

ε étant arbitrairement petit, $\dfrac{1}{(1-\varepsilon)^{\alpha-1}}$ sera arbitrairement voisin de l'unité.

Donc dans tout Δ' on a

$$\frac{d}{d_1 \rho_1^{\alpha-1}} < \alpha + \varepsilon',$$

le deuxième membre étant un nombre quelconque supérieur à α d'aussi peu qu'on le voudra, pourvu que l'arc $A_1 O_1 B_1$ soit assez petit.

Envisageons maintenant la plus courte distance d de z à AOB lorsque z est très voisin de O. Ce peut être le segment Oz lorsque $\alpha > 1$ ainsi qu'on l'a vu au n° 13 du chapitre précédent, alors $d = \rho$, ou bien une normale zz_2 menée de O à un des deux arcs OA ou OB, OA par exemple. Le rapport à étudier étant comme on sait la quantité $\dfrac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1}$ se réduit à $\dfrac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}}{d_1} = \dfrac{\rho_1}{d_1}$ lorsque $d = \rho$. Comme $d_1 < \rho_1$, le rapport étudié est certainement > 1 toutes les fois que $d = \rho$.

Lorsque d est une normale zz_2 menée de O à l'arc OA par exemple, en considérant l'arc vv_2 que décrit v lorsque z décrit zz_2, on a évidemment $d_1 \leqq \text{arc } vv_2$.

Donc

$$d_1 \leqq \int_{z_2}^{z} \left|\frac{dv}{dz}\right| |dz| = \frac{1}{\alpha}\int_{z_2}^{z} |z|^{\frac{1}{\alpha}-1} |dz|.$$

En désignant par ρ' la distance Oz_2, il est clair que, sur zz_2, $|z|$ sera inférieur à la plus grande des deux quantités ρ et ρ'. Donc

$$d_1 \leqq \text{ la plus grande des deux quantités } \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} d, \\ \dfrac{1}{\alpha}\rho'^{\frac{1}{\alpha}-1} d. \end{cases}$$

L'arc OA ayant une tangente lipschitzienne on voit, comme précédemment que, si cet arc OA est assez petit (ainsi que OB) on a toujours $\rho > \rho'(1-\varepsilon)$.

Donc

$$d_1 < \text{la plus grande des deux quantités} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha} d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}, \\ \dfrac{1}{\alpha} d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \dfrac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}-1}}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$d_1 < \frac{1}{\alpha - \varepsilon'} d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

[ε' arbitrairement petit, puisque, ε étant arbitrairement petit, le nombre $\dfrac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ est arbitrairement voisin de 1].

Dans le cas présent, le rapport $\dfrac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1}$ est $> (\alpha - \varepsilon')$, ε' arbitrairement petit pourvu que AOB soit assez petit.

Le rapport $\dfrac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1}$ est donc dans Δ' supérieur à la plus petite des deux quantités, $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ (\alpha - \varepsilon') \end{array} \right.$.

En définitive, si $\alpha > 1$, on a

$$1 \leqq \frac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1} < \alpha + \varepsilon.$$

Si $\alpha \leqq 1$, on a

$$\alpha - \varepsilon < \frac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1} < \alpha + \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit pourvu que l'arc AOB soit assez petit.

Il est donc prouvé qu'au voisinage de O le rapport $\dfrac{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}{d_1}$ reste compris entre deux limites positives finies et $\neq 0$. Il en résulte immédiatement que *le rapport*

$$\frac{\Psi(v)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} = \frac{\Phi(z)}{d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$$

est comme le rapport $\frac{\Psi(v)}{d_1}$ *compris entre deux limites positives finies et* $\neq 0$ *dans tout le domaine* Δ'.

4. Excluons maintenant de D le voisinage (de rayon ε) de tous les points de jonction des arcs frontière F_1 (sur lesquels $\Phi = 0$) et des arcs frontière F_2 (sur lesquels $\Phi = 1$) et supposons d'abord que les *arcs frontière* F_1 soient tous des arcs rectifiables à tangente lipschitzienne et sans points anguleux. Désignons par d la plus courte distance de z aux arcs frontière F_1, et par D_ε le domaine qui résulte de D lorsqu'on enlève le voisinage (ε) des points de jonction. Il résulte de l'étude faite aux n^{os} 2 et 3 que dans D_ε, $\frac{\Phi(z)}{d}$ a une borne inférieure $\lambda(D, \varepsilon)$ et une borne supérieure $\lambda_1(D, \varepsilon)$ ne dépendant que de D et ε :

$$\lambda(D, \varepsilon) \leqq \frac{\Phi(z)}{d} \leqq \lambda_1(D, \varepsilon).$$

On sait d'ailleurs, par l'exemple du n° 29 (Chapitre I) que $\lambda_1(D, \varepsilon)$ devient infini si ε tend vers zéro.

D'ailleurs, en faisant déplacer z sur les arcs frontière F_2 qui bornent D_ε et sur lesquels $\Phi(z) = 1$ on voit que

$$\lambda_1(D, \varepsilon) \geqq \frac{1}{\min d \text{ sur } F_2},$$

et lorsque ε tend vers zéro il est clair que le minimum de d sur F_2 tend vers zéro, donc $\lambda_1(D, \varepsilon)$ devient infini lorsque ε tend vers zéro.

La question de savoir si $\lambda(D, \varepsilon)$ peut tendre vers zéro avec ε dépend des hypothèses faites sur la frontière de D aux points de jonction de F_1 avec F_2. Nous ne l'étudierons pas en détail. Disons seulement que, si un tel point C est, par exemple, situé sur un arc frontière de D possédant une tangente continue lipschitzienne autour de C, on verra aisément par une représentation conforme auxiliaire transformant la partie de D voisine de C en un cercle que $\frac{\Phi}{d}$ ne peut tendre vers zéro pour aucune suite de points de D tendant vers C.

On utilisera pour cela d'une part l'étude faite au n° 2 du présent chapitre (sur les limites du rapport $\frac{d}{d_1}$ par représentation conforme) et d'autre part l'étude faite du n° 29 du Chapitre I.

Si tous les points de jonction sont du type de C, alors $\lambda(D, \varepsilon)$ reste $> \lambda_0(D) > 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$, et par suite la formule $\Phi(z) \geqq d\lambda_0$ *est bonne dans tout* D.

5. De ce qui précède, on déduit (si les arcs F_1 sont à tangente lipschitzienne) la majorante

$$(13) \qquad \left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda(D,\varepsilon)d} \qquad \text{pour } m < M \text{ dans } D_\varepsilon,$$

et, éventuellement dans D, si $\lambda(D, \varepsilon) > \lambda_0(D) > 0$ pour $\varepsilon \to 0$,

$$(13') \qquad \left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda_0 d} \qquad \text{dans tout } D.$$

Si $m > M$ on a, au contraire,

$$(14) \qquad \left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda_1(D,\varepsilon)d}$$

valable seulement dans D_ε.

Lorsque les arcs frontière F_1 présentent des points anguleux en nombre fini $C_1 C_2, \ldots, C_k$ où se rencontrent des arcs de F_1 à tangente lipschitzienne faisant en C_i l'angle $\alpha_i \pi$, on voit tout de suite en désignant par ρ_i la distance de z à C_i que

$$\frac{\Phi(z)}{d \prod_1^K \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}}$$

a deux bornes inférieure $\lambda'(D, \varepsilon)$, et supérieure $\lambda'_1(D, \varepsilon)$ dans tout domaine D_ε, d'où les formules

$$\lambda' d \prod_1^K \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1} < \Phi < \lambda'_1 d \prod_1^K \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}$$

valables dans D_ε et les majorations correspondantes

$$(15) \qquad \left|\frac{f(z)}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda' d \prod_1^K \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}} \qquad \text{pour } \frac{m}{M} < 1$$

et

$$(16) \qquad \left|\frac{f(z)}{\mathrm{M}}\right| < \left(\frac{m}{\mathrm{M}}\right)^{\lambda_1 d \prod\limits_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}} \qquad \text{pour } \frac{m}{\mathrm{M}} > 1,$$

les formules précédentes n'étant avantageuses (comme on l'a déjà fait remarquer au n° 30 du Chapitre I) que *dans des domaines* Δ *intérieurs à* D, *ayant en commun avec* D *des points ou arcs frontière appartenant tous à* F_1 (et excluant les points de jonction de F_1 avec F_2). Comme on l'a vu (n° 30, Chapitre I), on a en tout point intérieur à D_ε

$$\lambda'(\mathrm{D}, \varepsilon) \leqq \frac{\Phi(z)}{d \prod\limits_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}} < \frac{1}{d \prod\limits_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}}, \qquad \text{car } \Phi(z) < 1;$$

on en déduit

$$0 < \lambda'(\mathrm{D}, \varepsilon)\, d \prod_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1} < 1$$

dans D et par suite (13) ou (15) est *avantageuse lorsque* $m < \mathrm{M}$ *quel que soit* Δ *pourvu qu'il n'ait pas de point frontière sur* F_2 car *sur* F_2 on voit en raisonnant comme au n° 30, Chapitre I, 1°, qu'en général la formule (13) ou (15) donne une majorante de $|f|$ qui surpasse m; sur F_2 (13) ou (15) n'est donc pas avantageuse). De même, lorsque $m > \mathrm{M}$ on verra que (14) ou (16) ne sont avantageuses que dans la partie de Δ où $\lambda_1 d < 1$ ou bien

$$\lambda_1 d \prod_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1} < 1,$$

car on a vu (n° 30, Chapitre I, 2°) qu'au voisinage de F_2 les produits $\lambda_1 d$ ou

$$\lambda_1 d \prod_1^{\mathrm{K}} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}$$

peuvent devenir > 1 et fournir dans certaines parties de Δ une majorante de $|f|$ qui surpasse la majorante élémentaire $|f| \leqq m$.

6. Dans ce qui précède, moyennant des hypothèses sur *les arcs frontière* F_1, où l'on a $|f(z)| \leqq \mathrm{M}$, nous avons obtenu une majorante de $|f|$

dans des domaines Δ intérieurs à D et *ayant en commun avec* D *des arcs frontière appartenant tous à* F_1 (et excluant les points de jonction des arcs F_1 et F_2). On peut maintenant *à condition de faire sur les arcs frontière* F_1 (où l'on suppose $|f(z)| \leq m$) *les mêmes hypothèses que sur les arcs* F_2 (*tangente continue et lipschitzienne avec points anguleux possibles en nombre fini*) obtenir, à partir de la précédente, une majorante meilleure que la précédente, valable dans tout le domaine D_ε obtenu en excluant de D le voisinage (de rayon ε) des points de jonction de F_1 et F_2, et, *a fortiori, dans des domaines* Δ *intérieurs à* D, *ayant avec* D *des arcs frontière communs appartenant à* F_1 et à F_2.

7. Considérons en effet $\Phi(z)$ harmonique et régulière dans D, prenant sur F_1 et F_2 respectivement les valeurs *zéro* et *un*. Alors $1 - \Phi(z)$ harmonique et régulière dans D prendra sur F_1 la valeur *un*, et sur F_2 la valeur *zéro*; z étant un point de D, on appellera d_1 sa plus courte distance à F_1, d_2 sa plus courte distance à F_2. Pour simplifier, nous supposerons F_1 à tangente lipschitzienne mais sans point anguleux; de même F_2; nous admettons des points anguleux à la jonction de F_1 et F_2. Si F_1 par exemple présentait des points anguleux il faudrait remplacer, dans la suite, d_1 par un terme tel que

$$d_1 \prod_1^{K} \rho_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ étant les points anguleux (*voir* le numéro précédent).

Alors, il résulte de ce qui précède que $\dfrac{\Phi(z)}{d_1}$ reste compris dans D entre deux bornes $a_1(D, \varepsilon)$ et $b_1(D, \varepsilon)$ positives, finies et $\neq 0$, et en permutant les rôles de F_1 et F_2 que $\dfrac{1-\Phi(z)}{d_2}$ reste compris dans D entre deux bornes

$$a_2(D, \varepsilon) \quad \text{et} \quad b_2(D, \varepsilon):$$

$$a_1 < \frac{\Phi}{d_1} < b_1, \qquad a_2 < \frac{1-\Phi}{d_2} < b_2.$$

Il en résulte que

$$\frac{a_1}{b_2}\frac{d_1}{d_2} < \frac{\Phi}{1-\Phi} < \frac{b_1}{a_2}\frac{d_1}{d_2},$$

c'est-à-dire

$$A\frac{d_1}{d_2} < \frac{\Phi}{1-\Phi} < A_1\frac{d_1}{d_2}$$

pour des valeurs convenables $A(D, \varepsilon)$ et $A_1(D, \varepsilon)$ positives et finies. Puisque Φ est entre 0 et 1, il résulte de ce qui précède la double borne

$$\frac{A\delta}{1+A\delta} < \Phi < \frac{A_1\delta}{1+A_1\delta}, \qquad \text{en posant } \delta = \frac{d_1}{d_2}.$$

La double borne obtenue pour Φ a l'avantage de se réduire, comme Φ, *à zéro* sur F_1 (puisque, sur F_1, $\delta = 0$) et à *un sur* F_2 (sur F_2, $\delta = \infty$) et par conséquent, de conduire à une majorante de $|f|$ se réduisant à M sur F_1 et à m sur F_2. Cette majorante est

$$\boxed{\text{si } m < M, \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{A\delta}{1+A\delta},} \tag{17}$$

$$\boxed{\text{si } m > M, \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \log\left(\frac{m}{M}\right)\frac{A_1\delta}{1+A_1\delta}.} \tag{18}$$

où $\delta = \frac{d_1}{d_2}$, $A(D, \varepsilon) < A_1(D, \varepsilon)$, constantes positives finies. (17) et (18) sont valables dans tout D_ε et les deux quantités $\frac{A\delta}{1+A\delta}$ et $\frac{A_1\delta}{1+A_1\delta}$ sont comprises entre 0 et 1 comme le β de la formule $\left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^\beta$ rappelée au début du mémoire en sorte que les formules (17) et (18) sont avantageuses dans tout D_ε.

Mais en vertu des formules $A = \frac{a_1}{b_2}$, $A_1 = \frac{b_1}{a_2}$, on voit (puisque b_1 et b_2 deviennent infinis quand $\varepsilon \to 0$, alors que a_1 et a_2 restent finis), que A *tend vers zéro et* A_1 *vers l'infini, lorsque* $\varepsilon \to 0$, *en sorte que les formules* (17) *et* (18) *ne s'étendent pas à tout* D, *mais exigent toujours qu'on écarte le voisinage* ε *des points de jonction de* F_1 *et* F_2.

8. Disons un mot du *cas où l'on fait sur les frontières de* D *des hypothèses moins restrictives que les précédentes.* On peut obtenir encore des majorantes des types précédents, valables seulement dans des domaines Δ ayant encore des *points frontière*, mais non des arcs frontière communs avec D. A cause de la grande diversité des cas qu'on

peut envisager, nous nous bornerons ici à quelques indications. Supposons, par exemple, F_1 et F_2 *arcs de Jordan sans points multiples*, avec $|f| \leqq M$ sur F_1 et $|f| \leqq m$ sur F_2. Soit O un point appartenant à un arc F_1 et non jonction d'un F_1 avec un F_2. Supposons qu'il soit possible de trouver un secteur circulaire Σ d'angle $\alpha\pi$, de sommet O, de rayon assez petit pour que tous ses points sauf O soient intérieurs à D, AO et OB seront les côtés rectilignes du secteur. Si par exemple $M > m$, on aura $|f| < M$ sur AO et OB. Sur l'arc circulaire ACB, on aura $|f| < m_1 = m^\beta M^{1-\beta}$ (avec β constante, $0 < \beta < 1$). Puisque $m_1 < M$, on pourra, dans le secteur Σ, avoir la majorante (6)

$$\left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m_1}{M}\right)^{\lambda d \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}} = \left(\frac{m}{M}\right)^{\lambda\beta d \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}}$$

et par conséquent, dans tout domaine Δ intérieur à D, aboutissant en O par l'intérieur de Σ [1] et pouvant d'ailleurs aboutir à des arcs F_2 (mais sur ces arcs la majorante n'est pas avantageuse), on aura encore une majorante du type (6)

$$\left|\frac{f}{M}\right| < \left(\frac{m}{M}\right)^{\Lambda d \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}},$$

$\Lambda =$ constante positive, $\rho =$ distance $\overline{Oz}$, $d =$ distance de z à AOB.

9. *Conclusion.* — En règle générale, lorsque F_1 et F_2 sont simplement des arcs de Jordan, il suffira donc, pour pouvoir utiliser les majorantes établies dans ce mémoire sous les conditions de frontière envisagées au Chapitre I ou au Chapitre II (n^{os} 1 à 7), de considérer des domaines Δ intérieurs à D, limités par exemple par des courbes analytiques aboutissant à des points de F_1 ou F_2, d'établir d'abord une première limitation élémentaire *sur les courbes frontière* de Δ, à partir de laquelle, par application des formules du présent mémoire, on obtiendra des limitations plus précises valables dans tout Δ.

---

[1] C'est-à-dire que la partie de Δ suffisamment voisine de o devra être intérieure à Σ.