ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

# Fonctions continues sans dérivées formées avec les itérées d'une fraction rationnelle

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 48 (1931), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__1_0>

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE


# FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉES

FORMÉES

## AVEC LES ITÉRÉES D'UNE FRACTION RATIONNELLE


PAR M. GASTON JULIA


*Introduction.* — L'étude des séries du type $\Sigma a_n R_n(z)$, où les $a_n$ sont des constantes, et les $R_n$ les itérées d'une fraction rationnelle $R(z)$ [voir *C. R. Acad. Sc.*, 180 et 181, et *Acta Mathematica*, t. 56 (*Mémoire sur la convergence*...)] m'a conduit, de la façon la plus naturelle, à un type très général de fonctions continues sans dérivées, dans lequel figure l'exemple célèbre que Weierstrass a, le premier, donné de ce fait. On s'est borné ici aux fractions les plus simples, à savoir les fractions rationnelles à cercle fondamental régulières de la première espèce.

On a porté son attention d'une manière toute spéciale sur les antécédents successifs d'un point double (ici le point $+1$) situé sur le cercle fondamental $\mathcal{C}$, lesquels, on le sait (*voir* n° 1 du présent Mémoire), ont pour ensemble dérivé la circonférence entière.

En considérant les valeurs de

$$S(Z) = \sum_{0}^{\infty} a_n R_n(Z)$$

*aux antécédents consécutifs d'ordre p,* $Z_1^{(p)}$ et $Z_2^{(p)}$ *qui encadrent un point* $Z_0$ *arbitraire de* $\mathcal{C}$, on voit d'abord que $Z_1^{(p)}$ et $Z_2^{(p)}$ tendent vers $Z_0$ pour $p=\infty$, on évalue sommairement l'ordre infinitésimal de $|Z_1^{(p)}-Z_2^{(p)}|$ et de $|S(Z_1^{(p)})-S(Z_2^{(p)})|$ d'où l'on déduit, sous certaines conditions, que le quotient différentiel devient infini avec $p$ au point $Z_0$.

1. Soit $R(Z)$ une fraction de degré $d$, rationnelle, à cercle fondamental $\mathcal{C}[|Z|=1]$, régulière et de première espèce (voir *Principes géométriques d'Analyse*, I, p. 58, *a*, et aussi *Acta*, t. 56, p. 160, n° 7). Elle admet deux points doubles attractifs $\alpha$ et $\beta$ symétriques par rapport à $\mathcal{C}[\alpha=R(\alpha); |s=R'(\alpha)|<1]$ et $d-1$ points doubles répulsifs situés sur $\mathcal{C}$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $+1$ en est un $[R(+1)=+1,\ R'(+1)>1]$. J'ai démontré ailleurs [voir *Mémoires sur l'itération des fractions rationnelles* (*J. de Jordan*, 1918, n° 21) et *Principes géométriques d'Analyse*, I, p. 93, 2°] que sur $\mathcal{C}$ on a $|R'(Z)|>k>1$ tout au moins lorsque $|\alpha|$ est assez petit (¹). Les antécédents successifs d'un point quelconque de $\mathcal{C}$ forment un ensemble dénombrable admettant tout point de $\mathcal{C}$ pour point limite. En effet, lorsque $Z$ décrit un arc quelconque $(Z_1 Z_2)$ de $\mathcal{C}$ dans le sens positif, de longueur $\delta$, $R_n(Z)$ décrit un arc $\left(\overparen{R_n(Z_1), R_n(Z_2)}\right)$ dans le sens positif, dont la longueur est $>k^n\delta$. Par conséquent, quelque petit que soit $(Z_1 Z_2)$, son conséquent d'ordre $n$ est, pour $n$ assez grand, plus long que la longueur de $\mathcal{C}$, recouvre tout $\mathcal{C}$, et par conséquent renferme au moins 1 antécédent d'ordre $n$ de $+1$. *C'est sur ces antécédents que nous allons porter notre attention.* Le point $+1$ possède sur $\mathcal{C}$ $(d-1)$ antécédents d'ordre un $\zeta_i$ distincts de lui-même $[R(\zeta_i)=+1,\ \zeta_i\neq 1]$. Nous les numérotons $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{d-1}$ dans l'ordre où nous les rencontrons à partir de $+1$ dans le sens positif chacun des arcs $\overparen{1\zeta_1}, \overparen{\zeta_1\zeta_2}, \ldots, \overparen{\zeta_{d-1}1}$ est $<\frac{2\pi}{k}\cdot$ Considérons, en parcourant $\mathcal{C}$ dans le sens positif, deux antécédents consécutifs *d'ordre n* de $+1$ ce sont dans l'ordre, deux points $Z_1 Z_2$ tels que

$$R_n(Z_1)=R_n(Z_2)=+1,$$

(¹) Lorsque $Z=R(z)$ est fonction rationnelle à cercle fondamental $\mathcal{C}(|Z|=1)$ régulière et de première espèce, *avec l'origine et l'infini pour points doubles* et tels que entre $Z_1$ et $Z_2$ il n'y ait aucune racine de $R_n(Z) = +1$. Désignons par $\delta$ la longueur de l'arc $Z_1 Z_2$ décrit comme nous l'avons dit dans le sens positif. Lorsque Z décrit cet arc $Z_1 Z_2$, $R_n(Z)$ décrit, dans le sens positif, un arc allant de $+1$ à $+1$, c'est-à-dire exactement une circonférence entière, tandis que les points $R(Z), R_2(Z), \ldots, R_{n-1}(Z)$ décrivent des arcs de longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, tous inférieurs à une circonférence : en particulier $R_{n-1}(Z)$ décrira un arc compris entre deux antécédents d'ordre un de $+1$, *consécutifs sur* $\mathcal{C}$ [$R_n(Z)$ décrivant un arc de longueur $2\pi$ on aura $\delta_n = 2\pi > k^n \delta$].

2. Envisageons la série

$$\sum_0^\infty b^n R_n(Z) \qquad \text{avec } |b| < 1. \tag{1}$$

Elle est uniformément convergente sur $\mathcal{C}$ et y représente une fonc-

---

*attractifs*, on a (*loc. cit.*) sur $\mathcal{C}$, $|R'(z)| > k > 1$. Examinons le cas où les points attractifs $\alpha$ et $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ ($|\alpha| < 1$) sont distincts de l'origine et de l'infini. On ramène au cas précédent par la transformation

$$z = \frac{u - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}, \qquad Z = \frac{U - \alpha}{1 - \bar{\alpha} U}.$$

Alors $U(u)$ admet les points doubles attractifs $\alpha$ et $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$.

On a

$$\left|\frac{dU}{du}\right| = \left|\frac{dU}{dZ}\right| \left|\frac{dZ}{dz}\right| \left|\frac{dz}{du}\right|.$$

Or

$$\left|\frac{dz}{du}\right| = \frac{1 - |\alpha|^2}{|\alpha|^2} \frac{1}{\left|u - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right|^2},$$

et expression analogue pour $\left|\frac{dZ}{dU}\right|$.

D'où

$$\left|\frac{dU}{du}\right| = \left|\frac{dZ}{dz}\right| \left|\frac{U - \frac{1}{\bar{\alpha}}}{u - \frac{1}{\bar{\alpha}}}\right|^2 = \left|\frac{dZ}{dz}\right| \left|\frac{z + \frac{1}{\bar{\alpha}}}{Z + \frac{1}{\bar{\alpha}}}\right|^2.$$

Le point $\left(-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$ est extérieur à $\mathcal{C}$; il est alors clair que, lorsque $\alpha$ est assez tion $S(Z)$, fonction continue de $Z$ ou de l'arc $\theta$, abscisse curviligne de $Z$ sur $\mathcal{C}$ $[Z = e^{i\theta}]$. Montrons que sous certaines conditions d'inégalité pour $b$, c'est-à-dire, si $b$ assez voisin de $1$, $S(Z)$ *n'a de dérivée finie par rapport à* $Z$ *ou* $\theta$ *en aucun point de* $\mathcal{C}$. Nous ferons le calcul par rapport à $Z$, puisque $\frac{\Delta Z}{\Delta \theta}$ a en tout point du cercle une limite finie qui est $ie^{i\theta}$ et nous montrerons que le rapport $\frac{S(Z') - S(Z'')}{Z' - Z''}$ n'a de limite finie en aucun point $Z'$ du cercle lorsque $Z''$ tend vers $Z'$.

Deux cas sont à distinguer :

1° Le point envisagé est antécédent d'ordre $n$ de $+1$;
2° Le point envisagé n'est pas antécédent de $+1$.

3. Premier cas : *Le point envisagé est antécédent d'ordre $n$ de $+1$.* — Appelons-le $Z_0$. Il est clair, alors, que $R_n(Z_0) = +1$ entraîne $R_{n+K}(Z_0) = +1$ pour tout $K > 0$. Nous appellerons $Z_p$ l'antécédent d'ordre $n+p$ de $+1$ qui se rencontre après $Z_0$ lorsqu'on décrit $\mathcal{C}$ dans le sens positif. Évidemment $Z_p \to Z_0$ lorsque $p \to \infty$. On a $R_{n+K}(Z_p) = +1$ pour $K \geqq p > 1$ mais $R_{n+K}(Z_p) \neq +1$ pour $0 \leqq K < p$.

---

voisin de zéro, $\frac{1}{\alpha}$ est assez loin pour que le rapport entre le *minimum* et le *maximum* de la distance de $\frac{1}{\alpha}$ à un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ soit $> \frac{1}{k}$ et par suite, lorsque $Z(z)$ est fixé, on peut disposer de $\alpha$ dans un certain cercle de centre O pour que la substitution transformée $[u \mid U]$ possède la propriété d'avoir, sur $\mathcal{C}$, une dérivée $\left|\frac{dU}{du}\right| > k' > 1$.

[Il est également clair que, $Z(z)$ étant fixée, on pourrait aussi choisir $\alpha$ assez voisin du cercle $\mathcal{C}$ pour que

$$\frac{z + \frac{1}{\alpha}}{Z + \frac{1}{\alpha}}$$

soit en certains points $z$ du cercle $\mathcal{C}$, arbitrairement petit, c'est-à-dire pour que en certains points $u$ de $\mathcal{C}$ on ait $\left|\frac{dU}{du}\right| < 1$; la restriction imposée à $\alpha$ n'est donc pas artificielle, si l'on veut que $\left|\frac{dU}{du}\right|$ reste partout sur $\mathcal{C} > k' > 1$.]

Alors

$$(2)\quad S(Z_p) - S(Z_0) = \sum_{\mu=0}^{n+p-2} b^{\mu}[R_{\mu}(Z_p) - R_{\mu}(Z_0)] + b^{n+p-1}[R_{n+p-1}(Z_p) - 1].$$

Donc

$$(3)\quad |S(Z_p) - S(Z_0)| > |b|^{n+p-1}|R_{n+p-1}(Z_p) - 1| - \sum_{\mu=0}^{n+p-2} |b|^{\mu}|R_{\mu}(Z_p) - R_{\mu}(Z_0)|,$$

à condition que la $\Sigma$ qui figure au deuxième membre soit inférieure au premier terme de ce deuxième membre.

4. Or, $R_{n+p-1}(Z_p)$ est un antécédent d'ordre un de $+1$, c'est $\zeta_1$, puisque $R_{n+p-1}(Z_0) = +1$. Donc $|R_{n+p-1}(\zeta_p) - 1|$ est la corde de l'arc $\widehat{1\zeta_1}$ décrit dans le sens positif pour aller de $+1$ à $\zeta_1$. On a vu antérieurement que chacun des arcs $\widehat{1\zeta_1}, \widehat{\zeta_1\zeta_2}, \ldots, \widehat{\zeta_{d-1}1}$ est $< \frac{2\pi}{k}$. Il en résulte que, en désignant par $\sigma$ la longueur de cet arc $\widehat{1\zeta_1}$, on aura

$$\frac{|R_{n+p-1}(Z_p) - 1|}{\operatorname{arc} \widehat{1\zeta_1}} = \frac{2\sin\frac{\sigma}{2}}{2\frac{\sigma}{2}} = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \qquad \text{avec } 0 < \frac{\sigma}{2} < \frac{\pi}{k}.$$

Il en résulte que

$$1 > \frac{\sin\frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} > \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}}$$

et par suite

$$|R_{n+p-1}(Z_p) - 1| = |\zeta_1 - 1| = A\sigma \qquad \text{avec } \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} < A < 1.$$

Remarquons que A et $\sigma$ ne dépendent que des coefficients de $R(Z)$ et nullement de $n$, $p$ ou $Z_0$.

Le premier terme du deuxième membre de (3) est alors

$$> |b|^{n+p-1} A\sigma.$$

5. Considérons, dans chacun des termes de la $\Sigma$ suivante, la différence $|R_{\mu}(Z_p) - R_{\mu}(Z_0)|$ avec $0 \leq \mu \leq n+p-2$. C'est la corde de l'arc

décrit par $R_\mu(Z)$ lorsque Z va de $Z_0$ à $Z_p$, elle est inférieure à cet arc, lequel est lui-même désigné par $\delta_\mu$.

Donc
$$|R_\mu(Z_p)-R_\mu(Z_0)|<\delta_\mu \qquad \text{pour } 0\leqq\mu\leqq n+p-2.$$

D'autre part, lorsque Z décrit l'arc $\widehat{Z_0Z_p}$, $R_{n+p-1}(Z)$ décrit l'arc $\widehat{1\zeta_1}=\sigma$, c'est-à-dire
$$\delta_{n+p-1}=\sigma.$$

Et puisque, comme on l'a vu, on a $\delta_\mu>k^\mu\delta$, il viendra
$$k^{n+p-1}\delta<\sigma.$$

De même, pour $0\leqq\mu\leqq n+p-2$, lorsque Z décrit l'arc $\widehat{R_\mu(Z_0)R_\mu(Z_p)}$ le point $R_{n+p-\mu-1}(Z)$ décrira l'arc $\widehat{1\zeta_1}=\sigma$. Par conséquent on a aussi
$$k^{n+p-\mu-1}\delta_\mu<\sigma,$$
c'est-à-dire

$$(4) \qquad \delta_\mu<\frac{\sigma}{k^{n+p-\mu-1}} \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,n+p-2).$$

En définitive
$$\sum_{\mu=0}^{n+p-2}|b|^\mu|R_\mu(Z_p)-R_\mu(Z_0)|<\sum_{\mu=0}^{n+p-2}|b|^\mu\frac{\sigma}{k^{n+p-\mu-1}}=\frac{\sigma}{k^{n+p-1}}\sum_0^{n+p-2}|bk|^\mu,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{\mu=0}^{n+p-2}|b|^\mu|R_\mu(Z_p)-R_\mu(Z_0)|<\frac{\sigma}{k^{n+p-1}}\,\frac{|bk|^{n+p-1}-1}{|bk|-1}<\sigma\frac{|b|^{n+p-1}}{|b|k-1}.$$

Donc
$$(5) \qquad |S(Z_p)-S(Z_0)|>\sigma|b|^{n+p-1}\left[A-\frac{1}{|b|k-1}\right]$$
en supposant, bien entendu, $A>\frac{1}{|b|K-1}$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \boxed{|b|k>1+\frac{1}{A}.}$$

6. On a d'autre part

$$|Z_p - Z_0| = \text{corde de l'arc } \widehat{Z_0 Z_p} = \text{corde de } \delta < \delta < \frac{\sigma}{k^{n+p-1}}.$$

Donc

$$\left|\frac{S(Z_p) - S(Z_0)}{Z_p - Z_0}\right| > [|b|k]^{n+p-1}\left[A - \frac{1}{|b|k - 1}\right].$$

Or, avec l'hypothèse faite,

$$|b|k > 1 + \frac{1}{A},$$

le deuxième membre devient infini lorsque $p$ tend vers l'infini. Donc $S(Z)$ *n'a pas de dérivée en* $Z_0$, le quotient différentiel devenant infini lorsque $Z_p$ tend vers $Z_0$.

Nous reviendrons tout à l'heure sur la discussion de la condition (6).

7. Deuxième cas : *Le point envisagé n'est pas antécédent de* $+1$. — On peut alors, pour chaque indice $n$, le comprendre entre deux antécédents d'ordre $n$ de $+1$, consécutifs sur $\mathcal{C}$; et lorsque $n$ augmente indéfiniment, à cause de $k^n\delta < 2\pi$, $\delta$ étant l'arc qui sépare les deux antécédents envisagés, les deux antécédents précédents tendent vers $Z_0$. Nous les appellerons $Z_1$ et $Z_2$, omettant l'indice $n$ qui rappelle que ce sont des antécédents d'ordre $n$ de $+1$. On a alors

$$R_k(Z_1) = R_k(Z_2) = +1 \qquad \text{pour } k \geqq n.$$

Les deux points $R_{n-1}(Z_1)$ et $R_{n-1}(Z_2)$ sont deux points consécutifs de la suite $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}$ formée des antécédents *d'ordre un* de $+1$. Il vient, par conséquent,

$$S(Z_1) - S(Z_2) = \sum_{\mu=0}^{n-2} b^\mu[R_\mu(Z_1) - R_\mu(Z_2)] + b^{n-1}[R_{n-1}(Z_1) - R_{n-1}(Z_2)].$$

8. $\delta$ désignant toujours l'arc $Z_1 Z_2$, l'arc $\widehat{R_\mu(Z_1)R_\mu(Z_2)}$ sera $\delta_\mu$ et par suite

$$|R_\mu(Z_1) - R_\mu(Z_2)| < \delta_\mu \qquad \text{pour } 0 \leqq \mu \leqq n-2.$$

En désignant par $\sigma_1$ l'arc $\widehat{R_{n-1}(Z_1)R_{n-1}(Z_2)}$, qui est, comme nous l'avons dit, l'arc compris entre deux certains points consécutifs de la suite $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}$, on aura, évidemment, $\delta_{n-1} = \sigma_1$ ; lorsque Z décrit l'arc $\delta_\mu$ compris entre $R_\mu(Z_1)$ et $R_\mu(Z_2)$ le point $R_{n-1-\mu}(Z)$ décrit l'arc $\sigma_1$ compris entre $R_{n-1}(Z_1)$ et $R_{n-1}(Z_2)$.

Donc

$$\delta_\mu k^{n-1-\mu} < \sigma_1 \qquad \text{pour } 0 \leq \mu \leq n-2 \qquad (\delta_0 = \delta),$$

c'est-à-dire

$$\delta_\mu < \frac{\sigma_1}{k^{n-1-\mu}}.$$

D'où l'on tire

$$\sum_{\mu=0}^{n-3} |b|^\mu |R_\mu(Z_1) - R_\mu(Z_2)| < \sum_{\mu=0}^{n-2} |b|^\mu \frac{\sigma_1}{k^{n-1-\mu}} = \frac{\sigma_1}{k^{n-1}} \sum_0^{n-2} |bk|^\mu$$

et, comme précédemment,

$$\left| \sum_{\mu=0}^{n-2} b^\mu [R_\mu(Z_1) - R_\mu(Z_2)] \right| < \frac{\sigma_1 |b|^{n-1}}{|b|k - 1}.$$

D'ailleurs $|R_{n-1}(Z_1) - R_{n-1}(Z_2)|$ représente la corde de l'arc $\sigma_1$, lequel étant un des arcs $\widehat{1\zeta_1}, \widehat{\zeta_1\zeta_2}, \ldots, \widehat{\zeta_{d-1}1}$, sera $< \frac{2\pi}{k}$; par suite, en raisonnant comme au n° 4 pour $\sigma$, on aura

$$|R_{n-1}(Z_1) - R_{n-1}(Z_2)| = A_1\sigma_1 \qquad \text{avec } \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} < A_1 < 1.$$

Il en résulte

$$|b|^{n-1} |R_{n-1}(Z_1) - R_{n-1}(Z_2)| = A_1\sigma_1 |b|^{n-1}.$$

9. En définitive, on aura

$$|S(Z_1) - S(Z_2)| > A_1\sigma_1 |b|^{n-1} - \frac{\sigma_1 |b|^{n-1}}{|b|k - 1} = \sigma_1 |b|^{n-1} \left[ A_1 - \frac{1}{|b|k - 1} \right],$$

en supposant $A_1 > \frac{1}{|b|k - 1}$, c'est-à-dire

$$(7) \qquad \boxed{|b|k > 1 + \frac{1}{A_1}}.$$

Comme d'ailleurs

$$|Z_1 - Z_2| = \text{corde de l'arc } \widehat{Z_1 Z_2} = \text{corde de } \delta < \delta < \frac{\sigma_1}{k^{n-1}},$$

on aura

$$\left|\frac{S(Z_1) - S(Z_2)}{Z_1 - Z_2}\right| > [|b|k]^{n-1}\left[\Lambda_1 - \frac{1}{|b|k - 1}\right].$$

Sous l'hypothèse (7) faite précédemment, le deuxième membre devient infini avec $n$, donc $S(Z)$ *n'a pas de dérivée en* $Z_0$, le quotient différentiel devenant infini lorsque $Z_1$ et $Z_2$ tendent vers $Z_0$ à la manière indiquée, en comprenant entre eux le point $Z_0$, ce qui n'est possible que si, *en* $Z_0$, le quotient différentiel est lui-même infini à la limite.

10. L'analyse précédente montre que $S(Z)$ n'a de dérivée en aucun point du cercle lorsque $|b|k$ est supérieur au plus grand des deux nombres $1 + \frac{1}{\Lambda}$ et $1 + \frac{1}{\Lambda_1}$. Mais on a vu que $\frac{1}{\Lambda}$ et $\frac{1}{\Lambda_1}$ sont tous les deux compris entre $1$ et $\dfrac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}}$. *Il suffira donc que l'on ait*

$$\boxed{|b|k > 1 + \frac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}}} \tag{8}$$

*pour que* $S(Z)$ *n'ait de dérivée en aucun point de* $\mathcal{C}$.

11. Mais il faut, d'autre part, que $|b| < 1$ pour qu'on puisse considérer $S(Z)$ fonction continue sur $\mathcal{C}$, il faut donc savoir si (8) est compatible avec $|b| < 1$.

Il faut pour cela que $\frac{1}{k} + \dfrac{\pi}{k^2 \sin \frac{\pi}{k}}$ soit $< 1$ et l'on choisira alors $b$ de manière que

$$\frac{1}{k} + \frac{\pi}{k^2 \sin \frac{\pi}{k}} < |b| < 1 \tag{9}$$

et l'on aura pour toutes ces valeurs de $b$ une fonction $S(Z)$ continue sans dérivée.

Envisageons la quantité

$$f(k) = \frac{1}{k} + \frac{\pi}{k^2 \sin\frac{\pi}{k}} \qquad \text{pour } k > 1.$$

Puisque $\frac{\pi}{k \sin\frac{\pi}{k}}$ décroît lorsque $k$ croît, $f(k)$ décroît constamment lorsque $k$ croît de 1 à $+\infty$, et $f(+\infty) = 0$. Il existe donc une valeur $k_0 > 1$ telle que $f(k_0) = 1$ et une seule. On devra avoir $k > k_0$ pour que (9) soit possible. [Il est immédiatement visible que $2 < k_0 < 3$.]

Par conséquent une fraction quelconque $R(Z)$ à cercle fondamental, régulière, de première espèce, pour laquelle $|R'(Z)| \geqq k > k_0$ sur $\mathcal{C}$ conduira à une $S(Z)$ sans dérivée pourvu que $b$ satisfasse à (9). On a une formule (9) très maniable en prenant $k = 3$. On prendra une $R(Z)$ telle que $|R'(Z)| \geqq 3$ sur $\mathcal{C}$ et des $b$ tels que

$$\frac{9 + 2\pi\sqrt{3}}{27} < |b| < 1.$$

Est-il possible d'avoir des $R(Z)$ du type précédent?

12. C'est évident avec les remarques suivantes.

Prenons une fraction rationnelle $\rho(Z)$ quelconque à cercle fondamental $\mathcal{C}$, régulière et de première espèce [elle est du type classique

$$e^{i\theta} \prod_{n=1}^{p} \frac{Z - a_n}{1 - \overline{a}_n Z},$$

les $a_n$ étant intérieurs à $\mathcal{C}$ et les $\overline{a_n}$ étant les conjugués des $a_n$], pour laquelle $|\rho'(Z)| \geqq X > 1$ sur $\mathcal{C}$.

L'itérée $\rho_p(Z)$ d'ordre $p$ de $\rho(Z)$ est une fraction du même type pour laquelle, en vertu de

$$\rho'_p(Z) = \rho'(Z)\,\rho'(Z_1)\ldots\rho'(Z_{p-1}) \qquad \text{avec } Z_k = \rho_k(Z) \qquad [k = 1, 2, \ldots, (p-1)],$$

on a sur $\mathcal{C}$

$$|\rho'_p(Z)| \geqq X^p.$$

Par conséquent, pour $p \geqq p_0$ on aura $X^p > k_0$, et (9) deviendra possible en prenant $R(Z)=\rho_p(Z)$ et $k=X^p$. Par exemple, on pourra prendre $p \geqq p_0$ tel que $X^p > 3$ et $R(Z)=\rho_p(Z)$ avec

$$\frac{9+2\pi\sqrt{3}}{27} < |b| < 1.$$

13. *Généralisation.* — Soit $\Sigma a_n$ une série *absolument convergente.* Alors

$$S(Z)=\sum_0^{\infty} a_n R_n(Z)$$

est une fonction continue sur $\mathcal{C}$. En raisonnant comme aux n$^{os}$ 7, 8, 9, on aura

$$S(Z_1)-S(Z_2)=\sum_{\mu=0}^{n-2} a_\mu[R_\mu(Z_1)-R_\mu(Z_2)]+a_{n-1}[R_{n-1}(Z_1)-R_{n-1}(Z_2)].$$

Pour la première partie du deuxième membre, on aura

$$\sum_0^{n-2} |a_\mu| |R_\mu(Z_1)-R_\mu(Z_2)| < \frac{\sigma_1}{k^{n-1}} \sum_{\mu=0}^{n-2} |a_\mu| k^\mu = \frac{\sigma_1}{k^{n-1}} s_{n-2},$$

en posant, pour abréger

$$s_n=\sum_{\mu=0}^{n} |a_\mu| k^\mu.$$

Pour la deuxième partie, on aura

$$|a_{n-1}| |R_{n-1}(Z_1)-R_{n-1}(Z_2)| = A_1\sigma_1 |a_{n-1}| = A_1\sigma_1 \frac{s_{n-1}-s_{n-2}}{k^{n-1}}.$$

Et par suite

$$|S(Z_1)-S(Z_2)| > \frac{\sigma_1}{k^{n-1}}[A_1(s_{n-1}-s_{n-2})-s_{n-2}]$$

avec

$$|Z_1-Z_2| < \frac{\sigma_1}{k^{n-1}}.$$

Donc

$$\left|\frac{S(Z_1)-S(Z_2)}{Z_1-Z_2}\right| > A_1 s_{n-1}-(1+A_1)s_{n-2}.$$

Il n'y aura donc de dérivée en aucun point du cercle si

$$\lim_{n=\infty} [A_1 s_{n-1} - (1 + A_1) s_{n-2}] = \infty \qquad \text{(aussi bien pour } A_1 \text{ que pour } A\text{).}$$

Ceci n'est possible que si $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \infty$.

14. La condition précédente s'écrit encore

$$\lim_{n=\infty} [A_1 |a_n| k^n - s_{n-1}] = \infty. \tag{10}$$

Or, le crochet précédent s'écrit

$$|a_n k^n| \left[ A_1 - \frac{s_{n-1}}{|a_n| k^n} \right]$$

avec, comme on sait,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} < \frac{A}{A_1} < 1 \qquad \text{(égalité exclue).}$$

Il suffira donc d'avoir à partir d'un certain rang

$$\frac{s_{n-1}}{|a_n| k^n} < \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} \tag{11}$$

pour être sûr que la limite envisagée (10) est infinie.

En effet, puisque $\dfrac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} < 1$, on aura

$$|a_n| k^n > \lambda s_{n-1} \qquad \text{avec } \lambda = \frac{\pi}{k \sin\frac{\pi}{k}} > 1.$$

Donc

$$s_n > (\lambda + 1) s_{n-1}$$

et, par récurrence

$$s_n > s_0 (1 + \lambda)^n$$

et par suite

$$\lim_{n=\infty} s_n = \infty.$$

Donc aussi

$$\lim_{n=\infty} |a_n| k^n = \infty$$

il en résulte (10) car (11) entraîne

$$A_1 |a_n| k^n - s_{n-1} > |a_n| k^n \left[A_1 - \frac{1}{\lambda}\right],$$

et le deuxième membre devient infini puisque $A_1 > \frac{1}{\lambda}$.

Mais d'autre part il faut aussi, pour que l'exemple soit bon, que $\Sigma |a_n|$ converge et (11) n'y suffit pas car il ne fournit qu'une *limite inférieure* de $|a_n|$ en fonction de $s_{n-1}$. Nous adjoindrons donc une deuxième condition en imposant par exemple

$$(12) \qquad \frac{1}{\mu} < \frac{s_{n-1}}{|a_n| k^n} < \frac{1}{\lambda} \qquad \text{avec } \mu > \lambda = \frac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}} > 1.$$

On a alors $|a_n| k^n < \mu s_{n-1}$ et par suite, comme précédemment,

$$\lambda s_0 (1 + \lambda)^{n-1} < |a_n| k^n < \mu s_0 (1 + \mu)^{n-1},$$

$$(13) \qquad \boxed{\frac{\lambda s_0}{1 + \lambda} \left(\frac{1 + \lambda}{k}\right)^n < |a_n| < \frac{\mu s_0}{1 + \mu} \left(\frac{1 + \mu}{k}\right)^n.}$$

Ceci implique *une certaine régularité des* $|a_n|$, et entraîne la convergence désirée pour $\Sigma |a_n|$ lorsque $k > 1 + \mu$.

15. En définitive, un choix des $a_n$ satisfaisant à (13) [$s_0$ quelconque] à partir d'un certain rang, pourvu que $k > 1 + \mu$, fournira une S(Z) continue et sans dérivée.

La condition $k > 1 + \mu$ équivaut visiblement à

$$k > 1 + \frac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}},$$

car alors on peut choisir $\mu$ tel que

$$\lambda = \frac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}} < \mu < k - 1.$$

Or, la condition

$$k > 1 + \frac{\pi}{k \sin \frac{\pi}{k}}$$

est précisément la condition (9) à laquelle on a vu (n° 11) qu'on satisfaisait pour $k > k_0$. Avec un tel choix de $k$ et des $a_n$ on peut trouver, comme au n° 12, une R(Z) convenable pour que la S(Z) correspondante soit sans dérivée.

16. *Série de Weierstrass.* — Revenons à l'exemple $\sum_0^\infty b^n R_n(Z)$ et supposons que $R(Z) = Z^d$ laquelle est bien régulière et de première espèce dans le cercle $\mathcal{C}[|Z| = 1]$. On a alors

$$S(Z) = \sum_0^\infty b^n Z^{d^n},$$

laquelle est la série classique de Weierstrass qui a fourni le premier exemple de fonction continue sans dérivée. Ici

$$R'(Z) = dZ^{d-1} \qquad \text{et} \qquad |R'| = d \text{ sur } \mathcal{C}.$$

On prendra $k = d$ et il suffira que

$$\frac{1}{d} + \frac{\pi}{d^2 \sin \frac{\pi}{d}} < |b| < 1$$

pour que l'exemple soit bon, et il l'est en particulier pour $d = 3$ et $\frac{9 + 2\pi\sqrt{3}}{27} < |b| < 1$.