PAUL VINCENSINI

Sur la déformation des systèmes cycliques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 381-422
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__381_0>

SUR

LA DÉFORMATION DES SYSTÈMES CYCLIQUES

PAR M. P. VINCENSINI

A. Ribaucour a montré, qu'étant donnée une congruence normale de courbes planes, cette congruence ne cesse de rester normale lorsqu'on déforme arbitrairement la surface enveloppe de ses ∞^2 plans, chaque plan tangent à l'enveloppe étant supposé entraîné dans la déformation et formant avec la courbe qu'il contient un système invariable.

G. Darboux a étudié plus spécialement le cas où les courbes de la congruence sont des cercles (systèmes cycliques) et a trouvé une construction géométrique remarquable de tous les systèmes cycliques formés de cercles situés dans les plans tangents à une surface quelconque, systèmes qui ne cessent de rester cycliques lorsqu'on déforme arbitrairement la surface conformément à la proposition de Ribaucour.

La construction de Darboux est formulée dans l'énoncé suivant :

A. *Les systèmes cycliques formés de cercles situés dans les plans tangents à une surface donnée* (S) [*arbitrairement déformables avec* (S)], *s'obtiennent en envisageant une déformée arbitraire* (S_0) *de* (S), *en construisant les cercles d'intersection des plans tangents à* (S_0) *avec une sphère fixe de rayon nul, puis en déformant* (S_0) *de façon à l'amener sur* (S). *Les cercles ci-dessus, entraînés dans la déformation, s'assemblent, lorsque* (S_0) *coïncide avec* (S), *suivant l'un des systèmes cycliques cherchés.*

D'une façon générale, nous dirons d'un système cyclique qu'il est *arbitrairement déformable avec une surface déterminée* (S), s'il est possible d'associer, en système invariable, chaque cercle du système à un élément de contact de (S), de telle sorte que lorsqu'on déforme (S) d'une façon quelconque, les différents cercles du système, entraînés dans la déformation, ne cessent de constituer un système cyclique.

Tout système cyclique est arbitrairement déformable au moins d'une façon.

Il suffit d'associer chacun de ses cercles au plan qui le contient, et de prendre, conformément au théorème de Ribaucour, pour surface (S), la surface enveloppe de ses divers plans.

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans la première partie de ce travail est un cas particulier du suivant :

Déterminer toutes les surfaces (S), *telles qu'on puisse leur attacher des systèmes cycliques arbitrairement déformables* (*au sens qui a été précisé plus haut*), *autres que ceux fournis par la construction* (A) *de Darboux*.

Nous n'avons pas, pour le moment, approfondi ce problème général, bien qu'il semble que les seules solutions soient celles auxquelles nous allons parvenir. Dans ce qui suit nous nous limitons au problème particulier suivant :

Déterminer tous les systèmes cyliques formés de cercles situés dans des plans normaux à une surface (S) *en ses différents points, ne cessant de rester cycliques lorsque* (S) *se déforme en entraînant ses divers plans tangents et par suite les différents plans normaux associés*.

Un cas particulier de ce problème a été étudié par L. Bianchi (1). C'est celui où les cercles du système coupent normalement (S).

Les surfaces (S) sont alors les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, et les cercles des systèmes cycliques associés (qui dépendent d'une constante abritraire) sont situés dans les plans perpendiculaires aux plans tangents le long des tangentes aux courbes transformées des méridiens.

Le problème plus général que nous nous proposons conduit à ce résultat intéressant que les surfaces (S) auxquelles on puisse associer

---

(1) L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, t. II, p. 708.

des systèmes cycliques arbitrairement déformables formés de cercles situés dans ∞^2 de leurs plans normaux sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

Les plans des cercles sont, comme dans le problème de Bianchi, perpendiculaires aux plans tangents à (S) le long des tangentes aux transformées des méridiens.

Les systèmes cycliques correspondant à une même surface (S) constituent une famille dépendant de deux constantes arbitraires. Les centres des cercles sont dans les plans tangents à (S). En fixant l'une des deux constantes on obtient ∞^1 familles de ∞^1 systèmes cycliques. Sur les ∞^2 trajectoires orthogonales des systèmes cycliques de l'une quelconque de ces familles les lignes de courbure se correspondent. Une particularisation très simple des constantes redonne immédiatement les systèmes étudiés par Bianchi.

Dans la deuxième partie, nous étudions une déformation particulière de certains systèmes cycliques formés de cercles situés dans des plans passant par un point fixe.

Dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (1), nous avons établi que si l'on fait tourner chaque rayon d'une congruence d'Appell relative à un certain point O (congruence de normales à enveloppée moyenne point O), autour de sa parallèle isssue de O, d'un angle constant α, on transforme la congruence en une autre congruence d'Appell relative au point O. Les congruences d'Appell sont les *seules* congruences rectilignes normales restant normales si l'on fait tourner leurs rayons d'un angle constant autour de leurs parallèles issues d'un point fixe de l'espace.

Le problème que nous nous proposons est une généralisation immédiate du précédent, et consiste en la recherche de tous les systèmes cycliques formés de cercles situés dans des plans passant par un point fixe O, ne cessant de rester cycliques lorsqu'on fait tourner chaque cercle de l'angle constant α autour de la droite de son plan perpendiculaire en O au diamètre passant par O.

Analytiquement, la solution de ce problème dépend de l'équation

(1) *Les congruences de normales dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenne donnée*, 2e série, t. LIII, février 1929.

aux dérivées partielles du deuxième ordre :

$$rt - s^2 = 1,$$

r, s, t ayant les significations habituelles.

Une famille de solutions particulières du problème (systèmes cycliques formés de cercles issus d'un point fixe O) s'obtient immédiatement en transformant par inversion par rapport à O l'ensemble des congruences d'Appell relatives au point O.

La solution la plus générale se déduit de ces solutions particulières par une construction géométrique très simple. A cette construction et à l'inversion près, on peut donc regarder le problème que nous nous sommes posé et le problème de M. Appell comme des problèmes équivalents.

Ceci donne une même origine à l'équation $rt - s^2 = 1$, et à celle dont dépendent les congruences d'Appell qui peut être mise sous la forme $r + t = 0$.

PREMIÈRE PARTIE.

I. *Mise du problème en équations.* — Supposons trouvé un système cyclique (C), arbitrairement déformable avec une certaine surface (S), les plans des différents cercles C du système étant normaux aux différents éléments de contact de (S) aux points correspondants.

Le plan du cercle relatif au point M de (S) coupe le plan tangent en M suivant une certaine droite. A chaque point M de (S) correspond ainsi une tangente à (S). L'ensemble de ces tangentes forme une congruence rectiligne (Γ) dont (S) est l'une des nappes focales. Rapportons (S) au système formé par les arêtes de rebroussement de l'une des familles de développables de (Γ) ($v =$ const.), et leurs trajectoires orthogonales ($u =$ const.).

Son élément linéaire aura la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v =$ const. au point M, par X_2, Y_2, Z_2 ceux de la tangente à la courbe $u =$ const., par X_3, Y_3, Z_3 ceux de la normale en M à (S), enfin par D, D′, D″ les coefficients de la deuxième forme fondamentale de la surface

$$-\mathrm{S}\, d\mathrm{X}_3\, dx = \mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2$$

[x, y, z fonctions de u et de v, sont les coordonnées du point courant sur (S)].

Pendant toute déformation de (S), les coefficients des deux formes ci-dessus ne cessent de vérifier les trois équations de Gauss-Codazzi :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2}{\mathrm{EG}} = \mathrm{K}\ \text{(courbure)},\\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right) + \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{G}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right) + \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin, rappelons les formules exprimant les dérivées des cosinus directeurs X_1, Y_1, ..., Z_3, au moyen des cosinus eux-mêmes et des éléments des deux premières formes fondamentales, dont nous aurons à faire usage :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_2 + \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_3, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_1 + \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_3,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u} = -\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_1 - \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_2;\\ &\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2 + \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_3, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_1 + \frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_3,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v} = -\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_1 - \frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_2. \end{aligned}\right.$$

Si a et b sont les coordonnées du centre du cercle C du système cyclique envisagé situé dans le plan ($\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_3$) relatif au point $\mathrm{M}(x, y, z)$ si ρ désigne le rayon de C et t l'angle que fait le rayon aboutissant à un point quelconque du cercle avec l'axe X_1 ; les coordonnées l, m du point envisagé dans le plan (X_1, X_3) sont :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} l &= a + \rho\cos t,\\ m &= b + \rho\sin t, \end{aligned}\right.$$

a, b, ρ sont certaines fonctions des deux variables u et v.

Les coordonnées ξ, η, ζ du même point du cercle C par rapport aux axes fixes sont

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = x + lX_1 + mX_3, \\ \eta = y + lY_1 + mY_3, \\ \zeta = z + lZ_1 + mZ_3, \end{cases}$$

En posant :

$$T = S\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2, \qquad U = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad V = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

on sait que pour que l'ensemble des cercles (C) constitue un système cyclique, il faut et il suffit que la condition

$$(5)\qquad T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

soit identiquement satisfaite.

En outre pour que le système soit arbitrairement déformable avec la surface (S) il faut que la condition (5) reste identiquement vérifiée lorsque les coefficients de la deuxième forme fondamentale D, D', D'' varient en satisfaisant aux équations (1) de Gauss-Codazzi.

T se détermine immédiatement. On trouve :

$$T = \rho^2.$$

Calculons U :

$$U = S\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial u} = S\left(\frac{\partial l}{\partial t}X_1 + \frac{\partial m}{\partial t}X_3\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial l}{\partial u}X_1 + \frac{\partial m}{\partial u}X_3 + l\frac{\partial X_1}{\partial u} + m\frac{\partial X_3}{\partial u}\right)$$
$$= \frac{\partial l}{\partial t}SX_1\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial m}{\partial u} + \left(l\frac{\partial m}{\partial t} - m\frac{\partial l}{\partial t}\right)SX_3\frac{\partial X_1}{\partial u}.$$

En tenant compte de ce que

$$SX_1\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E},$$

en remplaçant $\frac{\partial X_1}{\partial u}$ par son expression déduite des formules (2), l et m par leurs expressions (3), on obtient :

$$U = -\rho\sin t\sqrt{E} - \rho\sin t\frac{\partial a}{\partial u} + \rho\cos t\frac{\partial b}{\partial u} + (\rho^2 + a\rho\cos t + b\rho\sin t)\frac{D}{\sqrt{E}}.$$

Un calcul analogue donne pour V :

$$V = -\rho\sin t\frac{\partial a}{\partial v} + \rho\cos t\frac{\partial b}{\partial v} + (\rho^2 + a\rho\cos t + b\rho\sin t)\frac{D'}{\sqrt{E}}.$$

Nous poserons :

$$U = M + N\frac{D}{\sqrt{E}},$$
$$V = P + N\frac{D'}{\sqrt{E}},$$

M, N, P ayant des expressions évidentes.

La condition (5) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}T\left\{\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{D}{\sqrt{E}} - \frac{\partial N}{\partial u}\frac{D'}{\sqrt{E}} + N\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)\right]\right\} \\ + U\left\{\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{E}}\right\} + V\left\{\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}\frac{D}{\sqrt{E}}\right\} = 0.\end{aligned}$$

D'après les formules (1) de Codazzi, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Si l'on tient compte de cette relation, on constate que les dérivées de D et de D' *disparaissent* de la condition ci-dessus, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}T\left[\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{D}{\sqrt{E}} + \left(\frac{N}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{N}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''\right] \\ + U\left[\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial t}\frac{D'}{\sqrt{E}}\right] + V\left[\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t}\frac{D}{\sqrt{E}}\right] = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant T, M, P, N par leurs expressions, on obtient après un calcul qui ne présente aucune difficulté :

$$\begin{aligned}&\left[-b\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{b}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sqrt{G}) + \frac{b\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'' + \frac{\partial\rho}{\partial v}\sqrt{E} + \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right]\sin t \\ &\left[-a\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{D}{\sqrt{E}} + \left(\rho + \frac{a}{\sqrt{EG}}\frac{\partial(\rho\sqrt{G})}{\partial u}\right)D' + \frac{a\rho}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'' + \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u}\right]\cos t \\ &\left[-\left(a\frac{\partial a}{\partial v} + b\frac{\partial b}{\partial v}\right)\frac{D}{\sqrt{E}} + \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{b}{\sqrt{E}}\frac{\partial b}{\partial u} + a\right)D'\right. \\ &\qquad\left. + \frac{\rho^2}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'' + \sqrt{E}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u}\right] =\end{aligned}$$

La forme linéaire en $\sin t$, $\cos t$, de l'équation (6), montre que pour qu'elle soit identiquement vérifiée, il faut et il suffit que les coefficients de $\sin t$, de $\cos t$, et le terme indépendant de t soient identiquement nuls.

Les trois conditions auxquelles on est ainsi conduit sont toutes les trois de la forme :

$$\alpha D + \beta D' + \gamma D'' + \delta \equiv 0, \tag{7}$$

où α, β, γ, δ sont des fonctions des deux variables u et v qui déterminent un point quelconque de la surface inconnue (S).

On sait qu'une relation linéaire de la forme (7) ne peut être vérifiée pour toutes les déformations de (S) sans se réduire à une identité.

Les conditions qui expriment que le système cyclique (C) envisagé est arbitrairement déformable avec (S) s'obtiennent donc en annulant les coefficients des trois formes linéaires en D, D′, D″ qui constituent les coefficients de $\sin t$ et de $\cos t$, et le terme indépendant de t dans (6). On obtient ainsi le système des douze équations aux inconnues a, b, ρ, E, G :

$$b\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \tag{8}$$

$$b\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sqrt{G}) = 0, \tag{9}$$

$$b\rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v}\sqrt{E} + \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial o}{\partial u} = 0, \tag{11}$$

$$a\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \tag{12}$$

$$\rho + \frac{a}{\sqrt{EG}}\frac{\partial(\rho\sqrt{G})}{\partial u} = 0, \tag{13}$$

$$a\rho\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u} = 0, \tag{15}$$

$$a\frac{\partial a}{\partial v} + b\frac{\partial b}{\partial v} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial u} + a\sqrt{E} = 0. \tag{17}$$

$$\rho^2\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0, \tag{18}$$

$$\sqrt{E}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u} = 0. \tag{19}$$

II. *Résolution du système précédent.* — L'équation (18) donne immédiatement :

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0, \qquad E = f(u),$$

En changeant le paramètre u on peut supposer $E = 1$.

(10) et (14) sont vérifiées en même temps que (18). (12) donne, soit $a = 0$, soit $\rho = f(u)$.

On ne peut avoir $a = 0$ d'après (13), par suite :

$$\rho = f(u),$$

Dans ces conditions (8) est vérifiée ; (9) montre que : ou bien

$$b = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sqrt{G}) = 0.$$

On ne peut avoir $\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sqrt{G}) = 0$ d'après (13), donc :

$$b = 0,$$

Alors (16) prouve que $a = f(u)$, (11) est vérifiée, et le système à résoudre se réduit au système des deux équations suivantes :

$$\rho + \frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sqrt{G}) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + a\frac{\partial a}{\partial u} + a = 0, \tag{17}$$

où a, ρ et G sont des fonctions à déterminer, les deux premières ne dépendant que de u.

(17) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{G} = -\frac{\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + a\right)}{\rho^2} = \frac{\partial}{\partial u}\log U \qquad (U = \text{fonction de } u \text{ seul}).$$

On en déduit :

$$\sqrt{G} = V.U \qquad (V = \text{fonction de } v \text{ seul}).$$

Moyennant un changement de paramètre v, on peut prendre $V = 1$. L'élément linéaire de (S) a alors la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2,$$

caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces de révolution rapportées aux transformées des parallèles et des méridiens.

(S) est donc nécessairement applicable sur une surface de révolution et les courbes $v = \text{const.}$, dont les tangentes sont les droites suivant lesquelles les plans des cercles des systèmes cycliques arbitrairement déformables cherchés coupent les plans tangents correspondant à (S), sont les transformées des méridiens.

Il est d'ailleurs facile de voir qu'à toute surface (S) applicable sur une surface de révolution, on peut attacher ∞^2 systèmes cycliques du genre étudié.

Il suffit d'intégrer le système (13), (17), où G est une fonction connue de u.

L'intégration ne présente pas de difficulté et conduit aux expressions suivantes de a et de ρ :

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right], \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right] \end{aligned} \right.$$

où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Ainsi :

Les seules surfaces solutions du problème que nous nous sommes posé sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, et à chaque surface de cette espèce on peut attacher ∞^2 systèmes cycliques arbitrairement déformables définies par les formules (20).

Si $\lambda = 0$, on a $a = \rho$. Les cercles des systèmes cycliques correspondants sont normaux à (S). Les systèmes cycliques obtenus sont ceux étudiés par Bianchi (*loc. cit*).

III. *Surfaces orthogonales aux systèmes cycliques obtenus.* — Les ∞^1 systèmes cycliques formés de cercles normaux à (S), correspondant à la valeur zéro du paramètre λ, jouissent comme on sait de cette propriété importante :

Sur les ∞^2 surfaces orthogonales les lignes de courbure se correspondent.

Nous nous proposons d'établir que cette propriété s'applique, non seulement aux ∞^1 systèmes correspondant à $\lambda = 0$, mais aussi aux ∞^1 systèmes correspondant à une valeur fixe *quelconque* du paramètre λ.

Envisageons dans la famille définie par les formules (20) un système cyclique correspondant à des valeurs déterminées quelconques de λ et de μ. Sur les ∞^1 surfaces orthogonales aux cercles de ce système les lignes de courbure se correspondent. Cherchons les lignes de la surface (S) correspondant aux lignes de courbure des ∞^1 surfaces orthogonales ci-dessus.

Nous utiliserons à cet effet le théorème connu suivant :

La congruence rectiligne formée par les axes des cercles d'un système cyclique quelconque (Γ) *a ses développables réelles, et ces développables correspondent aux lignes de courbure des surfaces orthogonales aux cercles.*

L'axe du cercle (C) défini par les équations (20) a pour équations :

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= x + a\mathrm{X}_1 + l\mathrm{X}_2,\\ \mathfrak{Y} &= y + a\mathrm{Y}_1 + l\mathrm{Y}_2,\\ \mathfrak{Z} &= z + a\mathrm{Z}_1 + l\mathrm{Z}_2\,;\end{aligned}$$

x, y, z sont les coordonnées du point M de (S) auquel correspond le cercle (C), a l'abscisse de son centre donnée par la première des équations (20), l un paramètre arbitraire.

Soit l un point de l'axe précédent d'abscisse $l\,(u, v)$.

Nous obtiendrons les développables de la congruence des axes des cercles du système (C) en exprimant que lorsque u et v varient, le déplacement du point I s'effectue suivant la direction de l'axe, et a par suite pour paramètres directeurs X_2, Y_2, Z_2.

Les composantes du déplacement en question sont :

$$\begin{aligned}d\mathfrak{X} &= dx + da\,\mathrm{X}_1 + a\,d\mathrm{X}_1 + dl\,\mathrm{X}_2 + l\,d\mathrm{X}_2,\\ d\mathfrak{Y} &= dy + da\,\mathrm{Y}_1 + a\,d\mathrm{Y}_1 + dl\,\mathrm{Y}_2 + l\,d\mathrm{Y}_2,\\ d\mathfrak{Z} &= dz + da\,\mathrm{Z}_1 + a\,d\mathrm{Z}_1 + dl\,\mathrm{Z}_2 + l\,d\mathrm{Z}_2.\end{aligned}$$

Écrivons que ces composantes sont proportionnelles à X_2, Y_2, Z_2; nous obtenons les relations

$$(21) \qquad \frac{dx + da\,X_1 + a\,dX_1 + l\,dX_2}{X_2} = \frac{dy + da\,Y_1 + a\,dY_1 + l\,dY_2}{Y_2} = \frac{dz + da\,Z_1 + a\,dZ_1 + l\,dZ_2}{Z_2}.$$

Multipliant successivement les deux termes de chacun des rapports (21) par X_1, Y_1, Z_1; X_3, Y_3, Z_3 et ajoutant, on obtient les deux relations :

$$\mathrm{S}X_1\,dx + da + l\,\mathrm{S}X_1\,dX_2 = 0,$$
$$a\,\mathrm{S}X_3\,dX_1 + l\,\mathrm{S}X_3\,dX_2 = 0,$$

qui s'écrivent, en observant que, d'après les formules (2) du n° I :

$$dX_1 = \mathrm{D}X_3\,du + \left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_2 + \mathrm{D}'X_3\right)dv,$$
$$dX_2 = \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3\,du + \left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}X_3 - \frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}X_1\right)dv,$$

sous la forme suivante :

$$(22) \qquad \begin{cases} du + da - l\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\,dv = 0, \\ a(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv) + \dfrac{l}{\sqrt{\mathrm{G}}}(\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv) = 0. \end{cases}$$

L'élimination de l entre les deux équations (22) conduit à l'équation définissant les lignes cherchées sur (S).

En tenant compte de la valeur (20) de a, et après suppression du facteur $\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\dfrac{\mathrm{G}}{1+\lambda\mathrm{G}}}\,du\right]$, on trouve :

$$(23) \qquad \mathrm{D}'du^2 + [\mathrm{D}'' - \mathrm{G}(1+\lambda\mathrm{G})\mathrm{D}]\,du\,dv - \mathrm{G}(1+\lambda\mathrm{G})\mathrm{D}'dv^2 = 0.$$

On constate, à titre de vérification, que si $\lambda = 0$, auquel cas (S) est l'une des surfaces orthogonales aux cercles du système comme nous l'avons déjà fait observer, (23) n'est autre chose que l'équation des lignes de courbure de (S) :

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} du & \mathrm{G}dv \\ \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv & \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (23), *ne renfermant pas* μ, met en évidence le résultat énoncé au début de ce paragraphe :

Les ∞^1 *systèmes cycliques correspondant à une valeur déterminée de* λ *et aux* ∞^1 *valeurs possibles de* μ *sont tels que, sur leurs* ∞^2 *surfaces orthogonales, les lignes de courbure, qui ont toutes pour image sur* (S) *le système défini par* (23), *se correspondent, la correspondance ne cessant de subsister lorsqu'on déforme* (S) *de façon quelconque.*

Le rapport $\frac{a}{\rho}$ ne dépend pas de μ. Les ∞^1 cercles des ∞^1 systèmes cycliques correspondant à une même valeur de λ, situés dans le plan normal correspondant à un point quelconque M de (S), constituent une famille homothétique, le centre d'homothétie étant M.

IV. *Cas particulier des systèmes cycliques dégénérés* (*congruences de normales*). — Reprenons les formules (20) définissant les systèmes cycliques arbitrairement déformables de l'espèce étudiée attachés à une surface applicable sur une surface de révolution :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right],\\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right]\end{aligned}\right.$$

et cherchons, à partir de ces formules, les systèmes cycliques dégénérés (congruences de normales) arbitrairement déformables avec (S).

Pour que les formules (20) représentent une droite, il est nécessaire que $\mu = \infty$.

Pour que la droite soit située à distance finie, il faut, comme on s'en rend compte immédiatement, que $a - \rho$ soit fini.

On a :

$$(25)\qquad a - \rho = \left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right]\left[\sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}} - \frac{1}{\sqrt{G}}\right].$$

$a - \rho$ est fini si $\mu\left[\sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}} - \frac{1}{\sqrt{G}}\right]$ l'est.

On peut écrire cette expression :

$$\frac{\mu\lambda\sqrt{G}}{\sqrt{1+\lambda G}+1}. \tag{26}$$

On voit ainsi apparaître la nécessité de lier μ à λ par la relation

$$\mu = \frac{K}{\lambda} \qquad (K = \text{const.}).$$

Pour obtenir les congruences rectilignes normales arbitrairement déformables avec (S), incluses dans les systèmes cycliques généraux (20), il suffit de poser $\mu = \frac{K}{\lambda}$ puis de faire tendre λ vers zéro.

L'abscisse du point I où le rayon d'une telle congruence perce le plan tangent correspondant en M à (S) est la limite de $a - \rho$ lorsque $\lambda \to 0$.

On obtient d'après (25) et (26) :

$$\overline{MI} = \lim_{\lambda=0}(a-\rho) = \frac{K}{2}\sqrt{G} = m\sqrt{G},$$

m étant une constante arbitraire.

Les congruences rectilignes normales qui viennent d'être déterminées, que nous appellerons pour abréger congruences (N), sont les seules congruences normales formées de droites perpendiculaires aux plans tangents à une surface (S) applicable sur une surface de révolution, arbitrairement déformables avec (S).

Il est d'ailleurs facile d'établir que les seules surfaces auxquelles on puisse attacher des congruences (N) arbitrairement déformables formées de droites perpendiculaires aux plans tangents, sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

Si (S) est à courbure totale constante, l'ensemble des congruences (N) qui dans le cas général est ∞^1 devient ∞^3.

Construction des congruences (N) *attachées à une surface applicable sur une surface de révolution.* — Soit (Σ) une déformée de révolution d'axe Δ d'une surface (S) d'élément linéaire :

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2,$$

u étant l'arc de méridien compté à partir d'un parallèle fixe et v l'angle d'un plan méridien quelconque avec un plan méridien origine.

M étant un point quelconque de (Σ), de coordonnées (u, v), $\sqrt{G}$ est sa distance à l'axe Δ.

La distance $\overline{MI}$, comptée sur la tangente au méridien, du point M au point où le rayon d'une congruence (N) attachée à (Σ) coupe le plan tangent en M, étant comme on l'a vu plus haut $m\sqrt{G}$, on voit que :

Si sur la tangente en chaque point M *de* (Σ) *au méridien passant par* M, *on porte une longueur* $\overline{MI}$ *proportionnelle à la distance du point à l'axe de révolution, et si l'on élève au point* I *ainsi obtenu la perpendiculaire au plan tangent à la surface, on obtient la congruence* (N) *la plus générale arbitrairement déformable avec* (Σ).

Si $\overline{MI}$ est prise égale à la distance de M à l'axe Δ, la perpendiculaire au plan tangent en M au point I coupe Δ en l'un de ses points d'intersection avec la sphère inscrite à (Σ) le long du parallèle du point M.

On déduit simplement de cette remarque que :

Si l'on regarde (Σ) *comme l'enveloppe d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* Δ, *si l'on fait* rouler (Σ) *sur une surface applicable quelconque* (S), *et si l'on abaisse à chaque instant de l'un des points où la sphère inscrite à* (Σ) *passant par le point de contact coupe* Δ *la perpendiculaire au plan de contact, on obtient une congruence normale* (N) *arbitrairement déformable avec* (S).

Toutes les autres congruences (N) attachées à (S) s'obtiennent d'ailleurs en remplaçant dans l'énoncé ci-dessus chaque sphère inscrite par une sphère concentrique les rayons de deux sphères associées quelconques étant en rapport constant.

Dans le cas particulier où (S) est à courbure totale constante positive $\frac{1}{R^2}$, on peut prendre pour (Σ) une sphère de rayon R. Les différentes congruences (N) attachées à (Σ) s'obtiennent alors en abaissant d'un point fixe quelconque de l'espace les perpendiculaires aux différents plans tangents.

Il en résulte que :

Les différentes congruences (N) *attachées à* (S) *s'obtiennent en faisant rouler* (Σ) *sur* (S) *de façon que les deux surfaces soient constamment en contact par deux points homologues dans une application déterminée des deux surfaces l'une sur l'autre, et en abaissant à chaque instant, d'un point quelconque invariablement lié à* (Σ), *la perpendiculaire sur le plan de contact.*

Cette dernière proposition se rattache à la suivante établie par G. Darboux (*Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 125 § 938) :

Si d'un point invariablement lié à une surface (Σ) *qui roule sur une surface applicable* (S) *on abaisse la perpendiculaire sur le plan de contact, la droite obtenue engendre une congruence dont les développables correspondent au système conjugué commun à* (Σ) *et à* (S).

Dans le cas qui nous occupe, on peut ajouter que la congruence ci-dessus de Darboux est *normale;* en outre (Σ) étant une sphère les courbes du système conjugué commun sont, sur (S), les lignes de courbure.

On peut donc énoncer cette propriété des ∞^3 congruences (N) attachées à (S) :

Sur ces ∞^3 *congruences normales les développables se correspondent et correspondent aux lignes de courbure de* (S).

Il est facile d'étendre ce résultat aux ∞^1 congruences (N) attachées à une surface applicable sur une surface de révolution *quelconque.*

Nous avons vu que si l'on fixe λ et si l'on donne à μ toutes les valeurs possibles, les ∞^1 systèmes cycliques (20) jouissent de cette propriété que sur leurs ∞^2 trajectoires orthogonales les lignes de courbure se correspondent.

Si l'on pose $\mu = \frac{K}{\lambda}$ (K = constante arbitraire) et si l'on fait tendre λ vers zéro la propriété subsiste. A la limite les ∞^1 systèmes cycliques ci-dessus deviennent les ∞^1 congruences (N) correspondant aux différentes valeurs de m. Sur les ∞^2 trajectoires orthogonales de ces ∞^1 congruences (N) les lignes de courbure se correspondent.

Les normales à (S) constituant une congruence (N) particulière ($m=0$), on voit, ce qui résulte aussi de l'équation (23) où $\lambda=0$, que les lignes de courbure des ∞^2 surfaces orthogonales aux rayons des ∞^1 congruences (N) attachées à (S), correspondent aux lignes de courbure de (S).

Cette proposition fournit ∞^1 solutions du problème de la recherche des surfaces (Σ) admettant même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure qu'une surface quelconque (S) applicable sur une surface de révolution (nous ne considérons pas comme distinctes les solutions formées de surfaces parallèles) ([1]). On obtient ces solutions en prenant les surfaces orthogonales aux ∞^1 congruences (N) attachées à (S).

Si (S) est à courbure totale constante, le nombre des solutions du problème qui vient d'être mentionné s'élève à ∞^3.

Le cas où (S) est à courbure totale constante positive est particulièrement intéressant. Les surfaces (Σ) orthogonales aux différentes congruences (N) attachées à (S) sont alors autant de surfaces admettant une *déformation finie* dans laquelle le réseau des lignes de courbure reste de courbure ([2]).

Si l'on suppose les géodésiques connues sur (S) et l'élément linéaire mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$

la détermination des surfaces (Σ) s'achève, comme il est facile de le constater, par la quadrature

$$\int \sqrt{G}(D\, du + D'\, dv).$$

La quantité sous le signe $\int$ est une différentielle totale exacte en vertu des formules de Codazzi.

On peut d'ailleurs, dans ce dernier cas doubler le nombre ∞^3 des surfaces attachées à (S) se correspondant avec correspondance de

---

([1]) *Voir* G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, § VII.

([2]) *Voir* par exemple B. Gambier, *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, fasc. XXXI du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

leurs lignes de courbure par l'introduction de la transformée d'Hazzidakis (S_1) de (S).

Nous n'insisterons pas davantage sur des problèmes analogues de représentation sphérique relatifs aux surfaces applicables sur les surfaces de révolution pour lesquels la considération des congruences (N) entraîne la connaissance de ∞^1 solutions nouvelles. Signalons simplement ce résultat :

La connaissance d'une déformée de surface de révolution (S), *admettant un système de lignes de courbure planes, entraîne celle d'une infinité d'autres surfaces jouissant de la même propriété* [*les surfaces orthogonales aux* ∞^1 *congruences* (N) *attachées à* (S)].

Le fait, que la propriété que possèdent les développables des ∞^1 congruences (N), relatives à une même surface (S) de se correspondre, se conserve lorsqu'on déforme (S), présente lui aussi un certain intérêt.

G. Darboux (¹) a montré que :

Si deux droites parallèles engendrent des congruences sur lesquelles les développables se correspondent, et si (Σ) *est l'enveloppe de leur plan, les deux droites ne cessent d'engendrer des congruences sur lesquelles les développables se correspondent lorsque* (Σ) *se déforme en les entraînant.*

Pour les congruences (N) attachées à une même surface (S), il existe, en dehors de la déformation envisagée par Darboux de la surface (Σ) enveloppe des plans contenant les rayons homologues (parallèles) des différentes congruences (N), une autre déformation intéressante au cours de laquelle les développables des congruences (N) en question ne cessent de se correspondre.

Cette autre déformation est celle de la surface (S) elle-même (²).

V. *Sur une propriété des congruences* (N). — Les congruences nor-

---

(¹) *Voir* G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 133.

(²) Pour d'autres congruences engendrées par des droites parallèles sur lesquelles les développables ne cessent de se correspondre au cours d'une déformation convenable, *voir* G. Darboux, t. IV, p. 127. L'intérêt de nos congruences (N) tient à ce qu'elles restent normales au cours de la déformation males (N) attachées à une surface quelconque applicable sur une surface (S) de révolution jouissent de la propriété suivante :

Le produit des distances des deux foyers situés sur un même rayon, au plan tangent correspondant à (S), *est invariant au cours de toute déformation de* (S).

Cette proposition présente un intérêt particulier dans le cas où (S) est une surface pseudosphérique. Elle permet de relier, de façon simple, les congruences (N) au problème de la transformation des surfaces à courbure totale constante négative en surfaces du même type. Nous nous placerons à ce point de vue dans un autre Mémoire.

Désignons par I le point où un rayon quelconque d'une congruence (N) coupe le plan tangent au point correspondant $M(x, y, z)$ de (S).

I est situé (*voir* n° IV), sur la tangente à la transformée de méridien passant par M ($v =$ const.) à une distance $\overline{MI}$ de M telle que :

$$\overline{MI} = m\sqrt{G} \qquad (m \text{ constante arbitraire}).$$

Si P est un point quelconque du rayon envisagé, et si l'on pose

$$\mu = \overline{IP},$$

les coordonnées $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ du point P sont :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= x + m\sqrt{G}X_1 + \mu X_3, \\ \mathfrak{Y} &= y + m\sqrt{G}Y_1 + \mu Y_3, \\ \mathfrak{Z} &= z + m\sqrt{G}Z_1 + \mu Z_3. \end{aligned}$$

On obtient les développables des congruences (N) correspondant aux diverses valeurs de m en déterminant la fonction $\mu(u, v)$ de façon que le déplacement du point P soit tangent au rayon correspondant.

Le calcul ne présente aucune difficulté. En écrivant que

$$\frac{d\mathfrak{X}}{X_3} = \frac{d\mathfrak{Y}}{Y_3} = \frac{d\mathfrak{Z}}{Z_3},$$

multipliant les deux termes de chaque rapport successivement par

X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, et ajoutant, en tenant compte des formules (2) du n° I, on obtient le système

$$\left\{\begin{aligned} &\left(1+m\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\mu D\right)du-\mu D'dv=0,\\ &-\mu D'du+G\left(1+m\frac{\partial\sqrt{G}}{du}-\mu\frac{D''}{G}\right)dv=0.\end{aligned}\right.$$

En éliminant μ entre les deux équations du système, on obtient l'équation différentielle des lignes de courbure de (S), ce qui établit à nouveau le résultat obtenu au n° IV d'après lequel, sur les ∞^2 surfaces orthogonales aux ∞^1 congruences (N) attachées à (S) les lignes de courbure se correspondent.

Si l'on élimine $\frac{du}{dv}$, on obtient l'équation aux abscisses des foyers situés sur le rayon (u, v), comptées à partir du point I où le rayon perce le plan tangent correspondant à (S).

On trouve, tous calculs faits, en tenant compte de l'expression de la courbure totale K donnée par les formules (1) du n° I, et en introduisant également la courbure moyenne $H=-\frac{ED''+GD}{EG}$:

$$K\mu^2+H\left(1+m\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\mu+\left(1+m\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2=0. \tag{E}$$

Le produit des racines de l'équation (E), ne dépendant pour une congruence (N) déterminée (m donné) que de l'élément linéaire de (S), reste bien constant au cours de toute déformation de (S) comme on l'avait annoncé.

Si $K>0$, et si l'on porte sur le rayon N de part et d'autre de I des longueurs égales à $\frac{\left|1+m\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right|}{\sqrt{K}}$, on obtient deux points A et B décrivant deux surfaces (A) et (B).

Les différentes cordes AB que ces surfaces déterminent sur (N) divisent harmoniquement les différents segments focaux de la congruence, et cette propriété se conserve lorsque (S) se déforme en entraînant les points des surfaces (A) et (B), ces points étant considérés comme invariablement liés aux éléments de contact correspondants de (S).

tels que, si le module d'une fonction $f(z)$ de la famille est moindre que $\eta < \varepsilon$ en des points de D qui ne peuvent être enfermés dans une suite de cercles dont la somme des rayons est γ, on a dans tout D'

$$|f(z)| < k\eta^{\alpha}.$$

En particulier, D, D' et $\mathcal{F}$ étant donnés ainsi qu'un petit arc de courbe Γ dans D', il existe un nombre ε ne dépendant que de ces quatre éléments tel que, toute fonction de la famille dont le module est inférieur à ε sur Γ est holomorphe et de module inférieur à 1 dans D'.

Addition au n° 3. — La fonction algébrique définie par

$$u^3 + u^2 az - (1 + az)u + 1 = 0$$

ne prend pas les valeurs 0 et 1 ; ses trois branches sont finies et indépendantes de a pour $z = 0$; les quatre points de ramification tendent vers $z = 0$ lorsque a croît indéfiniment. $|u(z)|$ n'est borné dans aucun cercle $|z| < r$ lorsque a croît indéfiniment. L'hypothèse faite dans l'énoncé IV sur les points de ramification ne peut être remplacée par une autre limitant le nombre de ces points.

VI. *Systèmes cycliques arbitrairement déformables attachés aux surfaces développables.* — Supposons que (S) soit une surface développable. Envisageons sur (S) un système formé de lignes géodésiques paralléles orthogonales ($u=$ const., $v=$ const.), de sorte que l'élément linéaire prenne la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Les expressions (20) de a et de ρ du n° II deviennent ici :

$$a = \sqrt{1+\lambda}\left[\mu - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+\lambda}}\right] = \sqrt{1+\lambda}\,\mu - u,$$

$$\rho = \mu - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\left[\sqrt{1+\lambda}\,\mu - u\right].$$

Posons

$$\sqrt{1+\lambda}\,\mu = l, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \mathrm{K},$$

on obtient :

(27)
$$\begin{cases} a = l - u, \\ \rho = \mathrm{K}\,(l - u), \end{cases}$$

l et K sont deux constantes arbitraires.

On constate sur les équations (27) que :

Si, conservant le plan et le centre d'un cercle quelconque d'un système cyclique (C) *de l'espèce étudiée attaché à* (S), *on multiplie son rayon par un nombre constant, on obtient un autre système cyclique (concentrique) de la même espèce.*

La construction des systèmes cycliques (C) est extrêmement simple, et résulte immédiatement des formules (27). Nous nous bornerons à l'énoncer :

Sur la surface (S) envisageons un système orthogonal formé de lignes géodésiques parallèles (α) et (β). Soient β_0 une courbe particulière du système (β); γ la développante d'une courbe quelconque α issue du point où α coupe β_0. Pour avoir un système cyclique (C) attaché à (S), il suffit de tracer dans les plans osculateurs aux courbes (α) des cercles ayant pour centres les points correspondants de la développante γ, les rayons de ces cercles étant proportionnels à la portion de tangente à α limitée au point de contact et à la développante.

En faisant varier le coefficient de proportionnalité, la courbe β_0, et le système $(\alpha)(\beta)$ de départ, on obtient tous les systèmes cycliques (C) (en nombre ∞^4) attachés à (S).

Notons que nous venons incidemment de mettre en évidence une infinité de solutions de ce problème :

Déterminer les systèmes cycliques tels, qu'en soumettant chaque cercle du système à une homothétie de rapport déterminé quelconque par rapport à son centre, on obtienne un autre système cyclique.

Les congruences des axes des cercles des systèmes cycliques ci-dessus (congruences rectilignes cycliques) appartiennent à la famille des congruences ∞ fois cycliques étudiées en détail par Ribaucour, C. Guichard et Bianchi [1].

VII. *Cas des surfaces* (S) *à courbure totale constante.* — Au n° IV nous avons indiqué une construction géométrique intéressante des congruences (N) attachées à une surface applicable sur une surface de révolution quelconque. Dans le paragraphe précédent nous avons vu que les systèmes cycliques qui font l'objet de notre étude, relatifs aux surfaces développables, sont susceptibles d'une construction très simple. Il semble assez difficile d'interpréter géométriquement les formules (20) du n° II, de façon à en déduire une construction des systèmes cycliques généraux étudiés, relatifs à une surface applicable sur une surface quelconque de révolution.

A cet égard, le cas des surfaces à courbure totale constante présente un certain intérêt.

En se limitant au cas des systèmes cycliques normaux aux déformées des surfaces à courbure totale constante, on peut obtenir des constructions très simples de ces systèmes.

Surfaces à courbure totale constante positive. — Envisageons une surface (S) à courbure totale constante positive, que sans nuire à la

---

[1] *Voir*, par exemple, C. GUICHARD, *Les systèmes cycliques et les systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1897, 1898, 1903) ou L. BIANCHI, *Geometria differenziale*, t. II, p. 251.

généralité nous pouvons prendre égale à $+1$, d'élément linéaire ;

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u \, dv^2.$$

Avec les notations du n° II, les systèmes cycliques (C) normaux à (S) arbitrairement déformables avec (S) sont définis par les formules

$$a = \rho = \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\mu - \int_0^u \sqrt{G}\, du\right] = \frac{\mu}{\sin u} + \cot u.$$

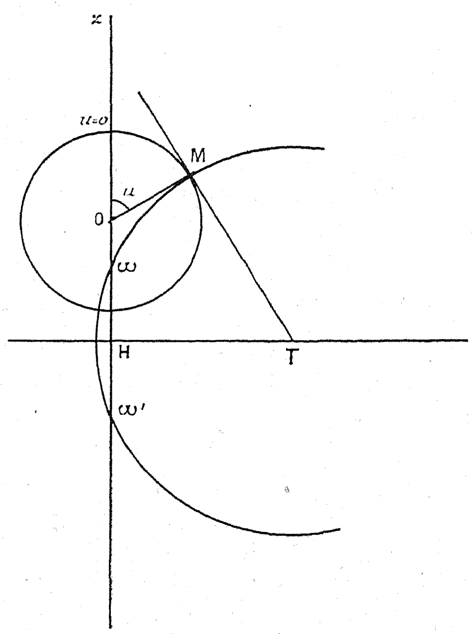
Le paramètre λ est nul dans le cas actuel.

Considérons la sphère (S_0) de rayon 1, et appliquons (S) sur (S_0).

Les différents systèmes (C), entraînés dans la déformation de (S), deviennent des systèmes cycliques orthogonaux à (S_0).

Étudions la configuration du système (C) correspondant à une valeur

Fig. 1.



déterminée de μ. Il suffit de voir comment sont disposés les cercles du système dans un plan méridien quelconque de (S_0) (*fig.* 1).

Soit T le centre du cercle du système (C), normal en M à (S_0),

$$\overline{MT} = \frac{\mu}{\sin u} + \cot u.$$

Projetons le contour (OMT) en $\overline{OH}$ sur le diamètre Oz, nous trouvons :

$$\overline{OH} = -\mu,$$

$\overline{OH}$ ne dépendant pas du cercle envisagé, on voit que tous les cercles du système (C), situés dans le plan méridien considéré, ont leurs centres alignés sur la perpendiculaire menée de H à Oz, et constituent par suite un faisceau d'axe radical Oz.

Le système (C) s'obtient par rotation de ce faisceau autour de Oz.

Pour avoir les différents systèmes (C) correspondant aux différentes valeurs de μ, il suffit de déplacer la droite HT parallèlement à elle-même.

Cela étant, plaçons (S_0) sur (S) de façon que M soit sur son homologue dans l'application, les éléments linéaires homologues étant confondus dans le plan de contact.

MT se placera suivant la tangente à la transformée du méridien de M, et le centre T se trouvera à l'intersection de cette tangente avec la perpendiculaire en H au diamètre Oz de (S_0).

Le cercle de centre T peut évidemment être défini comme passant par M et ayant pour axe l'intersection du plan de contact de (S) et de (S_0) avec le plan perpendiculaire en H au diamètre Oz de (S_0).

La sphère (S_0) roulant sur (S) en entraînant le diamètre Oz et le plan (π) perpendiculaire à Oz en H [(S_0), Oz et (π) forment une figure invariable], les cercles passant par les différents points de contact et ayant pour axes les intersections des différentes positions de (π) avec le plan de contact correspondant constituent un système cyclique (C) de l'espèce étudiée.

En faisant varier le plan (π) invariablement lié à (S_0), on obtient tous les systèmes cycliques normaux à (S_0) arbitrairement déformables avec (S).

Ainsi :

Les différents systèmes (C) *normaux à une surface* (S) *à courbure totale* *constante positive* $\frac{1}{R^2}$, *arbitrairement déformables avec* (S) *s'obtiennent en faisant rouler sur* (S) *une sphère de rayon* R *et en construisant les cercles passant par les points de contact successifs et ayant pour axes les intersections d'un plan invariablement lié à la sphère avec les plans de contact.*

Le résultat qui vient d'être énoncé peut être présenté sous une forme légèrement différente.

Envisageons un cercle quelconque de l'un des systèmes (C) attachés à (S). Le cercle qui lui correspond après la déformation de (S) en (S_0) passe par deux points fixes ω, ω' (*fig.* 1), réels ou imaginaires, du diamètre Oz de (S_0), conjugués par rapport à la sphère, et l'on voit que :

Pour obtenir le système cyclique le plus général orthogonal à (S) *arbitrairement déformable avec* (S), *il suffit d'attacher à une sphère* (S_0) *de même rayon que* (S), *un diamètre quelconque, de prendre sur ce diamètre un couple quelconque de points* ω, ω' *conjugués par rapport à* (S_0), *puis de faire rouler* (S_0) *sur* (S) *en construisant pour chaque position de* (S_0) *le cercle déterminé par le point de contact et les deux points* ω, ω'.

Ayant égard à la première des deux constructions qui viennent d'être indiquées, on retrouve dans le cas particulier des surfaces à courbure totale constante positive la conclusion générale suivante de G. Darboux (¹) :

« Si une surface (S_0) roule sur une surface applicable (S), les différentes droites coplanaires, intersections du plan de contact avec les différents plans invariablement liés à (S_0), engendrent des congruences sur lesquelles les développables se correspondent. »

Dans le cas où (S) est à courbure totale constante positive et (S_0) une sphère de même rayon, les différents plans invariablement liés à (S), qui interviennent dans la première construction ci-dessus indiquée, engendrent des congruences sur lesquelles les développables se correspondent et *correspondent toutes aux lignes de courbure de* (S).

(¹) G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 135.

Dans le cas général envisagé par G. Darboux, les congruences à rayons homologues coplanaires dont il vient d'être question ne sont pas des *congruences cycliques arbitrairement déformables avec* (S).

Les congruences particulières attachées aux surfaces à courbure totale constante positive que nous venons de signaler jouissent au contraire de cette intéressante propriété.

Surface à courbure totale constante négative. — Si l'on rapporte une telle surface (S) au système des géodésiques passant par un même point à l'infini ($v=$ const.) et à leurs trajectoires orthogonales ($u=$ const.), l'élément linéaire se présente sous la forme :

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2$$

(nous supposons la courbure égale à -1).

En faisant $\lambda = 0$ dans les formules (20) du n° II, on trouve pour le cas actuel :

$$a = \rho = -1 + \mu e^{-u}.$$

Appliquons la surface (S) considérée sur la pseudo-sphère (S_0) de même rayon, et voyons comment viennent se disposer les cercles des systèmes cycliques correspondant aux diverses valeurs de μ.

Il suffit d'étudier la configuration des cercles du système (C) correspondant à une valeur quelconque de μ, dans un plan méridien quelconque de (S_0) (*fig.* 2).

Soit T le centre du cercle du système (C) normal en M à (S_0). On a

$$\overline{MT} = -1 + \mu e^{-u}.$$

Soit OH la projection du contour (OMT) sur ox

$$\overline{OH} = \overline{\text{Proj.}_{ox}\, OH} + \overline{\text{Proj.}_{ox}\, MT},$$

soit :

$$\overline{OH} = e^u + e^u(-1 + \mu e^{-u}) = \mu = \text{const.}$$

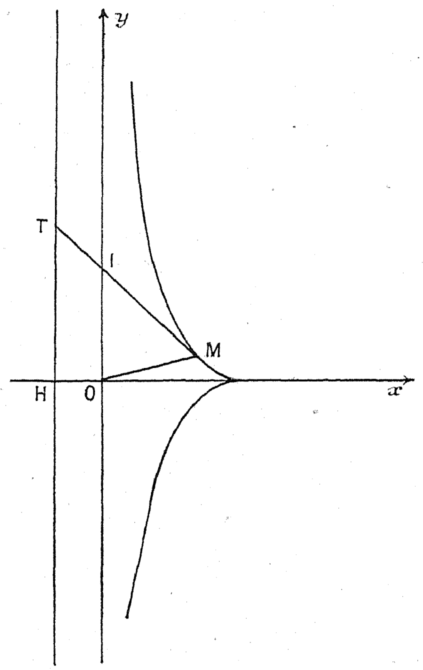
Dans le plan de la figure (2), les centres des cercles C sont alignés (comme dans le cas des surfaces à courbure constante positive), sur une parallèle Δ à l'axe de la pseudo-sphère.

Les centres des différents cercles du système cyclique envisagé, relatif à la pseudo-sphère, sont disposés sur un cylindre de révolution de rayon μ ayant l'asymptote pour axe.

De là résulte la construction suivante des différents systèmes cycliques arbitrairement déformables normaux à une surface à courbure totale constante négative :

Faisons *rouler* sur une telle surface (S) la figure formée par une

Fig. 2.



pseudo-sphère de même courbure totale et un cylindre de révolution coaxial. Le plan déterminé par le point de contact et l'asymptote coupe le cylindre suivant deux génératrices. Le cercle du plan précédent passant par le point de contact et ayant pour centre le point où l'une des deux génératrices ci-dessus coupe le plan de contact engendre, pendant le roulement, le système cyclique arbitrairement déformable le plus général normal à (S).

Le cas où $\mu = 0$ nous ramène aux systèmes cycliques de rayon constant de Ribaucour et Bianchi, au moyen desquels on fait correspondre à une surface quelconque à courbure totale constante négative

$-\frac{1}{a^2}$, ∞^1 autres surfaces de même courbure. Ces ∞^1 surfaces sont les surfaces orthogonales aux cercles du système cyclique de rayon a attaché à (S).

Ayant égard aux systèmes (C) dégénérés [congruences (N) du n° IV], nous ferons observer que les ∞^1 congruences de cette nature attachées à une surface pseudo-sphérique quelconque, jouissent de la double propriété d'être *cycliques* et *normales*, ainsi que cela résulte du théorème suivant (¹) :

Les congruences rectilignes normales et cycliques sont les congruences des normales aux surfaces ayant même image sphérique pour leurs lignes de courbure que les surfaces pseudo-sphériques.

DEUXIÈME PARTIE.

Le problème que nous proposons de résoudre dans cette deuxième partie est le suivant :

Rechercher tous les systèmes cycliques formés de cercles dont les plans passent par un point fixe O, ne cessant de rester cycliques, lorsqu'on fait tourner chaque cercle autour de la perpendiculaire menée dans son plan au diamètre issu de O, d'un angle constant arbitraire.

I. *Mise du problème en équations.* — Prenons le point fixe O comme origine d'un système d'axes rectangulaires fixes O (x, y, z). Attachons au cercle générateur de l'un des systèmes cycliques cherchés, un trièdre mobile O (ξ, η, ζ), Oξ étant dirigé suivant le diamètre du cercle issu de O, Oη suivant la perpendiculaire en O au plan du cercle, Oζ suivant la normale dans ce même plan à Oξ.

Fixons la position du trièdre mobile par les trois angles d'Euler : ψ angle de précision, θ angle de nutation, φ angle de rotation propre.

(¹) L. Bianchi, *Géométria differenziale*, t. II, p. 253.

Les cosinus directeurs α, β, γ; α'', β'', γ'' de $O\xi$ et de $O\zeta$ relativement aux axes fixes ont pour expressions:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi,\\
\beta &= \cos\theta\sin\psi + \cos\theta\sin\varphi\cos\psi,\\
\gamma &= \sin\theta\sin\varphi;\\
\alpha'' &= \sin\theta\sin\psi,\\
\beta'' &= -\sin\theta\cos\psi,\\
\gamma'' &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Les coordonnées d'un point quelconque M du cercle générateur du système cyclique, par rapport aux axes mobiles sont

$$\xi = a + \rho\cos t, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \rho\sin t,$$

a étant l'abscisse du centre, ρ le rayon, t l'angle du rayon aboutissant au point M avec $O\xi$.

Les coordonnées de M par rapport aux axes fixes sont:

$$\begin{aligned}
x &= \alpha\xi + \alpha''\zeta,\\
y &= \beta\xi + \beta''\zeta,\\
z &= \gamma\xi + \gamma''\zeta,
\end{aligned}$$

soit en remplaçant α', β', ..., γ'' par leurs expressions en fonction des angles d'Euler, et en tenant compte des expressions de ξ et de ζ,

$$\begin{aligned}
x &= (\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)(a + \rho\cos t) + \rho\sin\theta\sin\psi\sin t,\\
y &= (\cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\sin\varphi\cos\psi)(a + \rho\cos t) - \rho\sin\theta\cos\psi\sin t,\\
z &= \sin\theta\sin\varphi(a + \rho\cos t) + \rho\cos\theta\sin t;
\end{aligned}$$

θ, φ, ψ sont des fonctions de deux variables indépendantes u et v, ainsi que a et ρ.

Nous supposerons que les deux variables soient φ et ψ, et nous poserons

$$\varphi = u, \qquad \psi = v;$$

dans ces conditions θ sera une certaine fonction de u et de v, de même que a et ρ. Nous écrirons donc :

$$x = (\cos u \cos v - \cos\theta \sin u \sin v)(a + \rho \cos t) + \rho \sin\theta \sin v \sin t,$$
$$y = (\cos u \sin v + \cos\theta \sin u \cos v)(a + \rho \cos t) - \rho \sin\theta \cos v \sin t,$$
$$z = \sin\theta \sin u (a + \rho \cos t) + \rho \cos\theta \sin t.$$

Pour que le système de cercles envisagé soit cyclique, il faut et il suffit, comme nous l'avons dit dans la première partie, que si l'on pose :

$$T = S\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2, \qquad U = S\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad V = S\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v},$$

la condition

$$(1) \qquad T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

soit identiquement vérifiée.

En outre, pour que le système cyclique puisse être déformé conformément à l'énoncé du problème, la relation (1) doit rester identiquement vérifiée si l'on remplace u par $u + \alpha$ ($\alpha =$ const. arbitraire). Formons la condition (1). Des calculs simples donnent :

$$T = \rho^2,$$
$$U = -\rho \sin t \frac{\partial a}{\partial u} + \rho(\rho + a\cos t)\sin u \frac{\partial \theta}{\partial u},$$
$$V = -\rho \sin t \frac{\partial a}{\partial v} + \rho(\rho + a\cos t)\left(\sin u \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin\theta \cos u\right).$$

En tenant compte de ces valeurs de T, U, V, (1) s'écrit :

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right]\sin t \\ &\quad + a\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} - \rho\sin\theta\right)\sin u \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(\rho\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u}\sin\theta - \rho\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)\cos u\right]\cos t \\ &\quad + \left[\left\{a\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) - \rho^2\sin\theta\right\}\sin u \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left\{\rho^2\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u} - \rho^2\frac{\partial \theta}{\partial v} - a\sin\theta\frac{\partial a}{\partial u}\right\}\cos u\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

La forme linéaire en $\sin t$, $\cos t$, de (2), montre que pour que la condition soit identiquement vérifiée, les fonctions a, ρ, θ de u et v

doivent vérifier le système suivant :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}-\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}=0,\\
&a\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}-\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}-\rho\sin\theta\right)\sin u\\
&\quad+a\left(\rho\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}-\frac{\partial \rho}{\partial u}\sin\theta-\rho\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)\cos u=0,\\
&\left\{a\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}-\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}-\rho^2\sin\theta\right)\right\}\sin u\\
&\quad+\left\{\rho^2\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}-\rho^2\frac{\partial \theta}{\partial v}-a\sin\theta\frac{\partial a}{\partial u}\right\}\cos u=0.
\end{aligned}\right.
$$

Pour les systèmes cycliques particuliers que nous avons en vue, les équations du système (3) doivent rester vérifiées lorsqu'on remplace u par $u+\alpha$ (α constante arbitraire).

Cela exige, comme on s'en rend compte immédiatement, que les coefficients de $\sin u$ et de $\cos u$, dans les deux dernières équations, soient nuls.

En définitive, les systèmes cycliques cherchés s'obtiendront par la résolution du système :

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
&(4)\qquad \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}-\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}=0.\\
&(5)\qquad a\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}-\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}-\rho\sin\theta\right)=0.\\
&(6)\qquad a\left(\rho\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}-\frac{\partial \rho}{\partial u}\sin\theta-\rho\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)=0.\\
&(7)\qquad a\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}-\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)-\rho^2\sin\theta=0.\\
&(8)\qquad \rho^2\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}-\rho^2\frac{\partial \theta}{\partial v}-a\sin\theta\frac{\partial a}{\partial u}=0.
\end{aligned}\right.
$$

II. *Résolution du système* (A). — Si $a=0$ (cercles concentriques), le système (A) se réduit à :

$$\rho^2\sin\theta=0.$$

$$\rho^2\left(\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}-\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)=0.$$

La première équation donne $\theta=0$, et pour cette valeur de θ la deuxième est vérifiée.

On obtient la solution, évidente à priori, constituée par ∞^2 cercles concentriques ayant un diamètre sur une droite fixe Oz. Les surfaces orthogonales aux ∞^2 cercles sont les cônes de révolution de sommet O et d'axe Oz. Nous supposerons dans la suite $a \neq 0$.

Multiplions les deux nombres de (6) par ρ, ceux de (8) par a et retranchons membre à membre, nous obtenons :

$$\sin\theta\left(a\frac{\partial a}{\partial u} - \rho\frac{\partial \rho}{\partial u}\right) = 0.$$

Si $\sin\theta = 0$, le système (A) se réduit à l'unique équation (4), qui fournit les systèmes cycliques obtenus en envisageant une famille arbitraire à un paramètre de cercles situés dans un plan passant par Oz centrés sur une perpendiculaire à Oz, et en faisant tourner le plan autour de Oz. Cette solution était évidente à priori.

Supposons donc $\sin\theta \neq 0$. Alors :

$$a\frac{\partial a}{\partial u} - \rho\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

et par suite :

$$a^2 - \rho^2 = f(v). \tag{9}$$

Nous envisageons deux cas suivant que $f(v)$ est effectivement fonction de v ou se réduit à une simple constante.

Supposons d'abord que $f(v)$ soit effectivement fonction de v. L'équation (4) montre que a et ρ sont fonctions l'un de l'autre, et (9) que a et ρ sont séparément fonctions de v, l'une de ces deux fonctions pouvant d'ailleurs se réduire à une constante.

Les équations (5) et (7) donnent, après multiplication de (5) par $\frac{\rho}{a}$ et soustraction,

$$\left(a\frac{\partial a}{\partial v} - \rho\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

On ne peut avoir

$$a\frac{\partial a}{\partial v} - \rho\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

puisqu'on suppose $a^2 - \rho^2 = f(v)$. Il faut donc que

$$\theta = \varphi(v).$$

(6) montre alors que θ est une constante, et (5) ou (7) que $\sin\theta = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\sin\theta \neq 0$.

On ne peut donc pas avoir

$$a^2 - \rho^2 = f(v).$$

Envisageons maintenant le cas où $a^2 - \rho^2$ est une constante.

Posons :

$$(10) \qquad a^2 - \rho^2 = \mathrm{K}.$$

D'après ce qui précède, le système (A) se réduit aux équations (10), (5), (6), et (7). Mais on voit immédiatement que (7) est conséquence de (5), de sorte que le système (A) se réduit au système des trois équations

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} (10) & a^2 - \rho^2 = \mathrm{K}, \\ (11) & \dfrac{\partial\rho}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \dfrac{\partial\rho}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} - \rho\sin\theta = 0, \\ (12) & \rho\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u} - \dfrac{\partial\rho}{\partial u}\sin\theta - \rho\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

(11) et (12) déterminent ρ et θ en fonction de u et v, après quoi (10) donne a.

Les deux dernières équations (B) ne renferment pas K. Il en résulte que si par un procédé quelconque, on peut déterminer les systèmes cycliques de l'espèce étudiée correspondant à une valeur déterminée du paramètre K ($\mathrm{K} = 0$ par exemple), on en fera dériver tous les autres par l'équation (10), d'une interprétation géométrique d'ailleurs fort simple.

Nous reviendrons un peu plus loin sur ce point de vue. Pour l'instant nous allons montrer que le système [(11)-(12)] se ramène à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre :

$$rt - s^2 = 1,$$

où r, s, t sont les notations habituelles de Monge.

L'équation (12) peut s'écrire :

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sin\theta}{\rho}\right)}{\sin\theta} = \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}}{\sin\theta},$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\log\frac{\sin\theta}{\rho}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right].$$

Cette dernière égalité prouve que l'on peut poser

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\theta}{\rho} = e^{\frac{\partial\Phi}{\partial v}},\\ &\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}},\end{aligned}\right.$$

Φ étant une certaine fonction à déterminer de u et de v.

Pour déterminer Φ, on tire ρ et θ du système (13) et l'on remplace ρ et θ par les expressions trouvées dans (11). On obtient facilement

$$\sin\theta = \frac{2}{e^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}} + e^{-\frac{\partial\Phi}{\partial u}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\partial\Phi}{\partial u}},$$

$$\rho = \frac{2}{e^{\frac{\partial\Phi}{\partial v}}\left(e^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}} + e^{-\frac{\partial\Phi}{\partial u}}\right)} = \frac{1}{e^{\frac{\partial\Phi}{\partial v}}\operatorname{ch}\frac{\partial\Phi}{\partial u}}.$$

En portant dans (11), celle-ci devient après un calcul facile :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = 1,$$

soit, en posant

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = r,\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = t,\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = s :$$

$$(14)\qquad rt - s^2 = 1.$$

Telle est l'équation du deuxième ordre dont dépendent les systèmes cycliques cherchés.

Toute intégrale Φ de cette équation détermine ∞^1 systèmes cycliques de l'espèce étudiée, définis par les formules

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho = \frac{1}{e^{\frac{\partial\Phi}{\partial v}}\operatorname{ch}\frac{\partial\Phi}{\partial u}},\\ &a = \pm\sqrt{\frac{1}{e^{2\frac{\partial\Phi}{\partial v}}\operatorname{ch}^2\frac{\partial\Phi}{\partial u}} + \mathrm{K}}\qquad (\mathrm{K} = \text{constante arbitraire}).\end{aligned}\right.$$

III. *Détermination des systèmes cycliques étudiés.* — L'équation (14) ne diffère que par le signe du second membre de celle ($rt - s^2 = -1$) que l'on rencontre dans la théorie mécanique de la chaleur. Pour ce qui concerne son intégration, nous renvoyons aux *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre* de M. E. Goursat, nous bornant ici à noter la signification géométrique que lui attribue le problème sur les systèmes cycliques qui nous occupe.

A cette signification géométrique on peut d'ailleurs joindre la suivante : (14) est l'équation des surfaces telles que la courbure totale en un point quelconque soit $\frac{1}{\cos^4 \gamma}$, γ étant l'angle de la normale avec une droite fixe.

Plutôt que de poursuivre analytiquement la détermination des systèmes cycliques cherchés, nous allons, développant une remarque faite un peu plus haut, effectuer cette détermination géométriquement en rattachant le problème à un problème résolu par M. P. Appell.

Donnons à la constante arbitraire K la valeur zéro. On a alors

$$a^2 = \rho^2.$$

Les systèmes cycliques correspondants sont formés de cercles passant par le point fixe O.

Soumettons ces systèmes particuliers à une inversion de pôle O et de puissance quelconque; nous obtenons une famille de congruences de normales.

Ces congruences jouissent évidemment de la propriété dont jouissent les systèmes cycliques inverses :

Si l'on fait tourner chaque rayon de l'une quelconque de ces congruences d'un angle constant autour de sa parallèle issue de O, *on transforme la congruence en une autre congruence* normale.

Nous avons établi [1] que les seules congruences normales jouissant de la propriété énoncée sont les congruences d'Appell (normales à enveloppée moyenne point) relatives au point O.

---

[1] *Les congruences de normales dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenne donnée* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929).

De là résulte la construction suivante des systèmes cycliques de l'espèce étudiée formés de cercles passant par O :

Pour avoir tous ces systèmes, il suffit de transformer par inversion l'ensemble des congruences d'Appell relatives au point O.

Il nous reste maintenant à montrer comment on obtiendra *tous* les systèmes cycliques qui font l'objet de la présente étude.

Ils se déduisent des systèmes cycliques particuliers inverses des congruences normales d'Appell, par une construction géométrique très simple, conséquence immédiate de la relation (10).

Envisageons l'un quelconque des systèmes cycliques définis par les formules (15), correspondant à une valeur déterminée du paramètre K. Le rayon ρ du cercle générateur est une certaine fonction des deux variables u et v. Désignons par (C_k) ce système. Associons à (C_k) le système (C_0) correspondant à $K = 0$, dont le rayon du cercle générateur a la même expression $\rho(u, v)$ que pour (C_k). Soit (Γ_0) un cercle quelconque de (C_0), (Γ_k) le cercle correspondant de (C_k).

La puissance de O par rapport à (Γ_k) est manifestement K [*voir* l'équation (10)]. Portons sur la tangente en O à (Γ_0), de part et d'autre de O, $OI = OJ = \sqrt{-K}$ (I et J sont réels ou imaginaires). (Γ_k) est égal à (Γ_0) et passe par I et J. On peut donc dire :

($\mathcal{C}$). — *Les différents cercles du système* (C_k) *s'obtiennent en déplaçant chaque cercle du système* (C_0) *par translation le long du diamètre passant par* O, *jusqu'à ce qu'il coupe la tangente en* O *aux points* I *et* J *tels que* $OI = OJ = \sqrt{-K}$.

Notons que tous les cercles d'un système (C_k) sont orthogonaux à la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{K}$ si K est positif, et coupent la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{|K|}$ en deux points diamétralement opposés si K est négatif.

Le problème que nous nous étions posé est résolu :

Les différents systèmes cycliques de l'espèce étudiée dérivent des congruences d'Appell relatives à O (*qui constituent d'ailleurs des solutions particulières*), *par une inversion de pôle* O *suivie de l'opération géométrique* ($\mathcal{C}$).

Les équations des systèmes cycliques (C_k) peuvent se déduire simplement des équations définissant les congruences d'Appell.

Si $X(u, v)$, Y, Z sont les cosinus directeurs d'un rayon quelconque N d'une congruence d'Appell relative à l'origine O des coordonnées, et si x, y, z sont les coordonnées de la projection I de O sur N, on a ([1]) :

$$(16) \qquad x = \Delta(M, X), \qquad y = \Delta(M, Y), \qquad z = \Delta(M, Z).$$

Δ étant le paramètre différentiel mixte du premier ordre relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence :

$$ds^2 = S\, dX^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

et $M(u, v)$ une solution de l'équation

$$\Delta_2 M = 0.$$

$\Delta_2 M$ étant le paramètre différentiel du second ordre de M.

Le cercle inverse de (N), dans une inversion de pôle O et de puissance 2λ, a pour rayon :

$$\rho = \frac{\lambda}{OI} = \frac{\lambda}{\sqrt{S[\Delta(M, X)]^2}}.$$

En introduisant le paramètre du premier ordre de M, on peut écrire :

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta_1 M}}.$$

Le cercle déduit du précédent par l'opération $(\mathcal{C})$ est défini dans le plan OIN par

$$a = \sqrt{K + \frac{\lambda^2}{\Delta_1 M}}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta_1 M}}$$

(a est l'abscisse du centre sur OI, ρ le rayon, K une constante).

Les coordonnées d'un point quelconque du cercle ci-dessus, par

---

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1929.

rapport aux axes fixes, ont pour expressions :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{(\sqrt{K\Delta_1 M + \lambda^2} + \lambda \cos t)\Delta(M, X)}{\Delta_1 M} + \frac{\lambda X \sin t}{\sqrt{\Delta_1 M}}, \\ \eta &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \right.$$

t est l'angle du rayon aboutissant au point envisagé avec OI.

Les équations (17) où M est une solution quelconque de $\Delta_2 M = 0$ définissent les systèmes cycliques étudiés.

Si M est une fonction *arbitraire* de u et de v, et non plus une solution de $\Delta_2 M = 0$, la congruence (16) est la congruence rectiligne normale la plus générale, et les formules (17) où $K = 0$ représentent le système cyclique le plus général formé de cercles issus de O.

J'ai établi, dans l'article cité plus haut du *Bulletin des Sciences mathématiques*, que si l'on fait tourner chaque rayon de la congruence normale la plus générale, de 90° autour de sa parallèle issue d'un point fixe quelconque O, on obtient la congruence la plus générale admettant pour enveloppée moyenne le point O.

De cette remarque et de ce qui précède, résulte une solution géométrique simple du problème de la détermination des congruences de cercles, issus d'un point fixe O, et touchant les deux nappes focales en deux points équidistants du point O.

Pour obtenir la congruence de l'espèce indiquée, la plus générale, on se donne une surface quelconque, on transforme par inversion le système de ses normales, enfin on fait tourner chacun des cercles obtenus de 90° *autour de sa tangente en* O.

Comme exemple simple, citons la congruence (de révolution) formée des cercles issus d'un point O et tangents à deux surfaces de révolution, de même axe passant par O, symétriques par rapport à O.

Les systèmes *cycliques* formés de cercles issus d'un point O et tangents aux deux nappes focales en deux points équidistants du point O sont les inverses des congruences d'Appell relatives au point O. Ceux d'entre eux qui sont de révolution (l'axe passant nécessairement par O) ont pour nappes focales les surfaces engendrées par deux cardioïdes quelconques ayant même axe de symétrie Δ, même point de rebroussement O et des dispositions différentes, tournant autour de Δ.

Si les deux cardioïdes ci-dessus sont égales, on peut donner une définition géométrique intéressante des surfaces de la famille de Lamé associée aux cercles du système. La définition se déduit par inversion de celle des surfaces orthogonales aux congruences normales à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'un point du plan moyen et de la normale au plan en ce point, que j'ai donnée dans un précédent Mémoire [1]. Je me borne à l'indiquer :

On obtient une surface génératrice de la famille de Lamé en question, en prenant l'enveloppe d'un tore de cercle de gorge nul fixe O, tournant autour d'une perpendiculaire en O à son axe, la variation du rayon ρ du cercle générateur étant inversement proportionnelle à celle de l'angle de rotation $\theta\left(\rho = \frac{k}{\theta}\right)$.

NOTE

SUR LA DÉTERMIMATION DES CORRESPONDANCES PAR AIRES CONSTANTES ENTRE DEUX POINTS D'UNE SPHÈRE.

Les correspondances ponctuelles sur une sphère, avec égalité des aires homologues, ont été l'objet d'un certain nombre d'études.

Dans ses *Leçons de Géométrie différentielle*, L. Bianchi indique que le problème de la détermination des correspondances par aires constantes entre deux points d'une sphère est identique à celui de la recherche des congruences à enveloppée moyenne point.

Dans le Mémoire des *Annales de Toulouse*, cité plus haut, j'ai montré comment on pouvait obtenir toutes les correspondances par aires constantes sur la sphère en introduisant une surface arbitraire.

[1] *Sur trois types de congruences rectilignes* (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 1927, § 18).

M. R. Bricard, dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques : Sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe* (juin 1925), a montré qu'à tout mouvement (M_2) à deux paramètres autour d'un point fixe, on peut faire correspondre une correspondance par aires constantes sur une sphère et a posé la question de savoir si toute correspondance de cette nature peut être rattachée à un certain mouvement M_2 autour d'un point fixe.

Cette question a été résolue par M. E. Cartan, dans un article du même recueil : *Sur le mouvement à deux paramètres* (novembre 1925).

M. E. Cartan a montré, en utilisant la méthode du trièdre mobile, qu'étant donnée une correspondance ponctuelle avec conservation des aires sur une sphère, il existe une infinité de mouvements à deux paramètres fournissant cette correspondance.

Le théorème relatif à la construction des congruences à enveloppée moyenne, point que j'ai signalé au numéro précédent, fournit une construction géométrique très simple de toutes les correspondances par aires constantes entre deux points d'une sphère, que je me permets de signaler :

Pour obtenir une telle correspondance sur une sphère de centre O, *il suffit de se donner une surface quelconque et de faire tourner chacune de ses normales de* 90° *autour de sa parallèle issue de* O.

Les droites obtenues déterminent sur la sphère deux systèmes de points se correspondant avec égalité des aires.

En adoptant la convention de signe indiquée par M. Vessiot [1] dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, le rapport de deux éléments d'aire homologues fournis par la construction qui vient d'être indiquée est positif. Pour avoir toutes les correspondances pour lesquelles le rapport est négatif, il suffit de remplacer l'un des deux systèmes de points ci-dessus déterminés par son symétrique par rapport à un plan diamétral quelconque de la sphère.

De la construction qui vient d'être indiquée, on déduit immédiatement la construction curieuse suivante d'une infinité de contours fermés

---

[1] *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 154.

tracés sur une sphère (S) de centre O et partageant (S) en deux aires équivalentes.

Donnons-nous une portion régulière de surface (Σ), *dont toutes les normales coupent* (S). *Envisageons les normales à* (Σ) *tangentes à* (S), *touchant* (S) *le long d'une courbe fermée* (C). *Faisons tourner chaque point de* (C) *de* 90°, *dans un sens déterminé autour de la normale correspondant à* (Σ). *Nous obtenons une nouvelle courbe fermée* (Γ) *tracée sur* (S). (Γ) *détermine sur* (S) *deux aires équivalentes.*

En faisant varier (Σ), on obtient sur (S) autant de courbes que l'on veut divisant l'aire de (S) en deux parties équivalentes.

Si l'on se donne à priori la courbe (C) sur (S), et que l'on envisage les normales à (C) tangentes à (S), ces droites constituent une surface réglée limitant une infinité de portions de congruences normales.

La courbe (Γ), *correspondant à* (C), *s'obtient, en portant sur tous les grands cercles tangents à* (C), *à partir des points de contact, et dans le même sens, des longueurs égales à* $\frac{\pi R}{2}$ [$R =$ *rayon de* (S)].

On retrouve ainsi, comme cas particulier de la construction générale ci-dessus indiquée, une propriété donnée par M. R. Bricard dans un article des *Nouvelles Annales : Sur les aires et les courbes supplémentaires en géométrie sphérique* (novembre 1924), auquel nous renvoyons pour une étude précise de la question.