ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN ITARD

Sur les géométries métriques planes non archimédiennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 359-379
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__359_0>

SUR

LES GÉOMÉTRIES MÉTRIQUES PLANES

NON ARCHIMÉDIENNES

PAR M. JEAN ITARD

Soit un plan sur lequel se trouvent vérifiés les axiomes de Hilbert suivants (¹) :

I. — Axiomes d'association.

1. Deux points distincts A, B déterminent toujours une droite *a*.

2. Deux points distincts quelconques d'une droite déterminent cette droite, et sur toute droite il y a au moins deux points.

II. — Axiomes de distribution.

1. A, B, C désignant trois points en ligne droite, si B est situé entre A et C il l'est aussi entre C et A.

2. A et C désignant deux points d'une droite il y a au moins un point B situé entre A et C et au moins un point D tel que C soit entre A et D.

3. De trois points d'une droite, il en est toujours un et un seul situé entre les deux autres.

4. Quatre points quelconques A, B, C, D d'une droite peuvent toujours être distribués d'une manière telle que B soit situé entre A et C

(¹) *Cf.* HILBERT, *Les principes fondamentaux de la Géométrie*, traduction française par Laugel (Gauthier-Villars, 1900).

et aussi entre A et D, et que C soit situé entre A et D et aussi entre B et D.

5. Soient A, B, C trois points non en ligne droite et (a) une droite qui ne passe par aucun des A, B, C : si la droite (a) passe par un point du segment AB, elle passera toujours ou bien par un point du segment BC ou bien par un point du segment AC.

III. — Axiomes de congruence.

1. Si l'on désigne par A, B deux points d'une droite a, et par A un point de cette même droite ou bien d'une autre droite a', on pourra toujours sur la droite a', d'un côté donné du point A′ trouver un point et un seul B′, tel que le segment AB soit congruent au segment A′B′. Tout segment est congruent à lui-même. Le segment AB est toujours congruent au segment BA.

2. Lorsqu'un segment AB est congruent au segment A′B′ et de même au segment A″B″, alors A′B′ est aussi congruent au segment A″B″.

3. Sur la droite a, soient AB et BC deux segments sans points communs, et soient ensuite deux segments A′B′ et B′C′ situés sur la même droite ou sur une autre droite a', également sans points communs; si l'on a $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C'$ on aura toujours aussi $AC \equiv A'C'$.

4. Soit un angle (h, k) et soit une droite a'. Supposons encore qu'un côté déterminé de la droite a' soit assigné. Désignons par h' une demi-droite prise sur la droite a' et issue d'un point O′ de cette droite. Il existera alors une demi-droite k' et une seule telle que l'angle (h, k) soit congruent à l'angle (h', k') et qu'en même temps tous les points à l'intérieur de l'angle (h', k') soient situés du côté assigné de a'.

Tout angle est congruent à lui-même. L'angle (h, k) est toujours congruent à l'angle (k, h).

5. Un angle (h, k) étant congruent à l'angle (h', k') ainsi qu'à l'angle $(h''k'')$, l'angle $(h'k')$ le sera aussi à l'angle (h'', k'').

6. Dans deux triangles ABC et A′B′C′ si les congruences

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \widehat{BAC} \equiv \widehat{A'C'B'}$$

sont vérifiées, les congruences

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$$

le sont toujours également.

Nous ne supposerons pas vérifiés l'axiome d'Euclide sur les droites parallèles ou axiome III de Hilbert, ni l'axiome d'Archimède ou axiome V de Hilbert.

Le but de ce Mémoire est de montrer que l'on peut considérer ce plan comme appartenant à un espace projectif à trois dimensions dans lequel se trouve vérifié le théorème de Pappus :

« Si les deux triples de sommets alternés d'un hexagone sont chacun formés de points alignés, les points diagonaux principaux de cet hexagone sont aussi alignés », et de ramener le groupe des déplacements au groupe des homographies qui conservent une certaine polarité.

Déplacements, symétries. — En appelant *déplacements directs* ceux qui conservent les sens de rotation, *déplacements indirects* ceux qui les changent, on sait que tout déplacement direct peut se ramener à deux symétries par rapport à des droites, tout déplacement indirect à trois.

C'est sur cette remarque que nous nous appuierons, et pour abréger nous réserverons le nom de *symétrie* à la symétrie par rapport à une droite. S'il nous arrive de parler de la symétrie par rapport à un point nous l'indiquerons en toutes lettres. Une symétrie sera désignée par la même lettre que son axe.

Faisceaux de droites. — Deux droites u et v déterminent un déplacement direct

$$vu$$

obtenu en effectuant successivement les symétrie u et v,

$$(vu)^{-1} = uv.$$

Si u' et v' définissent le même déplacement, c'est-à-dire si

$$v'u' = vu,$$

nous dirons que u' appartient au *faisceau* (vu).

La condition pour que w appartienne au faisceau (vu) est donc que

$$vuw$$

définisse une symétrie ou que

$$vuw = wuv,$$

les symétries étant les seuls déplacements indirect qui soient involutifs.

Si w' est la symétrie ainsi déterminée

$$vuw = w',$$

soient A un point pris sur cette droite, A_1 son symétrique par rapport à w, A_2 le symétrique de A_1 par rapport à u A'_2 et A doivent être symétriques par rapport à v puique la symétrie w' laisse A fixe. Ainsi :

Si w appartient au faisceau (vu), u, v, w sont les médiatrices des côtés d'un triangle.

Réciproquement si u, v, w sont les médiatrices du triangle AA_2A_1, vuw laisse A fixe. Parmi les déplacements indirects seules les symétries laissent un point fixe. Donc w appartient au faisceau (uv). u, v, w jouent des rôles symétriques et non seulement on a

$$vuw = wuv,$$

mais aussi

$$uvw = wuv \qquad \text{et} \qquad uwv = vwu,$$

ce que l'on aurait pu établir par le calcul. Par exemple de

$$vuw = wuv$$

on tire

$$vuw . w = wuvw$$

ou

$$vu = wuvw$$

et

$$wvu = uvw,$$

c'est-à-dire que si w appartient au faisceau (uv), u appartient au faisceau (wv) et v au faisceau (uw).

Si

$$uv = ww',$$

$$uv = w'(w'ww')$$

et comme $w'ww'$ est une symétrie, w' appartient comme w au faisceau (uv).

Soient M un point quelconque du plan et M_1 son transformé par le déplacement vu. Soit w la médiatrice de MM_1 ; uvw laisse M fixe. C'est donc une symétrie w' dont l'axe passe par M et qui appartient au faisceau (uv). Ainsi : Par tout point du plan il passe une droite du faisceau w.

Soient w_1 et w_2 deux droites quelconques du faisceau (uv) :

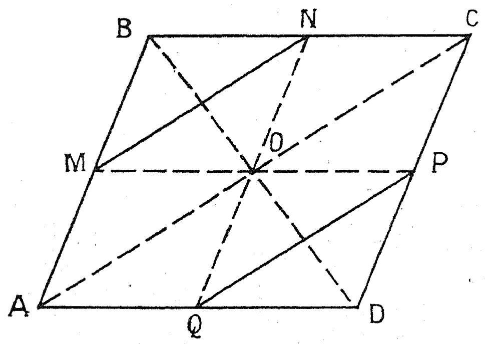
$$\begin{aligned} uv.w_1 w_2 &= uvw_1.w_2 \\ &= w_1 vu.w_2 \quad \text{puisque} \quad uvw_1 = w_1 vu \\ &= w_1 w_2.uv \quad \text{puisque} \quad w_2 uv = vuw_2 \end{aligned}$$

Les deux déplacements $w_1 w_2$ et uv sont permutables. *Réciproquement*, soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux déplacements directs permutables : $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1$.

Soient A un point du plan, B son transformé par $\mathcal{D}_1$, D son transformé par $\mathcal{D}_2$ et C le transformé de B par $\mathcal{D}_2$ ou de D par $\mathcal{D}_1$. Le déplacement $\mathcal{D}_1$ amène en coïncidence les segments AD et BC, le déplacement $\mathcal{D}_2$ les segments AB et DC, donc $AD = BC$; $AB = DC$ et les deux triangles ABD et BCD ayant leurs trois côtés égaux sont égaux. Deux positions sont possibles : ou bien A et C sont de part et d'autre de BD ou bien ils sont du même côté.

Premier cas (*fig.* 1). — A et C sont de part et d'autre de BD. Le qua-

Fig. 1.



drilatère ABCD est alors convexe. Ses diagonales se coupent en leur milieu. Soient O ce point, M, N, P, Q les milieux de AB, BC, CD, DA.

En désignant par S_O la symétrie par rapport au point O on voit que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= S_O S_N = S_Q S_O,\\
\mathcal{D}_2 &= S_O S_P = S_M S_O,\\
\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 &= S_Q S_P,\\
\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 &= S_M S_N.
\end{aligned}
$$

Pour que $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1$ il faut donc que dans le même déplacement deux droites QP et MN glissent sur elles-mêmes.

Ceci n'est possible que si la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits et lorsque $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ sont des translations rectilignes. Réservons pour le moment ce cas particulier.

Deuxième cas [cas général (*fig.* 2)]. — A et C sont du même côté de BD.

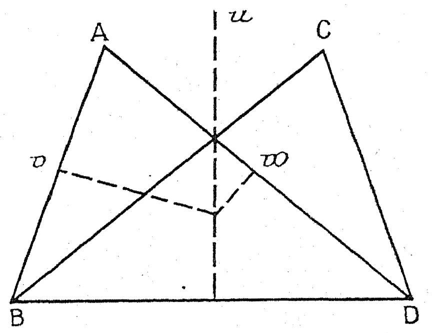
Alors B et D, A et C sont symétriques par rapport à une même droite u. Si v est la médiatrice de AB et w celle de AD,

$$\mathcal{D}_1 = uw, \qquad \mathcal{D}_2 = uv.$$

Les trois droites u, v, w médiatrices des trois côtés d'un triangle appartiennent à un même faisceau.

Nous avons vu que si w_1 et w_2 appartiennent au faisceau (uv) les déplacements $w_1 w_2$ et uv sont permutables. Soient A un point de la

Fig. 2.



droite v et B son transformé par le déplacement uv. Le segment AB a pour médiatrice u. Si D est le transformé de A par le déplacement $w_1 w_2$ et si x est la médiatrice de BD, y celle de AD il résulte de ce qui précède que

$$uv = xy, \qquad w_1 w_2 = xu$$

ou

$$w_1 w_2 u = x$$

donc u appartient au faisceau $(w_1 w_2)$; même raisonnement pour v. Partant :

Si w_1 et w_2 appartiennent au faisceau (uv), u et v appartiennent au faisceau $(w_1 w_2)$, ou :

Un faisceau est déterminé par deux quelconques de ses droites.

Les propriétés des faisceaux sont ainsi la généralisation de celles des droites concourantes. D'ailleurs si u et v concourent en un point O il en est de même de toutes les droites du faisceau.

Nous pourrons dire que les droites d'un faisceau *concourent idéalement* et déterminent un *point idéal*. Si u et v sont deux droites du faisceau nous dirons aussi que le déplacement vu a pour *centre idéal* le *centre* du faisceau (uv).

Les raisonnements précédents s'appliquent encore au cas réservé où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Mais dans ce cas il y a lieu de considérer à côté des faisceaux de droites concourant idéalement les faisceaux formés par les droites perpendiculaires à une droite donnée. Nous réserverons à ces faisceaux le nom de *faisceaux de droites parallèles*, deux droites « parallèles » étant deux droites perpendiculaires à une même troisième et par suite à toutes ses « parallèles ». Une translation est alors le déplacement direct obtenu en faisant le produit de deux symétries dont les axes sont parallèles et nous avons vu que deux translations sont permutables, c'est-à-dire que $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1$.

Déplacements indirects. — Soient u, v, w trois droites non concourantes (réellement ou idéalement, ni « parallèles » dans le cas particulier).

$\mathfrak{J} = wvu$ est un déplacement indirect et tout déplacement indirect peut se ramener à cette forme. Par un point réel quelconque de w (1), O, menons la droite v_1 du faisceau (uv) et soit $v_1 u_1 = vu$, alors $\mathfrak{J} = wv_1 u_1$.

(1) On est prié de faire une figure.

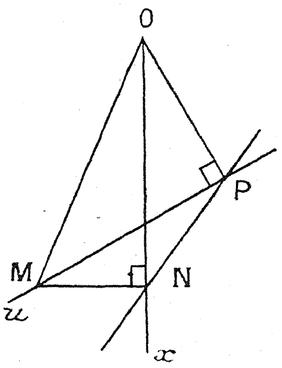
Par O menons p perpendiculaire à u_1 et soit $rp = vv_1$: $\mathcal{J} = rpu_1$. Si Ω est le pied de p sur u_1, pu_1 est une symétrie directe de centre Ω. De ce point abaissons ϖ perpendiculaire à r et ϖ perpendiculaire à ϖ;

$$pu_1 = \varpi\varpi' \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J} = r\varpi\varpi' = \varpi r \varpi' = r\varpi'\varpi.$$

La droite ϖ glisse sur elle-même puisqu'elle est perpendiculaire aux deux droites r et ϖ'. ϖ' peut d'ailleurs être remplacée par toute autre droite perpendiculaire à ϖ, r se trouve alors parfaitement déterminée. Si A est un point quelconque on peut donc toujours le supposer sur ϖ'. Le déplacement $\mathcal{J} = r\varpi\varpi'$ agit sur lui comme la symétrie par rapport à un point $S = r\varpi$. Cette symétrie ayant son centre sur ϖ nous voyons que :

Dans tout déplacement indirect une droite glisse sur elle-même.

Fig. 3.



C'est le lieu des milieux des segments qui unissent deux points correspondants dans le déplacement.

Si maintenant $\mathcal{D}$ désigne un déplacement direct et u une droite quelconque, comme

$$\mathcal{D}u\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}u \,.\, u \,.\, u\mathcal{D}^{-1},$$

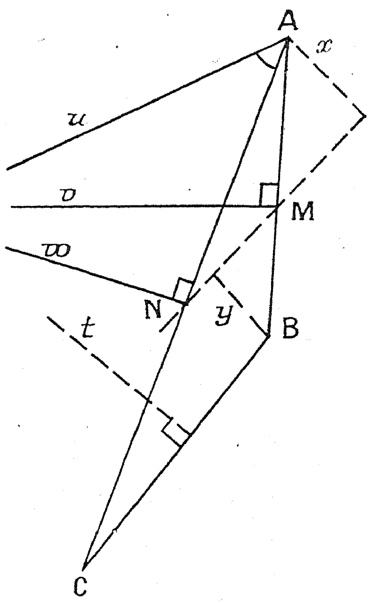
c'est-à-dire comme le déplacement indirect $\mathcal{D}u$ agit sur les points de cette droite comme le déplacement donné on voit que : dans tout déplacement le lieu des milieux des segments qui unissent les points d'une droite à leurs correspondants est une droite.

Comme les médiatrices de ces segments concourent au centre de rotation, il en résulte, dans le cas particulier où ce centre est réel, que (*fig.* 3) :

Étant donnés un point O et une droite u, si l'on joint un point quelconque M de u à O, que l'on mène Ox telle que $\widehat{MOx}$ soit constant, le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Ox décrit une droite qui coupe u au pied de la perpendiculaire abaissée de O sur cette dernière droite.

Considérons trois droites d'un même faisceau u, v, w, A un point réel de u, B son symétrique par rapport à v et C son symétrique par rapport à w (*fig.* 4). Si $vu = tw$, t est la médiatrice de BC. Appelons

Fig. 4.



encore M le milieu de AB, N celui de AC et désignons la droite AB par p_1, la droite AC par p_2.

Soit x la droite issue de A telle que $up_1 = p_2 x$ ou $up_2 = p_1 x$, c'est-à-dire telle que l'angle $\widehat{uAC}$ égale l'angle $\widehat{BAx}$.

Si y est la symétrique de x par rapport au point M, elle passera par B et l'on aura

$$y = S_M x S_M\,;$$

mais

$$S_M = vp_1 = p_1 v,$$

d'où

$$y = vp_1 x S_M,$$

et, comme $p_1 x = up_2$,

$$y = vup_2 S_M$$

ou, en remplaçant vu par tw,

$$y = twp_2 S_M,$$

et, puisque $wp_2 = S_N$,

$$y = t S_N S_M$$

ou

$$ty = S_N S_M.$$

Le déplacement ty fait donc glisser la droite NM sur elle-même. Par suite t et y sont perpendiculaires à cette droite et il en est évidemment de même de x :

Pour qu'une droite u concoure réellement ou idéalement avec deux droites données v et w il faut et il suffit que si d'un point réel A de u on abaisse les perpendiculaires p_1 et p_2 sur ces deux droites et la perpendiculaire x sur la droite de jonction de leurs pieds $up_1 = p_2 x$, c'est-à-dire que les angles $\widehat{uAp_1}$ et $\widehat{p_2 Ax}$ soient égaux (¹).

Soient alors $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des droites appartenant à un même faisceau. D'un point réel O abaissons $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ perpendiculaires sur ces droites et menons $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ telles que les angles $\widehat{A_i OB_i}$ soient tous égaux entre eux. Si des points A_i nous abaissons les perpendiculaires $A_i B_i$ sur les droites OB_i je dis que toutes ces perpendiculaires appartiennent à un même faisceau.

En effet soit v la droite du faisceau des u_i passant par O. Considérons deux droites u_i quelconques, par exemple u_1 et u_2. Si p est la perpendiculaire abaissée de O sur $A_1 A_2$ nous savons d'après la dernière proposition établie que les angles $\widehat{vOA_1}$ et $\widehat{A_2 Op}$ sont égaux (*fig.* 5). D'autre part d'après l'avant-dernière proposition la droite $B_1 B_2$

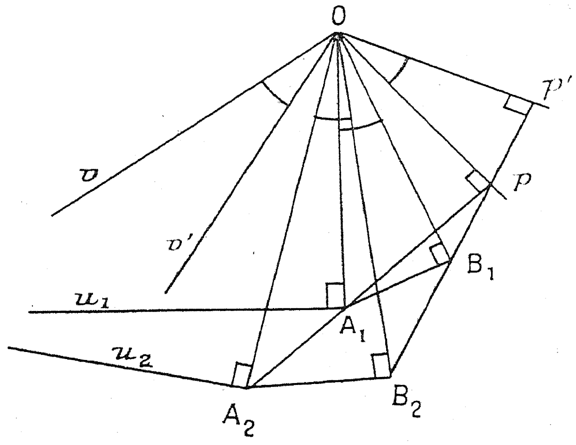
(¹) Ce théorème est une généralisation du lemme utilisé par Hilbert pour démontrer au moyen des axiomes métriques et du postulat d'Euclide le théorème de Pappus (voir : *Les Principes fondamentaux de la Géométrie*).

passe par le pied de p sur A_1A_2 et si p' est la perpendiculaire abaissée de O sur B_1B_2 l'angle $\widehat{pOp'}$ est égal à $\widehat{A_iOB_i}$. Menons alors par O la droite v' qui fait avec v un angle égal à A_iOB_i :

$$\widehat{v'OB_1} = \widehat{vOA_1}, \qquad \widehat{B_2Op'} = \widehat{A_2Op};$$

donc, puisque $\widehat{A_2Op} = \widehat{vOA_1}$, on trouve $\widehat{B_2Op'} = \widehat{v'OB_1}$ et les droites

Fig. 5.



v', A_1B_1 et A_2B_2 concourent au même point réel ou idéal. Comme il en serait de même de v', A_1B_1 et A_iB_i quel que soit i la proposition est établie.

Espace des rotations. — Nous appelons rotation tout déplacement direct à centre réel. Nous allons montrer que l'ensemble des rotations jouit de certaines propriétés de l'espace projectif à trois dimensions.

Séries de rotations. — Étant donnés une rotation déterminée R et un déplacement θ variable mais de centre réel ou idéal fixe nous dirons que les rotations θR appartiennent à une même série.

Comme si $\theta' = R^{-1}\theta R$ ce nouveau déplacement variable a lui aussi un centre fixe les rotations $R\theta'$ appartiennent également à une même série.

Le centre fixe de θ sera appelé le *foyer* de la série. Deux rotations R_1 et R_2 appartiennent à une série et à une seule.

Les centres des rotations d'une même série sont alignés. Nous appellerons *droite de support* de la série la ligne des centres. Une série est parfaitement déterminée par son foyer et sa droite de support.

Si u est la droite de support et O un de ses points la rotation de centre O est vu si v est la droite qui joint O au foyer.

Réseaux de rotations. — En désignant par D un déplacement direct déterminé, par S une symétrie par rapport à un centre variable, nous dirons que les rotations R telles que $RD = S$ appartiennent *au réseau* D. Si le centre de R est donné, soit A, et si A′ est son transformé par le déplacement D^{-1}, la symétrie S aura pour centre le milieu de A′A, ce qui la détermine parfaitement, ainsi que R puisque $R = SD^{-1}$. Si le réseau D contient deux rotations de la série θR, soit R et $\theta_1 R$, on a

$$RD = S \quad \text{et} \quad \theta_1 RD = S_1,$$

d'où

$$\theta_1 = S_1 S.$$

Ainsi dans le déplacement θ_1 une droite glisse sur elle-même. La même droite glissera sur elle-même dans tous les déplacements concentriques et si θ_2 est l'un quelconque d'entre eux on aura

$$\theta_2 = S_2 S \text{ (les centres de } S,\ S_1 \text{ et } S_2 \text{ étant alignés)}$$

ou

$$\theta_2 RD = S_2.$$

Le réseau (D) contient donc toutes les rotations de la série θR. Nous voyons en même temps qu'un réseau D ne contient que des séries dont les foyers soient les pôles métriques de droites du plan. (En désignant par pôle métrique d'une droite le point de concours idéal de ses perpendiculaires.) En particulier lorsque la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits les déplacements θ sont des *translations* et toutes les rotations du réseau ont la même amplitude. (Amplitude est pris pour synonyne d'angle de rotation.)

En désignant par I un déplacement indirect déterminé, par u une symétrie par rapport à un axe variable, nous dirons que les rotations R telles que $RI = u$ appartiennent au *réseau* I. Si A est le centre de R et si A′ est son transformé dans le déplacement I^{-1}, u est la médiatrice de AA′, ce qui détermine $R = uI^{-1}$. Si le réseau contient deux rotations de la série θR, soit R et $\theta_1 R$, c'est-à-dire si $RI = u$, $\theta_1 RI = u_1$, $\theta_1 = u_1 u$ et le centre de θ_1, foyer de la série est sur la droite u. La série tout entière appartient au réseau I.

Enfin nous dirons que les symétries par rapport aux points du plan appartiennent au *réseau des symétries*. Une symétrie est parfaitement déterminée par son centre et si le réseau des symétries contient deux rotations d'une série, il contient la série tout entière. En effet son foyer est alors le pôle métrique de sa droite de support.

On peut en somme considérer le réseau des symétries comme un cas particulier des réseaux (D), D se réduisant ici à la transformation identique.

Si deux réseaux ont une rotation commune, ils ont en commun toutes les rotations d'une série.

a. Deux réseaux D_1 *et* D_2. — Si R est la rotation commune $RD_1 = S_1$, $RD_2 = S_2$, la série commune θR a pour foyer le pôle métrique de la droite $S_1 S_2$. — (Si la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits les rotations de chacun des deux réseaux ont même amplitude que R, les deux réseaux sont donc confondus et deux réseaux distincts n'ont aucune rotation commune.) — Un des deux réseaux peut d'ailleurs être celui des symétries.

b. Deux réseaux I_1 *et* I_2. — $RI_1 = u_1$, $RI_2 = u_2$ la série commune θR a pour foyer l'intersection de u_1 et de u_2.

c. Un réseau D *et un réseau* I. — $RD = S$; $RI = u$, la série θR a pour foyer le pôle métrique de la perpendiculaire abaissée du centre S sur u. Si le réseau D est celui des symétries la série commune existe toujours : c'est celle formée par les symétries centrées sur la droite que le déplacement indirect I fait glisser sur elle-même.

Pour que deux séries θR et ωR ayant en commun la rotation R soient dans un même réseau D *il faut* que leurs foyers soient les pôles métriques de deux droites *sécantes* (leur intersection sera le centre de la symétrie S telle que $RD = S$). Pour qu'elles soient dan un même réseau I *il faut* que leurs foyers soient sur la même droite réelle u ($RI = u$).

Comme il n'en est pas toujours ainsi, les séries et réseaux de rotations ne possédent pas les propriétés des droites et plans de l'espace projectif à trois dimensions dans toute leur généralité. Nous allons toutefois nous en servir pour démontrer le théorème de Desargues.

Théorème de Desargues. — Soient deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ dont les sommets homologues A et A_1, B et B_1, C et C_1 sont alignés avec un point réel O, et dont les côtés homologues AB et A_1B_1, BC et B_1C_1, AC et A_1C_1 se coupent en des points réels M, N, P.

Nous voulons montrer que ces trois points sont alignés.

1° Étant données une rotation R de centre quelconque et d'amplitude suffisamment faible, et une série de symétries quelconque, il existe un réseau I contenant la rotation et la série.

Soient Ω le centre de la rotation et u la droite de support de la série. Si ϖ_1 est la perpendiculaire abaissée de Ω sur u et si $R = v\varpi_1$ on peut toujours, en diminuant au besoin l'amplitude de R, c'est-à-dire l'angle $\widehat{\varpi_1 O v}$, considérer que v coupe u en un point réel M. Si alors ϖ_2 est la perpendiculaire élevée de M à u il suffit de prendre $I = \varpi_1\varpi_2 u$. On aura bien

$$RI = v\varpi_1 . \varpi_1\varpi_2 u = v\varpi_2 u$$

et, si v' est la perpendiculaire à v issue de M,

$$vv' = \varpi_2 u$$

et

$$RI = v . vv' = v'.$$

Chacune des droites de la figure que nous étudions peut être prise comme support d'une série de symétries. Le point Ω une fois choisi, ces droites étant un nombre fini, il nous sera possible de déterminer l'amplitude de R de façon que cette rotation et chacune de ces séries appartiennent à un même réseau I. Libre à nous de diminuer par la suite si besoin se fait sentir l'amplitude ainsi déterminée.

2° Soit R_1 une rotation de la série OR, c'est-à-dire de la série qui comprend la rotation R et la symétrie de centre O. Il est possible de choisir R_1 de telle façon que les séries R_1A et RA_1 aient une rotation commune ρ_α, les séries R_1B et RB_1 une rotation commune ρ_β, les séries R_1C et RC_1, une rotation commune ρ_γ.

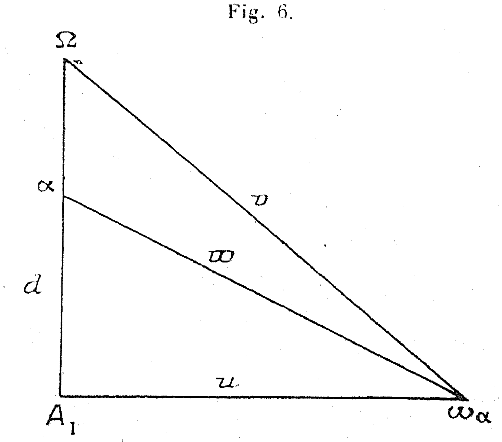
Les symétries O, A et A_1 et les rotations R_1 et R sont dans un même réseau I. Si nous prenons le centre Ω_1 de R_1 sur sur la droite $O\Omega$ de telle sorte que les droites $A\Omega_1$ et $A_1\Omega$ se rencontrent en un point réel α les séries R_1A et A_1R auront en commun la rotation ρ_α de centre α appartenant au réseau I (¹).

Or prenons Ω_1 à l'extérieur du segment $O\Omega$ et du côté de Ω de façon que ces trois points se rencontrent dans l'ordre $O\Omega\Omega_1$. Si A est entre O et A_1, la droite $A\Omega_1$ qui coupe le côté OA_1 du triangle $OA_1\Omega$ et ne coupe pas le côté $O\Omega$ coupe ΩA_1 en un point α (axiome II, 5 de Hilbert). Si O est entre A et A_1, les points A et O sont d'un même côté de $A_1\Omega$, Ω_1 de l'autre côté. La droite $A\Omega_1$ coupe donc $A_1\Omega$ en un point réel α. Enfin si A_1 est entre O et A soit α un point de $A_1\Omega$ dans l'ordre $A_1\Omega\alpha$. A et α sont de part et d'autre de $O\Omega$, la droite $A\alpha$ coupe donc $O\Omega$ en un point réel Ω_1 et A_1 étant sur le périmètre du triangle $O\Omega_1A$, α à l'extérieur, Ω est sur le segment $O\Omega_1$ en vertu de l'axiome II, 5.

Ω_1 ainsi déterminé il est loisible de le rapprocher de Ω, opération qui ne fait que rapprocher également α de ce point. Nous pouvons donc le déterminer de telle sorte que les rotations ρ_α, ρ_β, ρ_γ existent effectivement toutes trois.

Remarquons aussi que α et Ω sont toujours du même côté de A_1.

Fig. 6.



Si alors R est une rotation de sens positif il en est de même de ρ_α. En effet (*fig.* 6) le foyer de la série RA_1 à laquelle appartient ρ_α est un

(¹) On est prié pour tous les développements suivants de faire les figures.

point réel ou idéal de la perpendiculaire u élevée en A_1 à la droite $A_1\Omega$ ou d. Si v et w sont les droites qui joignent ce point à Ω et α, on a $R = vd$, $\rho_\alpha = wd$ et l'on voit par le seul examen de la figure que R et ρ_α sont deux rotations de même sens.

3° Cherchons s'il existe un réseau I contenant les trois rotations ρ_α, ρ_β, ρ_γ.

Nous avons vu qu'il fallait pour cela que les foyers des séries concourantes $\rho_\alpha\,\rho_\beta$ et $\rho_\alpha\,\rho_\gamma$ soient sur une même droite réelle, ce qui a lieu dès que l'un d'eux est réel.

Remarquons que dans le seul cas où A est compris entre O et A_1 les points $A_1\alpha\Omega$ se présentent dans l'ordre où ils sont écrits, tandis que dans les autres cas ils se présentent dans l'ordre $A_1\Omega\alpha$. La rotation $\rho_\alpha R^{-1}$ centrée au foyer ω_α de la série A_1R est de sens négatif dans le premier cas, de sens positif dans les autres comme le montre le premier examen de la figure 6. (En diminuant au besoin l'amplitude de R on peut supposer le point ω_α réel, ce que nous ferons désormais. Une nouvelle diminution de cette amplitude ne ferait que le rapprocher de A_1.)

Supposons alors qu'un des trois points A, B, C soit intérieur au segment OA_1, OB_1 ou OC_1 correspondant, par exemple A et qu'un autre, par exemple B, soit extérieur au segment OB_1.

Alors les deux rotations $\rho_\alpha R^{-1}$ et $\rho_\beta R^1$ sont de sens contraire. Le foyer de la série $\rho_\alpha\,\rho_\beta$ est le centre de $\rho_\alpha\,\rho_\beta^{-1}$ ou $\rho_\alpha R^{-1}.\,R\rho_\beta{}^1$, les deux rotations $\rho_\alpha R^{-1}$ et $R\rho_\beta^{-1}$ étant de même sens et centrées en ω_α et ω_β.

Considérons un polygone convexe enveloppant les quatre points réels A_1, B_1, ω_α, ω_β et soit l un segment de droite supérieur à son périmètre et par suite supérieur au segment $\omega_\alpha\omega_\beta$ et à tous ceux qui joignent un point de $A_1\omega_\alpha$ à un point de $B_1\omega_\beta$. Construisons un triangle EFG dont le côté FG égale l. Si les amplitudes de $\rho_\alpha R^{-1}$ et de R_β^{-1} sont en valeurs absolues inférieures aux angles F et G de ce triangle il est évident que le centre de $\rho_\alpha R^{-1}.\,R\rho_\beta^{-1}$ sera réel puisqu'il est le troisième sommet d'un triangle de base $\omega_\alpha\omega_\beta$ et dont les angles en ω_α et ω_β sont précisément les valeurs absolues de ces amplitudes.

Or nous pouvons toujours considérer le segment $\Omega\alpha$ comme inférieur au segment αA_1 (il suffit de rapprocher si besoin Ω_1 de Ω).

Comme dans un triangle les côtés et les angles opposés sont dans le même ordre de grandeur et que

$$\Omega\alpha < \alpha A_1 < \alpha\omega_\alpha \quad (fig.\ 6),$$

l'angle (w, v) amplitude de $\rho_\alpha R^{-1}$ est inférieur en valeur absolue à l'amplitude de R. De même dans le triangle analogue $\Omega\beta\omega_\beta$ l'amplitude de R, angle extérieur, est supérieure en valeur absolue à celle de $R\rho_\beta^{-1}$.

Il suffira donc de prendre l'amplitude de R inférieure au plus petit des deux angles F et G pour que le foyer cherché soit réel et qu'il existe un réseau I contenant ρ_α, ρ_β, ρ_γ.

Examinons à présent les cas réservés où : 1° aucun des points A, B, C n'est sur le segment correspondant OA_1, OB_1, OC_1 ; 2° tous les trois s'y trouvent.

Les seuls ordres possibles sont alors [1] :

$$\begin{array}{lll} OA_1A, & OB_1B, & OC_1C, \\ AOA_1, & BOB_1, & COC_1, \\ OAA_1, & OBB_1, & OCC_1, \end{array}$$

le premier n'étant d'ailleurs pas distinct du troisième.

Si M, N, P sont respectivement les intersections de BC et B_1C_1, AC et A_1C_1 AB et A_1B_1, ces trois points sont extérieurs au périmètre de chacun des deux triangles car par exemple dans les deux dernières dispositions la droite A_1B_1M n'ayant ni A_1 ni B_1 sur le pourtour de ABC ne peut y avoir son troisème point.

Si les trois points OAA_1 se présentent dans l'ordre où ils sont écrits, les deux triangles APN et OC_1B_1 ont leurs sommets alignés deux à deux avec le point A_1 et le sommet A du premier est sur le segment A_1O, alors que le sommet P est extérieur au segment A_1B_1. Nous sommes donc ramenés au cas particulier résolu tout à l'heure avec toutefois cette variante que si les côtés homologues AP et OB_1, AN et OC_1 se coupent aux points réels B et C, le côté B_1C_1 coupe la droite BC en M et non pas le côté homologue PN. On pourrait ramener les deux autres cas à une figure analogue et nous pouvons désormais admettre que les trois rotations ρ_α, ρ_β, ρ_γ appartiennent à un même

[1] En faisant au besoin jouer au second triangle, le rôle joué par le premier.

réseau I, mais l'hypothèse d'où nous sommes partis devra être généralisée comme suit :

Les côtés homologues AB et A_1B_1, BC et B_1C_1, AC et A_1C_1 se coupent en trois points réels ou les côtés AB et A_1B_1, BC et B_1C_1 se coupent en deux points réels P et M et le côté AC coupe la droite PM en un point réel N.

Dans le premier cas il nous faut montrer que les trois intersections sont alignées, dans le second que A_1C_1 passe par N.

4° Diminuons si nécessaire l'amplitude de R_1, et par suite celle de R (les trois points C, Ω, Ω_1 étant situés comme $A_1\alpha\Omega$ dans la figure 6), suffisamment pour que nous puissions admettre, en vertu du premier point de cette démonstration, qu'il passe un réseau I par cette rotation R_1 et chacune des séries de symétries AB, BC, AC.

5° Si les trois couples de côtés homologues se coupent en trois points réels M, N, P :

Les réseaux (R_1AB) et (RA_1B_1) ont en commun la symétrie P qui appartient aux deux séries de symétries AB et A_1B_1, la rotation ρ_α commune aux deux séries R_1A et RA_1, la rotation ρ_β commune aux deux séries R_1B et RB_1. La symétrie de centre P appartient donc à la série $\rho_\alpha\rho_\beta$, donc au réseau ($\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$). De même pour les symétries de centres M et N. Ces trois symétries appartiennent donc à la série commune au réseau ($\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$) et au réseau des symétries, et *leurs centres* M, N *et* P *sont alignés*.

6° Si les côtés AB et A_1B_1 se coupent en P, les côtés AC et A_1C_1 en N et que le côté BC coupe la droite PN en M, il faut montrer que B_1C_1 passe aussi par M. Or, comme précédemment, les symétries de centres P et N, et par suite celle de centre M appartiennent à l'intersection du réseau ($\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$) et du réseau des symétries. M étant sur la droite BC appartient de plus au réseau (RBC). Les deux réseaux (RBC) et (RB_1C_1) ont en commun la rotation ρ_α et la rotation ρ_β, donc la série ($\rho_\alpha\rho_\beta$) qui appartenant par ailleurs aux réseaux (RBC) et ($\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$) contient la symétrie M. Donc cette symétrie appartient au réseau (RB_1C_1) et la droite B_1C_1 passe par M.

Le théorème de Desargues est démontré et : si deux triangles ont leurs sommets alignés deux à deux avec un point donné et si leurs côtés homologues se rencontrent, les trois intersections sont alignées.

Cet énoncé restreint du théorème suffit pour établir que le plan considéré peut être considéré comme plongé dans un espace à trois dimensions(1).

De même cet énoncé permet de montrer l'existence de faisceaux de droites non concourantes jouissant des propriétés projectives des droites concourantes. Trois droites appartiennent à un *faisceau projectif* (ou concourent idéalement dans le sens projectif), si elles oignent les sommets homologues de deux triangles dont les côtés se coupent en trois points alignés.

Cette notion projective coïncide-t-elle avec la notion de faisceaux de droites introduite ici d'une façon métrique ?

Pour nous en rendre compte reprenons la démonstration du théorème de Desargues avec cette variante que le point O seul ne soit pas réel, c'est-à-dire que les droites AA_1, BB_1, CC_1 appartiennent à un faisceau métrique. Nous nous bornerons au cas où A est sur le segment OA_1 et où B est extérieur au segment OB_1, ce qui suffira pour le but que nous nous proposons. La démonstration sera alors la même que celle donnée précédemment pourvu que nous puissions montrer que les réseaux (RAA_1), (RBB_1), (RCC_1) contiennent tous une même série issue de R et dont la droite de support soit la droite issue de Ω et appartenant au faisceau des trois droites AA_1, BB_1 et CC_1.

Désignons par I le déplacement indirect dont le produit avec une rotation quelconque du réseau (R, AA_1) soit une symétrie axiale et par I_1 le déplacement indirect relatif au réseau (R, BB_1).

Le premier point de la démonstration du théorème de Desargues montre que si ϖ_1 est la perpendiculaire abaissée de Ω sur AA_1 et si $R = v\varpi_1$ on a $RI = v'$, v' étant la perpendiculaire à v élevée à cette droite en son intersection avec AA_1. De même si ϖ'_1 est la perpendiculaire abaissée de Ω sur BB_1 et si $R = v_1\varpi'_1$ on a $RI_1 = v'_1$, v'_1 étant la perpendiculaire élevée à v_1 en son intersection avec BB_1. La série com-

(1) *Cf.* par exemple, Frédéric William OWENS, *The introduction of ideal elements and a new definition of projective n-space* (*Trans. American. Math. Society* **11**, 2, april 1910, p. 141-171).

mune aux deux réseaux a pour foyer l'intersection des deux droites v' et v'_1. Cette série contenant la rotation R sa droite de support s'obtient en menant de Ω la droite w qui passe par le foyer, puis la droite w_1 telle que $ww_1 = R$.

En se reportant au raisonnement du bas de la page 368 on voit bien que w_1 concourt avec AA_1 et BB_1, ce qu'il nous fallait établir.

Ainsi : les notions métrique et projective de faisceaux de droites et de points idéaux coïncident.

[Cela était d'ailleurs presque évident pour les faisceaux de droites perpendiculaires à une droite donnée, deux triangles symétriques par rapport à cette droite étant deux triangles homologiques. En particulier si la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, les « droites parallèles » sont concourantes au sens projectif.]

Le théorème de Desargues permet de parler de points idéaux alignés : Si les côtés correspondants de deux triangles homologiques ne se coupent pas réellement, nous disons que les trois points idéaux de rencontre sont *alignés idéalement* (avec cette extension de la notion de droite toutes les droites se rencontrent).

Soient u, v, w trois droites réelles d'un faisceau. Ce sont les médiatrices des trois côtés d'un triangle, ABC par exemple, u étant la médiatrice de AB, v celle de BC, w celle de CA. Par A il passe une droite u_1 du faisceau telle que $uu_1 = vw$, par B une droite v_1 telle que $vv_1 = wu$, par C une droite w_1 telle que $ww_1 = uv$. En prenant un second triangle A'B'C' ayant u, v, w pour médiatrices on retrouve donc les mêmes droites concourantes u_1, v_1, w_1. Ces deux triangles sont par suite homologiques et les points de concours de AB et A'B', BC et B'C', AC et A'C', c'est-à-dire les pôles métriques de u de v et de w sont alignés idéalement. Ainsi : les pôles métriques de droites concourantes sont alignés.

Hilbert, dans l'ouvrage déjà cité ([1]), établit le théorème de Pappus en s'appuyant sur un lemme dont nous avons donné une généralisation (page 368, note 1). Sa démonstration est donc valable pour nous dans le cas où les deux droites de support des sommets alignés de l'hexagone se coupent en un point réel ayant pour polaire métrique la droite

([1]) HILBERT, *Les principes fondamentaux de la Géométrie.*

idéale de jonction de deux points diagonaux principaux. Par projections successives nous pouvons affirmer qu'il est général et que les géométries métriques étudiées sont pappusiennes.

Toujours dans le même ouvrage Hilbert crée, en ne s'appuyant que sur les axiomes d'association et de distribution et sur les deux théorèmes de Desargues et de Pappus, un calcul segmentaire dans lequel sont possibles et douées des propriétés ordinaires l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. En prenant deux axes de coordonnées l'équation d'une droite est alors $ux + vy + w = 0$, sauf pour une certaine droite choisie pour « droite à l'infini ».

Si nous prenons pour origine un point réel, pour axes des x et des y deux droites rectangulaires et pour droite à l'infini la polaire métrique de l'origine, le calcul montre dans les cas qui nous intéressent :

1° Qu'en plus des opérations élémentaires précédentes l'opération $\sqrt{a^2 + b^2}$ est encore possible.

2° Que l'on peut ramener purement et simplement le cas où la somme des angles d'un triangle égale deux droits à la géométrie euclidienne non archimédienne [1].

3° Dans les autres cas tout point réel ou idéal de coordonnées x_0, y_0 est le pôle d'une droite d'équation

$$xx_0 + yy_0 - j = 0,$$

le segment j étant positif lorsque la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, négatif lorsque cette somme dépasse deux droits.

Tout déplacement est alors une homographie conservant cette polarité.

Les géométries « non legendrienne », « elliptique » et « hyperbolique » de Dehn [2] sont des cas particuliers de ces géométries plus générales.

---

[1] *Cf.* R. L. Moore. *Geometry in wich the sum of the angles of every triangle is tworight angles* (*Transactions of the American Math. Society*, vol. 8, n° 3, July 1907, p. 367).

[2] *Cf.* Hilbert. *Les principes fondamentaux de la Géométrie*, appendice rédigé pour la version française, traduction Laugel.