ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

Sur la représentation des aires multiplement connexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 267-309

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__267_0>

SUR

LA REPRÉSENTATION DES AIRES

MULTIPLEMENT CONNEXES

PAR M. C. DE LA VALLÉE POUSSIN (¹)

I. — Considérations prélimiuaires. Position du problème.

1. OBJET ET CONCLUSIONS DU MÉMOIRE. — On sait depuis longtemps qu'une aire à connexion double, par exemple une aire annulaire comprise entre deux contours simples C et C_1, l'un intérieur à l'autre, peut être représentée d'une manière conforme sur l'aire de même nature, comprise entre deux circonférences concentriques de rayon convenablement choisi.

On doit à M. Schottky (²) un important Mémoire sur la représentation conforme des aires à connexion multiple, qui met en lumière la liaison de ce problème avec les propriétés des fonctions algébriques. On n'y trouve cependant pas une généralisation naturelle du problème que nous venons de rappeler. C'est cette généralisation que nous nous sommes proposé de réaliser dans le présent Travail.

Donnons le nom de *cassiniennes* aux courbes que l'on obtient en égalant à une constante α le module d'un polynome $P(u)$ de degré n à racines distinctes. A chaque polynome $P(u)$ s'attache donc une famille de cassiniennes. Une cassinienne $|P(u)| = \alpha$ est formée d'une seule branche fermée si α est suffisamment grand, mais elle se compose de

(¹) Un résumé de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 190, n° 13, 31 mars 1930, p. 782-783.

(²) SCHOTCKY, *Conforme Abbildung mehrfach zusammen hängender ebener Flächen* (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877, p. 300 à 351).

plusieurs contours fermés séparés si α est suffisamment petit. Chacun de ces contours séparés n'est qu'un fragment de la courbe algébrique. Mais il convient, dans notre théorie, de considérer chaque contour fermé comme une courbe distincte et nous donnerons dorénavant le nom de *cassiniennes* à chacun de ces contours isolément.

On conçoit qu'une aire D d'un seul tenant et à connexion multiple soit limitée par un nombre plus ou moins grand de cassiniennes attachées à un même polynome $P(u)$, l'une extérieure et les autres comprises dans la première. Nous conviendrons de dire, dans ce cas, que l'*aire* D *est attachée au polynome* $P(u)$.

Le théorème sur les aires doublement connexes rappelé au début affirme qu'une telle aire est représentable sur une aire attachée à un polynome du premier degré, pourvu que les cassiniennes soient convenablement choisies. En effet, les cassiniennes attachées à un polynome du premier degré sont des circonférences concentriques.

De même, nous verrons qu'une aire à connexion triple est représentable sur une aire convenable, attachée à un polynome quelconque du second degré.

La généralisation s'étend à tous les ordres de connexion. Une aire bornée A, comprise entre un contour extérieur C et n contours internes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et qui est, par conséquent, de l'ordre $n+1$ de connexion, est représentable, avec correspondance des contours extérieurs, sur une aire convenable attachée à un polynome de degré n. Mais ce polynome n'est plus quelconque, il doit être choisi dans une classe restreinte, et les polynomes d'une même classe sont ceux dont les racines forment des figures semblables. Nous dirons que l'*aire* A *appartient à cette classe de polynomes* (ou encore à chacun d'eux). Ainsi, deux aires A et A' ne sont représentables l'une sur l'autre avec correspondance des contours extérieurs qu'à la condition, nécessaire mais non suffisante, d'appartenir à la même classe de polynomes.

Notre analyse fera correspondre à une aire bornée A de l'ordre $n+1$ de connexion un système de n nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que nous appellerons ses *indices*. Ces nombres précisent les cassiniennes que l'on doit faire correspondre à chacun des contours internes de l'aire A, mais ils correspondent eux-mêmes aux diverses racines du polynome $P(u)$. Pour que deux aires A et A' de la même classe soient représentables l'une sur l'autre avec correspondance des contours extérieurs, il est nécessaire et suffisant qu'elles aient les mêmes indices et que les mêmes indices correspondent aux mêmes racines du polynome $P(u)$.

2. Position du problème analytique. — Le problème que nous venons de poser se traduit par des relations analytiques simples et précises. Soient z la variable complexe qui décrit l'aire A et u la variable correspondante qui décrit l'aire D attachée au polynome $P(u)$ de degré n. On suppose qu'elles font correspondre les contours extérieurs de A et de D. Ces deux variables u et z sont donc fonctions uniformes l'une de l'autre, et, par conséquent, le polynome $P(u)$ est aussi une fonction uniforme de z. Nous pouvons poser

$$P(u) = F(z).$$

Le module de $F(z)$ sera constant sur chacun des contours C et C_k de l'aire A, puisque celui de $P(u)$ demeure constant sur les cassiniennes correspondantes.

Réciproquement, si l'on peut définir la fonction $F(z)$ et le polynome $P(u)$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Le module de $F(z)$ est constant sur chacun des contours C et C_k de l'aire A et il est maximum sur le contour extérieur C;

2° L'équation $P(u) = F(z)$ établit une relation bicontinue et biuniforme entre z et u quand z varie dans A,

il est clair que le problème sera résolu. On voit, de plus, qu'il ne peut l'être que moyennant ces deux conditions.

Pour réaliser ces deux conditions, nous décomposons l'équation précédente en deux autres,

$$P(u) = \zeta, \qquad F(z) = \zeta,$$

que nous étudions d'abord séparément.

Un premier paragraphe (§ II) est consacré à l'étude de l'équation $P(u) = \zeta$ qui est algébrique. Nous développons certaines démonstrations de la méthode des lacets, quoique ayant un caractère classique, parce que les mêmes raisonnements doivent être repris peu après, dans des conditions plus délicates, à l'occasion de la seconde équation qui n'est pas algébrique.

Le paragraphe suivant (§ III) a pour objet la construction de la fonction $F(z)$ et le paragraphe IV reproduit, pour l'équation $F(z) = \zeta$, une analyse analogue à celle qui a été appliquée à l'équation algébrique $P(u) = \zeta$.

Enfin, dans le paragraphe V, nous pouvons résoudre le problème posé et énoncer les conclusions résumées ci-dessus.

Nous avons trouvé expédient de commencer par admettre d'importantes restrictions qui simplifient les démonstrations, mais que nous faisons disparaître après coup.

Nous supposons d'abord que les contours C et C_k de l'aire A sont tous analytiques et dépourvus de toute singularité. Nous admettons encore que les dérivées des deux fonctions $P(u)$ et $F(z)$ n'ont que des racines simples dans les aires envisagées et qu'elles n'en ont aucune sur les frontières. Les restrictions relatives aux racines sont levées dans le paragraphe VI et celles relatives aux contours le sont dans un dernier paragraphe, qui étend la théorie à tous les domaines ouverts quelles que soient leurs frontières.

II. — Propriétés de l'équation algébrique $P(u) = \zeta$.

3. Points critiques et lacets. — Soit $P(u)$ un polynome de degré n à racines distinctes; considérons l'équation algébrique

$$P(u) = \zeta, \tag{1}$$

qui définit une fonction implicite u de ζ. Cette équation est *irréductible*, car $P(u) - \zeta$ étant de premier degré en ζ ne peut être le produit de deux polynomes en ζ. Les n racines $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de l'équation (1) sont distinctes, sauf si l'une d'elles annule le polynome dérivé $P'(u)$, auquel cas il y a des racines égales.

Nous supposerons que les racines de $P'(u)$ *sont distinctes* et nous désignerons ces $n - 1$ racines par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. Ce sont des nombres indépendants de ζ.

Les n racines $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de l'équation (1) sont différentes, sauf pour les $n-1$ valeurs de ζ :

$$\zeta_1 = \mathrm{P}(\omega_1), \qquad \zeta_2 = \mathrm{P}(\omega_1), \qquad \ldots, \qquad \zeta_{n-1} = \mathrm{P}(\omega_{n-1}).$$

On s'assurera bientôt que ces $n-1$ valeurs sont distinctes. Ce sont les $n-1$ points critiques à distance finie de la fonction u. Le point $\zeta = \infty$ est critique aussi, mais nous n'aurons pas à nous en occuper dans notre étude.

Donnons-nous, dans le plan ζ, un point ζ_0 (non critique) et joignons-le à chacun des points critiques distincts respectivement; par des lignes L_1, L_2, ... qui se suivent dans un ordre déterminé autour du point ζ_0 et ne doivent ni se recouper, ni se rencontrer. Chacune de ces lignes définit un *lacet* et nous supposerons ces lacets numérotés dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du point ζ_0 dans le sens direct. Pour décrire le lacet L, on part du point ζ_0, on décrit la ligne L, puis une circonférence infiniment petite autour du point critique où elle aboutit, et l'on revient au point ζ_0 par le même chemin.

Soient a, b, c, ..., l la suite des valeurs, toutes différentes, de u au point ζ_0. Si ζ décrit un lacet L et que l'on suive par continuité la valeur de u le long du lacet à partir de l'une de ces valeurs initiales, la valeur finale de u appartiendra encore à la même suite de valeurs. Si cette valeur est différente de la première, nous dirons que le lacet *permute* ces deux valeurs.

Nous supposons connus deux principes classiques :

1° L'équation (1) étant irréductible, on peut passer par continuité d'une valeur initiale quelconque à toute autre en faisant décrire à ζ, de ζ_0 à ζ_0, un chemin fermé approprié.

2° Tout circuit fermé mené de ζ_0 à ζ_0 peut se réduire à un ou plusieurs lacets consécutifs sans altérer la valeur finale de u parce que cette réduction s'obtient par une déformation continue de la ligne sans traverser de point critique.

Le théorème suivant s'appuie sur ces deux principes. Ce n'est qu'un cas particulier d'un théorème classique ([1]). Mais il est utile d'en déve-

---

([1]) *Cf.* E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, 3e édition. Chap. XIII, § 3 : Des lopper ici la démonstration, car elle sera reprise dans des conditions plus complexes à l'occasion d'un problème non algébrique et non analytique.

4. Systèmes cycliques de lacets. — Théorème : *Si, parmi les n valeurs de u au point initial ζ_0, on en choisit arbitrairement une, par exemple a, on peut construire un système de lacets correspondant qui sera* CYCLIQUE, *c'est-à-dire tel que si ζ parcourt tous les lacets consécutifs dans leur ordre, la fonction u, débutant avec la valeur choisie a, repasse par le point ζ_0 avec une nouvelle valeur après chaque lacet et prenne ainsi successivement, en ce point, les n valeurs initiales $a, b, c, \ldots, l$, ce qui exige qu'il y ait $n-1$ lacets exactement.*

Nous avons stipulé (n° 3) que la dérivée $P'(u)$ n'a que des racines simples. On sait que, dans ce cas, tous les lacets sont *binaires*, c'est-à-dire qu'ils ne permutent que deux racines seulement. Si l'on parcourt deux fois consécutivement le même lacet, on revient à la racine du début.

Nous allons montrer que si la suite des lacets $L_1, L_2, \ldots$ ne forme pas un système cyclique quand on débute avec la racine a, on peut le rendre cyclique pour cette lettre en répétant un nombre suffisant de fois une opération élémentaire que nous appellerons une *inversion*, parce qu'elle renverse l'ordre de deux lacets consécutifs. Voici en quoi consiste exactement cette opération.

Considérons deux lacets consécutifs (1) et (2). L'inversion consiste à remplacer le lacet (1) par un autre lacet (1') contournant le même point critique, mais consécutif au lacet (2) qu'il doit donc éviter en le tournant, de telle sorte que le lacet (2) est enfermé dans le contour fermé formé par (1) et (1'). Le nouveau lacet (1') qui remplace (1), mais qui est rejeté après (2), est équivalent à la suite des trois lacets $(2)+(1)+(2)$, d'où se déduit aisément la permutation qu'il produit. On constate que :

1° Si (1) et (2) permutent les deux mêmes lettres ou des couples de lettres différentes, (1') permute les mêmes lettres que (1);

Surfaces de Riemann (n° 14). La différence des énoncés est due au rôle du point $\zeta=\infty$.

2° Si (1) et (2) permutent une seule lettre commune, (1′) permute les deux autres lettres.

La répétition des inversions permet, en modifiant le tracé des lacets, de faire progresser vers la tête de la suite ceux qui permutent la lettre a, mais il y a quatre cas à distinguer. Considérons, en effet, deux lacets consécutifs L_{k-1} et L_k dont le second, par hypothèse, permute a; quatre combinaisons sont possibles :

1° Si L_{k-1} et L_k ne permutent aucune lettre commune, l'inversion fait avancer L_k d'un rang et le remplace, à son rang, par L_{k-1} qui ne permute plus a;

2° Si L_{k-1} et L_k permutent tous deux a, mais avec des lettres différentes b et c, l'inversion fait avancer L_k d'un rang et le remplace, à son rang, par L'_{k-1} qui ne permute plus a;

3° Si L_{k-1} et L_k permutent une même lettre b, le premier avec c et le second avec a, l'inversion remplace L_{k-1} par L'_{k-1} qui suit L_k et permute ac, on revient au cas précédent;

4° Si les deux lacets produisent la même permutation ab, alors l'inversion n'y change rien.

Il suit de ces observations qu'en répétant, de proche en proche, un nombre suffisant d'inversions, on peut, s'il n'y est pas d'avance, faire progresser au premier rang le premier lacet qui permute la lettre a. Le second lacet qui permute a peut, de même, s'amener au second rang; ensuite, sauf s'il produit la même permutation que le premier, il peut être remplacé par un lacet qui ne permute plus la lettre a. En poursuivant ce processus visant la lettre a, nous finirons par avoir en tête un certain nombre de lacets permutant a avec la même lettre, suivis d'autres ne permutant plus la lettre a. La lettre qui se permute en tête avec a peut changer au cours des opérations; supposons que ce soit finalement la lettre b. Nous recommençons alors sur les autres lacets, mais en visant cette fois la lettre b, la même série d'opérations. Nous obtenons ainsi une suite de lacets permutant la lettre b avec une même lettre c, suivis d'autres lacets ne permutant plus ni a ni b. Nous agissons de même envers la lettre c et nous continuons ainsi de suite. Finalement, nous aurons une suite de lacets consécutifs, les premiers permutant ab, les seconds bc, les troisièmes cd, etc. Or, aucune lettre ne peut être omise, et comme il y a n lettres, il faut $n-1$ lacets. Comme il ne peut y en avoir davantage, chaque permutation se rencontre une fois et une seule, donc le système est cyclique. Le cycle mène de la première à la dernière racine; il se fermerait par un lacet supplémentaire entourant tous les autres (ou le point $z=\infty$), qui ramènerait à la première racine.

5. Théorème. — *Si l'on se donne à priori, dans le plan ζ, $n-1$ points critiques $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$, tous différents de zéro, et un système de $n-1$ lacets correspondants $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, de même origine ζ_0, on peut construire un polynome $Q(u)$ de degré n, tel que l'équation $Q(u)=\zeta$ admette ce système de lacets comme système cyclique.*

Donnons-nous d'abord arbitrairement un polynome de degré n à racines distinctes

$$P(u)=(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n),$$

dont la somme $a_1+a_2+\ldots$ des racines soit nulle, tel encore que le polynome dérivé $P'(u)$ ait ses $n-1$ racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ distinctes aussi [1]. La fonction u de ζ définie par l'équation

$$P(u)=\zeta \tag{1}$$

admet les $n-1$ points critiques distincts et non nuls (puisque P n'a pas de racines multiples)

$$\zeta_1=P(\omega_1), \qquad \zeta_2=P(\omega_2), \qquad \ldots, \qquad \zeta_{n-1}=P(\omega_{n-1}).$$

D'après ces hypothèses, les racines a de $P(u)$ et celles ω de $P'(u)$ sont liées aux valeurs critiques $\zeta_1, \xi_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ par le système de $2n-1$ équations ($k=1, 2, \ldots, n-1$)

$$\left\{\begin{array}{l} (\omega_k-a_1)(\omega_k-a_2)\ldots(\omega_k-a_n)=\zeta_k, \\ \dfrac{1}{\omega_k-a_1}+\dfrac{1}{\omega_k-a_2}+\ldots+\dfrac{1}{\omega_k-a_n}=0, \\ a_1+a_2+\ldots+a_n=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

[1] Cette condition sera réalisée si les racines (distinctes) a sont réelles.

Appliquons le théorème précédent. L'équation (1) admet un système cyclique de lacets de même origine ζ_0 que les lacets L. Désignons-les par $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{n-1}$ et numérotons les valeurs initiales $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ de u dans l'ordre où les lacets Λ consécutifs les permutent.

Revenons maintenant au système (2). C'est un système de $2n-1$ équations entre les $2n-1$ racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ d'une part, et les valeurs critiques $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ d'autre part. Nous pouvons donc considérer ces $2n-1$ racines de $P(u)$ et de $P'(u)$ comme des fonctions des valeurs ζ_k et faire varier ces paramètres.

Si nous faisons varier les ζ_k d'une manière continue, mais en excluant l'égalité de deux d'entre eux et leur annulation, je dis que chacune des racines a de $P(u)$ et chacune des racines ω de $P'(u)$ variera d'une manière continue et restera distincte d'une autre racine du même polynome, de telle sorte que nous pourrons les suivre individuellement par continuité.

En effet, les ζ_k n'étant pas nuls, P et P' n'ont pas de racine commune, donc celles de P sont distinctes entre elles. Celles de P' le sont aussi, puisque les ζ_k sont maintenus inégaux. Il reste encore à montrer que ces racines sont bornées dès que l'on assigne aux paramètres $|\zeta_k|$ une borne supérieure M. Il suffit évidemment de faire cette preuve pour les racines a de P.

A cet effet, considérons la cassinienne

$$|P(u)| = M.$$

Elle est formée d'un seul contour enfermant toutes les racines de P. Tel est, en effet, son cas pour M infiniment grand, et quand M décroît, la courbe ne peut se scinder que quand M passe par une des valeurs $|\zeta_k|$, auquel cas le point ζ_k est multiple [1]. Enfin cette cassinienne est de dimensions bornées. On s'en assure en observant qu'un cercle de rayon $\sqrt[n]{M}$ qui a son centre en un point u intérieur à la courbe, où donc $|P(u)|$ est $< M$, doit contenir au moins une racine a de P, sinon $P(u)$ serait le produit de n facteurs $u-a$ de modules $> \sqrt[n]{M}$ et serait lui-même de module $> M$. Il est donc impossible de construire plus de n cercles de ce rayon, sans points communs, centrés sur des points

[1] Le même raisonnement est repris en détail au n° 14.

intérieurs à la courbe. On en conclut que la distance de deux points de la courbe, *à fortiori* celle de deux racines a, et *à fortiori* encore les modules de ces racines (leur distance à l'origine, qui est leur centre) ne peuvent surpasser la borne $n\sqrt[n]{M}$.

Portons maintenant notre attention sur la variation des racines u_1, u_2, ..., u_n de l'équation

$$\text{(1)} \qquad P(u) = \zeta,$$

variation qui dépend à la fois de celle de ζ et de celle des paramètres ζ_1, ζ_2, ..., ζ_{n-1}. Supposons qu'au fur et à mesure que les points critiques ζ_k se déplacent dans le plan ζ, les lacets correspondants Λ_k se déforment d'une manière continue sans jamais se recouper entre eux. Les racines u_1, u_2, ..., u_n de l'équation (1) varieront d'une manière continue en même temps que les coefficients de cette équation. Elles demeureront distinctes tout le long d'un lacet Λ_k, sauf au seul point critique ζ_k où deux racines seulement sont infiniment voisines et continueront à se permuter. Il suit de là que cette déformation continue des lacets ne peut altérer leur caractère cyclique. Or nous pouvons, par une déformation continue qui respecte ces conditions, amener, *dans leur ordre*, chacun des lacets Λ_1, Λ_2, ... en coïncidence avec le lacet L_1, L_2, ... de même indice. En même temps, les racines a_1, a_2, ..., a_n de $P(u)$ tendent vers des limites finies et déterminées b_1, b_2, ..., b_n et le polynome $P(u)$ tend vers le polynome-limite

$$Q(u) = (u - b_1)(u - b_2)\ldots(u - b_n).$$

Ce polynome répond à la question : il admet le système des lacets L proposé comme système cyclique.

6. Système cyclique de coupures. — On sait que les diverses branches u_1, u_2, ..., u_n de la fonction u définie par l'équation

$$P(u) = \zeta$$

peuvent être séparées et rendues uniformes par des *coupures* convenables tracées dans le plan ζ. Nous allons démontrer la proposition suivante :

A tout système cyclique de lacets $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{n-1}$ *correspond un système cyclique de coupures* $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, *et réciproquement.*

De chacun des points critiques $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ traçons une ligne L_1, $L_2, \ldots, L_{n-1}$, qui s'éloigne à l'infini sans se couper elle-même, ni rencontrer les autres lignes et les lacets. Ces lignes constituent les *coupures* et les coupures se suivent dans le même ordre que les lacets. Ne nous occupons plus des lacets et faisons varier ζ dans le domaine limité par les coupures. Chaque valeur initiale $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ au point ζ_0 définit une branche correspondante de la fonction u qui est uniforme dans ce domaine, puisque ζ ne peut plus tourner autour des points critiques. Chaque branche est, de plus, continue, sauf peut-être sur une ou sur deux au plus des coupures, car il peut arriver qu'elle prenne des valeurs différentes sur leurs deux bords. Si l'on suit la fonction u sur un chemin fermé allant de ζ_0 à ζ_0 et traversant une seule coupure L_k, ce chemin est équivalent à la description du lacet de même indice, donc la traversée de la coupure permute les deux branches dont le lacet permute les valeurs initiales. L'échange des branches se fait par la traversée des coupures suivant la même loi cyclique que celle de leurs valeurs initiales par la description des lacets. Nous dirons que ce système de coupures est aussi un *système cyclique*. Ainsi, à tout système cyclique de lacets Λ correspond un système cyclique de coupures L.

Réciproquement, si l'on donne un système de $n-1$ coupures L dans le plan ζ, on peut construire un système de lacets Λ ne rencontrant ces coupures qu'au point critique correspondant, et si le premier système est cyclique, le second le sera aussi.

Le théorème du numéro précédent est donc équivalent à celui-ci :

7. Théorème. — *Étant donné un système de $n-1$ coupures dans le plan ζ, on peut construire un polynome* $P(u)$ *de degré n, à racines distinctes, tel que l'équation* $P(u) = \zeta$ *admette ce système de coupures comme système cyclique.*

8. Théorème. — *Soient* $P(u)$ *et* $Q(v)$ *deux polynomes de degré n à racines distinctes. Si les variables u et v sont liées entre elles par une solu-*

tion de l'équation

$$P(u) = Q(v),$$

établissant une correspondance bicontinue et biuniforme entre les points des deux plans u et v, les variables u et v sont liées entre elles par une transformation linéaire $v = pu + q$.

Décomposons les polynomes $P(u)$ et $Q(v)$ en facteurs linéaires; la relation proposée prend la forme (h constant)

$$(v - b_1)(v - b_2)\ldots(v - b_n) = h(u - a_1)(u - a_2)\ldots(u - a_n).$$

Si u tend vers une racine a_1 de $P(u)$, cette relation exige que v tende vers une racine correspondante b_1 de $Q(v)$ et le quotient

$$\frac{v - b_1}{u - a_1}$$

tend, par conséquent, vers une valeur finie

$$h\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots}.$$

Donc le quotient précédent est une fonction continue et uniforme de u dans tout le plan.

La même relation exige que v augmente indéfiniment avec u. Or on en tire

$$\left(\frac{v - b_1}{u - a_1}\right)^n = h\frac{u - a_2}{u - a_1}\frac{u - a_3}{u - a_1}\cdots\frac{v - b_1}{v - b_2}\frac{v - b_1}{v - b_3}\cdots$$

Donc le second membre de cette nouvelle relation tend vers h quand u, et v avec lui, tendent vers l'infini, et le premier membre, étant borné dans tout le plan, se réduit à la constante h en vertu du théorème de Liouville. Soit donc h' une racine $n^{\text{ième}}$ de h; on tire de l'équation précédente

$$v - b_1 = h'(u - a_1),$$

ce qui est une relation linéaire de la forme indiquée.

Ce théorème ne fait aucune hypothèse particulière sur les racines des polynomes dérivés P' et Q'.

III. — Construction de la fonction $F(z)$.

9. Définition de l'aire A. — Soit A une aire bornée, d'un seul tenant, à connexion d'ordre $n+1$, limitée par $n+1$ contours fermés simples, un contour extérieur C et n contours intérieurs au précédent, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, sans points communs. Tous ces contours sont supposés analytiques et exempts de toute singularité. Ils sont donnés dans un plan dont les points seront définis par une variable complexe

$$z = x + yi,$$

rapportée à deux axes Ox et Oy.

10. Fonctions harmoniques fondamentales et leurs associées. — Définissons n fonctions harmoniques de x et y dans l'aire A, à savoir

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n,$$

par la condition que U_k prenne la valeur 1 sur le contour C_k et s'annule sur tous les autres contours, y compris le contour extérieur C. Ces fonctions U, dont l'existence résulte du principe de Dirichlet, sont *les fonctions harmoniqurs fondamentales*.

A chacune des fonctions U_k correspond une *fonction associée* V_n, qui est définie, à une constante près, dans l'aire A par l'intégrale curviligne

$$V_k = \int \frac{\partial U_k}{\partial x}\,dy - \frac{\partial U_k}{\partial y}\,dx.$$

Les fonctions U et V sont encore régulières sur les contours de l'aire A et peuvent se prolonger analytiquement au delà, parce que ces contours sont analytiques et qu'elles le sont elles-mêmes sur ces contours. Mais les fonctions V ne sont généralement pas uniformes dans l'aire A, parce que leur valeur n'est pas nulle sur un circuit fermé qui entoure un ou plusieurs des vides circonscrits par les contours C_i. Un circuit qui enveloppe le seul contour C_i est, quant à la valeur de l'intégrale, équivalent à ce contour lui-même, car il s'y ramène par une déformation continue sans sortir de A.

11. Périodes fondamentales. — Il suit de l'observation qui vient d'être faite que la fonction V_k est susceptible d'une infinité de valeurs différentes en un même point (x, y) selon le chemin suivi pour y parvenir. Tous ces chemins se ramènent à un chemin unique et à un nombre variable de circuits autour des vides de l'aire A. La fonction V_k admet donc n périodes distinctes qui sont les valeurs de l'intégrale curviligne correspondante sur chacun des n contours $C_1, C_2, \ldots, C_n$ circonscrivant les vides et que nous supposerons parcourus dans le sens direct. Nous désignerons par $\omega_{ki} (i = 1, 2, \ldots, n)$ les n périodes de la fonction V_k, en sorte que

$$\omega_{ki} = \int_{C_i} \frac{\partial U_k}{\partial x} dy - \frac{\partial U_k}{\partial y} dx.$$

Cela fait, en tout, un système de n^2 *périodes fondamentales* ω_{ki}, car chacun des deux indices i, k varie de o à n. Voici maintenant un théorème essentiel :

Théorème. — *Le déterminant* Δ *des périodes fondamentales* ω_{ki} *est différent de zéro.*

En effet, si ce déterminant était nul, le système d'équations linéaires et homogènes

$$\mu_1 \omega_{1i} + \mu_2 \omega_{2i} + \ldots + \mu_n \omega_{ni} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admettrait un système de solutions μ non toutes nulles, auquel cas la fonction correspondante

$$V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \ldots + \mu_n V_n$$

aurait ses n périodes nulles.

Cette fonction V est associée à la fonction harmonique

$$U = \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \ldots + \mu_n U_n,$$

qui est constante sur les contours C_k.

Mais la fonction V sera constante aussi sur l'un au moins des contours C_k, celui où la fonction U atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur dans A. Parcourons ce contour C_k sur lequel U est constamment extrémé, et considérons la dérivée de V sur l'arc et celle de U sur la normale intérieure; nous avons, tout le long du trajet [1],

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{dn_i}.$$

Comme U (qui est constant) est constamment extrémé sur C_k, sa dérivée au second membre est de signe invariable, donc celle de V l'est aussi, et V, ne variant que dans un seul sens et ayant une période nulle, est constant.

Or, U et V ne peuvent être tous les deux constants sur C_k, car la fonction analytique $U + iV$, l'étant alors aussi, serait constante dans toute l'aire A. Ceci est inexact, car U s'annule sur C et prend des valeurs non toutes nulles sur les autres contours.

12. Théorème. — *On peut construire une fonction* V *dont les n périodes sont égales à* 2π.

Puisque le déterminant Δ des périodes fondamentales n'est pas nul, nous pouvons déterminer n coefficients λ par le système linéaire

$$\lambda_1 \omega_{1i} + \lambda_2 \omega_{2i} + \ldots + \lambda_n \omega_{ni} = 2\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction V cherchée s'exprime par la formule

$$V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_n V_n.$$

Nous dirons que les nombres λ déterminés par ce calcul sont les *indices* de l'aire A. On va reconnaître au numéro suivant que tous ces nombres sont négatifs. On observera pour cela que U est égal à λ_k sur C_k et s'annule sur C.

13. Théorème. — *La fonction harmonique à laquelle est associée la fonction* V *précédente, et qui est constante sur tous les contours,*

$$U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n,$$

atteint et n'atteint dans A *sa plus grande valeur que sur le contour extérieur* C.

---

[1] C'est l'équation $V'_x = -U'_y$ quand l'axe Ox est parallèle à ds et de même sens.

En effet, supposons, par impossible, que la fonction U atteigne sa plus grande valeur sur un contour interne C_k. Nous aurons, tout le long du contour,

$$\frac{dU}{dn_i} \geqq 0,$$

car la normale intérieure à C_k est extérieure à l'aire A. Par conséquent, l'équation

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{dn_i}$$

prouve que la dérivée de V est négative et que V décroît le long de C_k, tandis que nous savons que V augmente, au contraire, de 2π.

14. Théorème. — *La famille des lignes* $U = \text{const.}$, *que nous appellerons lignes de niveau, admet* $n-1$ *points doubles dans l'aire* A, *ou un nombre moindre de points multiples d'ordre plus élevé, formant un ensemble équivalent (comme il sera expliqué) à* $n-1$ *points doubles, mais sous la condition expresse qu'il n'y ait pas de points multiples sur les frontières de l'aire* A. *Cette restriction, dorénavant admise, ne sera levée qu'à la fin du Mémoire.*

La famille des lignes de niveau $U = \alpha$ ne peut présenter de singularité qu'aux points critiques où U'_x et U'_y s'annulent simultanément. Comme U est harmonique, un point critique est *un point multiple à tangentes réelles et distinctes* pour la ligne de niveau qui passe par ce point. On le vérifie facilement en développant la fonction analytique $U + iV$ par la formule de Taylor et en séparant le réel et l'imaginaire.

Les contours C et C_k font partie de la famille $U = \alpha$ pour les valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = \lambda_k$ du paramètre. Faisons décroître ce paramètre α depuis la valeur 0 jusqu'à la plus petite des valeurs λ_k. La ligne de niveau (d'abord en coïncidence avec C) va se déformer en se rétrécissant constamment. La nature de cette déformation est sous la dépendance du principe suivant : la valeur de U est toujours plus petite sur la courbe qu'à l'extérieur et plus grande qu'à l'intérieur, *égalité exclue*, parce que la fonction U est harmonique. Suivons la déformation de la courbe à partir du contour C. Un point multiple ne peut se produire que si la courbe rencontre un point critique. Or, à cause du principe énoncé, il est impossible qu'une branche nouvelle se greffe sur la courbe. Il faut donc que deux ou plusieurs points, situés sur des arcs différents de la courbe en déformation, viennent en coïncidence au point critique, de sorte que, à cet instant, la courbe prend la figure d'un trèfle à plusieurs feuilles soudées au point critique. Si la courbe rencontrait au même instant plusieurs points critiques, il y aurait plusieurs trèfles extérieurs les uns aux autres et soudés entre eux. Si le paramètre α continue à décroître, les feuilles se séparent et la ligne de niveau se scinde en autant de contours fermés différents qu'il y avait de feuilles. Ces contours sont extérieurs les uns aux autres et chacun d'eux contient un vide au moins de l'aire A (sinon U serait constant à l'intérieur). On peut alors recommencer sur chacun des contours séparés le même raisonnement.

Le morcellement se poursuivant, les feuilles qui ne se scindent plus doivent finalement venir en coïncidence avec un contour C_k; après quoi, elles disparaissent de l'aire A et pénètrent dans les vides, où leur existence, comme celle de la fonction U elle-même, n'est plus assurée que sur le bord.

S'il n'y a que des points doubles parmi les points multiples, chaque partage d'un contour fermé se fait en deux feuilles seulement. Il y a donc autant de points doubles que de dédoublements nécessaires, c'est-à-dire $n-1$. Il n'y en aura pas davantage car, s'il y avait n points doubles, le partage se ferait en $n+1$ morceaux, et l'un au moins ne pourrait pas contenir de vide de l'aire A.

S'il y a des points multiples d'ordre supérieur, ils comptent pour plusieurs points doubles. Un point multiple d'ordre p est le point de soudure de p feuilles et compte, par conséquent, pour $p-1$ points doubles.

Pour simplifier l'exposition, *nous supposerons qu'il n'y a que des points doubles* et cette réserve ne sera levée qu'à la fin du Mémoire (§ VI).

15. Définitions des fonctions $f(z)$ et $F(z)$. — Avec les deux fonctions associées U et V, formons la fonction analytique de $z=x+yi$,

$$f(z)=U+iV,$$

Comme V comporte une constante arbitraire d'intégration, cette fonction comporte une constante additive arbitraire, purement imaginaire. Cette fonction $f(z)$ est régulière en tous les points de l'aire A et de ses contours, mais elle n'est pas uniforme dans l'aire : elle augmente de $2\pi i$ quand z décrit un contour fermé C_k (car V augmente de 2π) et elle augmente, par conséquent, de $2n\pi i$ sur un circuit fermé, tel le contour extérieur C, qui enveloppe tous les contours C_k.

La fonction $f(z)$ admet, dans l'aire A, une dérivée

$$f'(z) = U'_x + iV'_x = U'_x - iU'_y.$$

Cette dérivée a pour zéros les points multiples des lignes de niveau $U = \alpha$. Un zéro d'ordre n de $f'(z)$ entraîne pour la ligne de niveau un point multiple d'ordre $n+1$ de multiplicité. On s'en assure aisément au moyen du développement taylorien de $f(z)$. Mais nous avons fait l'hypothèse que tous les points multiples sont d'ordre 2; donc, par hypothèse, cette dérivée admet $n-1$ racines simples dans A et, de plus, il n'y en a pas sur la frontière.

Posons maintenant

$$F(z) = e^{f(z)}.$$

La fonction $F(z)$ sera *uniforme* dans l'aire A, car les périodes de $f(z)$ sont des multiples de $2\pi i$. On a

$$|F(z)| = e^{U};$$

par conséquent, le module de $F(z)$ est constant sur chacun des contours C et C_k de l'aire A. Il est égal à l'unité sur le contour C, où $U = 0$; et, sur les contours $C_1, C_2, \ldots, C_n$, il prend la suite des valeurs < 1 (car les λ sont négatifs)

$$e^{\lambda_1}, \quad e^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n}.$$

Les dérivées de $f(z)$ et de $F(z)$ ont les mêmes zéros au même ordre de multiplicité. Donc $F'(z)$ *admet* $n-1$ *racines simples dans l'aire* A *et n'a pas de racine sur sa frontière*. Cette restriction, faite par hypothèse, ne sera levée qu'à la fin du Mémoire (§ VI).

16. Théorème d'unicité. — *La fonction $f(z)$ dont la partie réelle est constante sur chacun des contours de l'aire* A *et dont la partie imaginaire*

a toutes ses périodes égales à $2\pi i$, *est déterminée par ces conditions à une constante additive près.*

En effet, si deux fonctions satisfont à ces conditions, leur différence aura encore sa partie réelle constante sur les contours, mais les périodes de sa partie imaginaire seront toutes nulles. Dès lors, cette partie imaginaire sera constante sur les contours où la partie réelle est extrémée (comme dans la démonstration du n° 11); donc la différence en question, étant constante sur une ligne, le sera dans toute l'aire A.

Il suit de là que :

La fonction $F(z)$ *est déterminée à un facteur constant près par la condition que son module soit constant sur chaque contour de l'aire* A *et que son argument croisse de* 2π *sur chacun des contours internes.*

Ces théorèmes sont indépendants de toute hypothèse sur les dérivées des fonctions $f(z)$ et $F(z)$.

17. Prolongement artificiel de la fonction $F(z)$ a l'intérieur des vides de l'aire A. — Nous allons définir une fonction artificielle $F_1(z)$, continue et uniforme dans l'aire, simplement connexe, qui comprend A et ses vides et que nous appellerons l'*aire* A *comblée*. Cette fonction $F_1(z)$ sera holomorphe dans l'aire A où elle coïncidera avec $F(z)$, mais elle cessera d'être analytique dans les vides.

Cette fonction se définit d'une manière analogue dans chaque vide. Considérons l'un d'eux en particulier, intérieur au contour C_k : c'est une aire simplement connexe A_k. Choisissons un point α_k dans son intérieur, et représentons cette aire A_k du plan z sur un cercle Γ_k de centre origine et de rayon e^{λ_k} dans un plan ζ. La correspondance s'exprime par une fonction, holomorphe dans A_k.

$$\zeta = \varphi_k(z).$$

En chaque point de l'aire A_k se croisent une ligne d'égal module et une ligne d'égal argument de cette fonction. La ligne d'égal module est fermée. Celle d'égal argument part du point α_k et rencontre le contour C_k en un point z'. Ceci entendu, nous définissons la fonction $F_1(z)$ en posant, par convention, au point z du vide A_k,

$$\operatorname{mod} F_1(z) = \operatorname{mod} \varphi_k(z), \qquad \arg F_1(z) = \arg F(z').$$

Il est clair que cette fonction $F_1(z)$ ne sera généralement plus analytique, mais elle est continue dans A_k et se raccorde par continuité avec $F(z)$ le long du contour C_k. L'argument de $F_1(z)$ croît de 2π sur le contour d'une ligne d'égal module (comme sur C_k), de sorte que $F_1(z)$ prend, une fois et une fois seulement, chaque valeur de ce module dans A_k, donc aussi chaque valeur de module $\leqq e^{\lambda_k}$. Il s'ensuit que l'équation

$$F_1(z) = \zeta$$

admet, en chaque point ζ du cercle Γ_k, une racine z et une seule située à l'intérieur du vide A_k. Cette racine est fonction continue de ζ quand ζ varie dans le cercle Γ_k et sur sa frontière. On opère de même dans tous les vides.

La fonction $F_1(z)$ est maintenant définie dans l'aire A *comblée* et elle est partout continue. L'équation précédente, $F_1(z) = \zeta$, admet une racine z et une seule dans chacun des vides A_k pour lesquels l'exponentielle correspondante e^{λ_k} surpasse le module de la valeur assignée à ζ.

IV. — Étude des équations $F(z) = \zeta$ et $F_1(z) = \zeta$.

18. Théorème. — *L'équation*

$$F_1(z) = \zeta_0$$

admet n racines z pour toute valeur donnée, ζ_0, de ζ dans le cercle de rayon un et de centre origine.

Désignons par Γ ce cercle de rayon un autour de l'origine du plan ζ, cercle qui constitue le domaine du point ζ quand z décrit l'aire A *comblée*.

Cette équation admet une racine z dans chacun des vides A_k (frontière comprise) pour lesquelles e^{λ_k} surpasse le module de ζ_0, ainsi qu'on vient de le dire à la fin du numéro précédent. Il reste à montrer que les autres racines prévues dans l'énoncé se trouvent dans l'aire A où $F_1 = F$).

Posons

$$\zeta_0 = e^{U_0 + iV_0};$$

il vient

$$F(z) - \zeta_0 = e^{U+iV} - e^{U_0+iV_0}.$$

Cette expression est une fonction holomorphe de z dans l'aire A; le nombre de ses zéros dans l'intérieur de l'aire est égal au nombre de circonférences dont augmente son argument quand z décrit le contour C, diminué du nombre de circonférences dont il augmente sur l'ensemble des contours intérieurs C_k. On suppose le module de ζ_0 différent des exponentielles e^{λ_k} en sorte qu'il n'y ait pas de racine sur les contours.

Sur le contour C et sur tous les contours C_k pour lesquels e^{λ_k} est $> |\zeta_0|$, on a

$$U > U_0.$$

Donc, si nous écrivons

$$F(z) - \zeta_0 = e^{U+iV}(1 - e^{U_0 - U + i(V_0 - V)}),$$

nous voyons que l'argument de la différence entre parenthèses ne peut varier d'une circonférence entière. En effet, l'exponentielle étant de module < 1, la partie réelle de cette différence est toujours positive. Par conséquent, l'argument de $F(z) - \zeta_0$ augmente du même nombre de circonférences que V, qui est l'argument du premier facteur, à savoir n circonférences sur C et une sur chacun des contours C_k considérés.

Au contraire, sur les contours C_k pour lesquels e^{λ_k} est $< |\zeta_0|$, on a $U < U_0$. On écrira

$$F(z) - \zeta_0 = e^{U_0+iV_0}(1 - e^{U - U_0 + i(V - V_0)}).$$

L'argument de la différence entre parenthèses revient à sa valeur initiale sur le circuit C_k comme dans le cas précédent, mais le premier facteur est maintenant constant. L'argument de $F(z) - \zeta_0$ revient donc à sa valeur initiale et il n'y a pas de circonférence à retrancher du chef de ces contours.

Le nombre des racines de $F(z)$ contenues à l'intérieur de A est donc égal à n, diminué du nombre des exponentielles e^{λ} supérieures à $|\zeta_0|$, ce qui prouve le théorème.

19. Points de ramification des racines z. — Nous venons de prouver que l'équation

$$F_1(z) = \zeta$$

admet n racines z pour chaque valeur de ζ dans le cercle Γ de rayon *un*. Les racines z comprises dans les vides de l'aire A sont distinctes puisqu'elles sont dans des vides différents. Celles comprises dans l'aire A sont racines de $F(z) = \zeta$ et sont distinctes aussi, sauf si elles sont, en même temps, racines de $F'(z)$. Nous supposons (n° 15) que cette dérivée n'a que des racines simples; elle admet donc, dans l'aire A, $n - 1$ racines distinctes $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$. La fonction z de ζ admet donc $n - 1$ points de ramification, à savoir

$$\zeta_1 = F(\rho_1), \qquad \zeta_2 = F(\rho_2), \qquad \dots, \qquad \zeta_{n-1} = F(\rho_{n-1}).$$

Deux racines z se permutent quand ζ tourne autour de l'un de ces *points critiques*. Il va être établi, comme dans le cas d'un polynome (n° 4), que ces $n - 1$ points critiques sont distincts les uns des autres.

Si l'on fait varier ζ sur un chemin continu dans le cercle Γ, les n racines z peuvent être suivies par continuité dans l'aire A *comblée*, pourvu que ζ ne passe pas par l'un de ces points critiques. Nous avons alors le théorème suivant :

Les n déterminations de z ne constituent qu'une seule fonction continue de ζ dans le cercle Γ, c'est-à-dire que l'on peut passer par continuité d'une détermination quelconque à toute autre en faisant décrire à ζ un chemin approprié dans ce cercle.

Soient, en effet, z'_0 et z''_0 deux valeurs de z donnant à ζ la même valeur ζ_0 et appartenant à l'aire A *comblée*. Traçons, dans cette aire, un chemin continu allant de z'_0 à z''_0 sans passer par un point critique ρ. Le point ζ décrira un chemin fermé correspondant, partant de ζ_0 et y revenant, sans passer par un point critique ζ_k. Réciproquement, si l'on fait décrire ce chemin à ζ et qu'on suive la valeur de z à partir de la valeur initiale z'_0, on reviendra au point ζ_0 avec la valeur finale z''_0.

20. Théorème. — *On peut construire dans le plan ζ, à l'intérieur du*

cercle Γ, *un système cyclique de lacets et un système cyclique de coupures concernant la fonction* z.

Si nous considérons les n racines de l'équation

$$F_1(z) = \zeta.$$

et si nous faisons varier ζ dans le cercle Γ (qui est une aire à connexion simple), nous pouvons appliquer tous les principes sur laquelle se fonde la théorie des lacets et des coupures (n° 4). En particulier, deux chemins sont équivalents s'ils se ramènent l'un à l'autre par une déformation continue sans sortir du cercle Γ ni traverser de point critique ζ_k.

Choisissons donc, dans Γ, un point initial ζ_0 où z soit susceptible de n valeurs différentes, et joignons-le aux divers points de ramification distincts $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Les lignes menées ainsi définissent des lacets permutant deux à deux les valeurs initiales $z_1^0, z_2^0, \ldots$ de z, lesquelles sont liées entre elles comme dans le cas d'une équation algébrique irréductible. Il n'y a rien à changer au principe de l'*inversion* (n° 4) des lacets. On peut donc, en modifiant convenablement les lacets, rendre le système cyclique, c'est-à-dire tel qu'en partant avec la valeur de début z_1^0 on revienne avec une valeur nouvelle après chaque lacet et qu'on retrouve toutes ces valeurs, ce qui prouve qu'il y a $n - 1$ lacets. Ceci suppose toutefois que la dérivée $F'(z)$ n'ait que des racines simples ou que tous les lacets soient binaires, supposition que nous avons faite (n° 15).

Au système cyclique de lacets, nous substituons maintenant un système *cyclique de coupures*. A cet effet, nous joignons chacun des points critiques $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ à la circonférence Γ (limitant le cercle de même nom) par des lignes $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ ne se rencontrant ni elles-mêmes ni avec les lacets, de sorte qu'elles se suivent autour de la circonférence Γ dans le même ordre circulaire que les lacets autour du point ζ_0. Les diverses branches $z_1, z_2, \ldots z_n$ définies par les valeurs initiales $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ seront séparées par les coupures, qui formeront aussi, comme on l'a expliqué au n° 4, un système cyclique. Les diverses branches se permuteront entre elles par la traversée des coupures dans le même ordre que leurs valeurs initiales par la description des lacets.

V. — Résolution du problème posé. Représentation de l'aire A sur une aire attachée à un polynome.

21. Théorème. — *Soit* $P(u)$ *un polynome de degré* n *et soit* $F_1(z)$ *la fonction définie au paragraphe précédent; la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$P(u) = F_1(z)$$

établisse une relation bicontinue et biuniforme entre z *et* u, *quand* z *varie dans l'aire* A *comblée, et que les fonctions* u *et* z *de* ζ, *définies par les équations*

$$P(u) = \zeta \quad \text{et} \quad F_1(z) = \zeta,$$

admettent le même système cyclique de coupures dans le cercle Γ *du plan* ζ.

Cette condition est suffisante. Numérotons les branches de u et de z dans l'ordre de succession du cycle, et faisons correspondre u_1 à z_1, u_2 à z_2, etc. La correspondance entre u et z est alors biuniforme. Elle est, de plus, bicontinue, puisque les branches se permutent par continuité de la même façon à la traversée des coupures.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ un système de coupures qui soit cyclique pour z; il le sera aussi pour u si z et u se correspondent uniformément. En effet, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les branches de z permutées cycliquement; les valeurs u_1 de u qui correspondent à z_1, celles u_2 qui correspondent à z_2, etc. sont déterminées uniformément par hypothèse et elles définissent autant de branches de la fonction u qui se permutent cycliquement avec celles de z à la traversée des coupures.

22. Représentation de l'aire A sur une aire D attachée a un polynome $P(u)$. — Les coupures $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ que nous avons tracées dans le plan ζ au n° 20 s'arrêtent à la circonférence Γ, parce que ζ ne dépasse pas cette frontière quand z varie dans l'aire A *comblée*. Prolongeons-les jusqu'à l'infini; nous pouvons, par le théorème du n° 5, construire un polynome $P(u)$ de degré n à racines distinctes qui admet ces coupures comme système cyclique. Alors $P(u)$ et $F_1(z)$ admettent le même sys-

tème cyclique de coupures quand z varie dans l'aire A *comblée*. Par conséquent, en vertu du théorème précédent, l'équation

$$P(u) = F_1(z)$$

fait correspondre uniformément à l'aire A *comblée* la portion du plan u qui est intérieure à la cassinienne $|P(u)| = 1$. Mais, dans A, $F_1(z)$ s'identifie avec $F(z)$ qui est holomorphe, et le problème de la représentation de l'aire A est résolu.

L'équation

$$P(u) = F(z)$$

fournit la représentation conforme cherchée de l'aire A *du plan* z *sur la portion* D *du plan* u *qui est bornée par les* $n+1$ *cassiniennes*

$$|P(u)| = 1, \qquad |P(u)| = e^{\lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

avec correspondance des contours extérieurs.

La première cassinienne enveloppe toutes les racines de $P(u)$, car l'argument de $P(u)$ augmente de n circonférences sur son pourtour (comme celui de F sur C). Les autres cassiniennes enveloppent chacune une racine différente du polynome, car l'argument de $P(u)$ n'augmente que d'une circonférence sur leur pourtour (comme celui de F sur C_k).

23. Classes de polynomes. — *Deux polynomes* $P(u)$ *et* $Q(v)$ *de degré* n *et à racines distinctes sont de la même classe si leurs racines forment des figures semblables.*

Les aires attachées à deux polynomes différents de la même classe sont évidemment semblables. Par conséquent, si une aire A est représentable sur une aire attachée à l'un, elle l'est encore sur une aire attachée à l'autre. Mais la réciproque est vraie aussi, en vertu du théorème suivant :

24. Théorème. — *Si l'aire* A *peut être représentée simultanément sur les aires* D *et* D_1 *attachées à deux polynomes différents* $P(u)$ *et* $Q(v)$ *de degré* n, *avec correspondance des contours extérieurs, ces deux polynomes sont de la même classe.*

Supposons que l'aire A du plan z soit représentable sur une aire D du plan u attachée à un polynome $P(u)$ de degré n, avec correspondance des contours extérieurs; la fonction $u = \varphi(z)$, qui établit la correspondance, fournit la transformation

$$P(u) = F(z).$$

La fonction $F(z)$ ainsi définie est de module constant sur les contours C et C_k de l'aire A (auxquels correspondent les cassiniennes qui bornent l'aire D). Les n cassiniennes, qui circonscrivent les vides de l'aire D, doivent contenir une racine de $P(u)$ et n'en peuvent, par conséquent, contenir qu'une seule. Donc, l'argument de $P(u)$ augmente de 2π sur le contour d'une cassinienne intérieure, et celui de $F(z)$ augmente de la même quantité sur chacun des contours internes de l'aire A.

De même, si l'aire A est représentable sur une aire D_1 du plan v, attachée à un polynome $Q(v)$ de degré n, avec correspondance des contours extérieurs, on a la relation analogue

$$Q(v) = \Phi(z).$$

La fonction Φ est de module constant sur les contours C et C_k et son argument augmente de 2π sur chacun des contours internes C_k de l'aire A.

Donc, en vertu du théorème d'unicité n° 16, les fonctions F et Φ, qui ont ces propriétés communes, ne diffèrent que par un facteur constant h, et l'on a, dans l'aire A,

$$\Phi(z) = h\,F(z).$$

Donc, les points u et v des aires D et D_1, qui correspondent uniformément aux valeurs de z dans A, se correspondent uniformément entre eux et sont liés par la relation, déduite des trois précédentes,

$$Q(v) = h\,P(u).$$

Cette relation admet donc une solution $v = \psi(u)$ qui établit une correspondance uniforme entre les points des aires D et D_1. Cette solution fait correspondre, en particulier, d'une manière uniforme les contours des vides de ces deux aires. Mais alors la correspondance s'étend d'elle-même à l'intérieur des vides avec son caractère d'uniformité. En effet, les vides sont des aires simplement connexes et sans points critiques intérieurs ([1]). La solution $v = \psi(u)$ de l'équation précédente est donc déterminée d'une manière uniforme à l'intérieur d'un vide par sa valeur initiale en un point du bord. Cette solution est, par suite, uniforme dans les aires D et D_1 *comblées*. Ces aires comblées sont simplement connexes et contiennent tous les points critiques; donc l'uniformité de la solution s'étend à tout le plan. Nous pouvons appliquer le théorème du n° 8 et affirmer que u et v sont liés par une transformation linéaire $v = pu + q$. Donc, les racines des polynomes P et Q forment des figures semblables, et les deux polynomes sont de la même classe.

Nous dirons que l'aire A *appartient* à cette classe de polynomes et aussi à chacun des polynomes de cette classe en particulier.

On observera que la démonstration que nous venons de faire est indépendante de toute restriction concernant les racines des dérivées de $F(z)$ et de $P(u)$.

25. Unicité de la solution de l'équation $P(u) = F(z)$. — Il s'agit de montrer que, sauf des cas exceptionnels de symétrie, cette équation définit une seule fonction uniforme u de z; ensuite que, même dans ces cas de symétrie, deux solutions se ramènent l'une à l'autre par un simple déplacement dans le plan et qu'on peut les considérer comme géométriquement équivalentes.

Si l'équation $P(u) = F(z)$ admettait une seconde solution uniforme v, d'où $P(u) = P(v)$, le raisonnement fait dans le numéro précédent établirait que la relation $P(u) = P(v)$ entraîne entre u et v une relation biuniforme dans tout le plan. On aurait alors, par le théorème

([1]) En effet, une cassinienne fermée qui ne contient qu'une racine de P ne peut enclore une racine ω de P'. Si elle enfermait ω, elle devrait enfermer toutes les feuilles soudées en ce point multiple et, par suite, les diverses racines de P comprises dans ces feuilles. L'uniformité de la correspondance dans les vides résulte aussi de l'observation suivante : Si l'argument de $P(u)$ croît de 2π sur la cassinienne $|P| = \alpha$, P prend, dans son intérieur, une fois et une fois seulement toute valeur de module $< \alpha$.

du n° 8 où il faut faire $h = 1$,

$$v = \alpha u + c,$$

où c est une constante et α une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Si l'on place l'origine des axes au centre des moyennes distances des racines du polynome P, la constante c est nulle, car la somme des racines est nulle pour u comme pour v, et l'on a

$$v = \alpha u.$$

Cette substitution revient à une rotation des axes de coordonnées autour du centre des racines, et le polynome $P(u)$ doit se reproduire par cette substitution, sinon l'équation $P(u) = P(\alpha u)$ déterminerait u. Il faut donc que la figure formée par les racines du polynome $P(u)$ revienne en coïncidence avec elle-même après une rotation d'une fraction de tour autour du centre des racines, ce qui exige que cette figure possède une symétrie d'un ordre correspondant par rapport à son centre.

En général (sauf pour les deux premiers degrés), cette symétrie n'existe pas et les deux solutions u et v se confondent.

Dans les cas de symétrie, une rotation d'une fraction de tour ramène la figure formée par les racines en coïncidence avec elle-même et fait coïncider les solutions u et v. Celles-ci sont donc géométriquement équivalentes.

26. Correspondance entre les indices λ_i de l'aire A et les racines a_i du polynome $P(u)$. — D'après sa définition (n° 12), chaque indice λ_i est attaché à un contour intérieur C_i. La relation entre u et z fait correspondre au contour C_i (donc à λ_i) une cassinienne déterminée et, par conséquent, la racine unique a_i contenue dans celle-ci. S'il n'existe qu'une seule fonction u de z, cette correspondance est univoque. Dans les cas de symétrie, on peut permuter les racines et les cassiniennes qui se superposent simultanément après une fraction de tour ramenant la figure D en coïncidence avec elle-même, mais ces deux solutions ne sont pas géométriquement distinctes.

27. Théorème. — *Il n'existe généralement qu'une seule manière de*

représenter une aire A *de l'ordre* $n+1$ *de connexion sur une aire donnée* D *attachée à un polynome* $P(u)$ *de degré* n, *avec correspondance des contours extérieurs. S'il y a plusieurs solutions, elles sont superposables. Dans ce cas, l'aire* D *présente une symétrie d'un certain ordre par rapport au centre des racines de* $P(u)$ *et les diverses solutions s'obtiennent en faisant tourner l'aire* D *autour de ce centre : il y a autant de solutions que de coïncidences de la figure* D *avec elle-même dans une révolution complète autour du centre.*

C'est la conclusion des constatations précédentes. Dans le cas général, la figure formée par les racines du polynome est dissymétrique et il n'existe qu'une seule fonction u de z représentant l'aire A sur D.

Dans les cas de symétrie, il existe plusieurs fonctions u satisfaisant à l'équation $P(u) = F(z)$ et qui correspondent aux diverses orientations dans lesquelles la figure des racines se superpose à elle-même. Mais les indices λ_k restent attachés aux racines a_k entraînées dans cette rotation; la figure D l'est aussi et doit revenir en coïncidence avec elle-même, ce qui prouve le théorème.

Cas particuliers. — Si l'aire A est doublement connexe, le polynome P est du premier degré, la figure D est une couronne circulaire symétrique pour toutes les orientations autour du centre. L'aire A, représentable sur l'aire D, l'est donc d'une infinité de manières, ce qui est bien connu, mais ces solutions sont géométriquement équivalentes.

Si l'aire A est à connexion triple, le polynome est du second degré et la figure des racines se superpose par un demi-tour autour du centre. Donc, si les deux indices de l'aire A sont égaux, la figure D reviendra en coïncidence après un demi-tour et l'aire A est représentable sur l'aire D de deux manières différentes.

28. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux aires* A *et* A′ *du même ordre de connexion soient représentables l'une sur l'autre avec correspondance des contours extérieurs, est qu'elles appartiennent à la même classe de polynomes et qu'elles admettent, en correspondance avec les mêmes racines de l'un d'eux,* $P(u)$, *la même suite*

d'indice λ_i. Cette représentation de A *sur* A′ *n'est généralement possible que d'une seule manière. S'il en est autrement, c'est que l'aire* D *attachée au polynome* P(u) *sur laquelle elles sont représentables, possède une symétrie d'un certain ordre autour du centre des racines de ce polynome. Alors* A *peut se représenter sur* A′ *d'autant de manières différentes que l'aire* D *revient de fois en coïncidence avec elle-même quand elle fait une révolution entière autour de ce centre.*

Ce théorème est la conséquence immédiate des précédents parce que deux aires qui sont représentables sur une même troisième, le sont l'une sur l'autre, et réciproquement.

Cas particuliers. — Les polynomes du premier degré sont tous de la même classe, tous ceux du second degré le sont aussi, car leurs racines forment toujours des figures semblables. Par conséquent, les aires doublement connexes sont toutes de la même classe et représentables sur une aire attachée à un polynome quelconque du premier degré. Les aires triplement connexes sont toutes de la même classe et représentables sur une aire attachée à un polynome du second degré. Il faut seulement choisir des cassiniennes appropriées.

Pour que deux aires A et A′ de l'ordre 2 de connexion soient représentables l'une sur l'autre, il suffit qu'elles aient le même indice relativement au même polynome P(u) du premier degré. Si elles sont du troisième ordre de connexion, il suffit qu'elles aient les deux mêmes indices (dans un ordre quelconque) par rapport à un polynome P(u) du second degré. La question de classe ne se pose plus. Elle n'intervient qu'à partir du quatrième ordre de connexion.

VI. — Cas où les racines de F′(z) sont multiples et où elles sont situées sur les contours. Facteur de déformation.

29. Extension des théorèmes généraux dans le cas où la dérivée F′(z) possède des racines multiples dans l'intérieur de l'aire A, mais ne s'annule pas sur le bord. — Dans ce cas, les raisonnements qui reposent sur la considération des systèmes cycliques de coupures tombent en défaut. Mais, quand les racines multiples de F′(z) sont intérieures à l'aire A

et que cette dérivée ne s'annule pas sur les contours, il suffit de modifier infiniment peu les contours pour dissocier les racines multiples et tourner la difficulté.

Nous définirons la déformation des contours par celle de la fonction $F(z)$, dont le module reste constant sur ces lignes. A cet effet, nous multiplierons $F(z)$ par le facteur $e^{\varepsilon z}$, où ε est un infiniment petit positif, et nous donnerons à ce facteur auxiliaire le nom de *facteur de déformation*.

La fonction nouvelle $F(z)e^{\varepsilon z}$ a pour dérivée logarithmique

$$\frac{F'(z)}{F(z)}+\varepsilon,$$

et celle-ci n'admet plus, pour ε infiniment petit, que des racines simples $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n-1}$. En effet, chaque racine multiple se trouve dissociée en un nombre équivalent de racines simples infiniment voisines et les autres racines sont infiniment peu déplacées.

Les lignes de niveau $|F|=1$ et $|F|=e^{\lambda_k}$, dont font partie les contours C et C_k, sont remplacées par les lignes de niveau de la nouvelle fonction

$$|Fe^{\varepsilon z}|=1, \qquad |Fe^{\varepsilon z}|=e^{\lambda_k},$$

qui comprennent des contours également fermés C et C'_k infiniment voisins des anciens contours C et C_k et qui limitent une nouvelle aire A' infiniment voisine de A. Cette continuité admise dans la déformation des contours fermés pour ε infiniment petit ne prête pas à objection, car la déformation se fait sans rencontrer de racines de la dérivée de $Fe^{\varepsilon z}$ (qui seraient des points critiques). On sait (n^{os} 14 et 15) que ces racines sont des points multiples à tangentes distinctes pour les lignes de niveau qui y passent. La difficulté qui en résulterait ne se présentera pas ici, puisque ces racines sont exclues des contours (*cf.* n° 31).

Toute la théorie antérieure s'applique à l'aire A'. Cette aire appartient à un polynome

$$P_1(u)=(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n);$$

et la relation

$$P_1(u)=F(z)e^{\varepsilon z}$$

établit une correspondance bicontinue et biuniforme $u = \varphi_1(z)$ entre l'aire A' du plan z et une aire D' attachée au polynome $P_1(u)$. Les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de ce polynome peuvent être supposées liées par les équations (2) du n° 5 où il faut seulement remplacer ω_k par ω'_k et ζ_k par ζ'_k, qui est égal à $F(\omega'_k)e^{\varepsilon\omega'_k}$. Alors, comme au n° 5, ces racines a sont des fonctions bornées et continues des ζ'_k, donc de ε, et elles tendent vers des limites déterminées quand ε tend vers zéro. Le polynome $P_1(u)$ a donc pour limite un polynome bien déterminé $P(u)$.

La solution $u = \varphi_1(z)$ de l'équation

$$P_1(u) = F(z)\, e^{\varepsilon z}$$

est aussi une fonction continue de ε, puisque tel est le cas pour les racines, donc pour les coefficients du polynome $P_1(u)$. Cette solution tend donc, quand ε tend vers zéro, vers une solution $u = \varphi(z)$ de l'équation $P(u) = F(z)$, et cette solution établit une correspondance bicontinue et biuniforme entre les points de l'aire A et ceux d'une aire D attachée au polynome $P(u)$. Le théorème fondamental du n° 22 subsiste donc dans le cas actuel. Les théorèmes ultérieurs du paragraphe précédent (n^{os} 23 à 28) subsistent aussi, car ils sont indépendants des restrictions imposées aux racines de $F'(z)$.

30. Sur l'emploi du facteur de déformation dans le cas ou la dérivée $F'(z)$ s'annule sur les frontières. — Le principe de la démonstration précédente s'étend au cas où $F'(z)$ s'annule sur les contours de l'aire A. Il suffit, pour généraliser cette démonstration, de définir, en fonction de ε, une modification infiniment petite des contours qui écarte les racines du bord et dissocie les racines multiples. Nous pensons qu'un simple déplacement de l'un des contours de l'aire produirait cet effet, mais nous n'en avons pas trouvé la preuve absolue. C'est pourquoi nous généraliserons le procédé du *facteur de déformation*, dont la démonstration précédente offre l'exemple le plus simple.

La démonstration complète du théorème du n° 22 est donc ramenée désormais à la construction d'une fonction holomorphe $\omega(z)$, telle que le facteur de déformation $e^{\varepsilon\omega}$, où ε est un infiniment petit positif, substitue aux lignes de niveau $\log|F| = \lambda_k$, dont les contours C_k font partie, des lignes de niveau infiniment voisines, $\log|Fe^{\varepsilon\omega}| = \lambda_k$, contenant des contours fermés C'_k, infiniment voisins des C_k et ne passant par aucun point multiple. En effet, ce résultat obtenu, on remplace l'aire A par l'aire A' circonscrite par les nouveaux contours C' et C'_k, et il n'y a plus de racines de la dérivée de $Fe^{\varepsilon\omega}$ sur les frontières, puisque les lignes de niveau n'y admettent plus de point multiple.

Nous ne nous sommes pas encore préoccupés de la dissociation des points multiples éventuels, mais cette question peut être immédiatement élucidée de manière qu'on n'ait plus à s'en inquiéter. La dissociation est déjà assurée si les dérivées de F et de ω n'ont pas de racines multiples communes, en particulier si ω' ne s'annule pas, ce qui sera le cas dans la démonstration du n° 32. En toute hypothèse, cette dissociation s'obtient par l'intervention d'un facteur de déformation supplémentaire $e^{\varepsilon' z}$, où ε' est un nouveau nombre positif, infiniment petit par rapport à ε, de manière que la nouvelle déformation soit infiniment petite par rapport à la précédente et incapable de ramener les racines de la dérivée de $Fe^{\varepsilon\omega}$ sur les contours.

Avant de passer à la construction de la fonction $\omega(z)$ dont dépend la démonstration qui reste à faire, il est utile de s'arrêter sur les circonstances particulières qui se présentent lorsque $F'(z)$ admet des racines sur les frontières.

31. Conditions particulières imposées aux points multiples situés sur les contours. — Si la dérivée $F'(z)$ admet une racine sur un des contours C_k, ce contour passe par un point multiple de la ligne de niveau correspondante, $\log|F| = \lambda_k$. Il en résulte des difficultés spéciales qui justifient les remarques suivantes :

1° *Les lignes de niveau de* F *ne peuvent avoir de point multiple sur le contour extérieur* C, *ni sur celui ou ceux des contours internes dont l'indice* λ *a la valeur minimum.*

Posons, en effet, conformément aux notations antérieures,

$$U = \log|F|.$$

Cette fonction harmonique est extrémée sur le contour C et sur un contour C_k d'indice λ_k minimum quand z varie dans A. Ces valeurs extrêmes ne peuvent pas être atteintes à l'intérieur de A. Il n'y aura donc pas de point multiple sur ces contours, sinon les valeurs extrêmes de U resteraient atteintes sur les rameaux de la ligne de niveau $U = \alpha$, issus du point multiple, qui pénètrent dans l'intérieur de A.

2° *Un point multiple z_0 de la ligne $U = \alpha$, situé sur une frontière C_k est nécessairement d'ordre impair $2p_0 + 1$; d'où il suit* (n° 15) *que z_0 est une racine d'ordre pair $2p$ de* F'.

Cette propriété tient essentiellement à l'hypothèse que les contours n'admettent aucun point singulier quand on les considère isolément (abstraction faite de la ligne de niveau dont ils font partie).

Soit n l'ordre du point multiple z_0. La courbe $U = \alpha$ possède n branches continues traversant le point z_0, et nous distinguons dans chacune d'elles deux rameaux opposés d'origine z_0. Le contour C_k est l'une de ces branches, mais il circonscrit un vide et emprisonne dans ce vide tous les rameaux de la ligne $U = \alpha$ qui s'y amorcent. Il faut donc que les autres rameaux, amorcés dans l'aire A, se rejoignent deux à deux dans cette aire pour constituer des feuilles séparées. Il y a donc un nombre pair $2p$ de rameaux de ce côté du contour. Par conséquent, en tenant compte de C_k, il y a $2p + 1$ branches qui passent par le point z_0 et dont $2p$ pénètrent dans le vide.

D'après cela, si la ligne de niveau $U = \alpha$ admet le point multiple z_0 situé sur le contour C_k qu'elle comprend, la famille des lignes de niveau ne contient aucun contour fermé infiniment voisin de C_k, puisque les rameaux issus du point multiple z_0 en interceptent la fermeture. C'est de là que vient la difficulté inhérente à ce cas particulier.

3° *Un point multiple d'ordre $2p + 1$ sur la frontière ne compte que pour un point d'ordre $p + 1$ dans le dénombrement des feuilles de la famille $U = \alpha$ qui se séparent successivement dans l'aire A à mesure que décroît le paramètre α* (n° 14).

En effet, il y a p feuilles soudées au point z_0 qui sont situées dans l'aire A. Il y en a également p qui sont amorcées dans le vide et dont la fermeture reste d'ailleurs douteuse. Celles-ci sont exclues, en tout cas, de l'aire A et ne doivent pas intervenir dans l'énumération de celles qui entourent un vide de l'aire A. Il suit de là que l'existence d'une racine de $F'(z)$ sur la frontière met toujours en défaut le théorème du n° 14 (quand les contours sont réguliers).

32. Construction du facteur de déformation quand F' n'admet qu'une seule racine distincte sur la frontière. — Nous désignerons maintenant par α cette racine de $F'(z)$, la seule située sur un contour et située, par exemple, sur le contour C_1.

Elle peut être d'un ordre quelconque de multiplicité.

Le contour C_1 fait partie de la ligne de niveau

$$U = \lambda_1, \qquad \text{où } U = \log|F|.$$

Il s'agit de construire un *facteur de déformation* $e^{\varepsilon\omega}$, tel que la ligne de niveau

$$\log|F e^{\varepsilon\omega}| = \lambda_1$$

comprenne un contour fermé ne passant par aucun point multiple et infiniment voisin de C_1 (n° 30). Il faut choisir la fonction $\omega(z)$ de manière à réaliser cette condition.

Dans ce but, nous construisons d'abord deux cercles γ et γ' soumis aux conditions suivantes :

Le premier cercle γ peut être aussi petit qu'on le voudra; il sera tangent au point α au contour C_1; il sera suffisamment petit pour entrer tout entier dans le vide V que C_1 circonscrit et pour ne pas sortir du domaine d'holomorphie de $F(z)$. Ce cercle étant donné, il existe sur la normale à C_1 en α et du côté du vide deux points conjugués a et b, tels que le cercle γ ait pour équation

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k,$$

où k est une constante donnée < 1. Les deux points a et b seront aussi rapprochés que l'on voudra à condition de choisir la constante k suffisamment voisine de l'unité. Il nous suffit de les supposer suffisamment rapprochés l'un de l'autre pour qu'ils soient tous les deux intérieurs au vide V (l'un étant dans le cercle γ et l'autre en dehors).

Le second cercle γ' sera centré sur le point critique α et de rayon inférieur à celui de γ, de sorte qu'il ne contiendra aucun des deux points a et b. Il sera suffisamment petit pour recouper tous les rameaux de la ligne de niveau $\log|F| = \lambda_1$ issus du point multiple α, et pour exclure tout autre point d'intersection de ces rameaux avec la circonférence γ. Dans ces conditions, la circonférence γ et ces divers rameaux partagent le cercle γ' en un certain nombre de secteurs distincts. Il importe de remarquer que si l'on se borne aux secteurs séparés par le contour C_1, $\log|F|$ est $>\lambda_1$ dans le secteur qui appartient à l'aire A, et $<\lambda_1$ dans celui qui appartient au vide V.

Ceci fait, nous définissons la fonction $\omega(z)$ par la formule

$$\omega(z) = \log \frac{1}{k} \frac{z-a}{z-b}.$$

Cette fonction, dont la dérivée ne peut s'annuler est holomorphe dans l'aire A et sur ses contours, et aussi dans le cercle γ', car les deux points a et b sont dans le même vide V et sont aussi exclus de γ'. Sa partie réelle s'annule sur la circonférence γ; elle est positive à l'extérieur du cercle γ et négative à l'intérieur.

Montrons maintenant que le facteur de déformation $e^{\varepsilon\omega}$ satisfait aux conditions requises, c'est-à-dire que si ε positif est suffisamment petit, la ligne de niveau de la nouvelle fonction

$$\log|F e^{\varepsilon\omega}| = \lambda_1 \tag{1}$$

contient un contour fermé simple C'_1, infiniment voisin de C_1 et ne passant par aucun point multiple de cette ligne (1).

En dehors du cercle donné γ' qui enclôt le point α (seul litigieux) la courbe (1) contient une branche C'_1 infiniment voisine de C_1 et exempte de singularité. Cette branche pénètre dans γ' de part et d'autre du point α et il suffit de montrer qu'elle ne présente plus de singularité à l'intérieur de γ'.

La ligne (1) passe par le point α où ω s'annule; mais α n'est plus un point multiple, parce que la dérivée de ω ne s'annule pas en ce point, ni, par conséquent, celle de $Fe^{\varepsilon\omega}$ (F' étant nul). Je dis que la branche C'_1, infiniment voisine de C_1, qui pénètre dans le cercle γ' de part et d'autre du point α, est emprisonnée dans le secteur de ce cercle qui est exclu des aires A et γ, donc compris entre les arcs de C_1 et de γ. En effet, cette branche ne peut pénétrer dans A, car elle rencontre un secteur où $\log|F|$ est $< \lambda_1$ et où la partie réelle de ω est positive; elle ne peut pas non plus couper la circonférence γ, sur laquelle la partie réelle de ω s'annule, car elle se trouve dans un secteur où $\log|F|$ est $< \lambda_1$. Enfin, comme la ligne (1) ne peut pas former de boucle dans l'aire γ' où F est holomorphe, la branche C'_1 qui pénètre dans le secteur considéré ne passe par aucun point multiple. C'est une branche simple, qui passe par le point α, et tend tout entière vers C_1 quand ε tend vers zéro. Le théorème est établi.

33. Sur une modification de la démonstration précédente. — Il est utile d'apporter une modification à la démonstration précédente, de manière qu'elle puisse s'étendre plus facilement au cas où $F'(z)$ s'annule en plusieurs points sur les contours de l'aire A. Il n'est pas nécessaire que le cercle γ soit tangent au contour C_1 au point α. La démonstration réussit encore si la circonférence γ coupe le contour C_1, *pourvu que ce soit sous un angle suffisamment petit*, c'est-à-dire inférieur à celui que font entre elles les branches consécutives de la ligne de niveau $|F| = \lambda_1$ qui passent par le point multiple α.

Dans ce cas, la circonférence γ coupe le contour C_1 en plusieurs points. Le cercle γ', de centre α, doit être construit assez petit pour ne contenir que le seul point d'intersection α et, s'il y a lieu, pour exclure tout arc de la circonférence γ qui pénétrerait dans un secteur différent du secteur d'entrée, secteur frontière où l'on sait que $\log|F|$ est $> \lambda_1$.

Le point α n'est pas multiple pour la nouvelle ligne de niveau (1), pour la raison indiquée au numéro précédent. La branche du contour C'_1, infiniment voisine de C_1 et comprise à l'intérieur de γ', est, cette fois encore, emprisonnée entre les arcs du contour C_1 et de la circonférence γ. En effet, d'un côté du point α, le secteur limité par ces arcs est exclu des aires A et γ et le raisonnement est le même que dans le cas précédent. De l'autre côté du point α, le secteur analogue est commun aux aires A et γ. La branche C'_1 doit pénétrer par ce secteur dans le cercle γ', car elle se trouve dans une région où la partie réelle de ω est négative et que le logarithme de $|F|$ est $< \lambda_1$ hors de A. Pour ces mêmes raisons, la branche C'_1 ne peut sortir de A. Mais elle ne traversera pas non plus la circonférence γ, car la partie réelle de ω s'annule sur γ et le logarithme de $|F|$ est $> \lambda_1$ dans A.

34. Construction du facteur de déformation quand $F'(z)$ s'annule en plusieurs points des contours. — Considérons le cas général où $F'|z|$ s'annule sur les contours en r points différents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et où ces zéros sont d'ordre quelconque. Proposons-nous de construire un *facteur de déformation* produisant, en chaque point α_i, le résultat que nous avons obtenu dans le cas d'un seul point α (n° 32).

A cet effet, nous procédons, en chaque point α_i, séparément comme nous ferions s'il était le seul (n° 32). Nous construisons d'abord un cercle γ_i tangent en α_i au contour de A. Nous nous donnons un nombre positif $k < 1$ et nous mettons l'équation du cercle γ_i sous la forme

$$\frac{z-a_i}{z-b_i} = k,$$

où a_i et b_i sont deux points conjugués situés sur la normale au contour de A. Par convention, tous les cercles γ_i auront le même rayon et la valeur de k sera la même pour tous les indices ; le rayon peut être aussi petit que l'on veut et la valeur de k aussi voisine que l'on veut de l'unité. Les cercles γ_i ne doivent pas se rencontrer et les points conjugués a_i, b_i doivent satisfaire aux conditions exigées dans le cas d'un seul point α (n° 32).

Formons la fonction rationnelle

$$\varphi(z) = \frac{1}{k}\,\frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_r)}{(z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_r)}.$$

Les zéros et les pôles de cette fonction sont dans les vides de l'aire A et il y a autant de zéros que de pôles dans chaque vide. Il en résulte que le logarithme de $\varphi(z)$ est holomorphe dans l'aire A et sur ses contours.

La fonction $\varphi(z)$ ne diffère de la fraction

$$\frac{1}{k}\,\frac{z-a_i}{z-b_i}$$

que par un facteur que l'on peut rendre aussi voisin que l'on veut de l'unité au point α_i et dans son voisinage. Il suffit, en effet, pour cela que les points conjugués a, b soient suffisamment rapprochés pour tous les indices. On réalisera cette condition en prenant le rayon des cercles γ suffisamment petit ou k suffisamment voisin de *un*.

En particulier, au point α_i, la fonction $\varphi(z)$ elle-même prend une valeur $\varphi(\alpha_i)$ que l'on peut supposer aussi rapprochée que l'on veut de l'unité sous les mêmes conditions.

Le voisinage du point α_i sera défini par un cercle de rayon suffisamment petit autour de ce point.

Nous ne pouvons pas raisonner sur la fonction $\varphi(z)$ comme dans le cas d'un seul point α, parce que les valeurs $\varphi(\alpha_i)$ diffèrent de l'unité. Nous sommes naturellement conduits à construire un facteur correctif approprié, comme il suit :

Donnons-nous arbitrairement r points $p_1, p_2, \ldots p_r$, distincts ou non, mais tous situés hors de A et de ses vides. Associons-leur r nouveaux points $q_1, q_2, \ldots, q_r$ déterminés par le système d'équations

$$(\alpha_i - q_1)(\alpha_i - q_2)\ldots(\alpha_i - q_r) = \varphi(\alpha_i)(\alpha_i - p_1)(\alpha_i - p_2)\ldots(\alpha_i - p_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Ce système détermine les nombres q à l'ordre près. En effet, si l'on désigne avec la caractéristique Σ des sommes étendues aux combinaisons d'indices 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... et que l'on pose

$$A_1 = \Sigma p_1, \qquad A_2 = \Sigma p_1 p_2, \qquad A_3 = \Sigma p_1 p_2 p_3, \qquad \ldots,$$
$$B_1 = \Sigma q_1, \qquad B_2 = \Sigma q_1 q_2, \qquad B_3 = \Sigma q_1 q_2 q_3, \qquad \ldots,$$

les sommes A sont déterminées par les p et les sommes B sont déterminées par le système d'équations linéaires, de déterminant non nul (car les points α_i sont distincts),

$$\alpha_i^r - B_1 \alpha_i^{r-1} + B_2 \alpha_i^{r-2} - \ldots = \varphi(\alpha_i)(\alpha_i^r - A_1 \alpha_i^{r-1} + \ldots)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Après cela, $q_1, q_2, \ldots, q_r$ sont les racines X de l'équation

$$X^r - B_1 X^{r-1} + B_2 X^{r-2} + \ldots \pm B_r = 0.$$

Si les valeurs $\varphi(\alpha_i)$ tendent toutes vers l'unité, les sommes $B_1, B_2, \ldots$ tendent respectivement vers $A_1, A_2, \ldots$ en vertu du système linéaire; par conséquent, les racines $q_1, q_2, \ldots, q_r$ de l'équation précédente tendent respectivement vers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ dans l'ordre des indices si l'on numérote ces lettres convenablement. Nous supposerons les valeurs $\varphi(\alpha_i)$ suffisamment voisines de l'unité pour que tous les points q soient, comme le sont les points p, exclus de l'aire A *comblée*.

Formons maintenant la fonction rationnelle

$$\psi(z) = \frac{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_r)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_r)}.$$

Les zéros et les pôles de $\psi(z)$ sont tous hors de l'aire A *comblée* et, par conséquent, le logarithme de cette fonction est holomorphe dans l'aire A et ses vides. La fonction $\psi(z)$ elle-même peut être rendue aussi voisine que l'on veut de l'unité au voisinage du point α_i d'indice quelconque, à condition de rendre les points p, q suffisamment voisins. Enfin, les valeurs $\psi(\alpha_i)$ et $\varphi(\alpha_i)$ sont inverses l'une de l'autre, de sorte que la fraction rationnelle

$$\varphi(z)\psi(z)$$

est égale à l'unité au point α_i et diffère aussi peu que l'on veut, dans le voisinage de ce point, de la fraction

$$\frac{1}{k}\frac{z-a_i}{z-b_i}.$$

Le facteur de déformation $e^{\varepsilon\omega}$ est maintenant construit. Nous posons

$$\omega(z) = \log[\varphi(z)\psi(z)]$$

et nous allons vérifier que le facteur $e^{\varepsilon\omega}$ satisfait aux conditions requises pour la démonstration.

Dans le voisinage d'un point α_i d'indice quelconque, on a approximativement, sauf une erreur que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut,

$$\omega(z) = \log\frac{1}{k}\frac{z-a_i}{z-b_i}.$$

Dans ces conditions, la courbe

$$\text{(1)} \qquad \text{part. réelle } \omega(z) = 0$$

comprend, en particulier, r contours fermés c_i, passant chacun par l'un des points α_i qui lui correspond, et peu différents des cercles γ_i qui ont servi de point de départ. Ces contours c_i jouissent des propriétés du cercle γ sur lesquelles se fonde la démonstration relative au cas où il n'y a qu'un seul point α; mais comme ils ne sont pas tangents au contour de l'aire A, c'est la démonstration modifiée du n° 33 qui convient au cas actuel.

Cette démonstration modifiée supposait toutefois que si le cercle γ qu'elle considère coupe le contour de l'aire A, ce soit sous un angle suffisamment petit. Il reste uniquement à montrer, pour achever la démonstration actuelle, que la même condition peut être réalisée avec les contours c_i, c'est-à-dire que la tangente en α_i au contour c_i s'oblique aussi peu qu'on voudra sur la tangente au même point au cercle γ_i, à condition de construire ces cercles suffisamment petits et de choisir convenablement les points a, b et p, q. Vérifions qu'il en est bien ainsi.

Désignons par r'_s et r''_s les distances du point z aux points conjugués a_s et b_s, par ρ'_s et ρ''_s celles aux points p_s et q_s. L'équation de la courbe (1) s'écrit

$$\sum \log \frac{r'_s}{r''_s} + \sum \log \frac{\rho'_s}{\rho''_s} = \log k. \tag{1'}$$

Donnons à z un déplacement dz *tangent à cette courbe* et soient θ'_s, θ''_s, τ'_s et τ''_s les inclinaisons de r'_s, r''_s, ρ'_s et ρ''_s sur dz, de sorte que dr', dr'', $d\rho'$ et $d\rho''$ sont proportionnels aux cosinus de ces inclinaisons. Il vient, en différentiant l'équation précédente de la courbe,

$$\sum \left(\frac{\cos\theta'_s}{r'_s} - \frac{\cos\theta''_s}{r''_s}\right) + \sum \left(\frac{\cos\tau'_s}{\rho'_s} - \frac{\cos\tau''_s}{\rho''_s}\right) = 0. \tag{1'}$$

Plaçons-nous au point α_i. Les deux rayons r'_i et r''_i de ce même indice i se superposent et sont dans le rapport k. L'équation précédente devient, en observant que $\theta'_i = \theta''_i$ et en désignant par Σ' une somme qui exclut l'indice i,

$$\frac{\cos\theta'_i}{r'_i}\left(1 - \frac{r''_i}{r'_i}\right) = -\sum{}' \left(\frac{\cos\theta'_s}{r'_s} - \frac{\cos\theta''_s}{r''_s}\right) - \sum \left(\frac{\cos\tau'_s}{\rho'_s} - \frac{\cos\tau''_s}{\rho''_s}\right).$$

Si nous faisons décroître indéfiniment les cercles γ_i, le nombre k et les points p restant fixes, les points a, b de même indice quelconque se rapprochent indéfiniment, les points p, q également. Les deux rayons r'_i et r''_i tendent vers zéro, mais tous les autres de même indice autre que i tendent vers le même vecteur fini. Au premier membre de l'équation précédente, le coefficient de $\cos\theta'_i$, qui est $(1 - k) : r'_i$, augmente indéfiniment; dans le second, tous les termes des deux sommes tendent vers zéro. Donc $\cos\theta'_i$ tend vers zéro, et θ'_i vers $\frac{\pi}{2}$. A la limite, dz qui est tangent au contour c_i au point α_i, devient normal au rayon r'_i et, par conséquent, tangent aussi au cercle γ_i et, comme lui, au contour de l'aire A, ce qui justifie notre affirmation.

La démonstration du théorème est maintenant achevée.

VII. — Extension de la théorie au cas où les frontières de l'aire A sont quelconques.

35. Ensembles ouverts d'un ordre de connexion quelconque. — Un ensemble E, d'un seul tenant, ouvert, borné, à connexion d'ordre $n+1$, s'obtient en retranchant d'un ensemble ouvert et borné O à connexion simple, n ensembles fermés à connexion simple, sans points communs, $F_1, F_2, \ldots, F_n$, qui y sont contenus. Si aucun de ces ensembles F ne se réduit à un seul point, la théorie précédente s'applique à l'ensemble E et cet ensemble appartient à une classe bien déterminée de polynomes de degré n.

En effet, il est facile de représenter l'ensemble E, avec correspondance des frontières extérieures; sur une aire à connexion d'ordre $n+1$ limitée par des contours analytiques et réguliers.

On représente d'abord l'ensemble O sur l'intérieur d'un cercle, ce qui transforme les ensembles fermés $F_1, F_2, \ldots$ en d'autres ensembles fermés $F'_1, F'_2, \ldots$ et l'ensemble E en un nouvel ensemble ouvert E', à connexion d'ordre $n+1$, et limité extérieurement par une circonférence.

On représente ensuite, sur l'extérieur d'un cercle, la portion du plan extérieure à F'_1, ce qui remplace E' par E'' et $F'_2, \ldots$ par $F''_2, \ldots$. On représente ensuite, sur l'extérieur d'un cercle, la portion du plan extérieure à F''_2, ce qui remplace E'' par E'''. On poursuit successivement cette opération jusqu'au dernier des contours fermés. L'ensemble finalement obtenu $E^{(n+1)}$ est une aire ouverte, limitée par des contours *tous analytiques* et dont le dernier obtenu est une circonférence.

L'ensemble ouvert E, *borné et de l'ordre* $n+1$ *de connexion, est donc représentable sur une aire ouverte convenablement choisie, attachée à un polynome* $P(u)$ *d'ordre* n, *de la classe à laquelle appartient l'ensemble* E.

Ce résultat pose immédiatement le problème de la *correspondance des frontières*. La démonstration précédente met en lumière que ce problème est exactement le même que pour le cercle. On peut donc le considérer comme résolu par les recherches de M. Carathéodory [1]. En particulier, si les frontières sont des courbes simples de Jordan, la correspondance s'étend aux frontières et nous avons le théorème suivant :

36. Théorème. — *Une aire bornée* A, *de l'ordre* $n+1$ *de connexion, limitée par un contour extérieur* C *et* n *contours internes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *qui sont tous des contours de Jordan, fermés, simples et sans points multiples, appartient à une classe de polynomes de degré* n; *elle est représentable (contours inclus) sur une aire attachée à un polynome* $P(u)$ *de cette classe, avec correspondance des contours extérieurs. Cette aire devra être limitée par des cassiniennes convenablement choisies.*

37. Aires non bornées. — Considérons une aire non bornée d'un seul tenant et de l'ordre $n+1$ de connexion. Elle admet $n+1$ frontières séparées d'un seul tenant. Nous pouvons la représenter sur une aire bornée, du même ordre de connexion, et limitée extérieurement par une circonférence, ce qui ramène au cas précédent. Mais le choix de la frontière séparée que l'on fait correspondre à la circonférence extérieure reste arbitraire. La classe de polynomes à laquelle l'aire sera attachée peut varier avec ce choix, car la dépendance établie précédemment entre une aire et une classe de polynomes suppose la correspondance des contours extérieurs.

La même remarque s'applique d'ailleurs à une aire bornée. On peut d'abord la transformer en une autre sans faire correspondre les contours extérieurs, par exemple par le moyen d'une inversion. Rien ne prouve que l'aire primitive et sa transformée soient de la même classe, sauf évidemment pour les ordres de connexion 2 et 3, auxquels cas tous les polynomes sont de la même classe.

---

[1] *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, Bd 73). Voir aussi *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, par Paul Montel, recueillies et rédigées par J. Barbotte (Paris, 1927, Chap. IV, § 53 et suiv.) et une Note de M. C. de la Vallée Poussin dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (t. L, 1930. Seconde Partie. *Mémoires*, p. 23).