Annales scientifiques de l'É.N.S.

V. Hlavaty

Le parallélisme de la connexion de M. Weyl

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 73-103
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__73_0>

LE PARALLÉLISME

DE

LA CONNEXION DE M. WEYL

PAR M. V. HLAVATÝ

INTRODUCTION.

Le travail présent a pour but l'étude des systèmes différentiels qui définissent le déplacement parallèle d'un vecteur le long d'une courbe $\mathcal{C}$ dans l'espace à connexion W_n de M. Weyl. Un tel système contient, en général, n^2 coefficients. Nous les réduisons en un système du même ordre qui n'en contient que $n-1$. Si $n=4$ et si la connexion W_4 est celle de la théorie de la relativité, la méthode qui nous permet la réduction du système différentiel en question nous donne aussi le moyen de l'*intégrer*.

Le Mémoire est divisé en deux parties. Dans les deux premiers paragraphes de la première partie, le lecteur trouvera un exposé bref des notions fondamentales. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de « la métrique » dans W_n le long de $\mathcal{C}$. L'introduction de cette notion nous permet de trouver les « formules de Frenet » pour $\mathcal{C}$ (§ 5) et, par conséquent, de réduire le système en question à une forme plus simple (§ 6). Le paragraphe suivant contient deux corollaires du théorème des réductions.

Dans la deuxième partie, on suppose que $\mathcal{C}$ soit un rayon de lumière donné dans la connexion W_4 de la relativité. Dans ce cas, beaucoup de simplifications se présentent et l'on en profite pour trouver l'*intégrale générale* du système différentiel correspondant.

Quant à la symbolique, nous emploierons, dans la première partie, celle qui est la plus usuelle, c'est-à-dire la symbolique du calcul portant sur les composantes des grandeurs ([1]). Dans la seconde partie, nous avons jugé plus efficace d'employer le calcul direct.

I.

1. Définitions.

1. *Algèbre.* — Imaginons dans un espace à n dimensions un système des coordonnées générales x^ν et convenons de les transformer d'après les formules

$$'x^\nu = 'x^\nu(x^1, \ldots, x^n), \tag{1}$$

avec le jacobien différent de zéro,

$$\Delta = \left\| \frac{\partial x}{\partial' x} \right\| \neq 0.$$

Si x_0^ν est un point arbitraire, mais fixe, nous désignerons par Δ_0 la valeur du jacobien Δ au point x_0^ν.

Le groupe (1) nous permet de définir les notions suivantes, dont nous aurons besoin plus tard :

a. *Le scalaire* est l'invariant absolu du groupe (1).

b. *La densité scalaire du poids p* est l'invariant relatif du groupe (1), dont le poids est p.

c. *La pseudodensité scalaire du poids p* est chaque fonction qui se transforme comme la valeur de la densité scalaire du poids p *au point fixe* x_0^ν.

Nous conviendrons de désigner les scalaires par a, A, b, B, c, ..., les densités par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., et les pseudodensités par α, β, γ, ...

Leur mode de transformation est

$$'a = a, \qquad '\mathfrak{a} = \Delta^p \mathfrak{a}, \qquad '\alpha = \Delta_0^p \alpha.$$

([1]) Les indices de co- ou contrevariance, *toujours grecs*, seront affectés en bas ou en haut des lettres. On effectue la sommation d'après « les indices muets » en supprimant les symboles Σ.

Les fonctions scalaires qui se transforment autrement seront désignées par Σ, Λ, ...

A. *L'affineur q fois covariant et r fois contrevariant* est l'ensemble des fonctions $v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ qui se transforment d'après

$$'v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = \frac{\partial' x^{\nu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial' x^{\nu_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial' x^{\nu_r}}{\partial x^{\alpha_q}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial' x^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial' x^{\lambda_q}}\, v^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_q}.$$

L'affineur unitaire, dont les composantes sont o, 1, sera désigné par $A^\nu_\lambda (= 0 \text{ si } \nu \neq \lambda;\ = 1 \text{ si } \nu = \lambda)$. Les cas spéciaux des affineurs sont des *vecteurs* contrevariants a^ν, b^ν, ..., v^ν, ..., respectivement covariants a_λ, b_λ, ..., w_λ, ... Un affineur aux composantes symétriques (par exemple, $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$) sera dit *tenseur*. Chaque affineur, dont les composantes se transforment comme le déterminant des composantes des n vecteurs covariants, linéairement indépendants, sera dit le *n-vecteur covariant*.

B. *Pseudodensité affinorielle q fois covariante et r fois contrevariante du poids p* est représentée par l'ensemble des fonctions qui se transforment comme le produit de $v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ et d'une pseudodensité du poids p. Notations : $\alpha^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$, ..., $\alpha_{\lambda\mu}$, ε^ν, ...

2. *Analyse*. — En désignant par $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ les coefficients de la connexion de l'espace étudié, on parvient à la notion de la dérivée covariante de l'affineur $v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$,

$$(2)\quad \nabla_\mu v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} - \sum_{s=1}^{q} v^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_{s-1}\lambda\lambda_{s+1}\ldots\lambda_q}\Gamma^\lambda_{\lambda_s\mu} + \sum_{y=1}^{r} v^{\nu_1\ldots\nu_{y-1}\nu\nu_{y+1}\ldots\nu_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}\Gamma^{\nu_y}_{\nu\mu} \quad [1].$$

La dérivée covariante d'un scalaire a ou d'une densité scalaire $\mathfrak{a}$ du poids p est définie par

$$(3)\qquad \nabla_\mu a = \frac{\partial}{\partial x^\mu} a; \qquad \nabla_\mu \mathfrak{a} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathfrak{a} - p\,\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\mathfrak{a} \quad [2].$$

---

[1] *Cf.* par exemple, SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, 1924).

[2] *Voir* HLAVATÝ, *Théorie des densités dans le déplacement général* (*Annali di mathematica*, 4e série, t. V, 1927-1928, p. 73-83).

Quant à la dérivée d'une pseudodensité scalaire α du poids p, nous adoptons la loi

$$(4) \qquad \nabla_\mu \alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \alpha,$$

qui laisse clairement voir que $dx^\mu \nabla_\mu \alpha$ est à son tour une pseudodensité scalaire du même poids. Il s'ensuit immédiatement, d'après le principe de M. Klein, pour une pseudodensité $\alpha^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ du poids p,

$$(2') \qquad \nabla_\mu \alpha^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} - \sum_{s=1}^{q} \Gamma^{\lambda}_{\lambda_s \mu} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s-1} \lambda \lambda_{s+1} \dots \lambda_q} + \sum_{y=1}^{r} \Gamma^{\nu_y}_{\nu \mu} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_{y-1} \nu \nu_{y+1} \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}.$$

Les coefficients $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$ se transforment d'après

$$(5) \qquad '\Gamma^{\rho}_{\omega\pi} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial' x^\omega} \frac{\partial x^\mu}{\partial' x^\pi} \frac{\partial' x^\rho}{\partial x^\nu} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial' x^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial' x^\omega \, \partial' x^\pi},$$

$$(5') \qquad \Gamma^{\alpha}_{\alpha\pi} = \frac{\partial x^\mu}{\partial' x^\pi} \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^\mu} \right).$$

A côté du symbole ∇_μ, nous emploierons encore le symbole $\mathcal{D}$ qui désigne la dérivée le long d'une courbe donnée $x = x(t)$. On a symboliquement

$$\mathcal{D} = \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_\mu.$$

2. Généralités sur la connexion W_n.

Soit donné un tenseur $g_{\lambda\mu}$ (au déterminant $\| g_{\lambda\mu} \| \neq 0$) et un vecteur Q_μ qui n'est pas le vecteur gradient. A l'aide des positions

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = A^{\nu}_{\mu},$$

on peut déduire de $g_{\lambda\mu}$ le tenseur contrevariant $g^{\nu\lambda}$. Cela étant, les coefficients

$$(6) \qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(Q_\mu A^{\nu}_{\lambda} + Q_\lambda A^{\nu}_{\mu} - g^{\nu\alpha} g_{\lambda\mu} Q_\alpha \right)$$

définissent la connexion dite « connexion de M. Weyl », que nous désignerons par W_n.

Si s est une fonction arbitraire indéterminée des coordonnées, et si l'on prend, au lieu de $g_{\lambda\mu}$ et Q_μ, les grandeurs

$$(7)\qquad \overline{g}_{\lambda\mu} = s g_{\lambda\mu}, \qquad \overline{Q_\mu} = Q_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\log s.$$

les coefficients $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ peuvent être exprimés aussi

$$(\overline{6})\quad \Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\overline{g}^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial \overline{g}_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \overline{g}_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \overline{g}_{\lambda\mu}}{\partial x^\mu}\right) + \frac{1}{2}(\overline{Q_\mu}A^\nu_\lambda + \overline{Q_\lambda}A^\nu_\mu - \overline{g}^{\nu\alpha}\overline{g}_{\lambda\mu}\overline{Q_\alpha}).$$

On déduit de (6) respectivement $(\overline{6})$

$$(7)\qquad \nabla_\omega g_{\lambda\mu} = -Q_\omega g_{\lambda\mu}, \qquad \nabla_\omega \overline{g}_{\lambda\mu} = -\overline{Q_\omega}\overline{g}_{\lambda\mu}$$

et ces équations peuvent être envisagées comme définissant la connexion W_n. On voit donc qu'il y a une infinité de tenseurs $\overline{g}_{\lambda\mu}$, qui (avec les vecteurs correspondants $\overline{Q}_\mu$) fixent la même connexion. Le choix du facteur s a pour conséquence la détermination du tenseur $\overline{g}_{\lambda\mu}$; nous appellerons ce choix « le choix particulier du tenseur $\overline{g}_{\lambda\mu}$ ». Remarquons qu'un tel choix restreint forcément la généralité. On peut exprimer cette propriété aussi en disant que *la métrique de* W_n *est fixée à un facteur indéterminé près.*

Dans ce qui suit, nous verrons qu'en utilisant la notion des pseudodensités, on peut définir quand même, dans W_n, une métrique *le long d'une courbe donnée.*

2. Le pseudotenseur $\alpha_{\lambda\mu}$.

1\. *Le pseudotenseur* $\alpha_{\lambda\mu}$. — Imaginons dans W_n une courbe générale $\mathcal{C}$ donnée par les équations paramétriques

$$(8)\qquad x^\nu = x^\nu(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

et désignons par x^ν_0 le point $t = t_0$. Cela étant, construisons la fonction

$$(9)\qquad \Lambda = e^{\int_{t_0}^{t}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\,dx^\mu}.$$

En transformant les coordonnées d'après (1), cette fonction devient $'\Lambda$, et l'on a, en raison de (5'),

$$'\Lambda = e^{\int_{t_0}^{t} {'\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}\, d'x^{\mu}} = e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\, dx^{\mu} + \int_{t_0}^{t} d\log\Delta} = \Lambda\Delta\Delta_0^{-1}.$$

Or, en désignant par $\mathfrak{g}^2$ le déterminant de $g_{\lambda\mu}$, on trouve tout d'abord que $\mathfrak{g}$ ($=$ la racine carrée positive de $\mathfrak{g}^2$) est une densité du poids 1, et, par conséquent,

$$\tau^{\frac{n}{2}} = \frac{\Lambda}{\mathfrak{g}} \tag{10}$$

est une pseudodensité du poids -1. En effet, si l'on effectue la transformation (1), la fonction $\tau^{n/2}$ devient $'\tau^{n/2}$, et l'on a

$$'\tau^{\frac{n}{2}} = \frac{'\Lambda}{'\mathfrak{g}} = \frac{\Lambda\Delta\Delta_0^{-1}}{\mathfrak{g}\Delta} = \tau^{\frac{n}{2}}\Delta_0^{-1}.$$

Il nous faudra encore déterminer le mode de transformation de $\tau^{n/2}$ pendant la transformation (7). Parce qu'on a, d'après (6), $(\overline{6})$,

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\log\mathfrak{g} + \frac{n}{2}Q_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\bar{\mathfrak{g}} + \frac{n}{2}\overline{Q_{\mu}} = \overline{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}. \tag{11}$$

la fonction Λ ne change pas pendant (7), tandis que la densité $\mathfrak{g}$ devient

$$\bar{\mathfrak{g}} = s^{\frac{n}{2}}\mathfrak{g}.$$

Or, la fonction $\tau^{n/2}$ change à son tour et devient

$$\bar{\tau}^{\frac{n}{2}} = \tau^{\frac{n}{2}} s^{-\frac{n}{2}}.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}\tau \tag{12}$$

est un pseudotenseur deux fois covariant du poids $-2/n$ *qui est invariant par rapport à la transformation* (7).

En effet, on a pendant (1) et (7) respectivement

$$'\alpha_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial' x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial' x^{\mu}}\Delta_0^{-\frac{2}{n}}\alpha_{\rho\sigma},$$

$$\bar{\alpha}_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\mu},$$

ce qui prouve notre assertion.

2. *La dérivée* $\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu}$. — Plus tard, nous aurons besoin de la dérivée $\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu}$. On a, en raison de (12) et (7),

$$\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu} = (\mathcal{D}g_{\lambda\mu})\tau + g_{\lambda\mu}\frac{d\tau}{dt} = g_{\lambda\mu}\left(-Q_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\tau + \frac{d\tau}{dt}\right).$$

D'autre part, en tenant compte de (10), on peut calculer $\frac{d\tau}{dt}$, et l'on obtient, en raison de (11) et de (9),

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{n}\left(\frac{\Lambda}{\mathfrak{g}}\right)^{2nl}\left(\frac{n}{2}Q_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\right) = \tau Q_\mu \frac{dx^\mu}{dt}$$

et, par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu} = 0.} \tag{13}$$

Or, *étant donnée une courbe* $\mathcal{C}$ *dans* W_n, *on peut toujours trouver un pseudotenseur* $\alpha_{\lambda\mu}$ *du poids* $-2/n$, *invariant par rapport au choix particulier de* $\bar{g}_{\lambda\mu}$, *dont la dérivée covariante le long de* $\mathcal{C}$ *est nulle. C'est ce pseudotenseur qui nous servira comme base pour « la métrique » de* W_n *le long de* $\mathcal{C}$.

4. « La métrique » le long de $\mathcal{C}$.

Le déterminant $\mathfrak{g}^2$ étant supposé différent de zéro, il en est de même du déterminant $\|\alpha_{\lambda\mu}\|$ du pseudotenseur $\alpha_{\lambda\mu}$, et, par conséquent, existe un pseudotenseur contrevariant $\alpha^{\nu\alpha}$ du poids $2/n$, défini par les positions

$$\alpha^{\nu\alpha}\alpha_{\alpha\mu} = A^\nu_\mu.$$

Si l'indice d'inertie du tenseur $g_{\lambda\mu}$ est différent de zéro, ce que nous supposerons, celui du pseudotenseur $\alpha_{\lambda\mu}$ l'est à son tour.

A partir de ce moment, nous n'étudierons, parmi les *pseudovecteurs*, que des pseudovecteurs *contrevariants du poids* $1/n$ et des pseudovecteurs *covariants du poids* $-1/n$. Or, il n'y aura aucune ambiguïté à craindre en convenant de supprimer la désignation du poids des *pseudovecteurs*.

En chaque point de la courbe (8), l'équation

$$\alpha_{\lambda\mu}\omega^\lambda\omega^\mu = 0 \tag{14}$$

définit « le cône fondamental » dont les « pseudovecteurs fondamentaux » sont les génératrices. Remarquons que la propriété d'être « fondamental » s'étend aussi aux vecteurs v^ν qui satisfont à l'équation

$$\alpha_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu = 0. \tag{15}$$

Les pseudovecteurs contrevariants étant, d'après la convention, du poids $1/n$, l'expression

$$\alpha_{\lambda\mu} \xi^\lambda \xi^\mu$$

est *un scalaire* que nous appellerons le *module* de ξ^ν. Si, par hasard, le module est égal à $+1$ ou -1, nous appellerons le pseudovecteur correspondant pseudovecteur unitaire. (Le module du pseudovecteur fondamental égale à zéro par définition.)

Étant donnés deux pseudovecteurs contrevariants ξ^ν et η^ν, on en peut construire la forme quadratique $\alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\eta^\mu$. Si cette forme égale à zéro, nous dirons que ξ^ν et η^ν sont les pseudovecteurs conjugués. Chaque pseudovecteur fondamental est conjugué à lui-même ou autoconjugué. A côté des *pseudovecteurs* conjugués ou autoconjugués, on a aussi les *vecteurs* conjugués ou autoconjugués et leur définition est la même.

A chaque pseudovecteur contrevariant ξ^ν, on peut adjoindre intrinsèquement le pseudovecteur covariant ξ_λ au moyen de l'équation

$$\xi_\lambda = \alpha_{\mu\lambda}\xi^\lambda = \alpha_{\lambda\mu}\xi^\mu.$$

Il va sans dire que les notions intrinsèques du pseudovecteur fondamental aussi bien que du pseudovecteur unitaire s'étendent aussi au pseudovecteur covariant dont le module est défini par

$$\alpha^{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu = \alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu.$$

Nous sommes parvenus ainsi aux notions analogues aux notions métriques dans une connexion riemannienne. Dans ce qui suit, nous les utiliserons pour en déduire les formules de Frenet de $\mathcal{C}$.

5. Les formules de Frenet.

1. *Le pseudovecteur unitaire tangent.* — Une courbe $\mathcal{C}$ étant donnée par ses équations paramétriques (8), on a deux cas à distinguer. Ou

bien son vecteur tangent

$$e^\nu = \frac{dx^\nu}{dt}$$

est un vecteur fondamental, ou bien il ne l'est pas. Nous examinerons le premier cas plus tard en intégrant les équations du parallélisme le long d'un rayon de lumière dans W_4 relativistique.

Dans le second cas, nous pouvons construire *à côté* du vecteur tangent e^ν le pseudovecteur unitaire $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$ tangent à $\mathcal{C}$. Nous introduirons tout d'abord le paramètre auxiliaire

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{m_1 \alpha_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu}\, dt, \qquad m_1 = \operatorname{sign}(\alpha_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu) . 1$$

et ensuite nous construirons les expressions $\frac{dx^\nu}{d\sigma}$. Le paramètre σ est une pseudodensité du poids $-1/n$. En effet, on a, pendant la transformation (1),

$$'\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{m_1 '\alpha_{\lambda\mu} 'e_\lambda 'e_\mu}\, dt = \Delta_0^{-\frac{1}{n}} \int_{t_0}^{t} \sqrt{m_1 \alpha_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu}\, dt = \Delta_0^{-\frac{1}{n}} \sigma.$$

Il s'ensuit que les expressions $\frac{dx^\nu}{d\sigma}$ se transforment d'après

$$\frac{d'x^\nu}{d'\sigma^\lambda} = \frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d'\sigma} = \Delta_0^{\frac{1}{n}} \frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma}$$

et, par conséquent, $\frac{dx^\nu}{d\sigma}$ est un pseudovecteur $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$

$$\underset{1}{\varepsilon}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}.$$

On constate aisément que ce pseudovecteur est un pseudovecteur unitaire. En effet, on a

$$\underset{1}{\varepsilon}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = \frac{e^\nu}{\sqrt{m_1 \alpha_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu}}$$

et, par conséquent,

$$\alpha_{\lambda\mu} \underset{1}{\varepsilon}^\lambda \underset{1}{\varepsilon}^\mu = \frac{\alpha_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu}{m_1 \alpha_{\rho\sigma} e^\rho e^\sigma} = m_1 = \pm 1, \tag{16}$$

ce qui prouve notre assertion.

Remarquons encore qu'à côté de $\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$, on peut construire le pseudo-vecteur unitaire $\overset{1}{\varepsilon}_{\lambda}$ à l'aide de l'équation

$$\overset{1}{\varepsilon}_{\lambda} = \alpha_{\lambda\mu}\underset{1}{\varepsilon}^{\mu}.$$

2. *Les formules de Frenet*. — La dérivée covariante de $\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$,

$$\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu} = e^{\mu}\nabla_{\mu}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu},$$

donne naissance au pseudovecteur $\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$, et l'on a deux cas à distinguer : ou bien $\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$ est un pseudovecteur fondamental, ou bien il ne l'est pas. Nous n'examinerons à présent que les courbes générales, c'est-à-dire les courbes dont le pseudovecteur n'est pas tangent au cône fondamental, et, par conséquent, son module est, *en général*, différent de zéro, et l'on peut écrire

$$k_1 = \sqrt{m_2\alpha_{\lambda\mu}\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\lambda}\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\mu}} \neq 0, \qquad m_2 = \operatorname{sign}\left(\alpha_{\lambda\mu}\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\lambda}\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\mu}\right).$$

L'application du symbole $\mathcal{D}$ à l'équation (16), nous apprend que $\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$ résulte conjugué à $\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$. En effet, on trouve

$$\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu}\underset{1}{\varepsilon}^{\lambda}\underset{1}{\varepsilon}^{\mu} = 2\alpha_{\lambda\mu}\left(\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\lambda}\right)\underset{1}{\varepsilon}^{\mu} = 0. \tag{17}$$

Or, en désignant par $\underset{2}{\varepsilon}^{\nu}$ le pseudovecteur unitaire appartenant à $\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$, on peut poser

$$\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^{\nu} = k_1\underset{2}{\varepsilon}^{\nu} \quad (^1),$$

et si $k_1 \neq 0$, l'équation (17) peut aussi s'écrire

$$\alpha_{\lambda\mu}\underset{1}{\varepsilon}^{\lambda}\underset{2}{\varepsilon}^{\mu} = 0. \tag{18}$$

Nous appellerons $\underset{2}{\varepsilon}^{\nu}$ *le premier pseudovecteur normal* de $\mathcal{C}$ et k_1 la *première courbure de* $\mathcal{C}$. Si $k_1 = 0$ sans que $\underset{1}{\varepsilon}^{\nu}$ soit un pseudovecteur fondamental, le pseudovecteur $\underset{2}{\varepsilon}^{\nu}$ est indéterminé.

---

(1) Par le choix du signe de la racine carrée de k_1, toute ambiguïté quant à l'orientation de $\underset{2}{\varepsilon}^{\nu}$ est exclue.

Si les trois pseudovecteurs $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$, $\underset{2}{\varepsilon}^\nu$, $\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu$ sont linéairement indépendants, ils définissent en chaque point de $\mathcal{C}$ un espace à trois dimensions. Nous voulons supposer — ce qu'il advient en général — qu'il soit possible d'y trouver un pseudovecteur unitaire $\underset{3}{\varepsilon}^\nu$ conjugué à $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$, $\underset{2}{\varepsilon}^\nu$, et, par conséquent, qu'on puisse mettre $\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu$ sous la forme ([1])

$$\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu = a_1\underset{1}{\varepsilon}^\nu + a_2\underset{2}{\varepsilon}^\nu + a_3\underset{3}{\varepsilon}^\nu \tag{19}$$

avec les coefficients a qui sont faciles à trouver. En appliquant le symbole $\mathcal{D}$ à (18), et en désignant par m_j le module du pseudovecteur unitaire $\underset{j}{\varepsilon}^\nu (j = 1, \ldots, 3)$, on trouve, en raison de (19), (13),

$$0 = \mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu}\underset{1}{\varepsilon}^\lambda\underset{2}{\varepsilon}^\mu = \alpha_{\lambda\mu}\underset{2}{\varepsilon}^\mu\mathcal{D}\underset{1}{\varepsilon}^\lambda + \alpha_{\lambda\mu}\underset{1}{\varepsilon}^\lambda\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\mu = k_1 m_2 + a_1 m_1,$$
$$0 = \mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu}\underset{2}{\varepsilon}^\lambda\underset{2}{\varepsilon}^\mu = 2\alpha_{\lambda\mu}\underset{2}{\varepsilon}^\lambda\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\mu = 2m_2 a_2,$$

et, par conséquent, l'équation (19) peut être mise sous la forme

$$\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu = -m_1 m_2 k_1\underset{1}{\varepsilon}^\nu + a_3\underset{3}{\varepsilon}^\nu \tag{19'}$$

([1]) Voici les cas différents qui pourraient se présenter en particulier : L'intersection du cône fondamental et de l'espace à trois dimensions, mentionné ci-dessus, est un cône :

1° Dégénéré (réel ou imaginaire);
2° Non dégénéré (réel).
3° Non dégénéré (imaginaire).

Dans le cas sub. 1°, les pseudovecteurs $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$, $\underset{2}{\varepsilon}^\nu$, $\underset{3}{\varepsilon}^\nu$ étant conjugués, $\underset{3}{\varepsilon}^\nu$ est un pseudovecteur fondamental $\underset{3}{\varepsilon}^\nu = \omega^\nu$. On aura à la place de (19) l'équation

$$\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu = a_1\underset{1}{\varepsilon}^\nu + \omega^\nu.$$

Dans le cas sub. 2°, les modules m_1, m_2 des pseudovecteurs $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$, $\underset{2}{\varepsilon}^\nu$ sont du signe égal ou opposé. Dans ce cas-ci, le pseudovecteur $\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu$ pourrait être fondamental, et l'on aurait

$$\mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu = a\left(\underset{1}{\varepsilon}^\nu + \underset{3}{\varepsilon}^\nu\right) \quad \text{ou} \quad \mathcal{D}\underset{2}{\varepsilon}^\nu = a'\left(\underset{1}{\varepsilon}^\nu - \underset{3}{\varepsilon}^\nu\right).$$

S'il n'en est pas ainsi, ou si les modules m_1, m_2 sont du même signe, ou enfin dans le cas sub. 3°, on retombe sur (19).

qui nous permet de calculer a_3. En effet, on trouve

$$\alpha_{\lambda\mu}\left(\mathfrak{D}\underset{2}{\varepsilon^{\lambda}}\right)\left(\mathfrak{D}\underset{2}{\varepsilon^{\mu}}\right)=k_1^2 m_1+a_3^2 m_3,$$

d'où

$$a_3=\pm\sqrt{\left[\alpha_{\lambda\mu}\left(\mathfrak{D}\underset{2}{\varepsilon^{\lambda}}\right)\left(\mathfrak{D}\underset{2}{\varepsilon^{\mu}}\right)-k_1^2 m_1\right]m_3}. \tag{20}$$

Si l'on prescrit *d'avance* l'orientation du $\underset{3}{\varepsilon^{\nu}}$, ce choix nous permet de fixer sans ambiguïté le signe de la racine carrée dans (20). Nous désignerons par k_2 le coefficient a_3 ainsi fixé, Or, l'équation (19)′ apparaît sous la forme

$$\mathfrak{D}\underset{2}{\varepsilon^{\nu}}=-m_1 m_2 k_1 \underset{1}{\varepsilon}+k_2\underset{3}{\varepsilon^{\nu}}.$$

Nous appellerons $\underset{3}{\varepsilon^{\nu}}$ le *deuxième pseudovecteur unitaire normal* et k_2 la *deuxième courbure* de $\mathcal{C}$.

Si $k_2\neq 0$, on peut poursuivre le même procédé plus loin, et l'on parvient à la notion du troisième, ..., $(j-1)^{\text{ième}}$, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$ pseudovecteur unitaire normal $\underset{4}{\varepsilon^{\nu}}$, ..., $\underset{j}{\varepsilon^{\nu}}$, ..., $\underset{n}{\varepsilon^{\nu}}$. En désignant par m_j le module du pseuvecteur $\underset{j}{\varepsilon^{\nu}}$ $(j=1, \ldots, n)$, on trouve les relations

$$\boxed{\mathfrak{D}\underset{j}{\varepsilon^{\nu}}=-m_{j-1}m_j k_{j-1}\underset{j-1}{\varepsilon^{\nu}}+k_j\underset{j+1}{\varepsilon^{\nu}}} \tag{21$_1$}$$
$$(j=1, \ldots, n;\ k_0=k_n=0),$$

où le scalaire k_j désigne la $j^{\text{ième}}$ courbure de $\mathcal{C}$ déterminée d'une manière analogue comme k_1 respectivement k_2. Nous n'insisterons pas sur le procédé qui nous conduit à cette formule en le supposant assez connu. Le lecteur intéressé en trouve d'ailleurs beaucoup d'exemples dans la littérature [1].

Analogiquement, comme dans le cas d'une connexion riemannienne,

---

(1) *Voir*, par exemple, STRUIK : *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung*, p. 76 (Berlin, 1922), où sont exposées les formules analogues pour le cas d'une connexion riemannienne, dont le tenseur métrique a l'indice d'inertie 0, ou bien EISENHART : *Riemanian geometry*, p. 106 (Princeton University Press, 1926), où l'indice d'inertie $\neq 0$. Dans son livre cité plus haut, M. Schouten a déduit les formules analogues pour W_n, dont le tenseur a l'indice d'inertie 0, en choisissant le facteur s d'une façon convenable. D'autre part, *voir* aussi HLAVATY, *Ein Beitrag zur Theorie der Weyl'schen « Ubertragung »* (Kon Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, XXXI, n° 8, p. 878–881).

nous appellerons les équations (21) *les formules de Frenet*. Dans ce qui suit, nous emploierons ces formules pour simplifier le système différentiel qui définit le déplacement parallèle le long d'une courbe donnée.

Remarque I. — En introduisant les pseudovecteurs unitaires covariants $\overset{j}{\varepsilon}_\lambda$,

$$\overset{j}{\varepsilon}_\lambda = \alpha_{\lambda\mu}\underset{j}{\varepsilon}^\mu \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

on déduit de (21), en raison de (13),

$$(21_2) \qquad \boxed{\mathcal{D}\overset{j}{\varepsilon}_\lambda = -m_{j-1}m_j k_{j-1}\overset{j-1}{\varepsilon}_\lambda + k_j\overset{j+1}{\varepsilon}_\lambda} \\ (j = 1, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0),$$

où, bien entendu, m_j désigne aussi le module de $\overset{j}{\varepsilon}_\lambda$:

$$m_j = \alpha_{\lambda\mu}\underset{j}{\varepsilon}^\lambda\underset{j}{\varepsilon}^\mu = \alpha_{\lambda\mu}\left(\alpha^{\lambda\alpha}\overset{j}{\varepsilon}_\alpha\right)\left(\alpha^{\mu\beta}\overset{j}{\varepsilon}_\beta\right) = \alpha^{\alpha\beta}\overset{j}{\varepsilon}_\alpha\overset{j}{\varepsilon}_\beta.$$

Remarque II. — Il faut mentionner que le procédé qui nous conduit à (21) est indépendant de la supposition que $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$ soit un pseudovecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$. Il s'ensuit que *les formules* (21_1) *resp.* (21_2), *sont valables même pour un champ* $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$, $\left(\overset{1}{\varepsilon}_\lambda\right)$ *donné le long de* $\mathcal{C}$ *qui n'est pas tangent à* $\mathcal{C}$. Dans ce qui suit, nous utiliserons ce fait bien important.

6. Les systèmes $\mathcal{D}\alpha^\nu = 0$, $\mathcal{D}b_\lambda = 0$.

Le système différentiel

$$(22_1) \qquad \mathcal{D}\alpha^\nu \equiv \frac{d\alpha^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}e^\mu\alpha^\lambda = 0,$$

respectivement

$$(22_2) \qquad \mathcal{D}\beta_\lambda \equiv \frac{d\beta_\lambda}{dt} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}e^\mu\beta_\nu = 0,$$

définit intrinsèquement un pseudovecteur α^ν respectivement β_λ, déplacé parallèlement à lui-même le long de $\mathcal{C}$ dans W_n. Il contient n^2 coefficients

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu}e^\mu.$$

Nous nous proposons de le simplifier, en le réduisant à un système qui n'a que $n-1$ coefficients. Si la courbe $\mathcal{C}$ ne satisfait pas les conditions précédentes [1], on peut choisir quand même un champ $\underset{1}{\varepsilon}^\nu$ le long de $\mathcal{C}$ qui les satisfait. En tout cas, on est toujours en état de construire n champs $\underset{j}{\varepsilon}^\nu$, $\overset{j}{\varepsilon}_\lambda$ $(j=1, \ldots, n)$ satisfaisant le système (21_1) resp. (21_2). Or, d'après le principe de M. Klein, le pseudovecteur α^ν resp. β_λ peut être écrit

$$(23) \qquad \alpha^\nu = \sum_1^n {}_i\, a^i \underset{i}{\varepsilon}^\nu, \qquad \beta_\lambda = \sum_1^n {}_i\, b_i \overset{i}{\varepsilon}_\lambda,$$

les scalaires a^i, b_i étant définis comme suit :

$$a^i = m_i \alpha^\nu \overset{i}{\varepsilon}_\nu, \qquad b_i = m_i \beta_\lambda \underset{i}{\varepsilon}^\lambda.$$

On en déduit, en raison de (22),

$$\varpi \alpha^\nu = \sum_1^n {}_i \left(\frac{da^i}{dt} \underset{i}{\varepsilon}^\nu + a^i \varpi \underset{i}{\varepsilon}^\nu \right) = 0,$$

$$\varpi \beta_\lambda = \sum_1^n {}_i \left(\frac{db_i}{dt} \overset{i}{\varepsilon}_\lambda + b_i \varpi \overset{i}{\varepsilon}_\lambda \right) = 0.$$

Or, si l'on tient compte de (21_1) resp. (21_2), on peut aussi écrire

$$\varpi \alpha^\nu = \sum_1^n {}_{l,i} \left(\frac{da^l}{dt} - m_{l-1} m_l k_{i-1} \delta^l_{i-1} a^i + k_i \delta^l_{i+1} a_i \right) \underset{l}{\varepsilon}^\nu = 0,$$

$$\varpi \beta_\lambda = \sum_1^n {}_{l,i} \left(\frac{db_l}{dt} - m_{i-1} m_i k_{i-1} \delta_l^{i-1} b_i + k_i \delta_l^{i+1} b_i \right) \overset{l}{\varepsilon}_\lambda = 0,$$

avec

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{» } i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

---

[1] Citons, par exemple, parmi les autres, le cas d'une courbe géodésique. Nous aurons plus tard l'occasion de l'étudier.

et ce système exige que soit

$$\boxed{\frac{da^l}{dt} = m_l m_{l+1} k_l a^{l+1} - k_{l-1} a^{l-1}} \tag{24_1}$$

$$\boxed{\frac{db_l}{dt} = m_l m_{l+1} k_l b_{l+1} - k_{l-1} b_{l-1}} \tag{24_2}$$

$$(l = 1, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0;\ m_l = \pm 1).$$

Le système (24) est équivalent à (22) et ne contient que $n - 1$ coefficients $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Si l'on désigne par a^l resp. b_l l'intégrale de (24), l'intégrale de (22) est donnée *sans ambiguïté par* (23).

Le résultat peut être généralisé aussi pour les systèmes

$$\mathcal{D} v^{\nu} = 0, \qquad \mathcal{D} w_{\lambda} = 0 \tag{25}$$

qui définissent le champ vectoriel v^{ν} resp. w_{λ} déplacé parallèlement à lui-même le long de $\mathcal{C}$. En effet, si v^{ν} resp. w_{λ} est l'intégrale de (25), il en est de même de v^{ν} const. resp. w_{λ} const. D'autre part, si φ est une pseudodensité scalaire *constante* du poids $1/n$ (1), les vecteurs

$$\underset{j}{e^{\nu}} = \underset{j}{\varepsilon^{\nu}}/\varphi, \qquad \overset{j}{e}_{\lambda} = \overset{j}{\varepsilon}_{\lambda}\varphi$$

satisfont aux équations

$$\boxed{\mathcal{D} \underset{j}{e^{\nu}} = - m_{j-1} m_j k_{j-1} \underset{j-1}{e^{\nu}} + k_j \underset{j+1}{e^{\nu}},} \tag{$21'_1$}$$

$$\boxed{\mathcal{D} \overset{j}{\varepsilon}_{\lambda} = - m_{j-1} m_j k_{j-1} \overset{j-1}{e}_{\lambda} + k_j \overset{j+1}{e}_{\lambda}.} \tag{$21'_2$}$$

Or, si l'on pose

$$v^{(i)} = v^{\nu} \overset{i}{e}_{\nu} m_i, \qquad w_{(i)} = w_{\lambda} \underset{i}{e^{\lambda}} m_i.$$

---

(1) Une telle pseudodensité est facile à construire. L'unique composante non nulle d'un n-vecteur covariant arbitraire est une densité du poids 1, et la $n^{\text{ième}}$ racine de sa valeur au point $t = t_0$ est une pseudodensité du poids $1/n$. *Quel que soit le n-vecteur choisi, les pseudodensités ainsi construites ne diffèrent que du facteur constant.* C'est ce qui résulte aussitôt du principe de M. Klein. (On en peut profiter pour construire une pseudodensité constante, dont la valeur *dans le système choisi* des coordonnées est égale à 1.) En résumé, si l'on ne tient compte que des notions données par le problème lui-même, les vecteurs $\underset{j}{e^{\nu}}$, $\overset{j}{e}_{\lambda}$ résultent définis *à un facteur constant près*.

les scalaires $v^{(i)}$ resp. $w_{(i)}$ définis *à un facteur constant près*, nous permettent d'écrire *sans aucune ambiguïté* pour v^ν, w_λ,

$$(26) \qquad v^\nu = \sum_{i=1}^{n} v^{(i)} e_i^\nu, \qquad w_\lambda = \sum_{i=1}^{n} w_{(i)} e_\lambda^i.$$

En employant la méthode exposée plus haut pour les pseudovecteurs, on réduit les systèmes (22) aux systèmes équivalents

$$(27_1) \qquad \boxed{\frac{dv^{(l)}}{dt} = m_l m_{l+1} k_l v^{(l+1)} - k_{l-1} v^{(l-1)}}$$

$$(27_2) \qquad \boxed{\frac{dw_{(l)}}{dt} = m_l m_{l+1} k_l w_{(l+1)} - k_{l-1} w_{(l-1)}}$$

$$(l = 1, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0;\ m_l = \pm 1),$$

où ne figurent que $n-1$ coefficients $k_1, \ldots, k_n$. En désignant par $v^{(l)}$, $w_{(l)}$ les intégrales de ce système, les intégrales de (25) sont définies *sans ambiguïté* par (26) ([1]).

Nous sommes donc parvenus à l'énoncé suivant :

Le système (25), *qui définit un vecteur déplacé parallèlement le long d'une courbe donnée dans* W_n, *peut être toujours réduit à un système plus simple* (27) *ne contenant que* $n-1$ *coefficients.*

7. Les corollaires.

Nous voulons indiquer ici deux corollaires du théorème énoncé plus haut. Le premier se comprend de lui-même et n'a pas besoin d'être démontré.

([1]) Chaque système linéaire différentiel qui admet une intégrale quadratique est susceptible de cette réduction. *Cf.*, par exemple, HLAVATÝ, *Sulla riduzione dei systemi ortogonali di equazioni differenziali lineari; Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali; Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito* (*Rendiconti Ac. Lincei*, séances des 4 et 18 septembre 1927).

Pour une réduction analogue du système différentiel, qui définit le parallélisme dans une connexion *non métrique*, voir HLAVATÝ, *Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connesionne lineare generale* (paraîtra dans *Rendiconti del Circolo di Palermo*).

Si les courbures k de la courbe $\mathcal{C}$ ou du champ donné $\underset{1}{\varepsilon^\nu}$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\ \varepsilon_\lambda\end{smallmatrix}\right)$ sont constantes, l'intégration du système (25) *s'effectue sans quadratures au moyen des opérations algébriques.*

Pour démontrer ce théorème, on n'aurait qu'à réduire le système (25) à la forme (27). Cela étant, le corollaire n'exprime qu'une des propriétés fondamentales du système différentiel linéaire (27).

Quant au second corollaire, on peut l'énoncer comme suit :

Si les premières $m - 1$ courbures $k_1, \ldots, k_{m-1}$ sont différentes de zéro, tandis que $k_m = 0$, le système (27) *peut être réduit à deux systèmes, le premier ayant $m - 1$ coefficients $k_1, \ldots, k_{m-1}$,*

$$\frac{dv^{(l)}}{dt} = m_a m_{a+1} k_a v^{(a+1)} - k_{a-1} v^{(a-1)}, \tag{$27'_1$}$$

$$\frac{dw_{(a)}}{dt} = m_a m_{a+1} k_a w_{(a+1)} - k_{a-1} w_{(a-1)} \tag{$27'_2$}$$

$$(a = 1, \ldots, m;\ k_0 = k_m = 0;\ m < n),$$

tandis que le second n'en a que $n - m - 1$, $l_{m+1}, \ldots, l_{n-1}$,

$$\frac{dv^{(f)}}{dt} = m_f m_{f+1} l_f v^{(f+1)} - l_{f-1} v^{(f-1)}, \tag{$27''_1$}$$

$$\frac{dw_{(f)}}{dt} = m_f m_{f+1} l_f w_{(f+1)} - l_{f-1} w_{(f-1)} \tag{$27''_1$}$$

$$(f = m + 1, \ldots, n;\ l_m = l_n = 0).$$

En effet, si k_m est la première des « courbures » $k_1, \ldots, k_m$ qui est nulle, le système (21) n'est valable que pour $l = 1, \ldots, m$ et $k_0 = k_m = 0$, et l'on obtient tout d'abord (27'). Dans ce cas, on peut choisir à volonté le long de $\mathcal{C}$ un pseudovecteur unitaire $\underset{m+1}{\varepsilon^\nu}$ conjugué aux pseudovecteurs $\underset{1}{\varepsilon^\nu}, \ldots, \underset{m}{\varepsilon^\nu}$,

$$\alpha_{\lambda\mu} \underset{a}{\varepsilon^\lambda} \underset{m+1}{\varepsilon^\mu} = 0 \qquad (a = 1, \ldots, m). \tag{28}$$

L'application de l'opérateur $\mathcal{D}$ à cette équation nous apprend que même $\mathcal{D}\underset{m+1}{\varepsilon^\nu}$ est conjugué au pseudovecteur $\underset{a}{\varepsilon^\lambda}$. En effet, on obtient, en raison de (21), (28) et (13),

$$\mathcal{D}\alpha_{\lambda\mu} \underset{a}{\varepsilon^\lambda} \underset{m+1}{\varepsilon^\mu} = \alpha_{\lambda\mu}\left[\left(-m_{a-1} m_a k_{a-1} \underset{a-1}{\varepsilon^\lambda} + k_a \underset{a+1}{\varepsilon^\lambda}\right) \underset{m+1}{\varepsilon^\mu} + \underset{a}{\varepsilon^\lambda} \mathcal{D} \underset{m+1}{\varepsilon^\mu}\right] = \alpha_{\lambda\mu} \underset{a}{\varepsilon^\lambda} \mathcal{D} \underset{m+1}{\varepsilon^\mu} = 0.$$

Cela nous permet d'appliquer la même méthode à $\underset{m+1}{\varepsilon^\nu}$ que nous venons d'employer pour $\underset{1}{\varepsilon^\nu}$. Celle-là nous conduit finalement au système

$$\begin{gathered}\varpi \underset{f}{\varepsilon^\nu} = - m_{f-1} m_f l_{f-1} \underset{f-1}{\varepsilon^\nu} + l_f \underset{f+1}{\varepsilon^\nu}\\ \varpi \overset{f}{\varepsilon_\lambda} = - m_{f-1} m_f l_{f-1} \overset{f-1}{\varepsilon_\lambda} + l_f \overset{f+1}{\varepsilon_\lambda}\\ (f = m+1, \ldots, n;\ l_m = l_n = 0).\end{gathered}$$

qui, à son tour, nous permet d'arriver à (27″).

Le théorème ainsi démontré, remarquons qu'il est surtout avantageux pour $m = 1$, $[n-1]$ ou $m = 2$, $[n-2]$. Dans le premier cas, le vecteur $\underset{1}{e^\nu}$, $\left[\underset{n}{e^\nu}\right]$, $\left(\overset{1}{e_\lambda}, \left[\overset{n}{e_\lambda}\right]\right)$ est l'intégrale particulière du système (25), car on a $k_1 = 0$, $[k_{n-1} = 0]$, et le système donné se réduit à un système d'ordre $n-1$.

Dans le deuxième cas, si, par exemple, $m = 2$, on trouve facilement deux intégrales particulières du système (25).

Si $m_1 m_2 = 1$, ces intégrales sont

$$\begin{aligned}\underset{1}{u^\nu} &= \underset{1}{e^\nu} \cos\int k_1\,dt - \underset{2}{e^\nu} \sin\int k_1\,dt, & \underset{2}{u^\nu} &= \underset{1}{e^\nu} \sin\int k_1\,dt + \underset{2}{e^\nu} \cos\int k_1\,dt,\\ \overset{1}{u_\lambda} &= \overset{1}{e_\lambda} \cos\int k_1\,dt - \overset{2}{e_\lambda} \sin\int k_1\,dt, & \overset{2}{u_\lambda} &= \overset{1}{e_\lambda} \sin\int k_1\,dt + \overset{2}{e_\lambda} \cos\int k_1\,dt,\end{aligned}$$

tandis que pour $m_1 m_2 = -1$, on trouve

$$\begin{aligned}\underset{1}{U^\nu} &= \underset{1}{e^\nu} \operatorname{Cos}\int k_1\,dt - \underset{2}{e^\nu} \operatorname{Sin}\int k_1\,dt, & \underset{2}{U^\nu} &= -\underset{1}{e^\nu} \operatorname{Sin}\int k_1\,dt + \underset{2}{e^\nu} \operatorname{Cos}\int k_1\,dt,\\ \overset{1}{U_\lambda} &= \overset{1}{e_\lambda} \operatorname{Cos}\int k_1\,dt + \overset{2}{e_\lambda} \operatorname{Sin}\int k_1\,dt, & \overset{2}{U_\lambda} &= -\overset{1}{e_\lambda} \operatorname{Sin}\int k_1\,dt + \overset{2}{e_\lambda} \operatorname{Cos}\int k_1\,dt.\end{aligned}$$

En tout cas, ces vecteurs unitaires sont conjugués entre eux et aux vecteurs $\underset{3}{e^\nu}, \ldots, \underset{n}{e^\nu}$. Or, si on les prend pour $\underset{1}{e^\nu}$, $\underset{2}{e^\nu}$, on obtient

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = \frac{dv^{(2)}}{dt} = 0, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{dw_{(1)}}{dt} = \frac{dw_{(2)}}{dt} = 0.$$

et le système (25) se simplifie en un système d'ordre $n-2$,

$$\frac{dv^{(f)}}{dt} = m_f m_{f+1} l_f v^{(f+1)} - l_{f-1} v^{(f-1)}.$$

resp.

$$\frac{dw_{(f)}}{dt} = m_f m_{f+1} l_f w_{(f+1)} - l_{f-1} w_{(f-1)}$$
$$(f = 3, \ldots, n;\ l_2 = l_n = 0).$$

II. — APPLICATION A LA CONNEXION RELATIVISTIQUE.

Nous voulons employer ici la méthode que nous venons d'exposer pour intégrer le système différentiel dont l'intégrale générale est un vecteur déplacé parallèlement le long d'un rayon de lumière dans la connexion relativistique. Le problème lui-même nous permettant certaines simplifications, nous ne ferons usage que de la méthode exposée sans avoir recours aux résultats précédemment obtenus.

Avant tout, il nous faut exposer quelques théorèmes algébriques se rattachant à $\alpha_{\lambda\mu}$ dans W_4 relativistiques.

8. Théorèmes auxiliaires.

Dans W_4 relativistique, l'indice d'inertie de $\alpha_{\lambda\mu}$ est égal à 1. Cela nous permet de démontrer facilement les théorèmes algébriques suivants dont nous aurons besoin plus tard :

I. *Si trois pseudovecteurs linéairement indépendants* $\underset{1}{\alpha}^\nu$, $\underset{2}{\alpha}^\nu$, $\underset{3}{\alpha}^\nu$, *qui ne sont pas fondamentaux, sont conjugués à un pseudovecteur fondamental* ω^ν, *celui-ci est toujours combinaison linéaire de* $\underset{1}{\alpha}^\nu$, $\underset{2}{\alpha}^\nu$, $\underset{3}{\alpha}^\nu$.

II. *Les trois pseudovecteurs* $\underset{1}{\alpha}^\nu$, $\underset{2}{\alpha}^\nu$, $\underset{3}{\alpha}^\nu$ *ne peuvent pas être conjugués tous les trois entre eux.*

III. *Les modules des pseudovecteurs conjugués à* ω^ν *ont le même signe.*

La démonstration de ces théorèmes est très facile. Étant donné le pseudovecteur fondamental ω^ν, on peut trouver les pseudovecteurs α^ν en résolvant les systèmes

$$(29) \qquad \alpha_{\lambda\mu} \underset{i}{\alpha}^\lambda \omega^\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les pseudovecteurs $\underset{i}{\alpha}^\nu$ trouvés, désignons par a_{ik} les scalaires

$$a_{ik} = a_{ki} = \alpha_{\lambda\mu} \underset{i}{\alpha}^\lambda \underset{k}{\alpha}^\mu$$

et posons

$$(30) \qquad \omega^\nu = b_1 \underset{1}{\alpha}^\nu + b_2 \underset{2}{\alpha}^\nu + b_3 \underset{3}{\alpha}^\nu.$$

Pour démontrer le premier théorème, il suffit de prouver qu'on puisse trouver les coefficients b_1, b_2, b_3 dont deux au moins sont $\neq 0$. En tenant compte de (29), on déduit de (30) le système

$$\begin{aligned} 0 &= b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13}, \\ 0 &= b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23}, \\ 0 &= b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33}, \end{aligned}$$

dont la solution est $\neq 0$, si son déterminant $\| a_{ik} \|$ est

$$(31) \qquad \| a_{ik} \| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Cette équation est satisfaite pour n'importe quel système $\underset{1}{\alpha}^\nu$, $\underset{2}{\alpha}^\nu$, $\underset{3}{\alpha}^\nu$ des pseudovecteurs (linéairement indépendants, non fondamentaux) tiré de (29), car le premier membre de l'équation

$$\sum_{i,k}^{3} h_i h_k a_{ik} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

(dont la solution $h_1 : h_2 : h_3$ nous mène aux vecteurs fondamentaux de l'espace à trois dimensions des pseudovecteurs $\underset{1}{\alpha}^\nu$, $\underset{2}{\alpha}^\nu$, $\underset{3}{\alpha}^\nu$) est forcément une forme quadratique dégénérée. Il s'ensuit qu'on peut toujours trouver les coefficients $b_1 : b_2 : b_3$. Remarquons encore que d'après la convention sur les α^ν on doit avoir

$$(31') \qquad a_{ii} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Le premier théorème étant ainsi démontré, remarquons qu'en raison de (31′), tous les coefficients $a_{ik} (i \neq k)$ ne peuvent pas être nuls si (31) doit être satisfaite. Autrement dit, les trois pseudovecteurs $\underset{i}{\alpha}^\nu$ ne peuvent pas être conjugués tous les trois entre eux, ce qui prouve que le deuxième théorème est vrai à son tour.

Pour démontrer le troisième théorème, choisissons d'abord deux pseudovecteurs $\underset{1}{\beta}^{\nu}$, $\underset{2}{\beta}^{\nu}$ conjugués entre eux et à ω^{ν} et deux pseudovecteurs $\underset{3}{\beta}^{\nu}$, $\underset{4}{\beta}^{\nu}$ conjugués entre eux et à $\underset{1}{\beta}^{\nu}$, $\underset{2}{\beta}^{\nu}$. Ces quatre pseudovecteurs étant linéairement indépendants, on peut exprimer ω^{ν} en combinaison réelle linéaire de $\underset{1}{\beta}^{\nu}, \ldots, \underset{4}{\beta}^{\nu}$,

$$\omega^{\nu} = a_1 \underset{1}{\beta}^{\nu} + a_2 \underset{2}{\beta}^{\nu} + a_3 \underset{3}{\beta}^{\nu} + a_4 \underset{4}{\beta}^{\nu}.$$

En raison du choix spécial des pseudovecteurs β^{ν}, on prouve sans difficulté $a_1 = a_2 = 0$, et, par conséquent,

$$\omega^{\nu} = a_3 \underset{3}{\beta}^{\nu} + a_4 \underset{4}{\beta}^{\nu}.$$

Parce que ω^{ν} est un pseudovecteur fondamental et $\underset{3}{\beta}^{\nu}$, $\underset{3}{\beta}^{\nu}$ sont conjugués entre eux, on doit avoir

$$0 = \left(a_3^2 \underset{3}{\beta}^{\lambda} \underset{3}{\beta}^{\mu} + \alpha_4^2 \underset{4}{\beta}^{\lambda} \underset{4}{\beta}^{\mu}\right) \alpha_{\lambda\mu},$$

ce qui montre que les modules $a_{\lambda\mu} \underset{3}{\beta}^{\lambda} \underset{3}{\beta}^{\mu}$, $\alpha_{\lambda\mu} \underset{4}{\beta}^{\lambda} \underset{4}{\beta}^{\mu}$ doivent avoir les signes opposés. Or, le pseudotenseur $\alpha_{\lambda\mu}$ ayant l'indice d'inertie 1, les pseudovecteurs $\underset{1}{\beta}^{\nu}$, $\underset{2}{\beta}^{\nu}$ ont forcément les modules de même signe, et, par conséquent, chaque pseudovecteur, qui — étant conjugué à ω^{ν} — est forcément, d'après le théorème I, une combinaison linéaire de $\underset{1}{\beta}^{\nu}$, $\underset{2}{\beta}^{\nu}$, ω^{ν}, jouit de la propriété que son module a le même signe que les modules des pseudovecteurs $\underset{1}{\beta}^{\nu}$, $\underset{2}{\beta}^{\nu}$.

Le troisième théorème est ainsi démontré à son tour.

9. L'intégration du système $\mathfrak{D}\xi^{\nu} = 0$.

1. *Le rayon de lumière.* — Si la courbe $\mathcal{C}$ réalise le trajet d'un rayon de lumière, ses coordonnées $x^{\nu}(t)$ satisfont aux équations

$$\frac{d^2 x^{\nu}}{dt^2} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \frac{dx^{\lambda}}{dt} \frac{dx^{\mu}}{dt} = p(t) \frac{dx^{\nu}}{dt}, \tag{32}$$

$$\alpha_{\lambda\mu} \frac{dx^{\lambda}}{dt} \frac{dx^{\mu}}{dt} = 0, \tag{33}$$

p étant une fonction arbitraire.

En introduisant le paramètre auxiliaire

$$\Sigma = \rho \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} p''} dt \tag{34}$$

où ρ est une pseudodensité scalaire *constante* du poids $-1/4$, les expressions $\frac{dx^\nu}{d\Sigma}$ sont les composantes du pseudovecteur tangent

$$\omega^\nu = \frac{dx^\nu}{d\Sigma}$$

qui, en raison de (33), est un pseudovecteur fondamental. Dans ce cas, le système (32) devient équivalent au système

$$\varpi\omega^\nu \equiv \frac{d}{dt}\omega^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\omega^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} = 0, \tag{35}$$

et ω^ν est une intégrale particulière du système

$$\varpi\xi^\nu = 0 \tag{36}$$

qui définit le pseudovecteur ξ^ν transporté par parallélisme le long du rayon de lumière.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'intégrer ce système que nous écrirons simplement

$$\varpi\vec{\xi} = 0, \tag{36}$$

en convenant dorénavant de désigner plus brièvement par $\vec{\xi}$ un pseudovecteur aux composantes ξ^ν.

2. *Intégrales particulières* $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$. — Pour résoudre le système (36), il suffit d'en trouver quatre intégrales particulières. C'est ce que nous ferons dans les lignes qui suivent.

Pour tirer quelques avantages de la nouvelle notation, désignons par $\vec{\xi}.\vec{\zeta}$ la forme $\alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\zeta^\mu$,

$$\alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\zeta^\mu = \vec{\xi}.\vec{\zeta}.$$

L'application de l'opérateur ϖ à cette équation nous donne

$$\begin{aligned}\varpi\alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\zeta^\mu &= \alpha_{\lambda\mu}(\varpi\xi^\lambda)\zeta^\mu + \alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda\varpi\zeta^\mu \\ &= (\varpi\vec{\xi}).\vec{\zeta} + \vec{\xi}.\varpi\vec{\zeta} = \varpi\vec{\xi}.\vec{\zeta}\end{aligned}$$

et cette formule prescrit la règle d'application de ϖ à $\vec{\xi}.\vec{\zeta}$. Si, en particulier, $\vec{\xi}.\vec{\zeta} = \text{const.}$, on obtient

$$(\varpi\vec{\xi}).\vec{\zeta} = -(\varpi\vec{\zeta}).\vec{\xi} \tag{37}$$

et si, de plus, $\vec{\zeta} = \vec{\omega}$, cette formule donne, en raison de (35),

$$(\varpi\vec{\xi}).\vec{\omega} = 0. \tag{38}$$

Cela posé, choisissons tout d'abord un pseudovecteur unitaire $\vec{\lambda}_1$ conjugué à $\vec{\omega}$,

$$\vec{\lambda}_1.\vec{\lambda}_1 = \pm 1, \qquad \vec{\lambda}_1.\vec{\omega} = 0. \tag{39}$$

Il s'ensuit, d'après (35), que $\varpi\vec{\lambda}_1$ est un pseudovecteur conjugué à $\vec{\omega}$ et à $\vec{\lambda}_1$. En général, le choix arbitraire de $\vec{\lambda}_1$ ne nous donne pas $\varpi\vec{\lambda}_1$ comme pseudovecteur fondamental. Or, on peut écrire

$$\varpi\vec{\lambda}_1 = k\vec{\lambda}_2 \qquad \left(k = \sqrt{\varpi\vec{\lambda}_1.\varpi\vec{\lambda}_1 \operatorname{sign} \varpi\vec{\lambda}_1.\varpi\vec{\lambda}_1}\right) \tag{40}$$

où $\vec{\lambda}_2$ est un pseudovecteur unitaire conjugué à $\vec{\lambda}_1$, dont l'orientation est fixée par le signe de la racine carrée k. Le pseudovecteur $\vec{\lambda}_2$ est donc défini sans ambiguïté toutes les fois que l'on a $k \neq 0$, ce qui advient en général ([1]), et l'on peut calculer le pseudovecteur $\varpi\vec{\lambda}_2$ en tenant compte de l'équation

$$\vec{\lambda}_2.\vec{\omega} = 0,$$

qui est la conséquence de (39) et de (35). L'application de l'opérateur ϖ à cette équation nous apprend qu'en raison de (38), le pseudovecteur $\varpi\vec{\lambda}_2$ est conjugué à $\vec{\omega}$. Or, les pseudo-vecteur $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$, $\varpi\vec{\lambda}_2$

([1]) Si, par hasard, $k = 0$ sans que $\varpi\vec{\lambda}_1$ soit un vecteur fondamental, on aurait déjà deux intégrales particulières du système (36), c'est-à-dire $\vec{\omega}$ et $\vec{\lambda}_1$.

étant conjugués à $\overleftarrow{\omega}$, ce dernier est la combinaison linéaire de ceux-là (*voir* le premier théorème auxiliaire)

$$\overrightarrow{\omega} = p_1 \overrightarrow{\lambda}_1 + p_2 \overrightarrow{\lambda}_2 + p_3 \varpi \overrightarrow{\lambda}_2, \tag{41}$$

avec les coefficients scalaires p_1, p_2, p_3 faciles à trouver. D'après le troisième théorème auxiliaire, les pseudovecteurs unitaires $\overrightarrow{\lambda}_1$, $\overrightarrow{\lambda}_2$ ont le même module que nous désignerons par $m(=\pm 1)$. Or, on déduit de (41), en raison de (39) et (40),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\omega}.\overrightarrow{\lambda}_1 = 0 = p_1 m + p_3 \overrightarrow{\lambda}_1.\varpi\overrightarrow{\lambda}_2 &= p_1 m - p_3 \overrightarrow{\lambda}_2.\varpi\overrightarrow{\lambda}_1 \\ &= m(p_1 - p_3 k).\end{aligned}$$

D'autre part, le pseudovecteur $\varpi\overrightarrow{\lambda}_2$ étant conjugué au vecteur unitaire $\overrightarrow{\lambda}_2$, on trouve

$$\overrightarrow{\omega}.\overrightarrow{\lambda}_2 = 0 = p_2 m + p_3 \overrightarrow{\lambda}_2.\varpi\overrightarrow{\lambda}_2 = p_2 m$$

et, par conséquent, l'équation (41) peut s'écrire

$$\overrightarrow{\omega} = p_3\left(k\overrightarrow{\lambda}_1 + \varpi\overrightarrow{\lambda}_2\right). \tag{41'}$$

Les pseudovecteurs $\overrightarrow{\lambda}_1$, $\varpi\overrightarrow{\lambda}_2$, $\overrightarrow{\omega}$ étant connus, cette équation nous permet de calculer le facteur de proportionnalité p_3. Une au moins des composantes ω^ν de $\overrightarrow{\omega}$ est différente de zéro, d'où il suit que $p_3 \neq 0$. En désignant par h sa valeur réciproque ainsi calculée, on peut écrire pour (41)

$$\varpi\overrightarrow{\lambda}_2 = -k\overrightarrow{\lambda}_1 + h\overrightarrow{\omega}. \tag{42}$$

Les équations (40) et (42) constituent un système clos. Nous entendons par cela que la dérivée $\varpi\overrightarrow{\eta}$ d'un pseudovecteur $\overrightarrow{\eta}$, qui est combinaison linéaire de $\overrightarrow{\lambda}_1$, $\overrightarrow{\lambda}_2$, $\overrightarrow{\omega}$, est à son tour combinaison linéaire des mêmes pseudovecteurs. On en peut profiter pour trouver deux intégrales particulières du système (36).

Quel que soit le choix des fonctions a, r, u, les pseudovecteurs unitaires

$$\vec{\eta}_1 = \vec{\lambda}_1 \cos a + \vec{\lambda}_2 \sin a + r\vec{\omega},$$
$$\vec{\eta}_2 = \vec{\lambda}_1 \sin a - \vec{\lambda}_2 \cos a + u\vec{\omega}$$

sont conjugués entre eux. En tenant compte de (40), (42) et de (35), on déduit, pour leurs dérivés,

$$\varpi\vec{\eta}_1 = \left(\frac{da}{dt} + k\right)\left(-\vec{\lambda}_1 \sin a + \vec{\lambda}_2 \cos a\right) + \vec{\omega}\left(\frac{dr}{dt} + h \sin a\right),$$
$$\varpi\vec{\eta}_2 = \left(\frac{da}{dt} + k\right)\left(\vec{\lambda}_1 \cos a + \vec{\lambda}_2 \sin a\right) + \vec{\omega}\left(\frac{du}{dt} - h \cos a\right),$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$a = -\int k\,dt,$$
$$r = -\int h \sin a\,dt = \int h\left[\sin \int k\,dt\right] dt,$$
$$u = \int h \cos a\,dt = \int h\left[\cos \int k\,dt\right] dt,$$

les pseudovecteurs unitaires conjugués

$$(43)\qquad \begin{cases} \vec{\eta}_1 = \vec{\lambda}_1 \cos \int k\,dt - \vec{\lambda}_2 \sin \int k\,dt + \vec{\omega}\int h\left[\sin \int k\,dt\right] dt, \\ \vec{\eta}_2 = -\vec{\lambda}_1 \sin \int k\,dt - \vec{\lambda}_2 \cos \int k\,dt + \vec{\omega}\int h\left[\cos \int k\,dt\right] dt \end{cases}$$

sont deux intégrales particulières du système (36). On peut s'en servir pour trouver deux autres intégrales particulières.

3. *Deux intégrales partculières* $\vec{\eta}_3$, $\vec{\eta}_4$. — Choisissons maintenant deux pseudovecteurs $\vec{\lambda}_3$, $\vec{\lambda}_4$, qui, étant conjugués entre eux, sont conjugués aux pseudovecteurs conjugués $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$,

$$(44)\qquad \vec{\lambda}_3 . \vec{\lambda}_4 = 0, \qquad \vec{\lambda}_f . \vec{\eta}_a = 0 \qquad (f = 3, 4;\ a = 1, 2).$$

L'application de l'opérateur ϖ à la deuxième de ces équations nous apprend qu'en raison de (43), le pseudovecteur $\varpi\underset{f}{\vec{\lambda}}$ est conjugué à $\underset{a}{\vec{\eta}}$,

$$\underset{a}{\vec{\eta}}.\varpi\underset{f}{\vec{\lambda}}=0 \qquad (a=1,2;\ f=3,4). \tag{45}$$

En tout cas, $\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}$ peut être écrit en combinaison linéaire de $\underset{1}{\vec{\eta}}, \underset{2}{\vec{\eta}}, \underset{3}{\vec{\lambda}}, \underset{4}{\vec{\lambda}}$,

$$\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}=q_1\underset{1}{\vec{\eta}}+q_2\underset{2}{\vec{\eta}}+q_3\underset{3}{\vec{\lambda}}+q_4\underset{4}{\vec{\lambda}}, \tag{46}$$

d'où l'on déduit facilement, à cause de (44), (45),

$$q_1=q_2=0.$$

En désignant par $\underset{3}{\vec{\lambda}}$ le pseudovecteur unitaire, dont le module est m,

$$\underset{3}{\vec{\lambda}}.\underset{3}{\vec{\lambda}}=m, \qquad \underset{4}{\vec{\lambda}}.\underset{4}{\vec{\lambda}}=-m, \tag{44'}$$

on obtient de cette équation, en raison de (46),

$$\left(\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}\right).\underset{3}{\vec{\lambda}}=0=mq_3,$$

ainsi que l'on a

$$\left(\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}\right).\left(\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}\right)=-m(q_4)^2.$$

Le pseudovecteur $\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}$ étant connu, il en est de même de $(q_4)^2$.

Le choix du signe de la racine carrée $K=\sqrt{-m(q_4)^2}$ fixe à son tour le sens du pseudovecteur $\underset{4}{\vec{\lambda}}$, et l'on peut écrire, pour (46),

$$\varpi\underset{3}{\vec{\lambda}}=K\underset{4}{\vec{\lambda}}. \tag{47}$$

Analogiquement, on peut déduire que l'unique composante non nulle de $\varpi\underset{4}{\vec{\lambda}}$ est dans la direction de $\underset{3}{\vec{\lambda}}$,

$$\varpi\underset{4}{\vec{\lambda}}=\underset{3}{\vec{\lambda}}g, \tag{48}$$

et pour calculer g, il suffit de tenir compte de (44), (44') et de (47), d'où il suit

$$\left(\varpi\vec{\lambda}_3\right).\vec{\lambda}_4 = -\left(\varpi\vec{\lambda}_4\right).\vec{\lambda}_3 = -gm = -m\mathrm{K}$$

et, par conséquent, (48) peut être écrite

$$\varpi\vec{\lambda}_4 = \mathrm{K}\vec{\lambda}_3. \tag{49}$$

Le système des équations (48) et (49) est un système clos, ce qui nous permet de trouver deux autres intégrales particulières de (36). En appliquant un procédé analogue à celui que nous venons d'exposer pour $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$, on trouve que les pseudovecteurs unitaires conjugués

$$\left\{\begin{aligned} \vec{\eta}_3 &= \quad \vec{\lambda}_3 \operatorname{Cos}\int \mathrm{K}\,dt - \vec{\lambda}_4 \operatorname{Sin}\int \mathrm{K}\,dt, \\ \vec{\eta}_4 &= -\vec{\lambda}_3 \operatorname{Sin}\int \mathrm{K}\,dt + \vec{\lambda}_4 \operatorname{Cos}\int \mathrm{K}\,dt \end{aligned}\right. \tag{50}$$

sont deux autres intégrales particulières de (36).

4. *L'intégrale particulière* $\vec{\omega}$. — Les pseudovecteurs $\vec{\lambda}_3$, $\vec{\lambda}_4$, étant conjugués à $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$, le pseudovecteur $\vec{\omega}$, qui est conjugué à son tour à $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$, doit être combinaison linéaire de $\vec{\lambda}_3$, $\vec{\lambda}_4$,

$$\vec{\omega} = r_1\vec{\lambda}_3 + r_2\vec{\lambda}_4.$$

Pour trouver les coefficients r, appliquons l'opérateur ϖ à cette équation. En tenant compte de (47) et de (49), on trouve facilement

$$0 = \vec{\lambda}_3\left(\frac{dr_1}{dt} + \mathrm{K}r_2\right) + \vec{\lambda}_4\left(\frac{dr_2}{dt} + \mathrm{K}r_1\right)$$

et cette équation exige

$$\frac{dr_1}{dt} = -\mathrm{K}r_2; \qquad \frac{dr_2}{dt} = -\mathrm{K}r_1.$$

L'intégrale générale de ce système est

$$\begin{aligned} r_1 &= \quad c_1\, e^{\int \mathrm{K}\,dt} + c_2\, e^{-\int \mathrm{K}\,dt} \\ r_2 &= -c_1\, e^{\int \mathrm{K}\,dt} + c_2\, e^{-\int \mathrm{K}\,dt} \end{aligned} \qquad (c = \text{const.}).$$

ainsi que l'on a

$$(51)\qquad \vec{\omega}=\underset{3}{\vec{\lambda}}\left(c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right)+\underset{4}{\vec{\lambda}}\left(-c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right).$$

Le pseudovecteur $\vec{\omega}$ étant fondamental, on doit avoir

$$\vec{\omega}.\vec{\omega}=4mc_1c_2=0,$$

d'où il suit que l'une ou l'autre des deux constantes doit être nulle. On obtient ainsi deux pseudovecteurs fondamentaux :

$$(52)\qquad c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}\left(\underset{3}{\vec{\lambda}}-\underset{4}{\vec{\lambda}}\right),\qquad c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\left(\underset{3}{\vec{\lambda}}+\underset{4}{\vec{\lambda}}\right),$$

dont *l'un seulement* est le pseudovecteur tangent $\vec{\omega}$ du rayon de lumière donné. Le scalaire $e^{-\int \mathrm{K}\,dt}$, ainsi que les pseudovecteurs $\underset{3}{\vec{\lambda}}$, $\underset{4}{\vec{\lambda}}$ étant connus, il n'y a aucune difficulté à choisir entre (52) le pseudovecteur $\vec{\omega}$ et de fixer la constante correspondante. Dans ce qui suit, nous écrirons $\vec{\omega}$ dans la forme générale (51) en supposant que l'on ait déjà fait le calcul des constantes.

5. *L'intégrale générale.* — Nous sommes ainsi parvenus aux quatre intégrales particulières $\underset{1}{\vec{\eta}}, \ldots, \underset{4}{\vec{\eta}}$, exprimées au moyen des pseudovecteurs $\underset{1}{\vec{\lambda}}, \ldots, \underset{4}{\vec{\lambda}}$. En effet, si l'on tient compte de (43) et de (50), (51), on trouve

$$(53)\quad\left\{\begin{aligned}
\underset{1}{\vec{\eta}}&=\underset{1}{\vec{\lambda}}\cos\int k\,dt-\underset{2}{\vec{\lambda}}\sin\int k\,dt+\left\{\underset{3}{\vec{\lambda}}\left(c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right)+\underset{4}{\vec{\lambda}}\left(-c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right)\right\}\int h\left[\sin\int k\,dt\right]dt,\\
\underset{2}{\vec{\eta}}&=-\underset{1}{\vec{\lambda}}\sin\int k\,dt-\underset{2}{\vec{\lambda}}\cos\int k\,dt+\left\{\underset{3}{\vec{\lambda}}\left(c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right)+\underset{4}{\vec{\lambda}}\left(-c_1 e^{\int \mathrm{K}\,dt}+c_2 e^{-\int \mathrm{K}\,dt}\right)\right\}\int h\left[\cos\int k\,dt\right]dt,\\
\underset{3}{\vec{\eta}}&=\underset{3}{\vec{\lambda}}\operatorname{Cos}\int \mathrm{K}\,dt-\underset{4}{\vec{\lambda}}\operatorname{Sin}\int \mathrm{K}\,dt,\\
\underset{4}{\vec{\eta}}&=-\underset{3}{\vec{\lambda}}\operatorname{Sin}\int \mathrm{K}\,dt+\underset{4}{\vec{\lambda}}\operatorname{Cos}\int \mathrm{K}\,dt.
\end{aligned}\right.$$

Ces intégrales sont linéairement indépendantes, car elles sont conjuguées entre elles. Il s'ensuit que l'intégrale générale peut être écrite comme combinaison linéaire de $\vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_4$,

$$\vec{\xi} = C_1 \vec{\eta}_1 + C_2 \vec{\eta}_2 + C_3 \vec{\eta}_3 + C_4 \vec{\eta}_4 \qquad (C = \text{const.})$$

ou bien, en tenant compte de (53),

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\xi} = {} & \vec{\lambda}_1\left(C_1 \cos\int k\,dt - C_2 \sin\int k\,dt\right) \\ & - \vec{\lambda}_2\left(C_1 \sin\int k\,dt + C_2 \cos\int k\,dt\right) \\ & + \vec{\lambda}_3\left(C_3 \operatorname{Cos}\int K\,dt - C_4 \operatorname{Sin}\int K\,dt\right) \\ & \vec{\lambda}_4\left(- C_3 \operatorname{Sin}\int K\,dt + C_4 \operatorname{Cos}\int K\,dt\right) \\ & + c_1 e^{\int K\,dt} \left(\vec{\lambda}_3 - \vec{\lambda}_4\right)\int h\left[C_1 \sin\int k\,dt + C_2 \cos\int k\,dt\right] dt \\ & + c_2 e^{-\int K\,dt} \left(\vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_4\right)\int h\left[C_1 \sin\int k\,dt + C_2 \cos\int k\,dt\right] dt. \end{aligned}} \tag{54}$$

Le système (36) ainsi résolu, nous pouvons en déduire l'intégrale générale du système $\mathcal{D}\vec{v} = 0$.

10. L'intégrale du système $\mathcal{D}\vec{v} = 0$.

La pseudodensité ρ du poids $-1/4$ qui figure dans (34) étant constante, le vecteur contrevariant fondamental

$$\vec{w} = \vec{\omega}\rho,$$

indépendant de la constante ρ, est l'intégrale du système déduit de (35),

$$\mathcal{D}\vec{w} = 0,$$

tandis que le vecteur contrevariant

$$\vec{v} = \vec{\xi}\rho \tag{55}$$

est l'intégrale du système, déduit de (36),

$$(56) \qquad \mathcal{D}\vec{v} = 0.$$

Le vecteur fondamental $\vec{w}$, dont les composantes sont

$$w^\nu = \frac{dx^\nu}{dt} e^{-\int p\, dt},$$

étant connu, il représente une intégrale particulière du système (56), et, par conséquent, si l'on substitue dans (55) le symbole $\vec{\xi}$ tiré de (54), on parvient à l'intégrale générale du système (56). En introduisant les vecteurs

$$\vec{l}_j = \vec{\lambda}_j \rho \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

et les constantes c, a, C, A,

$$\mathrm{C}_1 = c \cos a, \qquad \mathrm{C}_2 = c \sin a,$$
$$\mathrm{C}_3 = \mathrm{C} \operatorname{Cos} \mathrm{A}, \qquad \mathrm{C}_4 = -\mathrm{C} \operatorname{Sin} \mathrm{A},$$

l'intégrale générale du système (56) peut donc s'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} = {} & c\left[\vec{l}_1 \cos\left(a + \int k\, dt\right) - \vec{l}_2 \sin\left(a + \int k\, dt\right)\right] \\ & + \mathrm{C}\left[\vec{l}_3 \operatorname{Cos}\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{K}\, dt\right) - \vec{l}_4 \operatorname{Sin}\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{K}\, dt\right)\right] \\ & + c\left\{\vec{l}_3\left(c_1 e^{\int \mathrm{K}\, dt} + c_2 e^{-\int \mathrm{K}\, dt}\right) + \vec{l}_4\left(-c_1 e^{\int \mathrm{K}\, dt} + c_2 e^{-\int \mathrm{K}\, dt}\right)\right\} \int h\left[\sin\left(a + \int k\, dt\right)\right] \end{aligned}}$$

On a donc le théorème suivant :

L'intégrale générale (57) *du système* (56), *qui définit le vecteur contrevariant déplacé parallèlement le long du rayon de lumière donné dans l'espace général de la relativité, s'obtient par trois quadratures. Les constantes* a, A, c, C *sont arbitraires, tandis que l'une des constantes* c_1, c_2 *est nulle et l'autre déterminée par le fait que l'un des vecteurs*

$$c_1 e^{\int \mathrm{K}\, dt}\left(\vec{l}_3 - \vec{l}_4\right), \qquad c_2 e^{-\int \mathrm{K}\, dt}\left(\vec{l}_3 + \vec{l}_4\right)$$

est identique au vecteur $\vec{w}$, dont les composantes sont

$$w^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dt} e^{-\int p\, dt}.$$

Remarque. — Quant à l'intégration du système de parallélisme *dans le cas général*, on peut se servir du procédé analogue à celui de Cauchy pour trouver la solution formelle du système linéaire

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j}^{n} {}_{1} r_{kj} z_j \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

C'est ce qu'a fait M. Dienes qui en a déduit beaucoup de résultats intéressants (¹).

D'autre part, M. Godeaux (²) a intégré le système en question pour une variété riemannienne S_4 à courbure constante R, dont la métrique est définie par

$$ds^2 = -(dx_1)^2 - \mathrm{K}^2 \sin^2\left(\frac{x_1}{\mathrm{R}}\right)[(dx_2)^2 + \sin^2 x_2 (dx_3)^2] + c^2 (dx_4)^2.$$

(¹) P. Dienes, *Sur l'intégration des équations du déplacement parallèle de M. Levi-Civita* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XLVII, 1623, p. 144-152).

(²) L. Godeaux, *L'Univers d'Einstein et la métrique cayleyenne elliptique* (*Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique*, 5ᵉ série, 1924, p. 429-433).