

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales dans le cas où, le degré du faisceau étant n , celui du faisceau dérivé est $n + 1$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 45 (1928), p. 189-253

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1928_3_45_189_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTÉGRATION
DES
FAISCEAUX DE TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES

DANS LE CAS OU, LE DEGRÉ DU FAISCEAU ÉTANT n ,
CELUI DU FAISCEAU DÉRIVÉ EST $n + 1$

PAR M. E. VESSIOT

Introduction et résumé.

1. J'ai donné en 1924 (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 52, p. 336-395) (1) une théorie générale nouvelle des problèmes d'intégration, fondée sur la considération des faisceaux de transformations infinitésimales.

Un tel *faisceau* F est constitué par toutes les transformations

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n,$$

où les X_i sont des transformations données

$$X_i = \sum_{k=1}^m \xi_{i,k}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et où les λ_i sont des fonctions arbitraires des variables x_1, \dots, x_m . Les X_i , supposées *divergentes* (c'est-à-dire formes linéaires indépendantes relativement aux $\frac{\partial f}{\partial x_k}$) constituent une *base* du faisceau; leur nombre n ($n \leq m$) est le *degré* du faisceau. Deux transformations du faisceau, Xf et Yf , sont dites *en involution* si leur crochet de Jacobi

(1) Dans les notes qui renverront à ce Mémoire, nous le désignerons, pour abrégé, par la lettre M.

(Xf, Yf) fait partie du faisceau. Le faisceau est dit *complet* si toutes ses transformations sont, deux à deux, en involution. En égalant à zéro les transformations de base d'un faisceau complet, on obtient un *système complet* (au sens de Clebsch); un système fondamental d'intégrales de ce système complet est alors un *système fondamental d'invariants* du faisceau (c'est-à-dire de toutes les transformations du faisceau).

Tout problème d'intégration équivaut à la recherche des *sous-faisceaux* complets d'un certain faisceau F : en égalant à des constantes arbitraires un système fondamental d'invariants d'un tel sous-faisceau, on obtient une intégrale *complète* du problème (1); et on les obtient toutes ainsi, si l'on fait abstraction de celles qui auraient un caractère singulier.

Une transformation du faisceau F est dite *distinguée*, si elle est en involution avec toute transformation du faisceau. Les transformations distinguées, quand il y en a, forment un sous-faisceau complet, qui sera dit *distingué*; ou encore *caractéristique*, parce que les multiplicités intégrales de ce sous-faisceau (2) (ayant le nombre maximum de dimensions) sont les *caractéristiques de Cauchy* du problème.

Si l'on se borne à chercher, sous le nom d'*intégrales complètes*, celles qui ont le nombre maximum de dimensions (ce qui est, en général, le problème essentiel), on a ce théorème fondamental que toute intégrale complète est une famille de multiplicités engendrées par des caractéristiques de Cauchy (3); de sorte que le sous-faisceau complet qui fournit une intégrale complète contient le sous-faisceau caractéristique, et que ses invariants sont des invariants du sous-faisceau distingué, ou, autrement dit, des *fonctions caractéristiques*.

2. Quand un faisceau F n'est pas complet, l'ensemble des crochets (Xf, Yf) de ses transformations prises deux à deux constitue un

(1) C'est-à-dire qu'elle est constituée par une famille de *multiplicités intégrales* (voir note suivante), telle qu'il passe, par chaque point (x_1, \dots, x_m) , une multiplicité de la famille.

(2) Une multiplicité à r dimensions est une *multiplicité intégrale* d'un faisceau quand elle admet r transformations (divergentes) de ce faisceau.

(3) Quand ces caractéristiques existent, sous-entendu.

faisceau F' qui contient F : c'est le *dérivé* de F . Celui-ci a, de même, un dérivé, et ainsi de suite. La suite des *dérivés successifs* de F se termine par un *dernier dérivé*, qui est complet, et dont l'intégration fournit les invariants de F : ceux-ci n'existent, bien entendu, que si le degré du dernier dérivé est inférieur au nombre m des variables.

La base du dérivé F' étant prise sous la forme

$$X_1, X_2, \dots, X_n; \quad Z_1, Z_2, \dots, Z_n.$$

on a, pour les crochets (X_i, X_k) , des transformations de base de F , des identités-congruences, dites *formules de structure*, de la forme

$$(X_i, X_k) \equiv \sum_{j=1}^n c_{i,k,j} Z_j \pmod{F} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Le signe de congruence $(\text{mod } F)$ indique que la différence des deux membres est une transformation de F . La nature du faisceau, au point de vue de son intégration, dépend essentiellement de sa structure; et, éventuellement, de celle de ses dérivés successifs; car c'est par des comparaisons de structure que l'on reconnaîtrait si l'on peut passer d'un faisceau à un autre par un changement de variables.

3. Le présent mémoire est consacré au cas le plus simple ⁽¹⁾, celui où le dérivé F' est de degré $n + 1$, le degré de F étant n . Les formules de structure ont alors la forme simple

$$(1) \quad (X_i, X_k) \equiv c_{i,k} Z \pmod{F} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

Z étant une transformation quelconque du dérivé (qui ne fasse pas partie de F).

Si le nombre des variables est $m = n + 1$, l'intégration du faisceau équivaut à celle d'une équation de Pfaff, c'est-à-dire au *problème de Pfaff* : celui-ci contient, comme il est bien connu, le problème de l'intégration des équations ou systèmes d'équations aux dérivées par-

(1) Le cas qui correspond à celui-là, dans la théorie des systèmes de Pfaff, a été étudié par M. Cartan (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 29, 1901, p. 233); et, antérieurement, par M. E. von Weber (*Münchener Sitzungsberichte*, t. 23, 1895, p. 423),

tielles du premier ordre, à une fonction inconnue. J'ai résumé, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾, ma méthode et mes résultats relatifs à ce cas. Ils sont compris dans ce qui suit.

Soit, en général, $m = n + p$ ($p \geq 1$) le nombre des variables; et posons $n = 2s + r$, en désignant par $2s$ le rang du déterminant symétrique gauche dont les éléments sont les *fonctions de structure* c_{ij} . Le sous-faisceau caractéristique G est de degré r , et les sous-faisceaux complets de degré maximum, fournissant les intégrales complètes, sont de degré $g = s + r$. Au lieu de chercher ces sous-faisceaux complets de degré g , il est préférable, dans le problème actuel, de chercher directement les intégrales complètes, c'est-à-dire un système d'invariants fondamentaux de ces sous-faisceaux complets. Ces invariants, ou *éléments* de l'intégrale complète, sont, pour chacune d'elles, en nombre $s + p$: tous doivent être, d'après le théorème fondamental sur les caractéristiques de Cauchy, rappelé plus haut, des fonctions caractéristiques.

De plus, dans chaque intégrale complète, on peut faire figurer un système d'invariants fondamentaux du faisceau donné F . Un résultat essentiel est que, pour $s > 1$, ces invariants de F sont en nombre $p - 1$, ou, en d'autres termes, que le dérivé de F est complet. Si l'on introduisait ces invariants comme variables nouvelles, on serait donc ramené au cas $m = n + 1$, c'est-à-dire au cas du problème de Pfaff. Mais il est inutile de faire ce changement de variables, et il reste seulement à trouver les $s + 1$ autres éléments de l'intégrale complète cherchée.

On peut prendre pour l'un d'eux une fonction caractéristique quelconque, soit φ . Pour construire les autres, il suffit de remarquer que ce sont des invariants de toute transformation distinguée du sous-faisceau de F (de degré maximum), ayant φ pour invariant; ces transformations distinguées, parmi lesquelles figurent celles de F , forment un faisceau de degré $r + 1$: il suffit donc d'en trouver une qui n'appartienne pas au sous-faisceau caractéristique G de F . Pour avoir une formule simple, on choisit, dans la base de F , des transformations

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 184, 17 janvier 1927, p. 143.

distinguées pour $X_{\nu+1}, X_{\nu+2}, \dots, X_n$ ($\nu = 2s$); et la transformation cherchée est, sous forme de déterminant bordé,

$$(2) \quad \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,\nu} & -X_1\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu,1} & \dots & c_{\nu,\nu} & -X_\nu\varphi \\ X_1f & \dots & X_\nu f & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{avec} \quad \delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu,1} & \dots & c_{\nu,\nu} \end{vmatrix}.$$

Je représente cette expression par $\{\varphi, f\}$, et je l'appelle le *crochet* des deux fonctions φ et f : c'est, en effet, une généralisation du crochet de Poisson $[\varphi, f]$. Avec cette notation, la règle de construction d'une intégrale complète s'énonce ainsi: On prend un invariant quelconque u_1 du faisceau complet caractéristique G ; puis un invariant quelconque u_2 du faisceau (complet) somme de G et de $\{u_1, f\}$; puis un invariant quelconque u_3 du faisceau (complet) somme de G , de $\{u_1, f\}$ et de $\{u_2, f\}$; et ainsi de suite. Enfin un invariant quelconque u_0 du faisceau (complet) somme de G , de $\{u_1, f\}, \dots, \{u_s, f\}$. Ce dernier faisceau est l'un quelconque des sous-faisceaux complets de F de degré (maximum) $g = s + r$; l'intégrale complète correspondante a pour éléments u_0, u_1, \dots, u_s , et les invariants de F .

On reconnaît la marche des intégrations de la méthode de Clebsch, pour le problème de Pfaff.

4. Si l'on introduit, comme variables nouvelles, les éléments u_0, u_1, \dots, u_s d'une intégrale complète, la base du faisceau se ramène à la forme canonique

$$(3) \quad U_i f = \frac{\partial f}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad V_i f = \frac{\partial f}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial z_r},$$

($i = 1, 2, \dots, 1$).

Les variables v_1, \dots, v_s , qui s'introduisent ainsi, seront dites les *éléments polaires*, associés à l'intégrale complète; elles sont définies par l'identité

$$(4) \quad \{u_0, f\} - \sum_{i=1}^s v_i \{u_i, f\} \equiv 0, \quad (\text{mod } G).$$

L'intégrale complète, éléments polaires compris, est définie par les

relations de crochets suivantes, où ρ est un facteur indéterminé,

$$(5) \quad \begin{cases} \{u_0, u_i\} = 0, & \{u_i, u_k\} = 0, & (v_i, v_k) = 0, & (u_i, v_k) = 0, \\ \{v_i, u_i\} = \rho, & \{v_i, u_0\} = \rho v_i; & (i, k = 1, 2, \dots, s; i \neq k). \end{cases}$$

Il est sous-entendu que les u et les v sont, de plus, des fonctions caractéristiques.

La réduction du faisceau donné F à la forme canonique (3) ramène l'intégration de F à celle du *faisceau canonique* $U_1, \dots, U_s, V_1, \dots, V_s$, aux $2s + 1$ variables $u_0, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$. Ce problème équivaut à la détermination de toutes les transformations de contact de l'espace à $s + 1$ dimensions. Les résultats précédents fournissent, d'une manière très simple, tous les principes fondamentaux de cette théorie des transformations de contact.

5. Le cas $s = 1$ ne rentre dans la théorie générale que si le dérivé F' de F est complet. Mais il est un autre cas où la solution générale du problème de l'intégration de F (pour $s = 1$) est encore donnée par des formules explicites. C'est celui où les degrés des dérivés successifs croissent d'une unité quand on passe de chacun de ces dérivés au suivant. Je retrouve ainsi, avec des hypothèses un peu plus générales, l'équivalent d'un théorème de M. Cartan (¹).

6. Les résultats résumés ci-dessus (n° 4) entraînent que le passage d'une intégrale complète (éléments polaires compris) à une autre se fait par une transformation de contact. La détermination générale des intégrales complètes doit donc dépendre d'un *système différentiel automorphe* (²), correspondant au groupe général des transformations de l'espace à $s + 1$ dimensions.

Les systèmes automorphes à considérer, ramenés à la forme canonique qui met en évidence un système fondamental d'invariants différentiels du groupe, ont, comme équations du premier ordre, les suivantes :

$$(6) \quad \rho [x_i, x_k]_{u,v} = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \dots, x_{2s}) \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, 2s);$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 42, 1914, p. 14-15.

(²) Voir mon Mémoire des *Acta mathematica*, t. 28, 1904, p. 311.

et une équation complémentaire

$$(7) \quad \varphi^{s+1} \frac{\partial(x_0, x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{2s})}{\partial(u_0, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)} = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{2s}).$$

Dans ces équations, φ est un facteur indéterminé à éliminer; les crochets de Poisson $[x_i, x_k]_{u,v}$ sont pris par rapport à $u_0, u_1, \dots, u_s; v_1, \dots, v_s$, considérés comme variables indépendantes.

L'équation (7) est, du reste, une condition d'intégrabilité des équations (6), et l'on peut calculer Φ , sans intégration, quand on connaît les $\varphi_{i,k}$.

Inversement, un tel système correspond à un problème de Pfaff. Si l'on introduit le crochet généralisé

$$(8) \quad \{\varphi, f\} = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{k=0}^{2s} \varphi_{i,k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les équations (6) expriment que le passage des x aux u, v ramène à la forme canonique le faisceau F défini par les transformations $\{x_i, f\}$. Les conditions d'intégrabilité s'obtiennent au moyen de l'identité

$$(9) \quad (\{\theta, f\}, \{\psi, f\}) \equiv \{\theta, \psi\} \cdot Zf \pmod{F},$$

où θ, ψ sont des fonctions arbitraires, et Zf une transformation infinitésimale (indéterminée) qui ne dépend pas du choix de ces fonctions. Ces conditions étant remplies, la méthode d'intégration résumée au n° 3 fournit les u, v en fonction des x : on y utilise le crochet (8); mais on montre que celui-ci ne diffère pas, au fond, du crochet tel qu'il a été défini au n° 3.

DIVISIONS DU MÉMOIRE.

I. — Recherche des intégrales complètes (p. 196).

1. Structure du faisceau. — 2. Involutions et intégrales complètes. — 3. Sous-faisceau d'une fonction caractéristique. — 4. Méthode d'intégration. — 5. Le crochet de deux fonctions. — 6. Relations de crochets entre les éléments d'une intégrale complète quelconque.

II. — Passage d'une intégrale complète à une autre (p. 212).

7. Réduction du faisceau à une forme canonique. — 8. Fonctions polaires d'une intégrale complète. — 9. Intégration explicite du faisceau canonique. — 10. Suite :

Calcul des fonctions polaires. — 11. Transformations de contact. — 12. Passage d'une intégrale complète à une autre.

III. — *Étude du cas exceptionnel* (p. 228).

13. Cas où le second dérivé est de degré $n + 2$. — 14. Généralisation. — 15. Sur l'intégration des faisceaux considérés.

IV. — *Systèmes automorphes relatifs au groupe général des transformations de contact* (p. 237).

16. Équations de définition des transformations infinitésimales du groupe général des transformations de contact. — 17. Équations de définition du groupe général des transformations de contact (transformations finies). — 18. Équation complémentaire. — 19. Les systèmes automorphes. — 20. Cas du problème de Pfaff. — 21. Calcul de l'équation complémentaire. — 22. Réciproque.

I. — *Recherche des intégrales complètes.*

1. *Structure du faisceau.* — Soient F le faisceau considéré, n son degré, X_1, X_2, \dots, X_n une base de ce faisceau, x_1, x_2, \dots, x_m les variables; on posera $m = n + p$, et l'on aura $p \geq 1$. Les formules de structure seront de la forme

$$(1) \quad (X_i, X_k) \equiv c_{i,k} Z \pmod{F} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

les coefficients de structure étant liés par les relations

$$(2) \quad c_{i,k} + c_{k,i} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Le crochet de deux transformations quelconques de F

$$(3) \quad U = \sum_{i=1}^n u_i X_i, \quad V = \sum_{i=1}^n v_i X_i$$

sera ainsi

$$(4) \quad (U, V) \equiv \Phi(u|v) Z \pmod{F},$$

où Φ est la forme bilinéaire alternée

$$(5) \quad \Phi(u|v) = \sum_i \sum_k c_{i,k} u_i v_k = \sum_{(i,k)} c_{i,k} (u_i v_k - u_k v_i).$$

Dans les formules (1) et (4), Z est une transformation quelconque

du faisceau dérivé F' de F ; si l'on change cette transformation, Φ est multipliée par un facteur.

Si l'on prend, pour F , une autre base

$$(6) \quad X'_h = \sum_{i=1}^n \omega_{h,i} X_i \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

les transformations (3) prennent la forme

$$(7) \quad U = \sum_{h=1}^n u'_h X'_h, \quad V = \sum_{h=1}^n v'_h X'_h,$$

les u' se déduisant des u , et les v' des v , par la même transformation linéaire, contragrédiente à (6),

$$(8) \quad u_i = \sum_{h=1}^n \omega_{h,i} u'_h, \quad v_i = \sum_{h=1}^n \omega_{h,i} v'_h \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La forme Φ se trouve ainsi transformée, de manière que l'on ait

$$(9) \quad \sum_i \sum_k c_{i,k} u_i v_k = \sum_i \sum_k c'_{i,k} u'_i v'_k;$$

et cette identité définit les nouveaux coefficients de structure $c'_{i,k}$.

On peut disposer de la transformation (6), ou, ce qui revient au même, de la transformation (8) de manière à réduire Φ et, par conséquent, la structure de F , à un type canonique. Comme, d'après ce qui précède, Φ peut être multipliée par un facteur arbitraire, c'est l'équation $\Phi(u, v) = 0$ qu'il s'agit, au fond, de réduire à une forme canonique. Si l'on interprète X_1, \dots, X_n comme des coordonnées, les déterminants $(u_i v_k - u_k v_i)$ sont les coordonnées de la droite intersection des plans $U = 0, V = 0$ et $\Phi(u, v) = 0$ s'interprète comme l'équation d'un complexe linéaire. La forme canonique est donc, ainsi qu'il est bien connu,

$$(10) \quad \Phi = u'_1 v'_2 - u'_2 v'_1 + u'_3 v'_4 - u'_4 v'_3 + \dots + u'_{2s-1} v'_{2s} - u'_{2s} v'_{2s-1}.$$

On peut l'obtenir comme il suit. Introduisons les dérivées

$$(11) \quad \Phi'_{u_i} = \sum_{k=1}^n c_{i,k} v_k, \quad \Phi'_{v_i} = \sum_{k=1}^n c_{k,i} u_k = - \sum_{k=1}^n c_{i,k} u_k.$$

Le déterminant Δ des $c_{i,k}$, hessien de Φ , et déterminant des coefficients de l'une et l'autre série de dérivées, est, d'après (2), symétrique gauche. Soit $2s$ son rang qui, comme l'on sait, est pair. Si s est nul, les $c_{i,k}$ sont tous nuls, Φ est identiquement nulle, et le faisceau F est complet. Ce cas sera écarté.

Les $c_{i,k}$ n'étant pas tous nuls, on peut supposer $c_{1,2} \neq 0$, et alors Φ'_{u_1} et Φ'_{u_2} sont deux formes linéaires indépendantes. Posons

$$(12) \quad \Psi = \Phi - \frac{1}{c_{1,2}} (\Phi'_{u_1} \Phi'_{v_2} - \Phi'_{u_2} \Phi'_{v_1}).$$

Cette forme Ψ est, d'après (11), bilinéaire et alternée; et ses dérivées sont :

$$(13) \quad \Psi'_{u_i} = \Phi'_{u_i} - \frac{1}{c_{1,2}} (c_{i,2} \Phi'_{u_1} - c_{i,1} \Phi'_{u_2}).$$

On en conclut que Ψ'_{u_1} , Ψ'_{u_2} sont identiquement nulles, et que les Ψ'_{u_i} , pour $i = 3, 4, \dots, n$, sont liés par autant de relations indépendantes que les Φ'_{u_i} pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$. En ce qui concerne ce second point, il est évident que toute relation entre les Ψ'_{u_i} donne une relation entre les Φ'_{u_i} , avec les mêmes coefficients, pour $i = 3, 4, \dots, n$. La réciproque est vraie aussi, car une relation

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi'_{u_i} = 0$$

entraîne une relation

$$\sum_{i=3}^n \alpha_i \Psi'_{u_i} + \beta_1 \Phi'_{u_1} + \beta_2 \Phi'_{u_2} = 0;$$

et les coefficients β_1 et β_2 sont nuls, car ce sont, au facteur $\pm c_{1,2}$ près, les coefficients de v_1 et de v_2 dans cette identité. De plus, s'il y a plusieurs relations $\sum \alpha_{k,i} \Phi'_{u_i} = 0$, le tableau des coefficients $\alpha_{k,3}, \dots, \alpha_{k,n}$ n'est pas nul, car il n'y a pas de relation de ce type entre Φ'_{u_1} et Φ'_{u_2} seuls.

Ainsi Ψ ne contient pas u_1, u_2, v_1, v_2 et le rang de son hessien est inférieur de deux unités au rang du hessien de Φ . Ceci établi, faisons

le changement de variables

$$(14) \quad u'_1 = \frac{1}{\sqrt{c_{2,1}}} \Phi'_{v_1}, \quad u'_2 = \frac{1}{\sqrt{c_{2,1}}} \Phi'_{v_2}, \quad v'_1 = \frac{-1}{\sqrt{c_{2,1}}} \Phi'_{u_1}, \quad v'_2 = \frac{-1}{\sqrt{c_{2,1}}} \Phi'_{u_2}.$$

pour remplacer u_1, u_2, v_1, v_2 ; il est bien cogrédiend d'après (11), et il donnera

$$(15) \quad \Phi = u'_1 v'_2 - u'_2 v'_1 + \Psi.$$

Si l'on opère sur des quantités réelles, on pourra supposer $c_{2,1} > 0$, quitte à échanger les rôles de Φ'_{u_1} et Φ'_{u_2} ; de sorte que la réduction sera réelle.

On pourra maintenant opérer sur Ψ comme on l'a fait sur Φ , et ainsi de suite, et si le rang du hessien Δ de Φ est $2s$, on obtiendra la forme type (10) que nous avons annoncée. Remarquons qu'elle admet un groupe linéaire homogène bien connu et peut, par conséquent, s'obtenir d'une infinité de manières.

Il sera commode de changer de notations en écrivant A_1, A_2, \dots, A_s pour $X'_1, X'_3, \dots, X'_{2s-1}, B_1$, avec B_2, \dots, B_s pour $X'_2, X'_4, \dots, X'_{2s}$, et C_1, C_2, \dots, C_r pour $X_{2s+1}, X_{2s+2}, \dots, X_n$. On a ainsi la base canonique

$$(16) \quad A_1, \dots, A_s; \quad B_1, \dots, B_s; \quad C_1, \dots, C_r \quad (n = 2s + r);$$

et, en posant

$$(17) \quad U = \sum_{i=1}^s a_i A_i + \sum_{i=1}^s b_i B_i + \sum_{j=1}^r c_j C_j, \quad V = \sum_{i=1}^s a'_i A_i + \sum_{i=1}^s b'_i B_i + \sum_{j=1}^r c'_j C_j,$$

on aura maintenant

$$(18) \quad (U, V) \equiv \Phi(a|b) \cdot Z \pmod{F},$$

avec

$$(19) \quad \Phi = \sum_{i=1}^s (a_i b'_i - b_i a'_i).$$

Ceci équivaut à dire que les crochets des transformations de base (16) sont tous congrus à zéro, sauf les crochets

$$(20) \quad (A_i, B_i) \equiv Z \pmod{F} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Pour que U soit une transformation distinguée, il faut et il suffit que la forme (19) s'annule quels que soient les a' et les b' , donc que U se réduise à $\sum_{j=1}^r c_j C_j$, où les c_j sont arbitraires. Le sous-faisceau des transformations distinguées ⁽¹⁾ de F est donc le faisceau G de base C_1, \dots, C_r , il est de degré $r = n - 2s$, le rang du déterminant des $C_{i,k}$ étant supposé égal à $2s$.

Ce dernier résultat s'obtiendrait immédiatement, sans utiliser la forme canonique, en écrivant que la forme initiale Φ [équation (5)] est nulle quels que soient les c .

2. *Involutions et intégrales complètes.* — Au moyen de la base canonique (16) il est facile de discuter ce que seront les involutions générales, de degrés 2, 3, ..., du faisceau F. Soit un sous-faisceau quelconque F_α , de degré α , ayant pour base les transformations

$$(21) \quad V_k = \sum_{i=1}^s a_{k,i} A_i + \sum_{i=1}^s b_{k,i} B_i + \sum_{j=1}^r c_{k,j} C_j \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Les transformations U [équation (17)] en involution avec ce faisceau sont définies, d'après (19), par les équations linéaires

$$(22) \quad \sum_{i=1}^s (a_i b_{k,i} - b_i a_{k,i}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Ces équations sont indépendantes pourvu qu'aucune combinaison des V_k ne se réduise à une combinaison des C_j , c'est-à-dire pourvu que F_α ne contienne aucune transformation distinguée de F. Sous cette condition, le faisceau Ψ des transformations U en question est de degré $n - \alpha$, et il contient évidemment le faisceau G des transformations distinguées.

Si l'on suppose, de plus, que F_α est une involution, Ψ contient F_α , de sorte que l'on a $n - \alpha \geq \alpha + r$; ce qui exige $\alpha \leq s$. Réciproquement,

(1) C'est ce que nous appellerons le *sous-faisceau distingué* ou le *sous-faisceau caractéristique* de F.

tant que $\alpha < s$, Ψ contient un sous-faisceau, de degré $n - 2\alpha - r$, qui n'appartient ni à F_α , ni à G .

On conclut de là : 1° que les involutions générales de degré $\alpha \leq s$ ne contiennent aucune transformation distinguée de F ; 2° que les involutions générales de degré $\alpha > s$ se déduisent de l'involution générale de degré s par adjonction de $a - s$ transformations distinguées arbitraires; 3° que l'involution générale de degré maximum est de degré $s + r$, c'est-à-dire que le *genre* de F est $s + r$.

Cette involution générale de degré maximum $g = s + r$ peut se mettre sous la forme résolue

$$(23) \quad V_i = A_i + \sum_{k=1}^s p_{i,k} B_k, \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad C_j \quad (j=1, 2, \dots, r);$$

et les conditions d'involution se réduisent alors à

$$(24) \quad p_{i,k} = p_{k,i} \quad (i, k=1, 2, \dots, s).$$

On sait, d'après la théorie générale (1), que les équations aux dérivées partielles, relatives aux $p_{i,k}$, qui expriment que ce faisceau (23) est complet, sont compatibles, et qu'elles fournissent tous les sous-faisceaux complets généraux, de degré maximum, du faisceau F .

Les multiplicités intégrales générales d'un tel sous-faisceau complet sont représentées par des équations de la forme

$$(25) \quad \varphi_h(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_h \quad (h=1, 2, \dots, s+p).$$

Nous leur réserverons le nom d'*intégrales complètes*; nous dirons que les fonctions φ_h en sont les *éléments*, et nous énoncerons : l'intégrale complète ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s+p}$). Nous bornerons le problème de l'intégration du faisceau F à la recherche de ses intégrales complètes.

Il y a avantage, dans le cas actuel, à chercher les intégrales complètes elles-mêmes, et non les sous-faisceaux complets dont elles sont des invariants fondamentaux.

Voici, à cet égard, quelques remarques préliminaires :

1° Les éléments de toute intégrale complète sont des invariants du

(1) *M.*, nos 13-14, p. 362 et suiv.

sous-faisceau distingué G de F . Cela résulte de ce qui précède, et c'est un cas particulier du théorème général de la théorie des caractéristiques de Cauchy ⁽¹⁾. Nous dirons que de tels invariants sont des *fonctions caractéristiques* (pour F);

2° Parmi les éléments de toute intégrale complète on peut faire figurer les invariants du faisceau F , s'il en a. Ces invariants existent, si le premier des dérivés successifs de F qui est identique au suivant est de degré inférieur à m : il est alors complet ⁽²⁾, et ses invariants sont ceux de F . Nous n'aurons donc à chercher, pour chaque intégrale complète, que ceux de ses éléments qui ne sont pas des invariants de F ;

3° On peut, d'après la remarque précédente, chercher d'abord les invariants de F , par l'intégration d'un faisceau complet; en les prenant comme variables nouvelles, on réduira l'entier $p = m - n$ d'autant d'unités qu'il y aura de tels invariants (indépendants).

Mais il sera préférable d'éviter ce changement de variables, en laissant la recherche des autres éléments des intégrales complètes indépendante de celle des invariants de F . C'est ce que nous ferons. Nous désignerons par q le nombre des invariants indépendants de F . Il sera maximum, si le dérivé F' est complet; on a donc : $q < m - n$, c'est-à-dire $q < p$.

3. *Sous-faisceau d'une fonction caractéristique.* — Notre méthode sera fondée sur l'étude du sous-faisceau de F qui admet pour invariant une fonction quelconque φ . D'après les remarques précédentes, nous supposerons que φ n'est pas un invariant de F , mais est une fonction caractéristique, c'est-à-dire un invariant de G . Nous désignerons par F_φ son sous-faisceau, c'est-à-dire le faisceau des transformations de F que φ admet.

Prenons, comme base de F , d'une part les transformations distinguées C_1, \dots, C_r qui définissent G , d'autre part $\nu = 2s$ autres transformations de F quelconques, soit X_1, X_2, \dots, X_ν . Ces dernières pourront être considérées comme base d'un sous-faisceau H de F , et

⁽¹⁾ *M.*, nos 18-19, p. 374 et suiv.

⁽²⁾ *M.*, n° 2, p. 345.

nous dirons que F est le *résultant* ⁽¹⁾ de G et H . Alors F_φ est lui-même le résultant de G et du sous-faisceau H_φ de H formé de toutes les transformations de H que φ admet : celles-ci sont de la forme $\sum_{i=1}^{\nu} u_i X_i$, avec la condition

$$(26) \quad \sum_{i=1}^{\nu} u_i X_i \varphi = 0$$

Cette condition n'est pas une identité, parce que φ n'est pas invariant de H , ne l'étant pas de F . Donc F_φ est de degré $n - 1$. Cherchons le degré de son sous-faisceau distingué.

Toutes les transformations C de G en font partie. Soit, en effet, U une transformation quelconque de F_φ , la transformation (U, C) admet φ , puisque U et C l'admettent; or, elle appartient à F , puisque C est distinguée dans F ; donc elle appartient à F_φ . C. Q. F. D.

Il résulte de là que, si $s = 1$, F_φ est complet, car il est de degré $n - 1 = r + 1$, puisque $r = n - 2s$ en général, et il contient au moins r transformations distinguées, de sorte que, si on leur adjoint une transformation quelconque du faisceau, tous les crochets des transformations de base ainsi choisies feront partie du faisceau.

Supposons donc $s > 1$. Je dis que F_φ ne peut pas avoir plus de $r + 1$ transformations distinguées, divergentes. Supposons, en effet, qu'il en ait $r + 2$. Nous pourrions supposer que ce sont $C_1, \dots, C_r, X_1, X_2$, et que X_3, \dots, X_{r-1} appartiennent à F_φ . Alors $u_1 X_1 + u_2 X_2$ sera distinguée pour F , pourvu que l'on ait $(u_1 X_1 + u_2 X_2, X_r) \equiv 0 \pmod{F}$, c'est-à-dire $c_{1,r} u_1 + c_{2,r} u_2 = 0$; de sorte que F aurait plus de r transformations distinguées divergentes; d'où contradiction. Donc le sous-faisceau distingué de F_φ est au moins de degré r et au plus de degré $r + 1$; nous allons voir qu'il est de degré $r + 1$.

Considérons, en effet, le dérivé F'_φ de F_φ . Il est contenu dans le dérivé F' de F , et toutes ses transformations laissent φ invariant,

(1) D'une manière générale, le *résultant* de deux faisceaux est formé de toutes les combinaisons linéaires et homogènes des transformations de l'un et l'autre faisceau. On l'obtient en juxtaposant les bases des deux faisceaux, si ceux-ci n'ont pas de sous-faisceau commun.

puisque ce sont des crochets de transformations qui admettent φ . Or F' ne laisse pas φ invariant, sans quoi φ serait un invariant de F . Donc F'_φ est de degré inférieur au degré de F' , c'est-à-dire de degré au plus égal à $(n+1) - 1 = n$.

Ce degré est, du reste, au moins égal au degré $n-1$ de F_φ , et il ne peut y avoir égalité puisque F_φ , ayant au plus $r-1$ transformations distinguées (nombre inférieur à $n-1$, puisque $r = n-2s$ et que $s > 1$), n'est pas complet. Donc le dérivé F'_φ de F_φ est de degré n .

Ainsi F_φ , de degré $n-1$, a un dérivé de degré n ; il en résulte, d'après le n° 1, que le degré de son sous-faisceau distingué est de même parité que $n-1$, c'est-à-dire de même parité que $r+1$. Comme ce degré ne peut être, d'après ce qui précède, que r ou $r+1$, nous concluons qu'il est $r+1$.

En résumé, F_φ est de degré $n-1$, son dérivé est de degré n , et son sous-faisceau distingué est de degré $r+1$.

Je dis maintenant que *les invariants de F_φ sont des fonctions de ceux de F et de φ .*

Je le montrerai en prouvant que si F_φ a exactement q invariants indépendants, F en a $q-1$. Reprenons, à cet effet, les notations générales du n° 1; nous pourrions supposer que F_φ est défini par X_1, \dots, X_{n-1} et que x_1, \dots, x_q sont des invariants de F_φ . Alors, X_1, \dots, X_{n-1} , pris sous forme résolue, s'écriront

$$(27) \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial x_{q+i}} + \sum_{j=n+q}^m \zeta_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Si nous supposons que $x_1 = \varphi$, le terme en $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ne pourra pas manquer dans X_n , qu'on pourra ramener à la forme

$$(28) \quad X_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{n=2}^q \zeta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{j=n+q}^m \zeta_{n,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Le dérivé F'_φ de F_φ , qui est de degré n , s'obtiendra en adjoignant aux transformations (27) un de leurs crochets, qui sera de la forme

$$(29) \quad Z f = \sum_{j=n+q}^m \zeta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Le dérivé F' de F , étant de degré $n + 1$, s'obtiendra en leur adjoignant en plus X_n .

Donc les crochets (X_i, X_n) , pour $(i = 1, 2, \dots, \overline{n-1})$, doivent être des combinaisons des transformations (27), (28), (29); comme $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ n'y figure pas, ce sont des combinaisons de (27) et (29), c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_q}$ n'y doivent pas figurer non plus. Il en résulte que les ξ_h sont des invariants des X_i , c'est-à-dire des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_q seuls.

Mais alors X_n , et par suite F , admet comme invariants les intégrales de l'équation

$$(30) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{h=2}^q \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

ce qui donne bien $q - 1$ invariants indépendants.

4. *Méthode d'intégration.* — Il résulte de ce qui précède que F_φ est de la même nature que F , en ce sens que le degré de son dérivé est supérieur d'une unité à son propre degré. De plus, quand on passe de F à F_φ , le nombre q des invariants indépendants devient $q + 1$, le degré n devient $n - 1$, le degré r du sous-groupe distingué devient $r + 1$, le nombre $s = \frac{n-r}{2}$ devient $s - 1$, le nombre $p = m - n$ devient $p + 1$; donc le genre $g \equiv s + r$ reste constant.

On voit ainsi que, quelle que soit la fonction φ , pourvu qu'elle soit *caractéristique*, elle pourra être choisie comme élément d'intégrales complètes de F , et que les intégrales complètes correspondantes seront toutes les intégrales complètes de F_φ . Comme l'on peut, de plus, d'après ce qui précède, raisonner sur F_φ comme sur F , on a là le principe d'une méthode de construction des intégrales complètes de F , qui est la suivante :

On détermine un invariant quelconque φ_1 du sous-faisceau distingué G de F ; puis un invariant quelconque φ_2 du sous-faisceau distingué G_1 du faisceau F_1 formé de toutes les transformations de F qui admettent φ_1 ; puis un invariant quelconque φ_3 du sous-faisceau distingué G_2 du faisceau F_2 formé de toutes les transformations de F_1 qui admettent φ_2 ; et ainsi de suite. Quand on aura ainsi choisi

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}$, on sera ramené au cas $s = 1$; de sorte que l'opération suivante, adjonction de φ_s , donnera un sous-faisceau complet F_s de degré $g = s + r$, définissant l'intégrale complète cherchée. On connaîtra les intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$, et il restera à en calculer p autres; on calculera à part les q invariants de F ; et il restera à trouver seulement $q - p$ invariants nouveaux de F_s .

Il est entendu que φ_1 ne devra pas être un invariant de F , que φ_2 ne devra pas être une fonction de φ_1 et des invariants de F , que φ_3 ne devra pas être une fonction de φ_1, φ_2 et des invariants de F , et ainsi de suite.

Pour appliquer la méthode, on aura seulement à déterminer les sous-faisceaux distingués successifs G, G_1, \dots, G_s , le dernier se confond, du reste, avec F_s . Il résulte de ce que nous avons vu que chacun contient le précédent, et est d'un degré supérieur d'une unité. Pour passer de l'un de ces faisceaux au suivant, on aura donc à lui adjoindre une transformation nouvelle, convenablement choisie.

Nous remarquerons, à cet effet, que G_k est le résultant des sous-faisceaux distingués respectifs de $F_{\varphi_1}, F_{\varphi_2}, \dots, F_{\varphi_k}$, que je vais désigner par $G_{\varphi_1}, G_{\varphi_2}, \dots, G_{\varphi_k}$. Nous savons, en effet, que G_k contient G_1 , qui n'est autre que G_{φ_1} ; il contient, par suite, $G_{\varphi_2}, \dots, G_{\varphi_k}$; car F_k est le plus grand sous-faisceau commun à $F_{\varphi_1}, F_{\varphi_2}, \dots, F_{\varphi_k}$, de sorte que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ ont, par rapport à lui, des rôles équivalents. Donc G_k contient G_{k-1} et G_{φ_k} ; et comme son degré ne surpasse celui de G_{k-1} que d'une unité, il est le résultant de G_{k-1} et de G_{φ_k} , à moins que G_{φ_k} soit contenu dans G_{k-1} .

Pour voir que cette dernière circonstance est impossible, il suffit de remarquer que si l'on compose F_{k-1} et F_{φ_k} , on reconstitue F ; car F_{k-1} est de degré $n - k + 1$, F_{φ_k} de degré $n - 1$ et leur plus grand sous-faisceau commun, qui est F_k , est de degré $n - k$. Le résultant de F_{k-1} et de F_{φ_k} est donc de degré

$$(n - k + 1) + (n - 1) - (n - k) = n.$$

Comme il est contenu dans F , dont le degré est également n , il se confond avec lui.

On voit, par là, que si G_{φ_k} était contenu dans G_{k-1} , il laisserait invariant chacun des faisceaux F_{φ_k} et F_{k-1} , et, par conséquent, leur résultant.

tant F. Or cela n'est pas, car il n'est pas contenu dans le sous-faisceau distingué G de F.

Nous avons donc prouvé que G_k est le résultant de G_{k-1} et de G_{φ_k} ; on en conclut, par voie de récurrence, que, comme nous l'avions annoncé d'abord, il est le résultant de $G_{\varphi_1}, G_{\varphi_2}, \dots, G_{\varphi_k}$.

La transformation nouvelle à adjoindre à G_{k-1} pour obtenir G_k sera donc une transformation de G_{φ_k} ; et tout revient à trouver, en général, une transformation de G_{φ} qui n'appartienne pas à tous les autres sous-faisceaux analogues G_{ψ} . Comme, d'après ce qui précède, ceux-ci n'ont en commun que G, que celui-ci est de degré r , et G_{φ} de degré $r + 1$, il suffit, en définitive, de trouver une transformation de G_{φ} qui ne fasse pas partie de G. C'est ce que nous allons faire dans le numéro suivant; et notre conclusion est que si T_{φ} est une telle transformation, G_k sera le résultant de G et de $T_{\varphi_1}, T_{\varphi_2}, \dots, T_{\varphi_k}$, c'est-à-dire que sa base sera

$$(31) \quad G_1, G_2, \dots, G_k, T_{\varphi_1}, T_{\varphi_2}, \dots, T_{\varphi_k}.$$

En égalant à zéro les symboles de ces transformations (31), on obtiendra donc le système complet dont φ_{k+1} sera une intégrale (distincte de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ et des invariants de F).

5. *Le crochet de deux fonctions.* — Reprenons les notations du n° 4; et supposons, comme au n° 3, que X_1, \dots, X_{ν} étant $\nu = 2s$ transformations quelconques de F, on choisisse, pour $X_{\nu+1}, \dots, X_n$, $r = n - \nu$ transformations distinguées. Alors toutes les fonctions $c_{i,k}$ pour lesquelles i et k dépassent ν sont nulles; et le déterminant des $c_{i,k}$ restantes ($i, k = 1, 2, \dots, \nu$) est différent de zéro.

Le faisceau F_{φ} est formé des transformations

$$U = \sum_{i=1}^n u_i X_i$$

pour lesquelles on a $U\varphi = 0$, c'est-à-dire, puisque $X_{\nu+1}, \varphi, \dots, X_n\varphi$ sont nuls par hypothèse, telles que l'on ait

$$(32) \quad \sum_{h=1}^{\nu} u_h X_h \varphi = 0.$$

Une transformation

$$V = \sum_{i=1}^n v_i X_i$$

ne sera une transformation distinguée de F_φ que si elle est en involution avec toutes les transformations U que l'on vient de définir. Ceci donne la condition nécessaire que l'équation

$$(33) \quad \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} c_{h,k} u_h v_k = 0$$

soit une conséquence de (32); ou que l'on ait

$$(34) \quad \sum_{k=1}^{\nu} c_{h,k} u_k = \rho \cdot X_h \varphi \quad (h = 1, 2, \dots, \nu),$$

ρ étant une inconnue auxiliaire.

Ceci détermine v_1, \dots, v_ν , au facteur ρ près, et laisse $v_{\nu+1}, \dots, v_n$ arbitraires. On obtient ainsi un faisceau ayant pour base, outre $X_{\nu+1}, \dots, X_n$, la transformation qu'on déduit de (34) en supposant $v_{\nu+1} = 0, \dots, v_n = 0$. Celle-ci étant définie à un facteur près, on peut prendre pour son expression le déterminant bordé suivant, qui correspond à $\rho = 1$, et que nous appellerons le *crochet* $\{\varphi, f\}$:

$$(35) \quad \{\varphi, f\} = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,\nu} & -X_1 \varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu,1} & \dots & c_{\nu,\nu} & -X_\nu \varphi \\ X_1 f & \dots & X_\nu f & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{avec } \delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu,1} & \dots & c_{\nu,\nu} \end{vmatrix}.$$

C'est la transformation T_φ cherchée. Car le faisceau que nous venons d'obtenir est de degré $r+1$, comme le sous-faisceau G_φ ; et comme d'après le raisonnement qui nous y a conduit il contient G_φ , il se confond avec lui. La formule (35) rend, du reste, manifeste le fait que $\{\varphi, f\}$ laisse φ invariant. Car $\{\varphi, \varphi\}$ est nul, comme déterminant symétrique gauche de degré impair ($\nu+1 = 2s+1$).

Remarquons aussi la propriété de symétrie gauche du crochet

$$(36) \quad \{\varphi, f\} + \{f, \varphi\} = 0.$$

On l'établit en changeant, dans le déterminant de (35), les lignes en colonnes; puis en remplaçant chaque $c_{i,k}$ par $c_{k,i}$, en même temps qu'on change φ en $-\varphi$ et f en $-f$. Ces dernières opérations ayant changé les signes de tous les éléments du déterminant, celui-ci a été multiplié en définitive par $(-1)^{\nu+1}$, c'est-à-dire par (-1) , puisque $\nu = 2s$; comme le second membre de (35) est ainsi devenu $\{f, \varphi\}$, la propriété est établie.

Le crochet $\{\varphi, f\}$ prend une forme très simple, si l'on part d'une base canonique du faisceau. Soit (16) cette base, et reprenons le calcul précédent, avec

$$U = \sum_{i=1}^s (a_i \Lambda_i + b_i B_i) \quad \text{et} \quad V = \sum_{i=1}^s (a'_i \Lambda_i + b'_i B_i).$$

Les équations (34), avec $\varphi = 1$, seront ainsi remplacées par l'identité en $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$,

$$\sum_{i=1}^s (a_i b'_i - b_i a'_i) = \sum_{i=1}^s (a_i \Lambda_i \varphi + b_i B_i \varphi),$$

d'où l'on conclut $a'_i = -B_i \varphi$, $b'_i = A_i \varphi$; et, par conséquent,

$$(37) \quad \{\varphi, f\} = \sum_{i=1}^s (\Lambda_i \varphi \cdot B_i f - B_i \varphi \cdot A_i f);$$

car on voit bien facilement que δ est alors égal à 1.

Sous cette forme simple, on vérifie sans peine, en tenant compte des formules (20), que l'on a, pour le crochet de Jacobi de deux transformations du type $\{\varphi, f\}$, $\{\psi, f\}$, la formule

$$(38) \quad (\{\varphi, f\}, \{\psi, f\}) \equiv \{\varphi, \psi\} Z, \quad (\text{mod } F).$$

Nous allons voir qu'elle s'étend au cas général du crochet (35), en vertu de la propriété d'invariance de ce crochet vis-à-vis des changements de base du faisceau. Voici en quoi consiste cette invariance.

Reprenons les notations du début de ce paragraphe. Les équations (34), avec $\varphi = 1$, qui nous ont fourni $\{\varphi, f\}$, équivalent à la

condition unique

$$(39) \quad (U, V) \equiv U\varphi.Z, \quad (\text{mod } F);$$

cette congruence devant avoir lieu, d'après notre calcul, pour toute transformation U du faisceau X_1, \dots, X_n (ou faisceau H du n° 3). Mais elle a lieu encore si l'on ajoute à U une transformation distinguée quelconque C , pourvu qu'on impose à φ , comme nous le faisons, la condition d'être une fonction caractéristique; la condition

$$(U + C, V) \equiv (U\varphi + C\varphi).Z \quad (\text{mod } F)$$

se réduit en effet à (39), à cause de $(C, V) \equiv 0$ et $C\varphi = 0$.

Donc la congruence (39) a lieu pour toute transformation U de F ; et d'après ce qu'on a vu, puisqu'elle équivaut aux équations de condition (34) (avec $\varphi = 1$), elle définit V entièrement, si l'on veut que V fasse partie de H . Si l'on supprime cette restriction, il faut ajouter à V une transformation distinguée quelconque.

On voit donc que le crochet $\{\varphi, f\}$ est ainsi défini par une propriété indépendante du choix de la base; mais il faut entendre qu'on peut alors lui ajouter une transformation distinguée quelconque du faisceau F . En d'autres termes, si l'on change la base de F , on modifiera tout au plus $\{\varphi, f\}$ par l'addition d'une transformation distinguée de F . Telle est l'invariance annoncée. Il est visible qu'elle entraîne la conservation de la formule (38), du moment qu'on suppose que φ et ψ sont des fonctions caractéristiques.

L'identité de définition (39) montre encore que, si l'on change la transformation Z en une autre $\varphi Z + X$ du faisceau dérivé F' (X étant une transformation quelconque de F), V se trouve multipliée par φ ; de sorte que l'identité (38) n'est pas modifiée.

Enfin, V est, ainsi que le montre la formule (35), covariante du faisceau F , relativement à tout changement de variables.

6. *Relations de crochets entre les éléments d'une intégrale complète quelconque.* — La méthode donnée au n° 4, pour la formation d'une intégrale complète quelconque, prend, en définitive, la forme précise suivante :

Le nombre des variables étant $m = n + p$, ($p \geq 1$), et le rang du

déterminant des $c_{i,k}$ étant $2s$, on a posé $n = 2s + r$; et r est le degré du sous-faisceau caractéristique G de F . Les éléments φ_i d'une intégrale complète sont au nombre de $s + p$. Parmi eux figurent les invariants éventuels de F ; soit q leur nombre : il est inférieur à p . On calcule à part ces invariants, en intégrant le dernier des dérivés successifs de F : ce dernier dérivé est complet.

On détermine, d'autre part, une base C_1, \dots, C_r du sous-faisceau caractéristique G ; et l'on forme l'expression du crochet $\{\varphi, f\}$. Cela fait, les opérations à effectuer sont les suivantes : On calcule un invariant φ_1 du faisceau complet G ; puis un invariant φ_2 du faisceau complet formé par G et $\{\varphi_1, f\}$; puis un invariant φ_3 du faisceau complet formé par $G, \{\varphi_1, f\}, \{\varphi_2, f\}$; et ainsi de suite. A chaque opération, il est entendu que le nouvel élément φ que l'on calcule ne doit pas être une fonction des éléments déjà calculés.

Quand on arrive ainsi au faisceau complet formé par $G, \{\varphi_1, f\}, \{\varphi_2, f\}, \dots, \{\varphi_s, f\}$, on en connaît, comme intégrales, les q invariants de F et les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$. On en calcule $p - q$ invariants, distincts de ceux-là; et l'on a ainsi tous les éléments de l'intégrale complète.

Remarquons que le principe de la méthode consiste, au fond, en ce que la transformation $\{\varphi, f\}$ fait partie de tout sous-faisceau complet fournissant une intégrale complète dont φ fasse partie. Comme un tel sous-faisceau complet est de degré $s + r$, il en résulte que, dès qu'on a calculé $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$, les opérations sont arrêtées, par le fait que $\{\varphi_{s+1}, f\}, \{\varphi_{s+2}, f\}, \dots$ ne peuvent plus être que des combinaisons de $\{\varphi_1, f\}, \dots, \{\varphi_s, f\}$ et des transformations distinguées C_1, \dots, C_r .

Concluons enfin, d'après ce qui précède, qu'une intégrale complète est un ensemble de $s + p$ fonctions caractéristiques φ_i , indépendantes, satisfaisant aux relations de crochets :

$$(40) \quad \{\varphi_i, \varphi_k\} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, s + p).$$

Je rappelle que, par fonction caractéristique, nous entendons un invariant du sous-faisceau caractéristique G ; et j'ajoute que, d'après ce qui précède, celles des relations (40), pour lesquelles i a les valeurs $1, 2, \dots, s$, et k toutes les valeurs indiquées, entraînent les autres comme conséquences.

II. — Passage d'une intégrale complète à une autre.

7. *Réduction du faisceau à une forme canonique.* — La connaissance d'une intégrale complète permet de réduire, par un changement de variables, le faisceau donné F à une forme canonique; sur cette forme canonique on cherchera ensuite les autres intégrales complètes. Tel est l'objet du présent paragraphe.

Soient donc $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s+p}$ les éléments d'une intégrale complète particulière quelconque; prenons-les comme variables nouvelles, en conservant d'autre part les variables x_1, x_2, \dots, x_{s+r} , par exemple, cela fait bien, en tout, $2s + r + p = n + p = m$ variables.

Le sous-faisceau complet dont $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s+p}$ sont des invariants fondamentaux est alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{s+r}}$; il contient les transformations distinguées, qui sont, par conséquent, de la forme

$$(41) \quad C_j = \sum_{\alpha=1}^{s+r} \gamma_{j,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (j = 1, 2, \dots, r);$$

et l'on peut, les notations étant convenablement choisies, garder d'autre part, pour servir de base au sous-faisceau en question, les transformations

$$(42) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Pour compléter la base de F, on pourra prendre des transformations résolues par rapport à s des dérivées $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}$, soit

$$(43) \quad \Phi_i = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + \sum_{\beta=1}^p \theta_{i,\beta} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+\beta}} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Pour la transformation Z du faisceau dérivé, qui figurera dans les formules de structure (n° 1), on pourra prendre une transformation de la forme

$$\sum_{\beta=1}^p \theta_\beta \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+\beta}},$$

et la résoudre par rapport à l'une des dérivées qui y figurent; donc

prendre, par exemple, la forme

$$(44) \quad Z = \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+1}} + \sum_{\gamma=2}^p \theta_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+\gamma}}.$$

Dans tout cela, on suppose que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, \varphi_{s+1}$ ne soient pas des invariants de F, ce qui est loisible.

Cela posé, considérons, comme au n° 5, le déterminant δ des fonctions de structure correspondant aux $2s$ transformations de base (42) et (43). On aura les relations (1)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \Phi_k \right) = \frac{\partial \theta_{k,i}}{\partial x_i} Z \quad (i, k = 1, 2, \dots, s);$$

de sorte que le déterminant δ se réduit au carré du déterminant fonctionnel $\frac{\partial(\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, \dots, \theta_{s,1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_s)}$. Il en résulte que ce déterminant fonctionnel n'est pas nul, et qu'on peut prendre comme variables nouvelles, à la place de x_1, x_2, \dots, x_s , les fonctions $\psi_i = \theta_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Les transformations de base (42) peuvent ainsi être remplacées par

$$(45) \quad \Psi_i = \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

et les transformations (43) s'écrivent

$$(46) \quad \Phi_i = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + \psi_i \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+1}} + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

où les R_i ne dépendent que des dérivées $\frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+2}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+p}}$.

Nous écrirons de même

$$(47) \quad Z = \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+1}} + R.$$

Remarquons, de plus, que l'on doit avoir les relations de structure $(C_j, \Phi_i) \equiv 0$, qui entraînent $C_j \psi_i = 0$. Donc, après l'introduction des

(1) Car le crochet de deux transformations quelconques de F est une combinaison des transformations de base de F et de la transformation Z; c'est ce qu'il faut avoir présent à l'esprit dans tout ce numéro.

ψ_i , les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \psi_i}$ ne figureront pas dans les C_j ; et l'on pourra remplacer ceux-ci par les transformations

$$(48) \quad \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{s+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{s+r}},$$

qui seront ainsi les transformations distinguées servant de base au sous-faisceau caractéristique G . On en conclut que les variables $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{s+r}$ auront disparu des coefficients des transformations R_i ; car on devra avoir $\left(\frac{\partial f}{\partial x_{s+i}}, \Phi_i\right) = 0$. Ces variables disparaîtront de même de Z , puisqu'on a maintenant $\left(\frac{\partial f}{\partial \psi_i}, \Phi_i\right) = Z$. Ainsi, dès maintenant, les variables x_{s+1}, \dots, x_{s+r} , disparaissent des calculs.

Considérons maintenant les relations de structure relatives aux crochets (Ψ_i, Φ_k) ; elles conduisent aux identités

$$\frac{\partial R_i}{\partial \psi_i} = R, \quad \frac{\partial R_i}{\partial \psi_k} = 0 \quad (i \neq k; i, k = 1, 2, \dots, s).$$

Excluons jusqu'à nouvel ordre le cas $s = 1$; nous concluons que les variables ψ ne figurent pas dans les coefficients de R , et que l'on a

$$(49) \quad R_i = R\psi_i + S_i,$$

les S_i ne dépendant plus que des variables φ . On peut donc écrire

$$(50) \quad \Phi_i = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + \psi_i Z + S_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Ceci posé, passons aux crochets (Φ_i, Φ_k) ; comme il n'y peut figurer, d'après la forme des Φ_i , que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+2}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_{s+p}}$, ils sont identiquement nuls. Or on a

$$\begin{aligned} (\Phi_i, \Phi_k) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + S_i, \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + S_k\right) + \psi_k \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + S_i, Z\right) \\ &\quad - \psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + S_k, Z\right); \end{aligned}$$

et puisque ψ_i et ψ_k ne figurent dans aucun coefficient de Z ni de S_i , on

en conclut, pour toutes les valeurs de i et k ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + S_i, \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + S_k\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + S_i, Z\right) = 0.$$

Il en résulte que *le faisceau F' est complet*; c'est-à-dire que *le nombre des invariants indépendants de F, que nous avons désigné par q , est égal à $m - (n + 1) = p - 1$.*

Or, d'après les calculs indiqués au n° 6, nous pouvons supposer que ces invariants se trouvent parmi les φ ; et, en d'autres termes, que $\varphi_{s+2}, \dots, \varphi_{s+p}$ sont tous des invariants de F et de F'; en d'autres termes, R et les R_i sont identiquement nuls.

Donc les changements de variables que nous avons faits dans ce numéro conduiront d'emblée à la forme canonique suivante :

$$(51) \quad \Psi_i = \frac{\partial f}{\partial \psi_i}, \quad \Phi_i = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} + \psi_i \frac{\partial f}{\partial \varphi_0}, \quad C_j = \frac{\partial f}{\partial x_{s+j}} \\ (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, r),$$

et la transformation Z choisie se réduira à

$$(52) \quad Z = \frac{\partial f}{\partial \varphi_0};$$

nous venons seulement de désigner φ_{s+1} par φ_0 , pour simplifier l'écriture.

8. *Fonctions polaires d'une intégrale complète.* — Si nous résumons les résultats que nous venons d'obtenir, nous voyons d'abord que, pour $s > 1$, tout se passe, au fond, comme si le nombre des variables était $\nu + 1$, le faisceau F étant de degré pair $\nu = 2s$, et sans transformations distinguées; puisque nous n'avons plus affaire qu'aux variables φ et ψ .

De plus, les variables φ sont des éléments quelconques, en nombre $s + 1$, d'une intégrale complète quelconque, sous la seule condition qu'aucun d'eux ne soit un invariant de F, et qu'aucune fonction de ces invariants ne soit un tel invariant.

Nous dirons que les fonctions ψ_i , qui s'associent aux φ_i dans la forme canonique (51), sont les *fonctions polaires* des φ_i ; elles sont

définies par l'analyse du numéro précédent, qui donne le moyen de les calculer, connaissant les φ_i , dès qu'on a choisi celui des éléments de l'intégrale complète qu'on prend pour φ_0 . Nous allons montrer qu'elles satisfont, d'autre part, à des relations de crochets qui les caractérisent.

La base (51) du faisceau F est une base canonique (n° 1), car on a les identités

$$(53) \quad (\Psi_i, \Phi_i) = Z \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

les autres crochets des Ψ_i , des Φ_k et des C_j étant nuls; on voit, de plus, que les congruences du n° 1 sont ici des égalités.

En prenant cette base (51) comme point de départ, le crochet général $\{f, g\}$ devient le *crochet de Poisson*

$$(54) \quad [f, g] = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_i} \Phi_i g - \frac{\partial g}{\partial \psi_i} \Phi_i f \right),$$

car les Φ_i peuvent être interprétés comme des dérivations totales par rapport aux φ_i ($i = 1, 2, \dots, s$), les ψ_i étant considérés comme les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi_i}$. Quoi qu'il en soit de cette interprétation, on a, avec la notation (54), les formules immédiates :

$$(55) \quad \begin{cases} [\varphi_0, \varphi_i] = 0, & [\varphi_i, \varphi_k] = 0, & [\psi_i, \psi_k] = 0, \\ [\varphi_i, \psi_k] = 0, & [\varphi_i, \psi_i] = -1, & [\varphi_0, \psi_i] = -\psi_i \\ & (i, k = 1, 2, \dots, s; i \neq k). \end{cases}$$

On peut écrire aussi, pour $i = 1, 2, \dots, s$,

$$(56) \quad [\psi_i, f] = \Phi_i, \quad [\varphi_i, f] = -\Psi_i, \quad [\varphi_0, f] = -\sum_{k=1}^s \psi_k \Psi_k;$$

d'où

$$(57) \quad [\varphi_0, f] = \sum_{i=1}^s \psi_i [\varphi_i, f].$$

Si nous revenons au crochet général $\{f, g\}$, construit avec une base quelconque de F et une transformation quelconque Z du dérivé F', nous avons, d'après la propriété d'invariance de ce crochet, établie au

n° 5, l'identité

$$(58) \quad \{f, g\} \equiv \rho[f, g] \pmod{G},$$

le facteur ρ étant défini par

$$(59) \quad Z \equiv \rho \frac{df}{d\varphi_0} \pmod{F}.$$

Les formules (55), (56), (57) donnent donc les suivantes, puisque les φ et les ψ sont des invariants du sous-faisceau caractéristique G,

$$(60) \quad \begin{cases} \{\varphi_0, \varphi_i\} = 0, & \{\varphi_i, \varphi_k\} = 0, & \{\psi_i, \psi_k\} = 0, \\ \{\varphi_i, \psi_k\} = 0, & \{\varphi_i, \psi_i\} = -\rho, & \{\varphi_0, \psi_i\} = -\rho\psi_i \end{cases} \\ (i, k = 1, 2, \dots, s; i \neq k);$$

$$(61) \quad \{\psi_i, f\} \equiv \rho\Phi_i, \quad \{\varphi_i, f\} \equiv -\rho\Psi_i, \quad \{\varphi_0, f\} \equiv -\rho \sum_{k=1}^s \psi_k \Psi_k \pmod{G};$$

$$(62) \quad \{\varphi_0, f\} \equiv \sum_{k=1}^s \psi_k \{\varphi_k, f\} \pmod{G}.$$

Les formules (60), jointes à l'hypothèse que les φ et les ψ soient des invariants de G, caractérisent le système des φ et des ψ comme constitué par les éléments $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ d'une intégrale complète et leurs fonctions polaires ψ_1, \dots, ψ_s ; étant entendu qu'il faudra adjoindre aux φ des invariants indépendants (en nombre maximum) de F.

Si l'on prend, en effet, comme variables les φ , les ψ , les invariants en question $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$, et r autres variables quelconques z_1, \dots, z_r , les transformations de G, seront de la forme

$$C = \sum_{j=1}^r \zeta_j \frac{df}{dx_j},$$

puisque les $C\varphi$, les $C\psi$, et les $C\gamma$ sont nuls. D'autre part toute transformation du type $\{g, f\}$ a pour expression

$$\{g, f\} = \sum_{\alpha=0}^s \{g, \varphi_\alpha\} \frac{df}{d\varphi_\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \{g, \psi_\beta\} \frac{df}{d\psi_\beta} + \sum_{\gamma=1}^r \{g, z_\gamma\} \frac{df}{dz_\gamma};$$

car les $\{g, \gamma_\mu\}$ sont nuls, du fait que $\{g, f\}$ est une transformation

de F. On peut encore écrire ceci

$$(63) \quad \{g, f\} \equiv \sum_{\alpha=0}^s \{g, \varphi_\alpha\} \frac{\partial f}{\partial \varphi_\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \{g, \psi_\beta\} \frac{\partial f}{\partial \psi_\beta} \pmod{G}.$$

Et l'on en conclut, sous le bénéfice des relations (60),

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\psi_i, f\} \equiv \rho \Phi_i, \quad \{\varphi_i, f\} \equiv -\rho \Psi_i, \quad (\text{mod } G), \\ \{\varphi_0, f\} \equiv -\rho \sum_{k=1}^s \psi_k \Psi_k, \quad (\text{mod } G); \end{array} \right.$$

ces équations prouvent bien que les ψ_i s'associent aux φ_i pour donner au faisceau F sa forme canonique (51). C. Q. F. D.

De ces équations (64) résulte, de plus, la formule (62), dont l'importance est également fondamentale, car elle suffit à définir les ψ_i . Cela résulte de ce que le sous-faisceau complet, qui a les φ_i pour invariants, a pour base (n° 6) les transformations $\{\varphi_1, f\}$, $\{\varphi_2, f\}$, ..., $\{\varphi_s, f\}$, C_1, C_2, \dots, C_r ; celles-ci sont donc divergentes, ce qui exclut la possibilité de deux identités-congruences, distinctes, de la forme (58).

9. *Intégration explicite du faisceau canonique.* — Il est clair que l'intégration de F, dès que l'on en connaît une intégrale complète particulière, est, par ce qui précède, ramenée à l'intégration du faisceau canonique, constitué par les Ψ_i et les Φ_i . Avec un changement de notation, ce sera le faisceau K qui a pour base

$$(65) \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x_0} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Ce faisceau K est dualistique ⁽¹⁾ de l'équation de Pfaff

$$(65) \quad dx_0 - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_s dx_s = 0.$$

On pourrait donc utiliser ici des résultats bien connus. Mais il nous paraît intéressant de tout déduire de notre théorie des faisceaux.

(1) *M.*, n° 4, p. 346-347.

On a d'abord une solution intuitive en remarquant que le faisceau (65) résulte du prolongement ⁽¹⁾ du faisceau

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

quand on considère x_0 comme fonction de x_1, \dots, x_s , et les p comme les dérivées partielles $\frac{\partial x_0}{\partial x_i}$. Donc pour avoir une intégrale de (65), à s dimensions, qui dépende de $s+1$ constantes arbitraires, il suffira de prolonger une multiplicité à s dimensions de l'espace x_0, x_1, \dots, x_s , cette multiplicité dépendant de $s+1$ constantes arbitraires a_0, a_1, \dots, a_s . D'où la solution

$$(66) \quad x_0 = W(x_1, \dots, x_s; a_0, a_1, \dots, a_s), \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \\ (i = 1, 2, \dots, s),$$

où W est une fonction arbitraire de ses arguments.

Mais il y a lieu de chercher s'il n'y a pas d'autre solution, et de raisonner directement sur le faisceau K , sans invoquer la notion de prolongement.

Imaginons donc un sous-faisceau complet K_i de K , de degré s ; il est défini par s combinaisons indépendantes des X_i et des P_j .

1° Supposons d'abord qu'on puisse les résoudre par rapport aux X_i , de sorte que la base du sous-faisceau K_i soit de la forme

$$(67) \quad X_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{i,j} P_j \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

D'après les propriétés connues des systèmes complets, on pourra alors résoudre l'intégrale complète par rapport à x_0, p_1, \dots, p_s ; et elle sera de la forme

$$(68) \quad x_0 = W(x_1, \dots, x_s; a_0, a_1, \dots, a_s) \quad p_j = \Theta_j(x_1, \dots, x_s; a_0, a_1, \dots, a_s) \\ (j = 1, 2, \dots, s).$$

(1) *M.*, n° 13, p. 367.

Écrivons qu'elle admet les transformations (67); il viendra

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad \lambda_{i,j} = \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s);$$

ce qui devra être conséquence des équations (68). On trouve donc, comme condition nécessaire et suffisante de possibilité, les formules

$$\Theta_j = \frac{\partial W}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

avec la condition que les équations (68) ainsi construites puissent se résoudre par rapport aux constantes a_0, a_1, \dots, a_s . C'est donc la solution (66), déjà introduite.

2° Supposons, en second lieu, que la base de K_1 puisse se résoudre par rapport à σ des X_i , et pas davantage ⁽¹⁾ ($0 < \sigma < s$); et supposons, pour simplifier les notations, que ce soit par rapport à X_1, \dots, X_σ . On aura donc, dans K_1 , $s - \sigma$ combinaisons, indépendantes, de P_1, \dots, P_s . Je dis qu'elles doivent être résolubles par rapport à $P_{\sigma+1}, \dots, P_s$.

Supposons, en effet, le contraire : il y aurait dans K_1 au moins une transformation de la forme $\mu_1 P_1 + \dots + \mu_\sigma P_\sigma$. Mais ceci est impossible, car les crochets avec les transformations résolues en X_1, \dots, X_σ seraient $\mu_1 Z, \dots, \mu_\sigma Z$, transformations qui ne seraient pas toutes identiquement nulles et qui ne sauraient appartenir à K_1 .

La base de K_1 peut donc être prise, ici, sous la forme

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_h + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} \lambda_{h,\alpha} X_{\sigma+\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\sigma} \mu_{h,\beta} P_\beta \quad (h=1, 2, \dots, \sigma), \\ P_{\sigma+l} + \sum_{\beta=1}^{\sigma} \nu_{l,\beta} P_\beta \quad (l=1, 2, \dots, s-\sigma). \end{array} \right.$$

On en conclut que l'intégrale complète pourra se résoudre par rapport à $x_0, x_{\sigma+1}, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s$: nous l'écrivons donc

$$(70) \quad x_0 = W_0, \quad x_{\sigma+l} = W_l, \quad p_h = \Theta_h \quad (l=1, 2, \dots, s-\sigma; h=1, 2, \dots, \sigma),$$

(1) L'hypothèse $\sigma = 0$ donne l'intégrale complète $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_s = a_s$.

les seconds membres de ces équations étant fonctions de $x_1, \dots, x_\sigma, p_{\sigma+1}, \dots, p_s$ et des constantes arbitraires a_0, a_1, \dots, a_s .

Exprimons maintenant qu'elle admet les transformations (69); cela donne les conditions

$$p_h + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} \lambda_{h,\alpha} p_{\sigma+\alpha} = \frac{\partial W_0}{\partial x_h}, \quad \lambda_{h,l} = \frac{\partial W_l}{\partial x_h}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial p_{\sigma+l}} = 0, \quad \frac{\partial W_h}{\partial p_{\sigma+l}} = 0$$

(pour $h = 1, 2, \dots, \sigma$ et $l = 1, 2, \dots, s - \sigma$);

et, en outre,

$$\mu_{h,\beta} = \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_h}, \quad \nu_{l,\beta} = \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{\sigma+l}} \quad (h, \beta = 1, 2, \dots, \sigma; l = 1, 2, \dots, s - \sigma).$$

On conclut que l'on a la solution générale

$$(71) \quad x_0 = W_0, \quad x_{\sigma+l} = W_l, \quad p_h = \frac{\partial W_0}{\partial x_h} - \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} p_{\sigma+\alpha} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_h}$$

($h = 1, 2, \dots, \sigma; l = 1, 2, \dots, s - \sigma$),

W_0 et W_l étant des fonctions de $x_1, \dots, x_\sigma, a_0, a_1, \dots, a_s$ qui sont arbitraires, sous la seule réserve que ces équations (71) soient résolubles en a_0, a_1, \dots, a_s .

3° Si l'on pose, avec Sophus Lie,

$$(72) \quad W = W_0 - \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} p_{\sigma+\alpha} W_\alpha,$$

on peut remplacer les formules (71) par

$$(73) \quad x_0 = W - \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} p_{\sigma+\alpha} \frac{\partial W}{\partial p_{\sigma+\alpha}}, \quad x_{\sigma+l} = - \frac{\partial W}{\partial p_{\sigma+l}}, \quad p_h = \frac{\partial W}{\partial x_h},$$

$$(74) \quad W = \text{fonction de } p_{\sigma+1}, \dots, p_s, x_1, \dots, x_\sigma, a_0, a_1, \dots, a_s,$$

avec toujours $h = 1, 2, \dots, \sigma; l = 1, 2, \dots, s - \sigma$. Et l'on constate que l'on a ainsi une intégrale complète, quel que soit le choix de W .

Exprimons, en effet, que ce système admet la transformation

$$(75) \quad U = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i + \sum_{i=1}^s \mu_i P_i;$$

et nous trouvons les conditions

$$(76) \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i P_i = \sum_{\beta=1}^{\sigma} \lambda_{\beta} \left(\frac{\partial W}{\partial x_{\beta}} - \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} P_{\sigma+\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial p_{\sigma+\alpha} \partial x_{\beta}} \right) - \sum_{\gamma=1}^{s-\sigma} \mu_{s+\gamma} \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} P_{\sigma+\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial p_{\sigma+\alpha} \partial p_{\sigma+\gamma}};$$

$$(77) \quad \lambda_{\sigma+l} = - \sum_{\beta=1}^{\sigma} \lambda_{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial p_{\sigma+l} \partial x_{\beta}} - \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} \mu_{\sigma+\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial p_{\sigma+l} \partial p_{\sigma+\alpha}} \quad (l = 1, 2, \dots, s-\sigma),$$

$$(78) \quad \mu_h = \sum_{\beta=1}^{\sigma} \lambda_{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h \partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} \mu_{\sigma+\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h \partial p_{\sigma+\alpha}} \quad (h = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Or l'équation (76) devient une identité quand on tient compte des équations (77) et (78) et des équations (73). Il ne reste donc que les équations (77) et (78) qui laissent arbitraires $\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma}$ et $\mu_{\sigma+1}, \dots, \mu_s$. On a donc bien un sous-faisceau de degré s qui laisse la multiplicité (73) invariante.

10. *Suite. Calcul des fonctions polaires.* — Nous avons donc défini l'intégrale complète la plus générale au moyen des formules (75), qu'on peut considérer comme renfermant, pour $\sigma = s$, les formules normales (66). Ces équations définissent les fonctions a_0, a_1, \dots, a_s des variables $x_0, x_1, \dots, x_s; p_1, \dots, p_s$, il nous reste à chercher les fonctions polaires b_1, \dots, b_s qui leur sont associées. Il n'y a, pour cela, qu'à appliquer la règle donnée à la fin du n° 8; et, à cet effet, nous prendrons les crochets, avec f , des deux membres de l'identité

$$(79) \quad x_0 = W(x_1, \dots, x_s; a_0, a_1, \dots, a_s),$$

pour le cas normal; et, pour le cas général, les crochets des deux

membres de l'identité

$$(80) \quad x_0 = W(x_1, \dots, x_\sigma; p_{\sigma+1}, \dots, p_s; a_0, a_1, \dots, a_s) + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} p_{\sigma+\alpha} x_{\sigma+\alpha},$$

qui est une conséquence immédiate des formules (73).

L'opération $\{\varphi, f\}$ étant linéaire et homogène par rapport aux dérivées de φ , on peut lui appliquer la règle de dérivation des fonctions composées. Remarquons que le crochet est ici le crochet de Poisson; et que les formules (56) donnant, avec les notations présentes,

$$(81) \quad [x_i, f] = -P_i, \quad [p_i, f] = X_i, \quad [x_0, f] = -\sum_{i=1}^s p_i P_i.$$

Avec l'identité (79), nous obtenons donc

$$-\sum_{i=1}^s p_i P_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial W}{\partial x_i} (-P_i) + \sum_{j=0}^s \frac{\partial W}{\partial a_j} [a_j, f],$$

ce qui, en tenant compte des formules (66), se réduit à

$$(82) \quad \sum_{j=0}^s \frac{\partial W}{\partial a_j} [a_j, f] = 0.$$

Avec l'identité (80), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^s p_i P_i &= \sum_{h=1}^{\sigma} \frac{\partial W}{\partial x_h} (-P_h) + \sum_{l=1}^{s-\sigma} \frac{\partial W}{\partial p_{\sigma+l}} X_{\sigma+l} + \sum_{j=0}^s \frac{\partial W}{\partial a_j} [a_j, f] \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} p_{\sigma+\alpha} (-P_{\sigma+\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{s-\sigma} x_{\sigma+\alpha} X_{\sigma+\alpha}; \end{aligned}$$

et cela se réduit encore à (82), dès qu'on tient compte des formules (73).

Comme, d'autre part, d'après le résultat final du n° 8, les b_i sont définis par l'identité

$$(83) \quad [a_s, f] = \sum_{i=1}^s b_i [a_i, f],$$

il suffit de la comparer à (82) pour conclure que les b_i sont ici définis

par le système des équations

$$(84) \quad \frac{\partial W}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial W}{\partial a_0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

que l'on doit, bien entendu, associer avec celles qui définissent a_0, a_1, \dots, a_s , c'est-à-dire, suivant les cas, aux formules (66) ou (73).

11. *Transformations de contact.* — Réunissons les formules obtenues. En mettant y_i à la place de a_i , et q_i à la place de b_i , et changeant σ en $s - \sigma$, nous avons les deux systèmes : pour le cas normal,

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = W(x_1, \dots, x_s; y_0, y_1, \dots, y_s), \\ p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} + q_i \frac{\partial W}{\partial y_0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \end{array} \right.$$

et, pour le cas le plus général,

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - \sum_{\alpha=1}^{\sigma} p_{\alpha} x_{\alpha} = W(x_{\sigma+1}, \dots, x_s; p_1, \dots, p_{\sigma}; y_0, y_1, \dots, y_s), \\ x_h = -\frac{\partial W}{\partial p_h}, \quad p_{\sigma+l} = \frac{\partial W}{\partial x_{\sigma+l}}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial y_0} = 0 \\ (h = 1, 2, \dots, \sigma; l = 1, 2, \dots, s - \sigma; i = 1, 2, \dots, s). \end{array} \right.$$

L'un et l'autre de ces systèmes définissent une transformation de $x_0, x_1, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s$ en $y_0, y_1, \dots, y_s, q_1, \dots, q_s$; et il résulte de la manière dont nous sommes arrivés au faisceau K que cette transformation changera le faisceau en

$$(87) \quad Q_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial y_0} \quad (i = 1, 2, \dots, s);$$

car y_0, y_1, \dots, y_s est une intégrale complète, et q_1, \dots, q_s en sont les fonctions polaires. En d'autres termes, les transformations en question laissent le faisceau K invariant.

Réciproquement, si une transformation de $x_0, x_1, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s$ en $y_0, y_1, \dots, y_s, q_1, \dots, q_s$ laisse K invariant, c'est-à-dire permet de mettre sa base sous la forme (87), il est visible que y_0, y_1, \dots, y_s sont des invariants indépendants du sous-faisceau complet Q_1, \dots, Q_s ; de sorte que ce sont les éléments d'une intégrale complète; et la forme

des Y_i indique que q_1, \dots, q_s sont les éléments polaires associés à cette intégrale complète.

Nous avons donc obtenu la forme générale des transformations qui laissent invariant le faisceau K , et, ce qui revient au même, l'équation de Pfaff dualistique

$$dx_0 - \sum_{i=1}^s p_i dx_i = 0;$$

c'est-à-dire des *transformations de contact* de l'espace x_0, x_1, \dots, x_s .

D'après l'analyse du n° 9, la fonction W des formules (86) peut être supposée linéaire en p_1, \dots, p_σ

(86 bis)
$$W = W_0 - \sum_{h=1}^{\sigma} p_h W_h,$$

de sorte que les formules (86) comportent $\sigma + 1$ relations ponctuelles (entre x_0, x_1, \dots, x_s et y_0, y_1, \dots, y_s), à savoir

(86 ter)
$$x_0 = W_0, \quad x_h = W_h \quad (h = 1, 2, \dots, \sigma),$$

tandis que les formules (85) n'en comportent qu'une.

Tout ceci est, bien entendu, conforme à la théorie classique de Sophus Lië; nous n'avons pas cependant trouvé dans son ouvrage les formules (86).

De ce que nous avons trouvé au n° 8, sur les relations de crochet qui caractérisent les intégrales complètes [équations (60)], on conclut, d'autre part, immédiatement le théorème suivant, fondamental dans la théorie des transformations de contact. *Pour que les équations*

(88)
$$\left\{ \begin{array}{l} y_h = y_h(x_0, x_1, \dots, x_s; p_1, \dots, p_s), \quad q_i = q_i(x_0, x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_s) \\ (h = 0, 1, 2, \dots, s; \quad i = 1, 2, \dots, s) \end{array} \right.$$

définissent une transformation de contact, il faut et il suffit que les fonctions y_h et q_i satisfassent aux relations de crochets

(89)
$$\left\{ \begin{array}{l} [y_i, y_k] = 0, \quad [y_0, y_i] = 0, \quad [q_i, q_k] = 0, \quad [y_i, q_k] = 0, \\ [q_i, y_i] = \rho, \quad [q_i, y_0] = \rho q_i \\ (i, k = 1, 2, \dots, s; \quad i \neq k). \end{array} \right.$$

Il convient de rappeler que ces relations, où φ ne doit pas être identiquement nul, assurent l'indépendance des fonctions y_h et q_i . En effet, si l'on avait une relation identique

$$(90) \quad F(y_0, y_1, \dots, y_s; q_1, \dots, q_s) = 0,$$

elle ne saurait contenir les q_i ; car, résolue par rapport à q_1 , par exemple, elle prendrait la forme

$$q_1 = G(y_0, y_1, \dots, y_s; q_2, \dots, q_s),$$

et, en formant le crochet des deux nombres avec y_1 , on en conclurait $\varphi = 0$. Donc la relation (90) ne saurait contenir q_1, \dots, q_s ; et contiendrait y_1 , par exemple, puisqu'elle ne peut se réduire, à cause de la dernière formule (89), à $y_0 = \text{const.}$ Or si nous supposons que l'on eût

$$y_1 = H(y_0, y_2, \dots, y_s),$$

en formant le crochet des deux nombres avec q_1 , nous conclurions

$$\varphi \left[1 - q_1 \frac{\partial H}{\partial y_0} \right] = 0;$$

ce qui est impossible, car ce serait une relation contenant q_1 , ou bien cela se réduirait à $\varphi = 0$.

En ce qui concerne le facteur φ , il est, d'après (59), défini par la condition

$$(91) \quad \frac{\partial f}{\partial x_0} - \varphi \frac{\partial f}{\partial y_0} \equiv 0 \pmod{K},$$

où la première dérivée correspond à l'ensemble des variables indépendantes x_h, p_i , et la seconde à l'ensemble des variables nouvelles y_h, q_i .

On peut préciser davantage, en utilisant l'identité évidente

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial y_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^s q_i \frac{\partial y_i}{\partial x_0} \right) + \sum_{i=1}^s Y_i \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^s Q_i \frac{\partial y_i}{\partial x_0},$$

qui donne

$$(92) \quad \varphi = \frac{\partial x_0}{\partial y_0} - \sum_{i=1}^s q_i \frac{\partial y_i}{\partial x_0}.$$

Pour appliquer ceci aux transformations (85) et (86), il suffit de différentier, dans les deux cas, la première des formules par rapport à x_0 , ce qui donne

$$1 = \frac{\partial W}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_0},$$

d'où, en tenant compte de la dernière des formules (85) et (86),

$$1 = \frac{\partial W}{\partial y_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^s q_i \frac{\partial y_i}{\partial x_0} \right).$$

On a donc, simplement,

$$(93) \quad \rho = \frac{1}{\left(\frac{\partial W}{\partial y_0} \right)}.$$

Remarquons enfin que le théorème des fonctions composées donne les identités

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial f}{\partial y_0} \left(X_i y_0 - \sum_{k=1}^s q_k X_i y_k \right) + \sum_{k=1}^s Y_k \cdot X_i y_k + \sum_{k=1}^s Q_k \cdot X_i q_k, \\ P_i &= \frac{\partial f}{\partial y_0} \left(P_i y_0 - \sum_{k=1}^s q_k P_i y_k \right) + \sum_{k=1}^s Y_k \cdot P_i y_k + \sum_{k=1}^s Q_k \cdot P_i q_k. \end{aligned}$$

Or la transformation, pour être de contact, doit laisser le faisceau K invariant, ce qui équivaut à dire que le terme en $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ doit disparaître dans ces formules. *On a donc les conditions*

$$(94) \quad X_i y_0 - \sum_{k=1}^s q_k X_i y_k = 0, \quad P_i y_0 - \sum_{k=1}^s q_k P_i y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

qui, elles aussi, caractérisent les transformations de contact.

On voit, de plus, que la loi suivant laquelle la transformation de contact échange les transformations du faisceau est donnée par les formules suivantes, où $i = 1, 2, \dots, s$,

$$(95) \quad X_i = \sum_{k=1}^s (Y_k \cdot X_i y_k + Q_k \cdot X_i q_k), \quad P_i = \sum_{k=1}^s (Y_k \cdot P_i y_k + Q_k \cdot P_i q_k).$$

12. *Passage d'une intégrale complète à une autre.* — On peut inter-

prêter les résultats précédents, au point de vue de l'intégration du faisceau F , de la manière suivante.

Supposons d'abord le cas particulier $r = 0$, $p = 1$; et par conséquent, $n = 2s$. Alors, la connaissance d'une intégrale complète u_0, u_1, \dots, u_s , d'où l'on déduit les fonctions polaires v_1, \dots, v_s , ramène F à la forme K ; il suffit pour cela de faire un changement de variables en prenant les variables $u_0, u_1, \dots, u_s; v_1, \dots, v_s$ à la place des $2s + 1$ variables initiales. Il reste alors à intégrer K ; et une intégrale complète quelconque est donnée, à partir de $u_0, u_1, \dots, u_s; v_1, \dots, v_s$, par les formules d'une transformation de contact quelconque de l'espace u_0, u_1, \dots, u_s .

Par conséquent, si l'on convient d'étendre la signification du mot *intégrale complète*, en y comprenant non seulement les éléments proprement dits de l'intégrale complète (tels que u_0, u_1, \dots, u_s), mais aussi les éléments polaires associés (tels que v_1, \dots, v_s), on pourra dire que *le passage d'une intégrale complète à une autre se fait par une transformation de contact*.

D'après les applications du n° 8, ceci est encore vrai si r n'est pas nul et si p est supérieur à 1. Il faut seulement entendre que la transformation de contact en question pourra dépendre d'une manière quelconque des $p - 1$ invariants de F , qui y interviendront comme autant de paramètres constants arbitraires. De plus, ces invariants devront être adjoints aux éléments d'intégrale complète fournis par la transformation de contact, de même qu'ils se trouvaient adjoints aux éléments de l'intégrale complète u_0, u_1, \dots, u_s , supposée calculée d'abord.

Le résultat est seulement en défaut, pour $s = 1$, et $p > 1$, lorsque F a moins de $p - 1$ invariants distincts, c'est-à-dire lorsque son dérivé F' n'est pas complet. Il nous reste donc à étudier ce cas, ce qui fera l'objet du paragraphe suivant. Rappelons que lorsque s est supérieur à 1, F' est toujours complet, ainsi que nous l'avons constaté au n° 7.

III. — Étude du cas exceptionnel.

13. *Cas où le second dérivé est de degré $n + 2$.* — D'après l'analyse du n° 7, nous n'avons obtenu, pour F , dans le cas $s = 1$, que la forme,

que nous appellerons *semi-canonique*,

$$(96) \quad X = \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + Y, \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad Z_j = \frac{\partial f}{\partial z_j} \quad (j=1, 2, \dots, r).$$

Les Z_j étant les transformations distinguées, Y est de la forme

$$(97) \quad Y = \sum_{\alpha=1}^l \eta_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_{\alpha}},$$

les η_{α} ne dépendant pas des z_j , mais pouvant dépendre de toutes les autres variables, y compris les invariants éventuels de F , t_1, t_2, \dots, t_q .

Le degré de F est $n = 2s + r = 2 + r$, et le nombre total des variables est $m = n + 1 + l + q$, de sorte que $l = (p - 1) - q$. Le cas où $l = 0$ ($q = p - 1$) rentre, comme nous l'avons dit au n° 12, dans le cas général; car Y disparaît alors. Nous allons voir, que dans le cas $l > 0$, on peut aussi avoir une forme canonique, sous certaines hypothèses relatives aux dérivés successifs de F .

Le dérivé F' se déduit de (96) par l'adjonction de la transformation (X_1, X) , c'est-à-dire

$$(98) \quad Z = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} = \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial y_{\alpha}} \right).$$

Donc les transformations Z_j sont encore distinguées pour F' .

Pour passer au dérivé suivant F'' , il faut adjoindre (X, Z) et (X_1, Z) . Donc F'' est de degré $n + 2$, ou $n + 3$. Nous allons examiner le cas où il est de degré $n + 2$.

Le dérivé F' a alors, comme F , pour dérivé un faisceau de degré supérieur au sien d'une unité. On peut donc appliquer les résultats de notre étude. Posons $n' = n + 1$, et soit r' le degré du sous-faisceau caractéristique de F' . On a, d'après la remarque faite tout à l'heure, $r' \geq r$. Donc $n' - r' \leq n - r + 2$, c'est-à-dire $n' - r' \leq 3$. Or $n' - r'$ doit être pair, et il n'est pas nul, puisque F' n'est pas complet. Donc $n' - r' = 2$; c'est-à-dire que la valeur de s est encore 1 pour F' . De plus, F' ne peut avoir d'autres invariants que t_1, \dots, t_q ; de sorte que la valeur de l , pour F' , devient $l' = l - 1$. En définitive, la forme

semi-canonique de F' est

$$(99) \quad X' = \frac{\partial f}{\partial x'} + x'_1 \frac{\partial f}{\partial x'_0} + Y', \quad X'_1 = \frac{\partial f}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad Z_j \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

avec

$$(100) \quad Y' = \sum_{\beta=1}^{l-1} \gamma'_\beta \frac{\partial f}{\partial y'_\beta}.$$

La transformation $\frac{\partial f}{\partial z}$ est la nouvelle transformation distinguée de F' (autre que les Z_j); donc les γ'_β ne dépendent ni des z_j , ni de z .

Ceci posé, considérons F comme un sous-faisceau de F' ; il sera défini par les Z_j , qu'il contient par hypothèse, et par deux autres transformations de base, de la forme $\lambda X' + \lambda'_1 X'_1 + \mu \frac{\partial f}{\partial z}$. Ces deux transformations sont indépendantes, relativement à X' et X'_1 ; ou bien $\frac{\partial f}{\partial z}$ appartient à F .

Dans la première hypothèse, les deux transformations de base en question pourront être prises sous la forme

$$X' + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X'_1 + \lambda'_1 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Mais le crochet de deux telles transformations, contenant $\frac{\partial f}{\partial x'_0}$ et non $\frac{\partial f}{\partial x'}$, ne peut appartenir à F' . L'hypothèse est donc à rejeter, puisque le crochet de deux transformations quelconques de F doit appartenir à son dérivé F' .

Donc F contient $\frac{\partial f}{\partial z}$, et sa base peut être prise sous la forme

$$(101) \quad X'' = X' + \zeta X'_1, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad Z_1, \quad \dots, \quad Z_r.$$

Il est, de plus, impossible que ζ soit indépendant de z ; sans quoi ce faisceau (101) serait complet. Donc on peut prendre ζ pour nouvelle variable à la place de z ; et, en changeant les notations, on arrive à la forme semi-canonique, plus précise que (96),

$$(102) \quad X = \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + Y, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad Z_j \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

où Y ne fait intervenir que $l - 1$ variables y_α , au lieu de l ,

$$(103) \quad Y = \sum_{\alpha=1}^{l-1} \gamma_\alpha \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}.$$

Il résulte, de plus, de la manière dont nous venons d'arriver à ce résultat, que les γ_α ne dépendent ni des x_j , ni de x_2 .

14. *Généralisation.* — Ce résultat peut se généraliser de proche en proche. Nous allons supposer que les degrés de F' , F'' , ..., $F^{(k)}$ soient, respectivement, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + k$, et nous allons montrer que, dans ce cas, on peut prendre, comme forme semi-canonique de F,

$$(104) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_k \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} + Y; \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}; \quad Z_j \quad (j=1, 2, \dots, r), \end{cases}$$

avec

$$(105) \quad Y = \sum_{\alpha=1}^{l-k+1} \gamma_\alpha \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha},$$

les γ_α ne dépendant ni des x_j , ni de x_2, x_3, \dots, x_k .

Ce théorème étant supposé vrai pour $k = 1, 2, \dots, h$, il suffit de prouver qu'il est vrai pour $k = h + 1$. A cet effet, nous l'appliquons alors à F' , qui sera donc, avec une transformation distinguée de plus (soit $\frac{\partial f}{\partial z}$),

$$(106) \quad X' = \frac{\partial f}{\partial x'} + x'_1 \frac{\partial f}{\partial x'_0} + \dots + x'_k \frac{\partial f}{\partial x'_{k-1}} + Y', \quad \frac{\partial f}{\partial X'_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad Z_j,$$

avec

$$(107) \quad Y' = \sum_{\alpha=1}^{l-k} \gamma'_\alpha \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}.$$

Pour en déduire F, il suffit d'associer aux Z_j deux transformations de la forme

$$\lambda X' + \mu \frac{\partial f}{\partial x'_k} + \nu \frac{\partial f}{\partial z};$$

et l'on verra, comme plus haut, qu'on en peut déduire une combi-

raison qui ne contienne que $\frac{\partial f}{\partial z}$. Ces deux transformations étant ainsi

$$X' + \zeta \frac{\partial f}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

on constatera, en raisonnant encore comme au n° 13, que ζ peut être pris comme variable à la place de z ; et il ne restera plus qu'à faire un changement de notations pour obtenir le résultat annoncé.

La réciproque du théorème est vraie; car F étant de la forme (104), on en déduit F' en adjoignant le crochet $\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, X\right)$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}$. On a donc pour F' la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \dots + x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-2}} + Y; \quad \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}.$$

Comme Y ne dépend pas de x_{k-1} et de x_k , on passe de même à F'' par l'addition de $\frac{\partial f}{\partial x_{k-2}}$; et ainsi de suite, jusqu'à $F^{(k-1)}$ qui est

$$(108) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + Y; \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}.$$

Enfin $F^{(k)}$ se déduit de (108) par l'adjonction de $\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}$.

Remarquons, d'autre part, que tous les dérivés successifs ont, comme F , q invariants, et que, par suite, leur degré ne peut pas dépasser la limite

$$m - q = n + p - q = n + l + 1$$

et doit l'atteindre. Si donc on arrive à $k = l + 1$, $F^{(k)}$ étant de degré $n + k$ sera complet, et, du reste, d'après (105), Y disparaîtra de la formule (104); et si l'on arrive à $k = l$, $F^{(k)}$ étant de degré $n + k$, c'est-à-dire $n + l$, $F^{(k+1)}$ devra être de degré $n + l + 1$, c'est-à-dire $n + k + 1$, et sera complet.

Donc, ou bien la réduction peut se continuer jusqu'à $k = l + 1 = p - q$ et donne la forme canonique

$$(109) \quad X = \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_{l+1} \frac{\partial f}{\partial x_l}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}; \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial z_r};$$

ou bien la réduction s'arrête avant que k ait atteint la valeur l , et l'on a la forme semi-canonique (104), les variables y_α étant au moins au nombre de deux.

Dans le premier cas, les degrés des dérivés successifs vont en croissant d'une unité jusqu'au dernier $F^{(l+1)}$; dans le second cas, les degrés des dérivés successifs vont en croissant d'une unité jusqu'à $F^{(k)}$ compris ($k < l$), et $F^{(k-1)}$ est de degré $n + k + 2$, c'est-à-dire que son degré est supérieur de deux unités à celui de $F^{(k)}$.

Quant à la manière d'effectuer la réduction, on ramènera d'abord $F^{(k-1)}$ à la forme (108), ce qui se fait par l'intégration d'un système complet (voir n° 7). On passe ensuite de $F^{(k-1)}$ à $F^{(k-2)}$, et ainsi de suite, par la méthode exposée dans la démonstration du théorème actuel (direct); ceci n'exige plus que des changements de variables successifs, sans intégration nouvelle.

15. *Sur l'intégration des faisceaux considérés.* — En ce qui concerne l'intégration du faisceau F donné, elle est ramenée à celle des faisceaux types de la forme (104) ou (109). Or ceux-ci se présentent comme résultant de prolongements successifs ⁽¹⁾, dans le premier cas, du faisceau

$$(110) \quad X = \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \eta_h \frac{\partial f}{\partial y_h} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1};$$

et, dans le second cas, du faisceau

$$(111) \quad \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dans les deux cas, le prolongement se fait en considérant x_0 comme une fonction de x , dont les dérivées successives sont x_1, x_2, \dots .

Dans le second cas [forme (109)], on a donc immédiatement la solution explicite, avec $l + 2$ constantes arbitraires,

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = W(x; a_0, a_1, \dots, a_{l+1}), \\ x_1 = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad x_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad x_{l+1} = \frac{\partial^{l+1} W}{\partial x^{l+1}}. \end{array} \right.$$

(1) *M.*, n° 15, p. 367.

Il est sous-entendu que les invariants t_1, \dots, t_q , qui doivent être égaux à des constantes, peuvent figurer dans W d'une manière quelconque.

Indépendamment de la théorie du prolongement, on voit, du reste, que les sous-faisceaux complets à considérer s'obtiennent en adjoignant aux $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ une transformation de la forme $X + \omega \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}$, (ω étant arbitraire); et que tout revient à trouver les invariants de celle-ci. Or cela équivaut à intégrer le système

$$dx = \frac{dx_0}{x_1} = \frac{dx_1}{x_2} = \dots = \frac{dx_l}{x_{l+1}} = \frac{dx_{l+1}}{\omega(x, x_0, x_1, \dots, x_{l+1})},$$

c'est-à-dire à intégrer une équation différentielle, arbitraire,

$$\frac{d^{l+2}x_0}{dx^{l+2}} = \omega\left(x, x_0, \frac{dx_0}{dx}, \dots, \frac{d^{l+1}x_0}{dx^{l+1}}\right);$$

d'où les formules (112).

Dans le premier cas [forme (104)], on est conduit de même à intégrer un système de la forme ($h = l - k + 1$)

$$(113) \quad dx = \frac{dx_0}{x_1} = \frac{dy_1}{r_1(x, x_0, x_1, y_1, \dots, y_h)} = \dots = \frac{dy_h}{r_h(x, x_0, x_1, y_1, \dots, y_h)} \\ = \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_3} = \dots = \frac{dx_{k-1}}{x_k} = \frac{dx_k}{\omega(x, x_0, \dots, x_k, y_1, \dots, y_h)},$$

où la fonction ω est arbitraire.

Considérons d'abord le système partiel, qui en résulte,

$$(114) \quad \frac{dy_i}{dx} = r_i\left(x, x_0, \frac{dx_0}{dx}, y_1, \dots, y_h\right) \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Il définit les y_i comme des fonctionnelles de x et x_0 ; et, par suite, ω comme une fonctionnelle de x et x_0 , de sorte qu'on a, pour x_0 une équation fonctionnelle

$$\frac{d^{k+1}x_0}{dx^{k+1}} = \bar{\omega}\left[\left(x, x_0, \frac{dx_0}{dx}, \dots, \frac{d^k x_0}{dx^k}\right)\right].$$

Si donc, laissant de côté la détermination de toutes les intégrales complètes, on se propose seulement de chercher toutes leurs multi-

plicités intégrales à $r + 1$ dimensions, il sera loisible de se borner au système (114), en y considérant x_0 comme une fonction arbitraire de x .

Telle est, dans ce cas, la réduction d'intégration à laquelle on arrive. Elle équivaut à considérer que l'on est ramené à intégrer le faisceau (110), à $h + 3$ variables, dont le second dérivé est, par hypothèse, de degré 5.

Revenons au cas de la forme canonique (109), en nous plaçant, comme nous venons de le faire pour le cas général, au point de vue des multiplicités intégrales à $r + 1$ dimensions. Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ($m = n + p$, $n = r + 2$, $p = q + l + 1$) les variables initiales; le changement de variables qui a conduit à la forme canonique donne l'expression de ces ξ_i en fonction de $x, x_0, x_1, \dots, x_{l+1}; t_1, \dots, t_q; z_1, \dots, z_r$; et la multiplicité générale cherchée s'obtient en remplaçant dans ces formules x_0 par une fonction arbitraire de x et x_1, x_2, \dots, x_{l+1} par les dérivées successives de cette fonction; enfin t_1, \dots, t_q par des constantes arbitraires. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que le faisceau F a une *intégrale générale explicite*.

Réciproquement, *tout faisceau qui a, au sens qui vient d'être expliqué, une intégrale générale explicite de la forme précédente a des dérivés successifs de degrés $n + 1, n + 2, n + 3, \dots$, si lui-même est de degré n .*

Soient, en effet, F ce faisceau, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ les variables qui y figurent, et

$$(115) \quad \xi_i = \mathcal{F}_i(x, x_0, x_1, \dots, x_{l+1}; t_1, \dots, t_q; z_1, \dots, z_r) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

les formules qui définissent l'intégrale générale quand on y fait

$$(116) \quad \begin{cases} x_0 = \psi(x), & x_1 = \psi'(x), & \dots, & x_{l+1} = \psi^{(l+1)}(x), \\ t_1 = a_1, & \dots, & t_q = a_q, \end{cases}$$

$\psi(x)$ étant une fonction arbitraire. Les fonctions \mathcal{F}_i sont des fonctions indépendantes, relativement aux arguments qui y figurent; puisqu'il ne peut exister aucune relation entre les ξ_i seuls.

Cela étant, si $m = l + 3 + q + r$, on peut considérer les équations (115) comme définissant un changement de variables, qui fera passer du faisceau F à un faisceau Φ , pour lequel les formules (116) donneront la solution générale. Ce faisceau Φ sera, d'après cela,

dualistique du système de Pfaff

$$dx_0 - x_1 dx = 0, \quad dx_1 - x_2 dx = 0, \quad \dots, \quad dx_l - x_{l+1} dx = 0, \\ dt_1 = 0, \quad \dots, \quad dt_q = 0,$$

et ne sera autre que le faisceau (109). Donc F aura pour forme canonique (109), et possède, par conséquent, la propriété énoncée.

Examinons maintenant le cas où m est inférieur au nombre des arguments des fonctions (115). Nous leur adjoindrons des formules arbitraires, de la même forme,

$$(117) \quad \eta_j = \mathcal{G}_j(x, x_0, x_1, \dots, x_{l+1}; t_1, \dots, t_q; z_1, \dots, z_r) \quad (j=1, 2, \dots, \mu),$$

de manière que $m + \mu = l + 3 + q + r$; et nous aurons ainsi, de nouveau, un changement de variables. Si on l'applique au faisceau (109), dont l'intégrale générale est (116), on obtiendra un faisceau U dont les transformations de base seront de la forme

$$\mathfrak{u}_h = \mathfrak{X}_h + \mathfrak{Y}_h,$$

\mathfrak{X}_h étant une transformation du faisceau donné F, et \mathfrak{Y}_h ayant la forme

$$\mathfrak{Y}_h = \sum_{j=1}^{\mu} H_{h,j}(\xi_1, \dots, \xi_m; \eta_1, \dots, \eta_{\mu}) \frac{\partial f}{\partial \eta_j}.$$

D'après le raisonnement fait tout à l'heure, ce faisceau U possédera les propriétés de l'énoncé. Or on a

$$(\mathfrak{u}_h, \mathfrak{u}_k) = (\mathfrak{X}_h, \mathfrak{X}_k) + \sum_{j=1}^{\mu} H_{h,k|j}(\xi | \eta) \frac{\partial f}{\partial \eta_j},$$

car les \mathfrak{X} ne dépendent pas des η . On en conclut que la base du dérivé U' de U sera formée, comme celle de U, de transformations du type $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$, où \mathfrak{X} ne dépend pas des η . Les formules de structure de U étant de la forme

$$(\mathfrak{u}_h, \mathfrak{u}_k) \equiv c_{hk} \mathfrak{V} \pmod{U},$$

avec $\mathfrak{V} = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$, on aura donc pour F les formules de structure

$$(\mathfrak{X}_h, \mathfrak{X}_k) \equiv c_{h,k} \mathfrak{X} \pmod{F}.$$

Ce raisonnement, où il n'est pas supposé que les transformations \mathfrak{X}_h

soient nécessairement divergentes, suffit à prouver que le degré de F' est supérieur d'une unité, au plus, au degré de F . Et comme on peut ensuite raisonner sur F' et U' comme on l'a fait pour F et U , la proposition énoncée se trouve entièrement établie (1).

IV. — Systèmes automorphes relatifs au groupe général des transformations de contact.

16. *Équations de définition des transformations infinitésimales du groupe général des transformations de contact.* — On a vu au n° 12 que, dès que l'on prend comme inconnues, pour l'intégration d'un faisceau F de l'espèce considérée dans ce mémoire, le système des fonctions $u_0, u_1, \dots, u_s; v_1, \dots, v_s$, constitué par les éléments variables des intégrales complètes, u_0, u_1, \dots, u_s (les autres étant les invariants de F), et par les fonctions polaires v_1, \dots, v_s respectivement associées à u_1, \dots, u_s , la solution la plus générale se déduit d'une solution particulière quelconque, en y effectuant, sur les fonctions u et v ; la transformation de contact générale de l'espace u_0, u_1, \dots, u_s .

Ces $2s + 1$ inconnues u et v se trouvent donc, en fait, satisfaire à un système automorphe (2), dont le groupe associé est le groupe général des transformations de contact de l'espace à $s + 1$ dimensions.

Il sera intéressant de mettre ce fait en évidence, en comparant la forme canonique dont un tel système automorphe est susceptible avec les équations obtenues précédemment pour la détermination de ces fonctions. Il est nécessaire pour cela de trouver d'abord la forme

(1) Je rappelle que le théorème, dans le cas où l'on n'introduit pas les variables $t_1, \dots, t_q; z_1, \dots, z_r$, a été donné (avec un énoncé différent, en tant qu'il fait intervenir un système de Pfaff) par M. Cartan (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 42, 1914, p. 14-15).

(2) Voir mon mémoire des *Acta mathematica*, t. 28, 1904, p. 311. Remarquons que l'on pourrait rattacher la propriété en question au fait que le faisceau F admet un groupe de transformations, isomorphe au groupe général des transformations de contact; mais nous laisserons ici ce point de vue de côté. Remarquons aussi que, pour $s = 1$, la propriété en question n'est exacte, sous la forme énoncée, que dans le cas où le dérivé F' de F est complet. (Voir la fin du n° 12 et le paragraphe III du présent mémoire.)

canonique des équations de définition du groupe G. Bien qu'il s'agisse des équations de définition des transformations finies du groupe, il sera bon d'examiner d'abord ce qui se passe par les équations de définition des transformations infinitésimales.

Je reprends donc le faisceau (65), à savoir :

$$(118) \quad P_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, s),$$

et je cherche les transformations infinitésimales qui le laissent invariant. Soit

$$(119) \quad Zf = \sum_{i=1}^m \varpi_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_0}$$

une telle transformation. Les relations de crochets

$$(Zf, P_i f) \equiv 0, \quad (Zf, X_i f) \equiv 0 \quad (\text{mod } P_i, X_i)$$

donnent immédiatement

$$(120) \quad \xi_i + \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = 0, \quad \varpi_i - \frac{d\lambda}{dx_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s).$$

Ce sont les formules de Lie, bien connues : le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ dans Zf étant, d'autre part,

$$(121) \quad \xi_0 = \lambda + \sum_{i=1}^m p_i \xi_i.$$

Les inconnues sont : λ , les ξ_i et les ϖ_i ; et les équations (120) sont $2s$ équations du premier ordre. On en déduit, par différentiation, $s(2s-1)$ équations nouvelles du premier ordre :

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varpi_k}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d\xi_i}{dx_k} + \frac{\partial \varpi_k}{\partial p_i} = 0 \quad (i \neq k=1, 2, \dots, s), \\ \frac{d\xi_i}{dx_i} + \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \quad (i=1, 2, \dots, s). \end{array} \right.$$

Le système (120), (122) se compose de $s(2s+1)$ équations du premier ordre. Nous allons vérifier qu'il est complètement intégrable⁽¹⁾.

(1) Pour la méthode suivie, voir M. JANET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8^e série, t. III, 1920, p. 111.

Je résous d'abord de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{\partial \xi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} && (i = 2, 3, \dots, s; k < i), \\
 (b) \quad & \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} - \frac{d\xi_i}{dx_i} && (i = 1, 2, \dots, s), \\
 (b') \quad & \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_k} = -\frac{d\xi_k}{dx_i} && (i = 1, 2, \dots, s; k \neq i), \\
 (b'') \quad & \frac{d\varpi_i}{dx_k} = \frac{d\varpi_k}{dx_i} && (i = 2, 3, \dots, s; k < i), \\
 (c) \quad & \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = -\xi_k && (k = 1, 2, \dots, s), \\
 (c') \quad & \frac{d\lambda}{dx_k} = \varpi_k && (k = 1, 2, \dots, s).
 \end{aligned}$$

Pour les équations (b'') et (c'), il faut entendre qu'elles sont considérées comme résolues par rapport aux $\frac{\partial \varpi_i}{\partial x_k}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$.

On vérifie sans peine qu'on obtiendra dans les premiers membres, par différentiations successives, toutes les dérivées de ces premiers membres, et chacune une fois seulement, en différentiant de toutes les manières (différentes) :

- 1° Les (a) par rapport à x_0, x_1, \dots, x_m et aux p_j pour lesquels on a $1 \leq j \leq k$ ou $i \leq j$;
- 2° Les (b) par rapport à toutes les variables;
- 3° Les (b') par rapport à x_0, x_1, \dots, x_s et aux p_j par lesquels on a $1 \leq j \leq k$ avec $j \neq i$;
- 4° Les (b'') par rapport aux x_j pour lesquels on a $0 \leq j \leq k$ ou $i \leq j$;
- 5° Les (c) par rapport à x_0, x_1, \dots, x_s et aux p_j pour lesquels on a $1 \leq j \leq k$;
- 6° Les (c') par rapport aux x_j pour lesquels on a $0 \leq j \leq k$.

La forme donnée aux systèmes est donc *complète*, et il reste à prouver que si l'on différentie une fois seulement, de toutes les manières possibles, on n'obtiendra pas d'équations qui ne soient des conséquences des équations (E) obtenues par les différentiations ci-dessus précisées.

La vérification est inutile pour les équations (c) et (c') dont les conditions d'intégrabilité s'expriment par les équations (b) et (b').

Pour les équations (a), nous avons les équations (E)

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial p_i \partial p_j} \quad (j \leq k < i \text{ ou } k < i \leq j),$$

et l'on a aussi en différentiant dans l'ordre inverse, si $j \neq k$,

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial p_i \partial p_k} \quad (j < i).$$

On a donc les deux formules si $j < k < i$; et en égalant, il vient

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} \right) = 0;$$

ce qui est une équation (E), puisqu'on a $j < k$ et $k < i$.

La même vérification vaut pour les (b''), relativement aux différentiations faites par rapport aux x_j .

Les (b) donnent, comme équations (E), d'abord

$$\frac{d}{dx_k} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_i} = \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_k} \frac{d \xi_i}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{d \lambda}{dx_k} - \frac{d}{dx_i} \frac{d \xi_i}{dx_k}$$

ou

$$(123) \quad \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_i} = \frac{\partial \varpi_k}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{d \xi_i}{dx_k}.$$

On a, d'autre part, si $i \leq k < i$,

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d \varpi_i}{dx_k} = \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d \varpi_k}{dx_i} = \frac{\partial \varpi_k}{\partial x_0} + \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \varpi_k}{\partial p_i}$$

ou

$$(124) \quad \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d \varpi_i}{dx_k} = \frac{\partial \varpi_k}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{d \xi_i}{dx_k},$$

car, k étant $< i$, on peut utiliser (b') et appliquer la différentiation $\frac{d}{dx_i}$.

On voit que les expressions (123) et (124) sont identiques.

Les (b) donnent encore, comme équations (E), pour $j \neq i$,

$$\frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0 \partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{d \xi_i}{dx_i},$$

donc

$$(125) \quad \frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial p_i \partial p_j} = - \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial p_j}.$$

On a, d'autre part, par les (b'),

$$(126) \quad \frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial p_j \partial p_i} = - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d \tilde{z}_j}{dx_i} = - \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial p_i}.$$

L'identité des seconds membres de (125) et (126) résulte de (a).

Les (b') donnent d'abord, comme équation (E),

$$(127) \quad \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_k} = - \frac{d}{dx_j} \frac{d \tilde{z}_k}{dx_i} = - \frac{d}{dx_i} \frac{d \tilde{z}_k}{dx_j},$$

et l'on a, d'autre part, par (b''), pour $j < i$ (puisque $i \neq k$),

$$(128) \quad \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d \varpi_i}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d \varpi_j}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \varpi_j}{\partial p_k}.$$

Or il suffit de tenir compte de (b'), si $j \neq k$, pour constater l'identité des seconds membres de (127) et (128).

Dans le cas $j = k$, le second membre de (128) se calcule au moyen de (b), et devient, à cause de (c'),

$$\frac{d}{dx_i} \frac{\partial \lambda}{dx_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{d \tilde{z}_k}{dx_k} = \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_i} \frac{d \tilde{z}_k}{\partial x_k}.$$

Ceci est égal au second membre de (127) (puisque $j = k$), augmenté de $\frac{\partial \varpi_i}{\partial x_0}$; mais la même relation a lieu alors entre les premiers membres de (127) et (128). La vérification se fait donc encore.

Les (b') donnent ensuite, pour $1 \leq j \leq k$ et $j \neq i$, les équations (E) :

$$(129) \quad \frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial p_k \partial p_j} = - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{d \tilde{z}_k}{dx_i} = - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial p_j},$$

et ils donnent, en outre,

$$(130) \quad \frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial p_j \partial p_k} = - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d \tilde{z}_j}{dx_i} = - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial p_k}.$$

L'identité des seconds membres de (129) et (130) résulte des équations (E) déduites de (a).

La vérification des conditions d'intégrabilité est ainsi terminée.

17. *Équations de définition du groupe général des transformations de contact (transformations finies).* — Les transformations de contact (finies) sont caractérisées par les relations de crochets (89) du n° 11. Mais ces relations ne constituent pas un système complètement intégrable.

En effet, si elles constituaient un système complètement intégrable, on devrait, en exprimant que la transformation infinitésimale

$$(131) \quad Zf = \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{j=0}^m \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

laisse le système (89) invariant (quand on l'applique aux variables indépendantes), trouver toutes les équations de définition du premier ordre des transformations infinitésimales de contact.

Or, il n'en est rien. Pour le voir, il suffit de remarquer que ces équations ont été déduites de la propriété d'invariance du crochet

$$(132) \quad [f, g]_{x,p} = \rho [f, g]_{y,q}$$

appliquée aux fonctions particulières y_i et q_j ; et que, réciproquement, elles entraînent cette identité (132), en vertu de la formule qui donne le crochet de deux fonctions f, g de $2s + 1$ variables quelconques z_0, z_1, \dots, z_{2s} , à savoir

$$(133) \quad [f, g]_{x,p} = \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{\partial(f, g)}{\partial(z_\alpha, z_\beta)} [z_\alpha, z_\beta]_{x,p}.$$

On en conclut que, au lieu d'exprimer l'invariance par Zf du système (89), il revient au même d'exprimer celle de l'identité générale (132). Ceci se fait en écrivant que

$$Z([f, g]_{x,p}) = Z\rho \cdot [f, g]_{y,q}$$

est conséquence de (132), c'est-à-dire que l'on a

$$(134) \quad Z([f, g]_{x,p}) = \frac{Z\rho}{\rho} \cdot [f, g]_{x,p}.$$

Nous poserons, pour abrégé,

$$(135) \quad Z\rho = \mu \cdot \rho,$$

et l'identité (134) deviendra

$$(136) \quad Z([f, g]_{x,p}) = \mu \cdot [f, g]_{x,p}.$$

Pour l'expliciter, il faut prolonger Zf , en considérant f et g comme des fonctions non transformées. On a, par conséquent,

$$0 = Zdf = Z \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i + \sum_{j=0}^s \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right);$$

d'où

$$Z \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \right) = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_h} - \sum_{j=0}^s \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial p_h} \quad (h = 1, 2, \dots, s),$$

$$Z \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_k} - \sum_{j=0}^s \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, s).$$

Si l'on introduit les différentiations totales $\frac{d}{dx_k}$, et si l'on pose comme au n° 16 [équ. (121)]

$$(137) \quad \lambda = \zeta_0 - \sum_{i=1}^s p_i \zeta_i,$$

on peut remplacer ces formules par les suivantes :

$$(138) \quad Z \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \right) = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_h} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_h} + \zeta_h \right),$$

$$(139) \quad Z \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} \right) = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_h} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_h} - \frac{\partial f}{\partial x_0} \left(\frac{d\lambda}{dx_h} - \varpi_h \right),$$

$$(140) \quad Z \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right) = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_0} - \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0}.$$

L'identité (136) s'écrit, d'autre part,

$$(141) \quad \sum_{h=1}^s \left\{ \left| Z \frac{\partial f}{\partial p_h} \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial p_h} \quad Z \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| \right\} = \mu [f, g]_{x,p}.$$

Je l'applique d'abord en prenant pour f et g tous les couples de variables indépendantes; et je trouve successivement :

1° Avec x_j, x_k ($j, k > 0$), les conditions

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} = 0;$$

2° Avec p_j, p_k , les conditions

$$\frac{d\varpi_k}{dx_j} - \frac{d\varpi_j}{dx_k} = 0;$$

3° Avec x_j, p_k ($j > 0, j \neq 0, j \neq k$), les conditions

$$\frac{\partial \varpi_k}{\partial p_j} + \frac{d\xi_j}{dx_k} = 0;$$

4° Avec x_j, p_j , les conditions

$$\frac{\partial \varpi_j}{\partial p_j} + \frac{d\xi_j}{dx_j} = -\mu;$$

5° Avec x_0, x_j , les conditions

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} + \xi_j = 0;$$

6° Avec x_0, p_j (en tenant compte des résultats 3° et 4°), les conditions

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} - \varpi_j = 0.$$

On vérifie ensuite que ces conditions suffisent pour que la relation générale (141) ait lieu.

Nous voyons donc qu'il manque, pour avoir toutes les équations (120), (121), la relation complémentaire

$$(142) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} + \mu = 0.$$

18. *Équation complémentaire.* — On aurait pu remarquer, du reste, que tandis que nous avons, pour les transformations infinitési-

males de contact, $s(2s + 1)$ équations de définition du premier ordre, les relations de crochets (89) ne nous en donnaient pour les transformations finies (après éliminations de ρ), que $s(2s + 1) - 1$.

Il y a donc une équation complémentaire à chercher. Elle va nous être fournie par la considération du déterminant fonctionnel

$$(143) \quad \Delta = \frac{\partial(y_0, y_1, \dots, y_s, q_1, \dots, q_s)}{\partial(x_0, x_1, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s)}.$$

Soit, plus généralement,

$$(144) \quad D = \frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_{2s})}{\partial(x_0, x_1, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s)},$$

f_0, f_1, \dots, f_{2s} étant des fonctions non transformées. Les formules (138), (139), (140) donnent

$$ZD = -D \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^s \frac{d\zeta_i}{dx_i} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial\omega_i}{\partial p_i} \right),$$

car on peut remplacer la ligne générale de D par

$$\frac{\partial f_h}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial f_h}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_h}{\partial x_s}, \quad \frac{\partial f_h}{\partial p_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_h}{\partial p_s}.$$

On a donc, si l'on tient compte seulement des relations (4°) du numéro précédent,

$$ZD = -D \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_0} - s\mu \right);$$

de sorte que la formule (142) équivaut à

$$ZD = (s + 1)\mu \cdot D.$$

Si l'on compare à la formule (136), on en conclut

$$\frac{ZD}{D} = (s + 1) \frac{Z[f, g]}{[f, g]},$$

ce qui équivaut à l'invariance du quotient

$$(145) \quad D : ([f, g])^{s+1}$$

par toute transformation de contact.

Si nous appliquons ceci au déterminant Δ et à la transformation (88), nous aurons $\Delta_{x,p} = \Delta$, $\Delta_{y,q} = 1$; et la relation (132) nous donnera

$$(146) \quad \Delta = \rho^{s+1}.$$

C'est l'équation complémentaire cherchée.

19. *Les systèmes automorphes.* — Les invariants fondamentaux à considérer sont donc les rapports des crochets de Poisson formés avec $2s + 1$ fonctions, et le rapport du déterminant fonctionnel de ces fonctions à la puissance $(s + 1)^{\text{ième}}$ de l'un des crochets. Ceci donne pour les systèmes automorphes en question la forme suivante.

Je me borne, pour simplifier, au cas où il y a autant de fonctions inconnues que de variables indépendantes (*systèmes automorphes de première espèce*); je désigne les fonctions inconnues par x_0, x_1, \dots, x_{2s} , et les variables indépendantes par $u_0, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$; le crochet sera

$$(147) \quad [f, g]_{u,v} = \sum_{i=1}^s \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial f}{\partial u_0} \\ \frac{\partial g}{\partial v_i} \frac{\partial g}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial g}{\partial u_0} \end{array} \right|.$$

Le système automorphe s'écrira donc, σ étant un facteur indéterminé,

$$(148) \quad [x_i, x_k]_{u,v} = \sigma \cdot \varphi_{ik}(x) \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, 2s),$$

$$(149) \quad \Delta_{u,v}(x_0, x_1, \dots, x_{2s}) = \sigma^{s+1} \varphi(x).$$

On a écrit, dans les seconds membres, la lettre x pour désigner l'ensemble des variables x_0, x_1, \dots, x_{2s} ; et le premier membre de (149) désigne le déterminant fonctionnel des fonctions entre parenthèses par rapport aux variables $u_0, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$.

20. *Cas du problème de Pfaff.* — Pour ramener à cette forme invariante le système qui définit la réduction du faisceau donné F, dans le cas $r = 0$, $n = 2s$, $p = 1$, à la forme canonique (65), laquelle est, avec les notations actuelles,

$$(150) \quad V_i f = \frac{\partial f}{\partial v_i}, \quad U_i f = \frac{\partial f}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial f}{\partial u_0} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

prenons d'abord ce système sous la forme (60), c'est-à-dire ici :

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{v_i, u_k\} = 0, \quad \{v_i, u_i\} = \rho, \quad \{v_i, u_0\} = \rho v_i \\ \{v_i, v_k\} = 0, \quad \{u_i, u_k\} = 0, \quad \{u_0, u_i\} = 0 \\ (i, k = 1, 2, \dots, s; i \neq k). \end{array} \right.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 17 pour l'identité (132), nous verrions que l'on exprime par ces équations l'invariance du crochet général, établie au n° 8, ce qui donne ici, puisqu'il n'y a pas de transformations distinguées dans F,

$$(152) \quad \{f, g\} = \rho [f, g]_{u, v}.$$

Or, pour exprimer que cette identité a lieu, il suffit d'écrire qu'elle a lieu quand on remplace f et g par deux quelconques des variables x_0, x_1, \dots, x_{2s} . La formule (133) s'applique, en effet, au crochet $\{f, g\}$, car elle résulte de la formule

$$\{f, g\} = \sum_{h=0}^{2s} \{f, x_h\} \frac{\partial g}{\partial x_h},$$

conséquence elle-même du théorème des fonctions composées.

Si donc on pose [$cf.$, équ. (35)],

$$(153) \quad \{x_i, x_k\} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} & -\xi_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} & -\xi_{n,i} \\ \xi_{1,k} & \dots & \xi_{n,k} & 0 \end{vmatrix} = \varphi_{i,k}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \varphi_{i,k}(x)$$

(avec $n = 2s; i, k = 0, 1, 2, \dots, n$), on aura le système

$$(154) \quad \rho [x_i, x_k] = \varphi_{i,k}(x) \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, 2s),$$

qui est de la forme (148), avec $\rho\sigma = 1$.

Les fonctions $\varphi_{i,k}$, ainsi introduites, jouissent de propriétés que nous allons indiquer.

On a d'abord $\varphi_{i,k} = -\varphi_{k,i}$ (n° 5).

D'autre part, les transformations

$$(155) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{x_i, f\} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} & -\xi_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} & -\xi_{n,i} \\ X_1 f & \dots & X_n f & 0 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^n \varphi_{i,k}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

sont des transformations du faisceau. Il y en a, parmi elles, n qui sont divergentes. En effet dans le tableau des $\xi_{k,i}$ il y a au moins un déterminant de degré n qui n'est pas nul. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit celui qui correspond à $i=1, 2, \dots, n$: alors les $\{x_i, f\}$, pour $i=1, 2, \dots, n$, sont divergentes.

Supposons, pour le prouver, que le contraire ait lieu, c'est-à-dire qu'il y ait une identité

$$(156) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \{x_i, f\} = 0;$$

et posons

$$(157) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_{ki} = \xi_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Les ξ_k ne seront pas tous nuls, et l'identité (156) s'écrira

$$(158) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & \xi_n \\ X_1 f & \dots & X_n f & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or le déterminant des $c_{i,k}$ n'étant pas nul, on pourra satisfaire aux équations

$$\sum_{i=1}^n c_{k,i} \rho_i + \xi_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n);$$

et les ρ_i ne sont pas tous nuls; mais il suffit alors de multiplier les n premières colonnes de (158) par ρ_1, \dots, ρ_n et d'ajouter à la dernière pour ramener l'équation (158) à la forme

$$\sum_{i=1}^n \rho_i X_i f = 0,$$

identité qui est impossible. Il y aurait donc contradiction.

Ainsi les $\{x_i, f\}$ définissent entièrement le faisceau donné F.

Observons encore la formule, qui résulte des équations (155),

$$(159) \quad \{\varphi, f\} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \varphi_{ik}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

qu'on peut écrire aussi

$$(160) \quad \{\varphi, f\} = \sum_{(i,k)} \varphi_{i,k}(x) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{vmatrix}.$$

Je dis enfin que l'on a, Zf étant une transformation infinitésimale convenablement choisie,

$$(161) \quad (\{x_i, f\}, \{x_j, f\}) \equiv \{x_i, x_j\} \cdot Zf \pmod{F};$$

de sorte que les $\varphi_{i,j}$ sont fonctions de structure pour le faisceau, mis sous la forme (155), en même temps que ces fonctions sont coefficients des transformations de base (155).

Pour le voir, il suffit de se reporter aux crochets de Poisson eux-mêmes. On a, avec les notations (150),

$$[x_i, f] = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial x_i}{\partial v_k} U_k f - \frac{dx_i}{du_k} V_k f \right),$$

$$(V_k f, U_k f) = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

De là

$$(162) \quad ([x_i, f], [x_j, f]) \equiv \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial x_i}{\partial v_k} \frac{dx_j}{du_k} - \frac{\partial x_j}{\partial v_k} \frac{dx_i}{du_k} \right) \frac{\partial f}{\partial u_0} \pmod{F},$$

c'est-à-dire

$$(163) \quad ([x_i, f], [x_j, f]) \equiv [x_i, x_j] \frac{\partial f}{\partial u_0} \pmod{F}.$$

On en conclut, en tenant compte de (152),

$$(164) \quad (\{x_i, f\}, \{x_j, f\}) \equiv \rho \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial u_0};$$

c'est-à-dire la formule (161), avec [*cf.* n° 8, équ. (59)],

$$(165) \quad Zf = \rho \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

21. *Calcul de l'équation complémentaire.* — Il reste à calculer l'équation (149). A cet effet, je considère d'abord le déterminant

$$(166) \quad \Delta_0 = \frac{\partial(x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m)}.$$

Ses lignes peuvent être remplacées par

$$\frac{dx_k}{du_1}, \dots, \frac{dx_k}{du_m}, \frac{\partial x_k}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial x_k}{\partial v_m} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ou par

$$-\frac{\partial x_k}{\partial v_1}, \dots, -\frac{\partial x_k}{\partial v_m}, \frac{dx_k}{du_1}, \dots, \frac{dx_k}{du_m} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on multiplie les deux déterminants ainsi écrits, on obtient le déterminant dont l'élément général est le crochet $[x_h, x_k]$. Ce déterminant symétrique gauche de degré pair $n = 2s$ est donc le carré de Δ_0 . Mais on sait former l'expression de la racine carrée d'un déterminant symétrique gauche de degré pair $n = 2s$ en fonction de ses $s(2s - 1)$ éléments indépendants. On peut donc considérer comme connue l'expression de Δ_0 en fonction rationnelle entière et homogène de degré s , des crochets $[x_h, x_k]$. En tenant compte de l'identité (152), on aura ainsi

$$(167) \quad \rho^s \Delta_0 = G_0(\{x_i, x_j\}),$$

le second membre étant la racine carrée du déterminant formé avec les $\{x_i, x_j\} = \varphi_{i,j}$, pour $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Le même résultat s'appliquera, *mutatis mutandis*, aux autres coefficients $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ du déterminant Δ , supposé développé sous la forme

$$(168) \quad \Delta = \Delta_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_0} + \Delta_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_0} + \dots + \Delta_n \frac{\partial x_n}{\partial u_0}.$$

Quant aux facteurs $\frac{\partial x_k}{\partial u_0}$, on peut, dans Δ , les remplacer par des quantités de la forme

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_0} + \sum_{h=1}^m \lambda_h \frac{dx_k}{du_h} + \sum_{h=1}^m \mu_h \frac{\partial x_k}{\partial v_h} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

On peut donc leur substituer les valeurs tirées de (163), ou de (164), en choisissant pour toutes ces valeurs le même système de deux entiers i, j . Dans le premier membre de (164) figure alors le crochet

des deux transformations infinitésimales connues

$$\{x_i, f\} = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{i,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad \{x_j, f\} = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{j,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}.$$

On a ainsi

$$(169) \quad \rho \frac{\partial f}{\partial u_0} \equiv \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \pmod{F},$$

les ψ_α étant des fonctions connues des $\varphi_{h,k}$ et de leurs dérivées partielles du premier ordre, et l'on a l'expression cherchée

$$(170) \quad \rho^{i+1} \Delta = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha \Delta_\alpha = \varphi(x),$$

qui se trouvera nécessairement indépendante du choix particulier des indices i, j , fait au cours du calcul que nous venons d'indiquer. Cela résulte de l'identité (161), établie ci-dessus.

On retrouve ainsi le caractère de l'équation (170) d'être le résultat des conditions d'intégrabilité du système (154).

22. *Réciproque.* — Donnons-nous, inversement, des équations du type (154); le déterminant des $\varphi_{i,k}$ (qui devra être, à cause des premiers membres, symétrique gauche) ne devra pas, pour la même raison, avoir tous ses mineurs de degré n nuls.

Ces équations équivaldront aux identités

$$(171) \quad \rho[x_i, f] = \sum_{k=0}^n \varphi_{i,k}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n);$$

et l'on pourra désigner les seconds membres par la notation $\{x_i, f\}$, et considérer le faisceau F défini par n de ces transformations divergentes entre elles.

En formant les crochets, membre à membre, pour tous les couples de deux équations (171), on obtient des conditions d'intégrabilité. Si nous posons

$$(172) \quad \{\varphi, f\} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \varphi_{i,k}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les seconds membres s'écrivent $\{x_i, f\}$; et l'on trouve, comme au n° 20,

$$(173) \quad \rho \frac{\partial f}{\partial u_0} \{x_i, x_j\} \equiv (\{x_i, f\}, \{x_j, f\}) \pmod{F},$$

pour tous les couples d'indices i, j . On a, du reste,

$$(174) \quad \{x_i, x_j\} = \varphi_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Les conditions d'intégrabilité en question s'écrivent donc

$$(175) \quad (\{x_i, f\}, \{x_j, f\}) \equiv \varphi_{ij} Zf \pmod{F},$$

en désignant par Zf une certaine transformation infinitésimale.

En introduisant deux fonctions arbitraires θ, ψ des variables x_0, x_1, \dots, x_n , on peut les remplacer par la formule unique

$$(176) \quad (\{\theta, f\}, \{\psi, f\}) \equiv \{\theta, \psi\} Zf \pmod{F}.$$

En tenant compte des formules ainsi acquises, le calcul de l'équation complémentaire se fera comme au n° 21; elle n'intervient pas, du reste, dans l'intégration, et garde le rôle, que nous lui avons déjà reconnu, de condition d'intégrabilité des équations (171).

Reste à prouver que les conditions d'intégrabilité (175) sont suffisantes, et à indiquer comment se fera l'intégration.

Je remarque, à cet effet, que la transformation infinitésimale $\{\varphi, f\}$ est en involution avec toutes les transformations du faisceau F qui laissent la fonction φ invariante. Car, d'après (176), le crochet de $\{\varphi, f\}$ avec une transformation quelconque de F ,

$$(177) \quad \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} \{x_{\alpha}, f\},$$

est congru (mod F) à

$$-\sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} \{x_{\alpha}, \varphi\} Zf,$$

de sorte qu'il est nul pour

$$\sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} \{x_{\alpha}, \varphi\} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque φ est un invariant de la transformation (177).

Dès lors, le crochet $\{\varphi, f\}$ a, relativement au faisceau F, la même signification que celui qui a été introduit au n° 5; et l'on peut reprendre toute l'analyse du n° 6.

On pourra donc se donner u_0 arbitrairement, prendre pour u_1 une intégrale de $\{u_0, f\} = 0$, pour u_2 une intégrale du système (complet) $\{u_0, f\} = 0, \{u_1, f\} = 0$, et ainsi de suite, prendre enfin pour u_s une intégrale du système (complet)

$$\{u_0, f\} = 0, \quad \{u_1, f\} = 0, \quad \dots, \quad \{u_{s-1}, f\} = 0.$$

Quant au calcul des v_k , on obtient bien facilement une méthode calquée sur celle du n° 8, en remarquant que l'on a

$$[u_0, f] = -\sum_{k=1}^s v_k \frac{\partial f}{\partial u_k}, \quad [u_h, f] = -\frac{\partial f}{\partial v_k} \quad (h=1, 2, \dots, s),$$

d'où l'identité

$$(178) \quad [u_0, f] = \sum_{k=1}^s v_k [u_k, f].$$

Comme, d'autre part, les équations (171) équivalent à l'identité

$$(179) \quad \{\varphi, f\} = \rho[\varphi, f],$$

on peut remplacer (178) par

$$(180) \quad \{u_0, f\} = \sum_{k=1}^s v_k \{u_k, f\},$$

et c'est cette identité qui fournira les v_k sans intégration nouvelle.