

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELIE CARTAN

Sur certaines formes Riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 44 (1927), p. 345-467

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__345_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
CERTAINES FORMES RIEMANNIENNES REMARQUABLES
DES
GÉOMÉTRIES A GROUPE FONDAMENTAL SIMPLE

PAR M. E. CARTAN

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire récent ⁽¹⁾ j'ai déterminé tous les espaces de Riemann \mathcal{E} à ds^2 défini positif, jouissant de la propriété que leur courbure riemannienne soit conservée par le transport parallèle. On peut tous les déduire de ceux d'entre eux que j'ai appelés *irréductibles*. Ces derniers se partagent en classes, dont chacune comprend des espaces à courbure partout positive ou nulle et des espaces à courbure partout négative ou nulle; chaque classe ne contient du reste essentiellement qu'un espace de chacune de ces deux catégories, tous les autres s'en déduisant par un simple changement de l'unité de longueur.

Dans un Mémoire des *Annali di Matematica* ⁽²⁾, j'ai étudié particulièrement certaines de ces classes; elles se composent des espaces à courbure positive ou nulle représentatifs des groupes simples *clos* ⁽³⁾ (groupes réels *unitaires*) et des espaces à courbure négative ou nulle correspondants; ces derniers ne sont pas des espaces représentatifs de groupes. Le groupe continu des déplacements des premiers se

⁽¹⁾ E. CARTAN, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 214-264; t. 55, 1927, p. 114-134).

⁽²⁾ *La géométrie des groupes simples* (*Ann. di Mat.*, 4^e série, t. 4, 1926-1927, p. 209-256).

⁽³⁾ On dit qu'un groupe (dont toutes les transformations sont supposées régulières) est *clos* si tout ensemble infini de transformations du groupe admet au moins une transformation limite appartenant au groupe. Dans le cas contraire, le groupe est *ouvert*. Le groupe des rotations autour d'un point fixé est clos; le groupe des déplacements de l'espace ordinaire est ouvert.

décompose en deux sous-groupes simples isomorphes au groupe représenté par l'espace; celui des derniers est isomorphe au groupe à *paramètres complexes* de la structure simple considérée. Les espaces à courbure constante à trois dimensions constituent une des classes précédentes.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des autres espaces \mathcal{S} irréductibles. Il en existe autant de classes que de formes *réelles ouvertes* distinctes de structures simples. Chaque espace à courbure négative admet un groupe continu de déplacements de la structure réelle ouverte correspondante; l'espace à courbure positive qui lui est associé admet un groupe des déplacements de la structure réelle *close* du même type (structure qui existe pour chaque type simple).

L'étude faite ici est celle des propriétés *intégrales* et non plus *locales* de l'espace. Les problèmes qui se posent sont du reste de nature différente suivant que la courbure est négative ou positive. Leur résolution, basée sur des méthodes générales applicables à toutes les classes, s'appuie sur la théorie des groupes; inversement, l'existence des espaces en question permet de résoudre des problèmes importants de la théorie des groupes.

Les espaces \mathcal{S} à courbure négative sont tous simplement connexes; par deux points quelconques de l'un d'eux, il passe une géodésique et une seule. Leur groupe continu des déplacements est isomorphe au groupe adjoint de la structure réelle correspondante. Un problème important est celui de la détermination de toutes les transformations isométriques (c'est-à-dire qui conservent le ds^2) de l'espace donné; il en existe autant de familles continues distinctes qu'il existe de familles distinctes de rotations (isométriques) autour d'un point fixe; le nombre de ces familles peut être déterminé dans chaque cas en se servant des propriétés actuellement connues des groupes semi-simples réels *clos* (de cette espèce est le groupe continu des rotations ou *groupe d'isotropie* de l'espace). Il se trouve que le groupe total d'isotropie de l'espace est identique au groupe adjoint mixte de la structure réelle correspondante (au moins pour les classes générales de structures simples). Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante :

Si une géométrie de Klein admet pour groupe fondamental un groupe simple d'ordre r , ouvert, à r paramètres réels, il est possible, d'une manière

et d'une seule, de choisir l'élément générateur de l'espace de telle sorte que la géométrie devienne riemannienne, l'espace ayant un ds^2 défini positif, avec une courbure riemannienne inaltérée par le transport parallèle (1). Nous convenons de ne pas regarder comme distincts deux choix différents de l'élément générateur si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les deux espèces d'éléments générateurs, de manière que deux éléments correspondants soient invariants par le même sous-groupe du groupe fondamental.

Les espaces \mathcal{S} à courbure négative permettent d'étudier complètement les propriétés topologiques du domaine des groupes simples réels *ouverts*. Cette étude peut être poussée jusqu'au bout pour les groupes simples réels *clos*, en utilisant une méthode dont le principe est dû à H. Weyl; mais cette méthode n'est pas applicable aux groupes ouverts. Le fait que tout groupe simple réel ouvert (ou du moins son groupe adjoint) est le groupe continu des déplacements d'un espace simplement connexe entraîne comme conséquence que son *groupe de connexion* (qui définit complètement ses propriétés topologiques) est le même que celui du groupe d'isotropie de l'espace, lequel est *clos*. A la différence des groupes simples réels clos, le groupe de connexion d'un groupe ouvert peut être d'ordre infini. On peut du reste dans chaque cas indiquer un représentant simplement connexe de la structure réelle ouverte correspondante; mais on ne peut pas toujours prendre pour jouer ce rôle un groupe *linéaire*, comme dans le cas où le groupe donné est clos.

A un autre point de vue, la considération des espaces à courbure négative permet toujours de décomposer une transformation finie d'un groupe simple réel ouvert en un produit de deux autres transformations dont chacune admet une transformation infinitésimale génératrice; comme on le sait, il existe des cas où les transformations infinitésimales d'un groupe n'engendrent qu'une partie du groupe fini.

(1) Si on laisse de côté la condition que le transport parallèle conserve la courbure riemannienne, le théorème ne cesse pas d'être vrai, mais il faut alors bien préciser ce qu'on entend en disant que la géométrie devient riemannienne; il ne suffit pas que le groupe fondamental donné laisse invariant un certain ds^2 (défini), mais il faut encore que ce ds^2 soit intrinsèquement lié au groupe (voir E. CARTAN, *Comptes rendus*, t. 183, 1927, p. 96-98).

Les espaces à courbure positive sont clos; par deux points quelconques il passe toujours au moins une géodésique. Pour une classe donnée il peut exister plusieurs espaces distincts, localement applicables les uns sur les autres, mais différents au point de vue de l'*Analysis situs*, et admettant tous des groupes continus des déplacements réguliers et uniformes partout, infinitésimalement isomorphes entre eux. Lorsqu'il n'y a qu'une forme possible, elle est simplement connexe. Lorsqu'il y en a plusieurs, une de celles qui ne sont pas simplement connexes joue un rôle important; le groupe continu des déplacements correspondants est le groupe adjoint de la structure réelle close donnée. Toutes les formes possibles sont déterminées dans les différents cas, avec les groupes de connexion ou groupes d'holonomie correspondants.

Une notion importante est celle du rang. Si l'on considère un point A, l'espace, supposé à n dimensions, peut être décomposé en $\infty^{n-\lambda}$ variétés E_λ à λ dimensions passant par A, totalement géodésiques et *localement euclidiennes*. Deux quelconques de ces variétés sont *égales* entre elles, tandis que deux géodésiques arbitraires issues de A dans la même variété sont *inégaies*. L'entier $\lambda \geq 1$ est le rang de l'espace. Si λ est supérieur à 1, il passe par le point A et un point arbitraire de E_λ une infinité dénombrable de géodésiques; certaines de celles qui ne sont pas fermées passent aussi près qu'on veut de tout point de E_λ .

Si λ est égal à 1, les choses sont beaucoup plus simples. Toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur totale; par deux points donnés il passe *en général* une seule géodésique; si l'espace est simplement connexe, il existe des couples de points par lesquels il passe une infinité de géodésiques; si l'espace n'est pas simplement connexe, il n'en existe pas. C'est ainsi que la propriété d'un espace \mathcal{E} à courbure positive ou nulle d'avoir toutes ses géodésiques fermées est liée à celle d'avoir partout sa courbure *positive* (et jamais nulle), et que la propriété que par deux points sans exception il passe une géodésique et une seule, est incompatible avec celle d'être simplement connexe (la courbure étant supposée positive ou nulle). Ces résultats suggèrent des problèmes relatifs à des espaces de Riemann plus généraux que ceux qui sont étudiés ici.

Parmi les espaces \mathcal{E} à courbure positive de rang 1, figurent les espaces à courbure constante positive et les espaces hermitiens elliptiques étudiés au point de vue riemannien par G. Fubini ⁽¹⁾ et E. Study ⁽²⁾. Il en existe une autre classe générale à un nombre de dimensions multiple de 4, sans parler d'un espace exceptionnel à 16 dimensions. On n'avait jamais soupçonné l'existence de ces espaces, pas plus que des espaces de rang supérieur à 1. Ils sont tous, néanmoins, susceptibles d'une définition géométrique *élémentaire*, qui les rattache à des recherches géométriques déjà nombreuses, mais dans lesquelles l'aspect *riemannien* des questions traitées n'avait jamais été envisagé.

Le Chapitre I est consacré à l'exposé des méthodes générales permettant de résoudre les différents problèmes proposés. Le Chapitre II passe en revue les différents espaces \mathcal{E} à courbure négative et le Chapitre III les différents espaces \mathcal{E} à courbure positive. Cette revue est nécessairement sommaire; si le nombre des familles distinctes d'isométries est établi, ces familles ne sont pas explicitement déterminées. Le ds^2 lui-même de l'espace n'est pas calculé, sauf dans un cas particulier. Les Chapitres II et III sont donc à considérer simplement comme fournissant la base de recherches ultérieures, qui devront s'attacher spécialement à telle ou telle classe d'espaces \mathcal{E} .

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS

SUR LES ESPACES DE RIEMANN ATTACHÉS AUX GROUPEs SIMPLes RÉELS NON UNITAIRES.

Généralités. Les sous-groupes γ_1 .

1. Considérons un groupe de transformations continu *simple*, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant. D'après la théorie de

(1) G. FUBINI, *Sulle metriche definite da una forma Hermitiana* (*Atti Ist. Veneto*, t. 63¹, 1904, p. 501-513).

(2) E. STUDY, *Kürzeste Wege im komplexen Gebiet* (*Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 321-378).

S. Lie, ce groupe est engendré par un certain nombre r de transformations infinitésimales linéairement indépendantes

$$X_1, X_2, \dots, X_r.$$

Au point de vue de la réalité des paramètres, différents cas peuvent être envisagés.

La transformation infinitésimale

$$e_1 X_1 + e_2 X_2 + \dots + e_r X_r,$$

où e_1, e_2, \dots, e_r sont des paramètres *complexes* arbitraires, engendre un groupe fini à r paramètres complexes : ce sera le *groupe complexe* de la structure donnée.

Mais il peut arriver que, par un choix convenable des r transformations infinitésimales de base, la transformation $\Sigma e_i X_i$, où les e_i sont des paramètres *réels* arbitraires, engendre aussi un groupe, qui sera alors à r paramètres *réels*. Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les constantes de structure qui entrent dans les formules fondamentales

$$(X_i X_j) = \sum_s c_{ijs} X_s$$

soient toutes réelles. On a alors ce qu'on appelle une *forme réelle* de la structure (complexe) considérée.

Parmi toutes les formes réelles, une est particulièrement remarquable : c'est la forme dite *unitaire* caractérisée par la propriété que les racines de l'*équation caractéristique* de la transformation infinitésimale $\Sigma e_i X_i$ sont toutes purement imaginaires. En particulier la forme quadratique $-\varphi(e)$, qui représente la somme des carrés de ces racines, est définie négative. Le domaine des transformations d'un groupe fini de cette structure est *clos*.

Si l'on suppose que les transformations infinitésimales X_i constituent une base pour la forme unitaire, toute forme réelle non unitaire aura une base obtenue en effectuant sur les X_i une substitution linéaire à coefficients imaginaires. Or, on peut toujours supposer ⁽¹⁾ que cette substitution conserve un certain nombre s de transformations X_i et

(1) E. CARTAN, *Bull. Soc. math.*, t. 53, 1927. p. 122-125.

qu'elle multiplie toutes les autres par $\sqrt{-1}$. Nous désignerons les premières par

$$X_1, X_2, \dots, X_s,$$

les dernières par

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n,$$

avec $n + s = r$, de sorte que la transformation infinitésimale génératrice de la forme réelle considérée est

$$\sum_{k=1}^{k=s} u_k X_k + i \sum_{\rho=1}^{\rho=n} v_\rho Y_\rho,$$

les u_k et les v_ρ désignant des paramètres réels.

2. J'ai démontré ⁽¹⁾ qu'à toute forme réelle non unitaire d'une structure simple, correspondaient deux classes d'espaces de Riemann à ds^2 défini, jouissant de la propriété d'avoir leur courbure riemannienne invariante par le transport parallèle. Les espaces de la première classe ont leur courbure riemannienne partout positive ou nulle, ceux de la seconde classe ont leur courbure riemannienne partout négative ou nulle. Dans chaque classe, les espaces ne diffèrent entre eux que par le choix de l'unité de longueur. Le nombre de leurs dimensions est n ; leur groupe des déplacements est isomorphe au groupe réel unitaire pour la première classe, au groupe réel non unitaire pour la seconde classe. Avant d'étudier les propriétés de ces espaces, il est nécessaire d'indiquer des propriétés remarquables des transformations infinitésimales X et Y.

3. Les constantes de structure de deux formes réelles, unitaire et non unitaire, étant réelles, les crochets $(X_i X_j)$ et $(Y_\alpha Y_\beta)$ ne peuvent pas dépendre des transformations Y; inversement, les crochets $(X_i Y_\alpha)$ ne peuvent pas dépendre des transformations X.

Soit Y_0 une combinaison linéaire quelconque (à coefficients réels) des transformations Y_α . Si la transformation $\Sigma(u_k X_k + v_\rho Y_\rho)$ est échangeable avec Y_0 , il en sera de même de chacune de ses parties

(1) Voir le Mémoire précédemment cité, p. 125.

$\Sigma u_k X_k$ et $\Sigma v_\rho Y_\rho$. Soit λ le nombre des transformations Y linéairement indépendantes et soit μ le nombre des transformations X linéairement indépendantes qui sont échangeables avec Y_0 ; désignons-les respectivement par

$$\begin{array}{cccc} Y_0, & Y_1, & \dots, & Y_{\lambda-1}, \\ X_1, & X_2, & \dots, & X_\mu. \end{array}$$

L'équation caractéristique de Y_0 n'a que des racines purement imaginaires (à part la racine zéro multiple d'ordre $\lambda + \mu$); soit ia une de ces racines. Il lui correspond une ou plusieurs transformations $U + V$ satisfaisant à la relation

$$(Y_0, U + V) = ia(U + V),$$

en désignant par U une combinaison linéaire (à coefficients complexes) des X et par V une combinaison linéaire analogue des Y . Il en résulte

$$(Y_0 U) = iaV, \quad (Y_0 V) = iaU.$$

Posons

$$U = U_1 + iU_2, \quad V = iV_1 - V_2,$$

les transformations U_1, U_2, V_1, V_2 étant réelles, c'est-à-dire se déduisant des transformations infinitésimales de base de la forme unitaire par des combinaisons à coefficients réels. On aura

$$\begin{array}{ll} (Y_0 U_1) = -aV_1, & (Y_0 V_1) = aU_1, \\ (Y_0 U_2) = -aV_2, & (Y_0 V_2) = aU_2, \end{array}$$

de sorte que chacune des transformations $U_1 + iV_1, U_2 + iV_2$ appartient à la racine ia . Il est clair que les transformations $U_1 - iV_1, U_2 - iV_2$ appartiennent à la racine $-ia$.

Si $U + iV$ appartient à la racine ia , U et V étant réelles, aucune des transformations U et V ne peut être nulle. Plus généralement si à la racine ia , multiple d'ordre k , appartiennent les k transformations

$$U_1 + iV_1, \quad U_2 + iV_2, \quad \dots, \quad U_k + iV_k,$$

il ne peut exister aucune relation linéaire à coefficients réels entre U_1, \dots, U_k , pas plus qu'entre V_1, \dots, V_k . On peut donc dire qu'à chaque couple de racines purement imaginaires $\pm ia$ de l'équation

caractéristique de Y_0 appartiennent k transformations X linéairement indépendantes et k transformations Y linéairement indépendantes.

Les transformations X (ou Y) qui appartiennent à deux racines distinctes ia et ib sont évidemment indépendantes entre elles. Il en résulte la conclusion suivante : la différence $\lambda - \mu$ entre le nombre des transformations Y et le nombre des transformations X échangeables avec Y_0 est égal à la différence $n - s$ entre le nombre total des transformations Y et le nombre total des transformations X .

4. Le nombre λ est facile à déterminer. Si l'on pose

$$Y_0 = e_1 Y_1 + \dots + e_n Y_n,$$

$$(Y_\alpha Y_\beta) = \sum_{k=1}^{k=s} c_{\alpha\beta k} X_k,$$

ce nombre est le rang de la matrice à s lignes et n colonnes

$$\left(\sum_{\rho} e_\rho c_{\rho\alpha i} \right) \quad (\alpha = 1, \dots, n; i = 1, \dots, s).$$

Ce rang a une valeur minima, qui correspond à un choix arbitraire de Y_0 ; nous dirons que la transformation Y_0 est *générale* si cette valeur minima est atteinte; dans le cas contraire, la transformation Y_0 sera dite *singulière*. La valeur minima de λ sera dite le *rang* des espaces de Riemann attachés à la forme non unitaire considérée.

Supposons maintenant la transformation Y_0 générale. Je dis que les $\lambda - 1$ transformations $Y_1, \dots, Y_{\lambda-1}$ échangeables avec Y_0 et distinctes de Y_0 sont échangeables entre elles. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Nous pourrions de proche en proche déterminer une suite de $\lambda' < \lambda$ transformations $Y_0, Y_1, \dots, Y_{\lambda'-1}$ toutes échangeables entre elles et telles qu'aucune autre transformation Y ne soit échangeable avec toutes les précédentes. L'équation caractéristique de

$$e_0 Y_0 + e_1 Y_1 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1}$$

a pour racines des fonctions *linéaires* ⁽¹⁾ en $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda'-1}$. A chacune

(1) Cela tient à ce que les transformations $Y_0, Y_1, \dots, Y_{\lambda'-1}$ sont échangeables entre elles.

de ces racines, multiple d'ordre k , appartiennent k transformations infinitésimales distinctes, *indépendantes de* $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Donnons alors à $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$ des valeurs numériques telles qu'aucune des racines *non identiquement nulles* ne s'annule; il est clair alors qu'il n'existe que λ' transformations indépendantes Y échangeables avec la transformation ainsi obtenue, alors qu'il devrait y en avoir au moins λ .

La transformation Y_0 étant toujours supposée générale, les transformations générales de la forme $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$ sont celles pour lesquelles aucune des racines caractéristiques non identiquement nulles (elles sont au nombre de $n + s - \lambda - \mu = 2n - 2\lambda$, chacune étant comptée avec son degré de multiplicité) ne s'annule. Parmi les μ transformations X échangeables avec Y_0 , on sait ⁽¹⁾ qu'on peut toujours en choisir $l - \lambda$, l étant le rang du groupe total, qui soient échangeables entre elles,

$$X_1, X_2, \dots, X_{l-\lambda}.$$

On sait enfin que toute transformation infinitésimale du groupe unitaire est homologue à un nombre *fini* de transformations de la forme

$$e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1} + a_1 X_1 + \dots + a_{l-\lambda} X_{l-\lambda}.$$

Par suite, quand on fait varier les paramètres réels $e_0, \dots, e_{\lambda-1}$, on obtient ∞^λ transformations infinitésimales non homologues entre elles dans le groupe total G.

Les crochets $(X_i Y_\rho)$ ne dépendant que des Y, les transformations infinitésimales X laissent invariantes l'ensemble des transformations infinitésimales Y; il en est donc de même du groupe fini g engendré par les X. Par suite, *deux des ∞^λ transformations infinitésimales*

$$e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$$

ne sont pas en général homologues entre elles par le groupe g .

5. La transformation Y_0 étant échangeable avec μ des transformations X est invariante par le groupe à μ paramètres qu'elles engendrent. Par suite, si l'on effectue sur Y_0 toutes les transformations du

⁽¹⁾ Cette propriété, ainsi que la suivante, est démontrée dans le Mémoire des *Annali di Matematica* auquel il est fait allusion dans l'Introduction (*loc. cit.*, p. 213).

groupe g à s paramètres, on obtient $\infty^{s-\lambda} = \infty^{\mu-\lambda}$ transformations infinitésimales distinctes. Ce résultat s'étend à toutes les transformations générales de la forme $e_0 Y_0 + e_1 Y_1 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$, de sorte que si l'on effectue sur les ∞^λ transformations $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$ toutes les transformations de g , on obtient $\infty^{s-\mu+\lambda} = \infty^\mu$ transformations infinitésimales distinctes. Autrement dit, toute transformation Y est homologue, par rapport au groupe g , à une des transformations du faisceau $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$.

En toute rigueur ce résultat doit être interprété de la manière suivante : Les transformations $Y_0, Y_1, \dots, Y_{\lambda-1}$ engendrent un groupe infinitésimal γ_λ ; les différents sous-groupes γ_i , suffisamment voisins les uns des autres, sont homologues entre eux par le groupe g .

6. Nous pouvons préciser et compléter le résultat précédent.

Soit Y_0 une transformation *singulière*; je dis qu'il existe au moins une transformation *générale* Y échangeable avec elle. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver $\lambda' - 1 > \lambda - 1$ transformations $Y_1, \dots, Y_{\lambda'-1}$ échangeables avec Y_0 et échangeables entre elles. Chacune des transformations $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1}$ serait évidemment singulière. On pourrait d'autre part trouver $l - \lambda'$ transformations

$$X_1, \dots, X_{l-\lambda'}$$

échangeables entre elles et échangeables avec les précédentes (et l'on n'en peut pas trouver davantage). Les transformations

$$e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1} + \eta_1 X_1 + \dots + \eta_{l-\lambda'} X_{l-\lambda'}$$

sont telles que deux quelconques d'entre elles ne sont pas homologues dans le groupe total; par suite, deux transformations distinctes de la forme $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1}$ ne sont pas en général homologues par le groupe g . Chacune des transformations $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1}$ étant échangeable par μ' transformations de g se transformerait par le groupe g en $\infty^{s-\mu'} = \infty^{\mu-\lambda'}$ transformations distinctes; les transformations $e_0 Y_0 + \dots + e_{\lambda'-1} Y_{\lambda'-1}$, où l'on fait varier les e_i , donneraient donc naissance, en les transformant par g , à ∞^μ transformations distinctes. Or cela est absurde, puisqu'on n'obtiendrait jamais

que des transformations singulières, qui ne peuvent dépendre au plus que de $n - 1$ paramètres.

Toute transformation Y_0 , générale ou singulière, fait donc partie d'un sous-groupe γ_λ au moins.

Ajoutons la remarque importante suivante. Les transformations singulières d'un sous-groupe γ_λ dépendent de $\lambda - 1$ paramètres au plus; chacune d'elles Y_0 est transformée par g en $\infty^{\lambda' - \lambda}$ transformations distinctes, $\lambda' - 1$ étant le nombre des transformations Y indépendantes de Y_0 et échangeables avec Y_0 . Or, $\lambda' \geq \lambda + 1$. Par suite les transformations singulières homologues par le groupe g aux transformations singulières de γ_λ , dépendent au plus de

$$(n - \lambda - 1) + (\lambda - 1) = n - 2$$

paramètres. D'après ce qui a été dit plus haut, nous voyons que *les transformations infinitésimales Y singulières dépendent de $n - 2$ paramètres au plus.*

On tire enfin de là une conséquence importante. Dans le domaine à n dimensions des transformations infinitésimales Y , les transformations singulières forment des variétés à $n - 2$ dimensions au plus. On peut donc toujours passer par continuité d'une transformation générale à une autre transformation générale sans rencontrer de transformation singulière. Par suite, *l'ensemble des sous-groupes γ_λ est connexe.* Par suite enfin ils sont, en toute rigueur, tous homologues entre eux par le groupe g , et *toute transformation infinitésimale Y est, sans exception, homologue à une ou plusieurs transformations d'un sous-groupe γ_λ particulier donné.*

Le groupe (S) et son domaine fondamental.

7. Plaçons-nous maintenant à l'intérieur d'un sous-groupe γ_λ donné. Les racines de l'équation caractéristique de la transformation générale

$$e_0 Y_0 + e_1 Y_1 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$$

de ce sous-groupe sont des formes purement imaginaires linéaires en $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$, deux à deux égales et opposées; nous les mettrons

sous la forme $2i\pi\varphi_\alpha$, et nous conviendrons de dire que les φ_α sont les paramètres angulaires de la transformation $\Sigma e_i Y_i$ considérée. En tenant compte de leur degré de multiplicité, les paramètres angulaires non nuls sont au nombre de $2(n - \lambda)$, et à chaque couple de paramètres angulaires égaux et opposés, de degré de multiplicité k , appartiennent k transformations Y et k transformations X (que nous désignerons plutôt par les notations V et U).

Ajoutons que parmi les $n - \lambda$ formes linéaires φ_α , il y en a λ indépendantes en $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Sinon, en effet, on pourrait trouver une transformation (réelle) de γ_λ pour laquelle tous les paramètres angulaires seraient nuls. Elle serait alors échangeable avec toutes les transformations du groupe total, ce qui n'est pas possible.

8. Nous avons dit que deux transformations infinitésimales distinctes de γ_λ n'étaient pas homologues entre elles par le groupe g . Cela n'est vrai qu'en général; en réalité toute transformation de γ_λ est homologue à un nombre *fini* d'autres transformations de γ_λ .

Partons d'une des formes φ_α , par exemple

$$\varphi_1(e) = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_{\lambda-1} e_{\lambda-1}.$$

Soit U une des transformations infinitésimales de g qui appartiennent à la racine $2\pi i\varphi_1$, et soit V la transformation Y correspondante. On a

$$\begin{aligned} (Y_\alpha U) &= 2\pi a_\alpha V, \\ (Y_\alpha V) &= -2\pi a_\alpha U. \end{aligned}$$

Le crochet (UV) est une transformation Y et l'on a évidemment

$$[Y_\alpha(UV)] = [(Y_\alpha U)V] - [(Y_\alpha V)U] = 0;$$

par suite (UV) appartient au sous-groupe γ_λ . Il n'est pas possible d'ailleurs que ce crochet (UV) soit nul, car les égalités

$$\begin{aligned} (UY_\alpha) &= -2\pi a_\alpha V, \\ (UV) &= 0 \end{aligned}$$

montreraient que l'équation caractéristique de U admettrait la racine double zéro, et les deux transformations appartenant à cette racine (V et Y_α) devraient alors toutes les deux être échangeables avec U.

Soit donc, ce qui ne restreint pas la généralité,

$$(UV) = 2\pi Y_0.$$

Les équations

$$(UY_0) = -2\pi a_0 V,$$

$$(UV) = 2\pi Y_0$$

montrent que l'équation caractéristique de U admet les deux racines $\pm 2\pi\sqrt{-a_0}$; il faut donc que a_0 soit positif. On voit alors qu'en effectuant sur Y_0 et V la transformation du groupe à un paramètre engendré par U, elles deviennent respectivement

$$\bar{Y}_0 = Y_0 \cos(2\pi\sqrt{a_0}t) - \sqrt{a_0} V \sin(2\pi\sqrt{a_0}t),$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} Y_0 \sin(2\pi\sqrt{a_0}t) + V \cos(2\pi\sqrt{a_0}t).$$

On voit donc qu'il existera une transformation de g transformant Y_0 en $-Y_0$. Comme d'autre part les transformations $Y_1 - \frac{a_1}{a_0} Y_0, \dots, Y_{\lambda-1} - \frac{a_{\lambda-1}}{a_0} Y_0$ sont échangeables avec U, cette transformation de g laissera invariantes les transformations

$$Y_\alpha - \frac{a_\alpha}{a_0} Y_0.$$

Elle laissera donc invariant le sous-groupe γ_λ , mais effectuera sur les transformations de ce sous-groupe la substitution linéaire

$$\bar{Y}_0 = -Y_0, \quad \bar{Y}_\alpha = Y_\alpha - 2\frac{a_\alpha}{a_0} Y_0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \lambda-1).$$

On ne restreint pas du reste la généralité en supposant

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{\lambda-1} = 0,$$

c'est-à-dire $\varphi_1 = a_0 e_0$. La substitution linéaire se réduit donc à

$$\bar{Y}_0 = -Y_0, \quad \bar{Y}_\alpha = Y_\alpha,$$

ou

$$(1) \quad \bar{e}_0 = -e_0, \quad \bar{e}_\alpha = e_\alpha.$$

9. On peut interpréter géométriquement ce résultat. Représentons dans un espace euclidien à λ dimensions la transformation infinitésimale $\Sigma e_i Y_i$ par le point M de coordonnées cartésiennes $e_0, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Nous supposons choisis les vecteurs unitaires de coordonnées de manière que la somme des carrés des $n - \lambda$ paramètres angulaires φ_α (chacun étant pris avec son degré de multiplicité) représente le carré de la distance OM du point M à l'origine. Cette somme de carrés étant invariante par le groupe adjoint du groupe total, la substitution linéaire effectuée sur les e_i dont il vient d'être question définira une rotation ou une symétrie laissant fixe l'origine. Cette substitution laisse d'autre part invariant l'hyperplan $\varphi_1 = 0$ (ou $e_0 = 0$), qui est un hyperplan invariant *isolé*.

La droite perpendiculaire, qui est aussi une droite invariante isolée, ne peut être que $e_1 = \dots = e_{\lambda-1} = 0$. La forme des équations (1) montre que la substitution représente une symétrie *orthogonale* par rapport à l'hyperplan $\varphi_1 = 0$ (1).

En définitive, si l'on considère les $n - \lambda$ hyperplans $\varphi_\alpha = 0$, toute symétrie par rapport à un quelconque de ces hyperplans remplace un point M par un point M' homologue de M par le groupe g . Il en sera de même de toutes les opérations résultant des combinaisons de ces $n - \lambda$ symétries; elles engendrent un groupe fini (S) qui jouera un rôle important dans la théorie de l'espace à courbure positive attaché au groupe donné.

10. Les $n - \lambda$ hyperplans $\varphi_\alpha = 0$ partagent l'espace en un certain nombre de régions indéfinies (angles polyèdres) ayant l'origine pour sommet. L'une quelconque de ces régions représente le *domaine fondamental* (D) du groupe (S); les régions limitrophes de (D) s'en déduisent par des symétries par rapport aux faces latérales de (D) et l'on obtient par symétries successives toutes les régions dans lesquelles l'espace a été décomposé. Les faces latérales de (D) correspondent aux opérations génératrices de (S).

Toute transformation infinitésimale Y est homologue à une et une

(1) Cf. H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (Math. Zeitschr., t. 24, 1925, p. 367-371).

seule des transformations représentées par les points intérieurs à (D), si du moins le groupe (S) contient toutes les opérations qui font passer d'une transformation de γ_i à une autre transformation de γ_i homologue par le groupe $g^{(1)}$.

Les groupes adjoints Γ_u et Γ .

11. On appelle, comme on sait, *groupe adjoint* d'un groupe G celui qui indique comment les paramètres des transformations de G sont transformés quand on effectue sur les variables, primitives et transformées, une même transformation de G. Il est défini par les équations

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_{\xi} S_a,$$

où l'on a désigné par S_a , S_{ξ} , $S_{\xi'}$ les transformations de paramètres a_i , ξ_i , ξ'_i . Dans ces équations, les ξ sont les variables sur lesquelles opère le groupe adjoint, les ξ' sont les variables transformées et les a les paramètres. Si, en particulier, S_{ξ} est une transformation infinitésimale de G, $S_{\xi'}$ est aussi une transformation infinitésimale. Si chacune de ces transformations est prise sous la forme $\sum u_i X_i$, $\sum u'_i X_i$, les u'_i sont des fonctions linéaires des u , à coefficients fonctions des a . Le groupe linéaire ainsi obtenu est, à proprement parler, le groupe adjoint de S. Lie.

Les transformations infinitésimales du groupe adjoint linéaire s'obtiennent en prenant pour S_a une transformation infinitésimale de symbole $\sum a_i X_i$. On a alors, en désignant par δu_i la variation infinitésimale de u_i ,

$$\sum_s \delta u_s X_s = (\sum a_i X_i, \sum u_i X_i) = \sum_{i,j,s} a_i u_j c_{ijs} X_s,$$

d'où

$$\delta u_s = \sum_{i,j} a_i c_{ijs} u_j.$$

On voit qu'à la transformation infinitésimale $\sum a_i X_i$ du groupe G correspond une matrice à r lignes et r colonnes, qui définit la trans-

(1) Il en est effectivement ainsi, comme on peut le vérifier *a posteriori*.

formation infinitésimale correspondante du groupe adjoint; l'élément de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice est

$$\sum_i a_i c_{i\beta\alpha}.$$

Nous pourrions encore désigner cette matrice par le même symbole $\Sigma a_i X_i$, X_i désignant maintenant la matrice

$$(c_{i\beta\alpha}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r).$$

Dans le cas où le groupe G est simple, les r matrices X_1, \dots, X_r sont linéairement indépendantes.

12. Toute transformation finie du groupe adjoint linéaire sera de même représentée par une matrice. Considérons en particulier la transformation finie engendrée par la transformation infinitésimale $\Sigma a_i X_i$. Elle s'obtiendra en intégrant les équations différentielles

$$(2) \quad \frac{du'_s}{dt} = \sum_{i,j} a_i c_{ijs} u'_j,$$

avec les conditions initiales $u'_i = u_i$ pour $t = 0$, et en faisant ensuite $t = 1$. Désignons par (u') la matrice à r lignes et 1 colonne formée des éléments u'_1, \dots, u'_r . Les équations (2) peuvent s'écrire

$$\frac{d(u')}{dt} = X(u') \quad \left(X = \sum_i a_i X_i \right);$$

elles donnent, par intégration,

$$(u') = e^{X}(u).$$

Par suite la matrice qui représente la transformation finie engendrée par la transformation infinitésimale X est e^X .

13. Revenons maintenant au groupe réel non unitaire considéré au début et au groupe unitaire correspondant. Nous désignerons par Γ et Γ_u leurs deux groupes adjoints linéaires. Nous désignerons par R les matrices finies engendrées par les X, par T les matrices de la forme e^{iY} et par Θ les matrices de la forme e^Y , les X et les Y étant réelles.

Les racines caractéristiques d'une matrice infinitésimale réelle Y étant purement imaginaires, les racines caractéristiques des matrices T sont toutes réelles et positives, celles des matrices Θ sont toutes de module égal à 1. Toute matrice T ne peut se mettre que d'une manière sous la forme e^{iY} , et l'on a

$$iY = \log T,$$

en donnant aux logarithmes des racines caractéristiques (réelles et positives) de T leurs valeurs réelles. Le symbole T^m , m étant réel, a une signification bien déterminée, à savoir $e^{m \log T}$.

Au contraire, il peut arriver qu'une matrice Θ admette plusieurs matrices Y génératrices, ou même une infinité; le symbole Θ^m , si m est réel et *rationnel*, pourra admettre plusieurs déterminations (mais en nombre fini). La même remarque s'applique aux matrices R .

14. D'après les propriétés des crochets $(X_i X_j)$, $(Y_i Y_j)$, $(X_i Y_j)$, les constantes de structure du groupe ne changent pas si l'on change de signe toutes les transformations Y . Il en résulte que l'égalité

$$e^{X+Y} e^{X'+Y'} = e^{X''+Y''},$$

où X, X', X'', Y, Y', Y'' sont des matrices *réelles ou imaginaires* quelconques, entraîne

$$e^{X-Y} e^{X'-Y'} = e^{X''-Y''}.$$

Nous dirons que la matrice e^{X-Y} est *conjugée* de la matrice $e^{X'+Y'}$. Toute matrice R est sa propre conjugée; la conjugée d'une matrice T ou Θ est son inverse T^{-1} ou Θ^{-1} .

L'espace de Riemann attaché au groupe Γ .

15. L'espace représentatif du groupe Γ peut être regardé comme riemannien; le carré de la distance de deux points infiniment voisins S et S' n'est autre que la somme des carrés des racines caractéristiques de la transformation infinitésimale $S'S^{-1}$. Le ds^2 de l'espace de Γ est indéfini, somme de n carrés positifs et s carrés négatifs. Ses géodésiques s'obtiennent en prenant le point variable $S_0 S_t$, où S_0 est une matrice fixe, S_t une matrice engendrant un groupe à un paramètre de Γ .

Dans l'espace de Γ , toute direction issue du point O (représentatif de la transformation identique) est définie par une transformation infinitésimale $X + iY$. Les géodésiques correspondant aux directions iY , lieux des points $T = e^{iX}$, engendrent une variété *totale*ment géodésique à n dimensions \mathcal{E} . En effet, la condition pour que les géodésiques correspondant au faisceau linéaire de transformations infinitésimales

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots + a_n U_n$$

engendrent une variété totalement géodésique, est que les expressions

$$[(U_i U_j) U_k] \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

appartiennent encore au faisceau considéré ⁽¹⁾. C'est effectivement ce qui a lieu pour le faisceau des transformations iY_1, \dots, iY_n .

16. La variété totalement géodésique définit un espace \mathcal{E} riemannien, puisqu'il est plongé dans l'espace du groupe Γ , qui est lui-même riemannien. L'espace \mathcal{E} est simplement connexe, puisque tout point de \mathcal{E} , représentant une matrice T , peut être défini d'une manière et d'une seule par les n coefficients c_x de la transformation infinitésimale

$$iY = i \sum c_x Y_x.$$

génératrice de T . Nous allons voir qu'avec ces coordonnées la métrique de l'espace \mathcal{E} est partout régulière, le ds^2 étant défini positif.

Rappelons en effet que si l'on considère un groupe quelconque engendré par r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_1, X_2, \dots, X_r,$$

et si l'on désigne par S_a la transformation finie engendrée par la transformation infinitésimale $\sum a_i X_i$, le symbole

$$\sum \omega_i X_i$$

de la transformation infinitésimale $S_{a+da} S_a^{-1}$ s'obtient en prenant pour les ω_i les quantités qui résultent des da_i en effectuant la substitution

⁽¹⁾ E. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations* (*J. Math. pures et appl.*, t. 6, 1927, p. 71-75).

linéaire

$$\frac{e^A - 1}{A},$$

où A désigne la matrice infinitésimale du groupe adjoint correspondant à la transformation infinitésimale $\sum a_i X_i$ ⁽¹⁾.

Le déterminant de cette substitution ne s'annule que si la matrice A admet au moins une racine caractéristique de la forme $2n\pi i$, n étant un entier non nul.

Appliquons ce résultat à la transformation infinitésimale

$$T'T^{-1} = e^{\frac{i\sum(\omega_\alpha + d\nu_\alpha)Y_\alpha}{\alpha}} e^{-\frac{i\sum\nu_\alpha Y_\alpha}{\alpha}} = 1 + \sum_i \omega_i X_i + \sum_\alpha \bar{\omega}_\alpha Y_\alpha.$$

Comme les racines caractéristiques de la matrice $i\sum\nu_\alpha Y_\alpha$, qui joue ici le rôle de A , sont toutes réelles, on voit que les $s + n$ quantités

$$\omega_i, \bar{\omega}_\alpha$$

se déduisent des $s + n$ quantités

$$\nu, d\nu_\alpha$$

par une substitution linéaire à déterminant non nul. Par suite, des $s + n$ formes différentielles linéaires ω_i et $\bar{\omega}_\alpha$, n sont linéairement indépendantes.

Transformons maintenant la transformation infinitésimale $T'T^{-1}$ par la transformation $T^{\frac{1}{2}}$; autrement dit, considérons la transformation infinitésimale $T^{-\frac{1}{2}} T' T^{-\frac{1}{2}}$; elle dépend aussi de n paramètres (infinitiment petits) linéairement indépendants. Or la *conjuguée* de cette transformation, à savoir

$$T^{\frac{1}{2}} T'^{-1} T^{\frac{1}{2}},$$

est égale à son inverse; donc le symbole de cette transformation infinitésimale est de la forme $\sum \bar{\omega}_\alpha Y_\alpha$, les formes linéaires $\bar{\omega}_\alpha$ étant linéairement indépendantes en $d\nu_1, d\nu_2, \dots, d\nu_n$.

(1) Ce résultat remonte essentiellement à F. SCHUR (*Math. Ann.*, t. 38, 1891, p. 243-286), qui ne se sert du reste pas du calcul des matrices.

Comme les racines caractéristiques de la transformation $T'T^{-1}$ sont les mêmes que celles de sa transformée $T^{-\frac{1}{2}}T'T^{-\frac{1}{2}}$, on voit que *le ds^2 de l'espace \mathcal{E} au voisinage du point T est une forme définie positive des différentielles dx_1, \dots, dx_n .*

Les rotations et les transvections de l'espace \mathcal{E} .

17. Les transformations infinitésimales X laissant invariant l'ensemble des transformations Y , toute transformation T est changée en une autre transformation T' si on la transforme par une transformation $R_0 = e^{X_0}$. Les transformations ponctuelles

$$T' = R_0^{-1} T R_0$$

conservent l'élément linéaire de l'espace \mathcal{E} ; si, en effet, T_1 est un point infiniment voisin de T et T'_1 le point transformé, la matrice $T'_1 T_1^{-1}$ est la transformée de la matrice $T_1 T_1^{-1}$ par la transformation R_0 : elle a donc les mêmes racines caractéristiques.

Les transformations considérées de l'espace \mathcal{E} laissent invariant le point origine $T = 1$; quand R_0 varie, elles engendrent le *groupe continu des rotations*, ou *groupe continu d'isotropie*, de l'espace \mathcal{E} . Son ordre s est en effet l'ordre du plus grand groupe continu des rotations de \mathcal{E} .

18. Nous avons une autre catégorie de déplacements rigides de l'espace \mathcal{E} de la manière suivante. Cet espace, comme l'espace du groupe Γ dans lequel il est plongé, jouit de la propriété que toute symétrie par rapport à un point quelconque est une isométrie (1). Or la symétrie par rapport au point T_0 est définie par l'égalité

$$T' T_0^{-1} = T_0 T^{-1}$$

ou

$$T' = T_0 T^{-1} T_0.$$

Cela posé, effectuons successivement une symétrie par rapport à l'origine et une symétrie par rapport au point $T_0^{\frac{1}{2}}$; nous aurons un

(1) E. CARTAN, *J. Math. pures et appl.*, t. 6, 1927, p. 86.

déplacement défini par l'équation

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}}.$$

Ce déplacement laisse invariante la géodésique qui joint le point O au point $T_0^{\frac{1}{2}}$ (ou au point T_0); il amène O en T_0 ; de plus, par ce déplacement, tout vecteur issu d'un point T de la géodésique est changé en un vecteur issu de T' qui se déduit du premier par transport parallèle le long de la géodésique. Cela résulte de la propriété suivante de la symétrie par rapport à un point : le symétrique d'un vecteur issu de M est égal et opposé au vecteur obtenu en transportant par parallélisme le vecteur donné le long de la géodésique qui joint le point M au point symétrique M' .

Nous donnerons au déplacement précédent le nom de *transvection*, et nous dirons que la géodésique OT_0 est la base de la transvection.

19. Les résultats précédents ne sont démontrés en toute rigueur que dans un voisinage suffisamment petit du point origine.

Pour les démontrer dans toute leur généralité, supposons que T variant d'une manière continue de T_0 à T_1 , la matrice $T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}}$ soit constamment égale à une matrice T' variant de T_0 à T'_1 . On peut même supposer que l'existence de la matrice T' ne soit assurée que pour toutes les valeurs considérées de T , sauf la valeur finale T_1 ; il est clair alors que la matrice $T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}}$ tendra vers une matrice limite appartenant à Γ , et une telle matrice, limite de matrices e^{iY} , sera aussi de la forme e^{iY} .

Prenons maintenant une matrice T infiniment voisine de T_1 , dépendant d'une manière continue d'un paramètre t ; désignons par T' la matrice $e^{i\Sigma v_z Y_z}$, avec des paramètres arbitraires v_z , et considérons l'équation

$$(3) \quad T'^{-\frac{1}{2}} (T' + dT') T'^{-\frac{1}{2}} = T'^{-\frac{1}{2}} T_0^{\frac{1}{2}} (T + dT) T_0^{\frac{1}{2}} T'^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on donne aux v_z les valeurs numériques qui correspondent à T'_1 , les deux membres de cette équation sont des matrices infinitésimales de Γ inverses de leurs conjuguées, et, par suite, combinaisons linéaires

de Y_1, Y_2, \dots, Y_n . On aura donc

$$\varpi_\alpha(v; dv) = p_\alpha(t) dt \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n);$$

comme la matrice T_1 n'a aucun paramètre non nul qui soit entier, ces équations donnent sans ambiguïté

$$dv_\alpha = q_\alpha(t) dt,$$

et par suite à la matrice $T + dT$ infiniment voisine de T , correspond une matrice $T' + dT'$ infiniment voisine de T_1 satisfaisant à (3); on en déduit

$$T' + dT' = T_0^{\frac{1}{2}}(T + dT)T_0^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, *quelque chemin qu'on fasse décrire à la matrice T , on ne sera jamais arrêté dans la détermination de la matrice T' égale à $T_0^{\frac{1}{2}}TT_0^{\frac{1}{2}}$.*

Les transvections ont ainsi une existence dans tout l'espace \mathcal{E} , et il en existe toujours une et une seule amenant le point O en un point quelconque T_0 , de manière que la base soit la géodésique OT_0 .

20. Cela posé, tout déplacement rigide de l'espace \mathcal{E} (et même toute isométrie) peut être, d'une manière et d'une seule, décomposé en une rotation isométrique autour de O et une transvection ayant pour base une géodésique issue de O . Seulement il n'est pas sûr que la rotation appartienne au groupe *continu* des rotations. Quoi qu'il en soit, désignons la rotation par le symbole R , la transvection par le symbole T du point auquel elle amène l'origine.

Les rotations R peuvent se décomposer en plusieurs familles continues distinctes.

Si l'on prend maintenant le groupe *continu* des déplacements, et si l'on part, dans le domaine de ce groupe, du déplacement nul pour aboutir, par variation continue, à un déplacement RT déterminé, il est clair qu'on passera par variation continue de la rotation nulle à la rotation R . Par suite, *tout déplacement proprement dit de l'espace \mathcal{E} peut être d'une manière et d'une seule décomposé en une rotation du groupe continu d'isotropie et une transvection ayant pour base une géodésique issue de O .*

Il résulte de là que l'équation du déplacement le plus général est

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}},$$

en désignant par R_0 et T_0 deux matrices quelconques de la forme e^{X_0} et e^{iY_0} .

Le groupe des déplacements de l'espace \mathcal{E} .

21. Posons

$$R_0 T_0^{\frac{1}{2}} = S_0, \quad R_0 T_0^{-\frac{1}{2}} = \bar{S}_0;$$

l'équation du déplacement le plus général de l'espace \mathcal{E} est

$$T' = \bar{S}_0^{-1} T S_0.$$

Ce déplacement est complètement déterminé par la matrice S_0 . Il n'est nul que si cette matrice est unitaire.

Si l'on effectue successivement le déplacement S_0 et le déplacement S'_0 , on obtient le déplacement

$$T' = \bar{S}_0'^{-1} \bar{S}_0^{-1} T S_0 S'_0,$$

et il existe nécessairement une matrice S''_0 telle qu'on ait identiquement

$$\bar{S}_0'^{-1} \bar{S}_0^{-1} T S_0 S'_0 = \bar{S}_0''^{-1} T S''_0,$$

ou

$$\bar{S}_0'' \bar{S}_0'^{-1} \bar{S}_0^{-1} T S_0 S'_0 S''_0^{-1} = T.$$

Si, dans cette identité en T , on fait $T = \mathbf{1}$, on voit que la matrice $\bar{S}_0'' \bar{S}_0'^{-1} \bar{S}_0^{-1}$ est l'inverse de la matrice $S_0 S'_0 S''_0^{-1}$, et ensuite que cette dernière est échangeable avec toutes les matrices T ; elle l'est donc avec toutes les transformations infinitésimales Y , donc aussi avec toutes les transformations X , qui peuvent s'obtenir au moyen des crochets $(Y_x Y_y)$; comme c'est une matrice du groupe adjoint Γ qui laisse invariante toutes les transformations infinitésimales du groupe, elle se réduit à la matrice unitaire. On a donc

$$S''_0 = S_0 S'_0.$$

Tout déplacement peut donc être représenté par une matrice $S_0 = R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$ et

le produit de deux déplacements est représenté par le produit des deux matrices correspondantes.

Les transformations finies $S = RT^{\frac{1}{2}}$ du groupe adjoint engendrent donc un groupe, et comme ce groupe admet les mêmes transformations infinitésimales que le groupe adjoint, il se confond avec lui. Le groupe continu des déplacements de l'espace \mathcal{E} n'est donc autre que le groupe adjoint Γ .

22. Il est facile de trouver le groupe continu des rotations autour d'un point T_0 . Chacune de ces rotations pourra en effet s'obtenir en effectuant d'abord la transvection $T_0^{-\frac{1}{2}}$ qui amène le point T_0 à l'origine, puis une rotation R autour de l'origine, enfin la transvection $T_0^{\frac{1}{2}}$ qui amène l'origine au point T_0 . Le groupe cherché est donc

$$T_0^{-\frac{1}{2}}RT_0^{\frac{1}{2}}.$$

Quant à la transvection qui amène T_0 en T_1 , elle s'obtient également sans difficulté en effectuant une symétrie par rapport au point T_0 , puis une symétrie par rapport au milieu de la géodésique qui joint les deux points; ce milieu est

$$T_0\sqrt{T_0^{-1}T_1} = \sqrt{T_1T_0^{-1}}T_0,$$

et l'on a la transvection cherchée

$$T' = \sqrt{T_1T_0^{-1}}T\sqrt{T_0^{-1}T_1};$$

elle est donc représentée par la matrice $\sqrt{T_0^{-1}T_1}$.

23. On peut indiquer une formule générale condensant toute la trigonométrie rectiligne de l'espace \mathcal{E} (1). Considérons un triangle géodésique ayant pour sommets les points T_1, T_2, T_3 ; transportons par parallélisme le vecteur (T_2, T_3) le long de la géodésique qui joint le point T_2 au point T_1 : il suffit d'effectuer sur T_3 la transvection ayant pour base cette géodésique et amenant T_2 en T_1

$$T'_3 = \sqrt{T_1T_2^{-1}}T_3\sqrt{T_2^{-1}T_1};$$

(1) Cf. *Ann. di Mat.*, loc. cit., p. 252-253.

on peut écrire la formule précédente sous la forme

$$T_1^{-\frac{1}{2}} T_3 T_1^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{-1} T_1^{-\frac{1}{2}}} (T_1^{-\frac{1}{2}} T_3 T_1^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{-1} T_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons

$$T_1^{-\frac{1}{2}} T_2 T_1^{-\frac{1}{2}} = e^{iY_3}, \quad T_1^{-\frac{1}{2}} T_3 T_1^{-\frac{1}{2}} = e^{iY_2}, \quad T_1^{-\frac{1}{2}} T_3 T_1^{-\frac{1}{2}} = e^{iY_1}.$$

Nous aurons

$$(4) \quad e^{iY_1} = e^{-\frac{1}{2} iY_3} e^{iY_2} e^{-\frac{1}{2} iY_3}.$$

Dans cette formule, la somme des carrés des racines caractéristiques de iY_1 , iY_2 , iY_3 représente respectivement le carré des côtés a_1 , a_2 , a_3 du triangle opposés aux sommets T_1 , T_2 , T_3 . Désignons de plus par $iY_\alpha | iY_\beta$ la forme polaire relative à iY_α et iY_β de la forme quadratique qui donne la somme des carrés des racines d'une transformation iY . On a

$$iY_1 | iY_3 = -a_1 a_3 \cos \hat{T}_2,$$

$$iY_2 | iY_3 = a_2 a_3 \cos \hat{T}_1.$$

La formule (4) contient donc cinq des six éléments du triangle géodésique considéré; elle permet directement de résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris. Mais naturellement elle suppose ces deux côtés connus en position.

Le groupe mixte d'isométrie et le groupe adjoint mixte.

24. Nous pouvons envisager d'un point de vue nouveau l'identité du groupe des déplacements de l'espace \mathcal{E} et du groupe adjoint Γ . Désignons en effet par g le sous-groupe de Γ engendré par les transformations infinitésimales X , ou les matrices finies R . Nous avons vu que le groupe continu des rotations autour du point T_0 était le groupe $T_0^{-\frac{1}{2}} g T_0^{\frac{1}{2}}$, homologue de g dans le groupe Γ . Il est facile de voir qu'on obtient ainsi *tous* les groupes homologues de g , car tout groupe homologue $S_0^{-1} g S_0$ peut, en remplaçant S_0 par sa valeur $R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$, se mettre sous la forme

$$T_0^{-\frac{1}{2}} (R_0^{-1} g R_0) T_0^{\frac{1}{2}} = T_0^{-\frac{1}{2}} g T_0^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux groupes $T_0^{-\frac{1}{2}}gT_0^{\frac{1}{2}}$ et $T_0^{-\frac{1}{2}}g'T_0^{\frac{1}{2}}$ ne sont d'autre part identiques que si $T_0^{\frac{1}{2}}T_0'^{-\frac{1}{2}}$ appartient à g , et par suite est égale à sa conjuguée $T_0^{-\frac{1}{2}}T_0'^{\frac{1}{2}}$, autrement dit si $T_0 = T_0'$.

Nous pouvons donc regarder l'espace \mathcal{E} comme l'espace des groupes homologues de g dans le groupe Γ .

Soit maintenant S_0 une matrice quelconque du groupe adjoint. Le groupe $T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}$ est changé par la transformation S_0 dans le groupe

$$S_0^{-1}T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}S_0.$$

La matrice $T^{\frac{1}{2}}S_0$ peut toujours se mettre sous la forme $RT^{\frac{1}{2}}$. Le groupe transformé est alors $T'^{-\frac{1}{2}}g'T'^{\frac{1}{2}}$. On en déduit, en prenant les conjuguées,

$$T^{-\frac{1}{2}}\overline{S_0} = RT^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$\overline{S_0}^{-1}T^{\frac{1}{2}} = T'^{\frac{1}{2}}R^{-1},$$

et par suite, par multiplication,

$$S_0^{-1}TS_0 = T'.$$

Nous retrouvons la relation qui donne le point T' transformé de T par le déplacement S_0 : elle est parallèle à celle qui donne le groupe $T'^{-\frac{1}{2}}g'T'^{\frac{1}{2}}$ transformé du groupe $T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}$ par la transformation S_0 .

25. Considérons maintenant une transformation du groupe adjoint *mixte*, c'est-à-dire une transformation qui, effectuée sur les opérations du groupe donné, conserve leurs lois de composition; il faut et il suffit pour cela qu'appliquée aux transformations infinitésimales du groupe, elle conserve les constantes de structure. Supposons que cette transformation change le sous-groupe g dans un autre sous-groupe homologue de g dans le groupe adjoint *continu*; elle laissera invariant l'ensemble des sous-groupes $T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}$, et ce sera une transformation isométrique de l'espace \mathcal{E} . Par suite, toute transformation du groupe

adjoint mixte qui laisse invariant l'ensemble des sous-groupes $T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}$ est une transformation isométrique de l'espace \mathcal{E} .

Réciproquement, toute isométrie de l'espace \mathcal{E} laisse invariant le groupe continu des déplacements, c'est-à-dire le groupe adjoint continu Γ ; c'est donc une transformation du groupe adjoint mixte.

On déduit de là que le groupe d'isométrie de \mathcal{E} contient autant de familles continues distinctes que le groupe adjoint mixte contient de familles distinctes laissant invariant l'ensemble des sous-groupes $T^{-\frac{1}{2}}gT^{\frac{1}{2}}$.

26. Il est clair que toute isométrie peut, d'une manière et d'une seule, être décomposée en une isométrie \mathcal{R} laissant fixe le point origine et une transvection $T^{\frac{1}{2}}$. Il y a par suite autant de familles continues distinctes d'isométries qu'il y a de familles continues distinctes dans le groupe mixte d'isotropie.

La détermination de ce dernier nombre fait l'objet du paragraphe suivant. Quant au nombre de familles distinctes du groupe adjoint mixte, c'est évidemment un multiple du précédent. Pour l'obtenir, il suffit de connaître le nombre des ensembles connexes distincts de sous-groupes g' de Γ isomorphes à g . Supposons en effet que g et g' fassent partie du même ensemble connexe; on pourra passer de g à g' par une transformation du groupe adjoint mixte; si l'on va de g à g' par une suite continue de sous-groupes g'' isomorphes à g , le passage de g à chaque sous-groupe g'' se fera par une transformation qui appartiendra, au moins au début, au groupe adjoint continu, et qu'on pourra suivre par continuité; le passage de g à g' se fera donc aussi par une transformation du groupe adjoint continu. Toutes les familles du groupe adjoint mixte qui laisseront invariant ce premier ensemble connexes définiront donc complètement le groupe mixte d'isométrie de l'espace \mathcal{E} . Il y aura ensuite toujours le même nombre de familles du groupe adjoint mixte laissant invariant chacun des autres ensembles connexes, ce qui démontre le théorème.

Nous vérifierons, au moins en ce qui concerne les espaces \mathcal{E} attachés aux quatre grandes classes de groupes simples, que les sous-groupes de Γ isomorphes à g forment un seul ensemble connexe. Si nous admettons ce résultat, nous voyons que le groupe adjoint mixte de Γ

admet autant de familles continues distinctes que le groupe mixte d'isométrie et que le groupe mixte d'isotropie.

Le groupe mixte d'isotropie.

27. Désignons d'une manière précise par g le groupe continu d'isotropie, en tant qu'il opère sur les vecteurs issus de l'origine, ou encore sur les coefficients v_α des transformations infinitésimales $i\Sigma v_\alpha Y_\alpha$ qui définissent ces vecteurs. Il est clair que toute transformation \mathcal{R} du groupe mixte d'isotropie sera une substitution linéaire en v_1, v_2, \dots, v_n et cette substitution linéaire devra satisfaire aux deux conditions suivantes :

- 1° Elle laisse invariant le groupe linéaire g ;
- 2° Elle conserve la forme quadratique définie $\varphi(v)$ qui donne le carré de la longueur d'un vecteur.

La première propriété résulte de ce que l'opération $\mathcal{R}^{-1}R\mathcal{R}$, où R est une opération quelconque de g , appartient nécessairement à g , puisqu'elle peut être liée d'une manière continue, à l'intérieur du groupe mixte d'isotropie, à l'opération identique.

Réciproquement, soit \mathcal{R} une substitution linéaire jouissant des deux propriétés précédentes. Laissant invariant g , elle conserve sa structure; d'autre part, g n'est autre que le groupe linéaire qui indique comment les transformations infinitésimales Y sont transformées entre elles par les transformations e^X ; les coefficients de ses transformations infinitésimales sont précisément les constantes de structure qui entrent dans l'expression des crochets $(X_i Y_\alpha)$ au moyen des Y . Finalement l'opération \mathcal{R} transforme entre elles d'une part les X , d'autre part les Y , en conservant les constantes de structure qui entrent dans les crochets $(X_i X_j)$ et $(X_i Y_\alpha)$.

Or, dans tout espace \mathcal{E} , la connaissance des crochets $(X_i X_j)$ et $(X_i Y_\alpha)$ entraîne, à un facteur constant près, celle des $(Y_\alpha Y_\beta)$ (1). Mais ce facteur constant est ici égal à l'unité, puisque la forme $\varphi(v)$ est laissée invariante.

(1) E. CARTAN, *Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 261.

L'opération \mathcal{R} considérée appartient donc au groupe adjoint mixte, et par suite au groupe mixte d'isotropie.

Tout revient donc essentiellement à chercher les substitutions linéaires qui laissent invariant le groupe linéaire g .

28. Rappelons ⁽¹⁾ que le groupe linéaire g , qui peut être rendu orthogonal en réduisant la forme définie $\varphi(\varphi)$ à une somme de carrés, peut :

1° Ou bien être simple ou se décomposer en sous-groupes simples; il est alors *irréductible*;

2° Ou bien se décomposer en un groupe simple ou semi-simple et un groupe à un paramètre; il est alors *réductible*, transformant entre elles une première série de $\frac{n}{2}$ variables complexes et une seconde série de $\frac{n}{2}$ variables complexes conjuguées.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où g est irréductible.

1° *Le groupe g est simple.* — Il appartient alors à un certain type simple unitaire, et nous aurons d'abord à rechercher si le groupe adjoint de ce type admet une ou plusieurs familles distinctes de transformations. S'il n'en admet qu'une, l'opération \mathcal{R} transformera les opérations de g de la même manière qu'une opération convenablement choisie du groupe g lui-même; on pourra donc se ramener au cas où l'opération \mathcal{R} laisse invariante *chaque transformation* de g . Le groupe linéaire g étant irréductible, une telle opération multiplie nécessairement toutes les variables par un même facteur, qui ne peut être que -1 , puisque le carré de la longueur d'un vecteur doit être conservé. Cela n'est possible que si l'entier k ⁽²⁾, qui indique le nombre de transformations distinctes de g qui correspondent à la transformation identique de son groupe adjoint, est *impair*; sinon en

⁽¹⁾ Voir le Mémoire qui vient d'être cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

⁽²⁾ Voir E. CARTAN, *Les tenseurs irréductibles*, etc. (*Bull. Sc. math.*, t. 49, 1925, p. 150).

effet la transformation $c'_x = -c_x$ ferait déjà partie du groupe continu d'isotropie g .

Supposons maintenant que le groupe adjoint du type unitaire auquel appartient g admette plusieurs familles continues distinctes d'opérations. Cela arrive (1) pour les types (A) de rang $l \geq 2$; (D) de rang $l \geq 4$ et (E) de rang 6. Si les transformations d'une de ces familles ne laissent pas invariant le groupe g , il n'y aura pas lieu de les considérer, car il ne pourra leur correspondre aucune opération \mathcal{R} . Les seuls cas qu'il y ait à examiner sont ceux où le groupe g est (2) :

- (A) du type $g_1^{p_1} g_2^{p_2} \dots g_l^{p_l}$ avec $p_1 = p_l, p_2 = p_{l-1}, \dots$;
 (D) du type $g_1^{p_1} g_2^{p_2} \dots g_l^{p_l}$ avec $p_1 = p_2$;
 (E) du type $g_1^{p_1} g_2^{p_2} \dots g_6^{p_6}$ avec $p_1 = p_3, p_4 = p_5$.

Il y aurait encore, pour le type (D) de rang 4, dont le groupe adjoint unitaire est formé de six familles continues distinctes, à examiner tous les cas où deux des exposants p_1, p_2, p_3 seraient égaux.

Supposons que l'une des familles de transformations du groupe adjoint laisse invariant le groupe g ; on cherchera une substitution linéaire particulière \mathcal{R} transformant g de la même manière qu'une transformation particulière de cette famille. Si l'on donne des poids aux différentes variables de g , l'une des transformations du groupe adjoint mixte a pour effet de changer entre eux ces poids; on essaiera donc une substitution \mathcal{R} échangeant entre elles les variables d'une manière correspondante. Si maintenant le groupe continu d'isotropie a un entier k impair, aucune des nouvelles familles obtenues du groupe d'isotropie ne contiendra la symétrie par rapport à l'origine, qui laisserait invariante chaque opération de g . On la combinera donc avec les familles déjà obtenues, ce qui en doublera le nombre.

2° *Le groupe g est semi-simple et ne contient aucun sous-groupe invariant à un paramètre.* — Il résulte alors de la multiplication de deux ou plusieurs sous-groupes simples échangeables entre eux; supposons qu'il y en ait deux, g_1 et g_2 . Les variables de g sont transformées

(1) E. CARTAN, *Le principe de dualité* (Bull. Soc. math., t. 49, 1925, p. 366).

(2) Voir pour les notations E. CARTAN, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Sc. math., t. 41, 1913, p. 53-96).

comme les quantités $x_\alpha y_\beta$, où les x_α sont les variables transformées par g_1 et les y_β les variables transformées par g_2 . Le groupe adjoint de g s'obtiendra d'abord en multipliant le groupe adjoint de g_1 par le groupe adjoint de g_2 ; mais il pourra contenir en outre des transformations échangeant entre eux les deux sous-groupes g_1 et g_2 dans le cas où ceux-ci ont la même structure (et sont de plus des groupes linéaires *semblables*). A toute famille continue du groupe adjoint de g laissant invariant le groupe linéaire g , correspondra donc une famille continue déterminée du groupe d'isotropie. Si l'entier k correspondant à g , et qui est le plus petit multiple commun des entiers k_1 et k_2 correspondant à g_1 et g_2 , est impair, il faudra encore composer toutes les opérations obtenues avec la symétrie par rapport à l'origine, ce qui doublera le nombre des familles continues distinctes du groupe d'isotropie.

29. Plaçons-nous maintenant dans le cas où le groupe g contient un sous-groupe invariant à un paramètre. Tout vecteur est défini analytiquement par $\nu = \frac{n}{2}$ variables complexes x_1, x_2, \dots, x_ν et les ν variables conjuguées $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\nu$. Le groupe g transforme entre elles les variables x_1, \dots, x_ν et, considéré comme un groupe linéaire par rapport à ces variables, il est irréductible.

Le groupe g contient les transformations

$$x'_\alpha = x_\alpha e^{i\theta},$$

où θ est un paramètre arbitraire; par suite, il contient toujours la symétrie par rapport à l'origine. On peut d'autre part le décomposer en un groupe simple ou semi-simple g_1 et dans le groupe à un paramètre précédent g_0 . Toute famille continue du groupe adjoint de g_1 laissant invariant g_1 donnera naissance à une famille continue du groupe d'isotropie. Toute autre opération \mathcal{R} du groupe d'isotropie laissera invariante chaque opération de g ; elle pourra soit conserver l'ensemble des variables x_α , soit changer l'ensemble des variables x_α dans l'ensemble des variables \bar{x}_α . Le premier cas ne peut pas se présenter, car le groupe g , considéré en tant qu'opé-

rant sur les x_z , est irréductible, et toute substitution linéaire échangeable avec chaque opération de g serait donc de la forme $x'_z = mx_z$, ce qui entraînerait $\bar{x}'_z = \bar{m}\bar{x}_z$, d'où $m\bar{m} = 1$. Or, l'opération \mathcal{R} conserve les longueurs des vecteurs; m étant de module 1, l'opération fait déjà partie du sous-groupe g_0 du groupe continu g . Mais le second cas est parfaitement possible; on obtient une opération \mathcal{R} en changeant x_z en \bar{x}_z , d'où, par combinaison, doublement du nombre des familles du groupe d'isotropie.

Le groupe de connexion du groupe adjoint Γ (1).

30. Étant donné un groupe quelconque G , il existe toujours un groupe *abstrait* \bar{G} , infinitésimalement isomorphe à G , mais dont le domaine est *simplement connexe*. Ce groupe \bar{G} est bien déterminé et le groupe $\bar{G}|G$ s'appelle le *groupe de connexion* de G ; il est formé des opérations de \bar{G} qui correspondent à la transformation identique de G . Le groupe de connexion est abélien.

Nous avons vu (n° 21) que toute transformation du groupe adjoint Γ simple réel non unitaire pouvait, d'une manière et d'une seule, être décomposée en une rotation R du groupe g et une transvection $T^{\frac{1}{2}}$. Par suite, tout contour fermé tracé dans le domaine du groupe Γ se ramène à un contour fermé tracé dans le domaine du groupe g , et à un contour fermé tracé dans l'espace simplement connexe \mathcal{E} . Le deuxième contour fermé est toujours réductible à zéro par déformation continue. Par suite, *le groupe de connexion de Γ est identique à celui de g .*

31. Quant au groupe de connexion de g , voici comment on le détermine :

Trois cas peuvent se présenter : ou bien le groupe g est un groupe linéaire simple (unitaire); ou bien il résulte de la multiplication de deux groupes linéaires simples à paramètres distincts, ou bien enfin

(1) Voir, au sujet des résultats invoqués, mon Mémoire : *La Géométrie des groupes simples* (*Ann. di Mat.*, loc. cit., p. 211-230).

il résulte de la multiplication d'un groupe linéaire simple ou semi-simple de l'un des groupes précédents par le groupe à un paramètre $u' = e^{i\theta}u$.

Dans le premier cas, on a immédiatement le groupe de connexion de g . On connaît en effet le groupe de connexion de son groupe adjoint, et d'autre part on connaît l'entier k qui indique le nombre de transformations distinctes de g qui correspondent à la transformation identique de son groupe adjoint. Comme le groupe g est un groupe linéaire irréductible, ces transformations multiplient toutes les variables du groupe g par une même racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité. Le groupe de connexion du groupe adjoint est un groupe abélien (en général cyclique) engendré par une ou deux opérations cycliques, soit A et A' ; d'autre part, on peut supposer que c'est à l'opération A^k que correspond la transformation identique de g . Le groupe de connexion de g est alors engendré par les deux opérations A^k et A' . Si le groupe de connexion du groupe adjoint était cyclique, celui de g serait engendré par A^k ; son ordre est le quotient $\frac{K}{k}$ de l'ordre du groupe de connexion du groupe adjoint de g par l'entier k .

32. Si g est le produit de deux groupes linéaires simples g_1 et g_2 , on peut déterminer son groupe de connexion d'une manière analogue.

Rappelons d'abord la construction de g . Soient x_α les variables transformées par g_1 et y_β les variables transformées par g_2 . Les variables transformées par g le sont de la même manière que les produits x_α, y_β , quand on soumet les x et les y aux transformations de g_1 et de g_2 . A chacun des groupes linéaires g_1 et g_2 correspond un entier k_1 et k_2 ; k_1 est le nombre des opérations distinctes de g_1 qui correspondent à la transformation identique de son groupe adjoint; chacune de ces opérations multiplie toutes les variables x_α par une même racine $k_1^{\text{ième}}$ de l'unité; de même il existe dans g_2 un nombre k_2 d'opérations dont chacune multiplie toutes les variables y_β par une même racine $k_2^{\text{ième}}$ de l'unité.

Soient maintenant K_1 et K_2 les ordres des groupes de connexion des groupes adjoints de g_1 et g_2 ; soient A_1 et A_2 leurs opérations génératrices (en supposant ces deux groupes cycliques). On peut supposer

qu'à A_1 correspond la transformation de g_1 qui multiplie toutes les variables x_2 par $e^{\frac{2i\pi}{k_1}}$; on peut faire une hypothèse analogue pour A_2 . Nous allons chercher quelles sont celles des opérations

$$A^\lambda B^\mu \quad (\lambda = 0, 1, \dots, K_1 - 1; \quad \mu = 0, 1, \dots, K_2 - 1),$$

qui correspondent à la transformation identique de g . Les entiers λ et μ sont déterminés par la condition que $\frac{\lambda}{k_1} + \frac{\mu}{k_2}$ soit un nombre entier. Soit d le plus grand commun diviseur de k_1 et k_2 , et posons

$$k_1 = k'_1 d, \quad k_2 = k'_2 d.$$

On voit immédiatement que λ et μ doivent être de la forme

$$\lambda = k'_1 \lambda', \quad \mu = k'_2 \mu',$$

et que $\lambda' + \mu'$ doit être divisible par d

$$\mu' = d\rho - \lambda'.$$

Par suite, les opérations cherchées sont de la forme

$$(A^{k'_1} B^{-k'_2})^{\lambda'} B^{k'_2 \rho},$$

où λ' et ρ sont deux entiers arbitraires. On retrouve l'opération identique si λ' et ρ sont de la forme

$$\lambda' = \frac{K_1}{k'_1} m, \quad \rho = \frac{K_1}{k'_1} m + \frac{K_2}{k'_2} n,$$

avec deux entiers m et n arbitraires. Par suite, *l'ordre du groupe de connexion de g* (groupe engendré par les deux opérations $A^{k'_1} B^{-k'_2}$ et $B^{k'_2}$) *est égal à*

$$\frac{K_1 K_2}{k'_1 k'_2},$$

c'est-à-dire au quotient de l'ordre $K_1 K_2$ du groupe de connexion du groupe adjoint de g par le plus multiple commun de k_1 et k_2 .

Le raisonnement serait analogue si les groupes de connexion des groupes adjoints de g_1 et de g_2 n'étaient pas cycliques, et la conclusion serait la même.

33. Prenons enfin le cas où le groupe g serait le produit d'un groupe linéaire simple ou semi-simple g_1 à un certain nombre de variables x_α et du groupe g_0 à une variable $y' = ye^{i\theta}$. Il existe dans g_1 un certain nombre de transformations multipliant toutes les variables par une même racine de l'unité, et il est clair que ces transformations engendrent un cycle d'un certain ordre h . Le groupe de connexion du groupe adjoint de g_1 peut être supposé connu; il admettra par exemple deux opérations génératrices A et B; à A correspondra l'opération de g_1 qui multiplie toutes les variables x_α par $e^{\frac{2i\pi}{h}}$, et à B correspondra la transformation identique.

Quant au groupe de connexion du groupe adjoint de g_0 , il est facile à déterminer; ce groupe adjoint se réduit en effet à la transformation identique; le groupe de connexion est *continu* et chaque opération est caractérisée par un angle θ variant de $-\infty$ à $+\infty$. En désignant par exemple par C l'opération correspondant à $\theta = 2\pi$, l'opération correspondant à θ sera $C^{\frac{\theta}{2\pi}}$.

Cela posé, à l'opération

$$A^\lambda B^\mu C^\nu$$

correspond la transformation de g qui multiplie toutes les variables par

$$e^{2i\pi(\frac{\lambda}{h} + \nu)}$$

ce sera la transformation identique si l'on a

$$\nu = -\frac{\lambda}{h} + n,$$

n étant entier. Le groupe de connexion de g est donc formé des opérations

$$\left(AC^{-\frac{1}{h}}\right)^\lambda B^\mu C^n,$$

avec trois entiers arbitraires λ, μ, n . Du reste on peut prendre comme opérations génératrices

$$AC^{-\frac{1}{h}}, A^h \text{ et } B.$$

A^h et B engendrant le groupe de connexion de g_1 , on arrive au résultat suivant :

Le groupe de connexion de g se décompose en un groupe cyclique d'ordre infini et un groupe fini, à savoir le groupe de connexion de g_1 .

Le groupe cyclique d'ordre infini est formé des différentes puissances à exposant entier, positif, nul ou négatif d'une opération génératrice.

34. On peut maintenant partir d'un groupe quelconque G de la structure infinitésimale réelle donnée et différent du groupe adjoint Γ . Toute transformation finie de ce groupe sera décomposable d'une manière et d'une seule en une transformation du sous-groupe engendré par les X et une transformation engendrée par les iY . Son groupe de connexion sera un sous-groupe du groupe de connexion du groupe adjoint Γ .

35. On pourra toujours obtenir un groupe de la structure infinitésimale réelle donnée et qui soit simplement connexe. Supposons d'abord le groupe de connexion de Γ fini et introduisons d'une part les paramètres a_1, \dots, a_s d'un groupe linéaire simplement connexe ayant la structure de g (groupe que nous savons exister); d'autre part, les paramètres b_1, \dots, b_n de la transformation infinitésimale $\Sigma b_\alpha iY_\alpha$. Les paramètres du groupe étant ainsi choisis, le groupe des paramètres symbolisé par la relation

$$S_{x',y'} = S_{x,y} S_{a,b},$$

où (a, b) , (x, y) , (x', y') désignent trois opérations du groupe abstrait, donnera pour les x' et y' des expressions régulières, uniformes des x et des y ; comme le sous-groupe g' correspondant est simplement connexe, le groupe lui-même sera simplement connexe.

Si le groupe de connexion de Γ est infini, l'un des paramètres du sous-groupe g du groupe adjoint est un angle variant de 0 à 2π ; nous le considérerons dans les formules comme variable de $-\infty$ à $+\infty$, et nous obtiendrons ainsi le résultat cherché.

36. Le raisonnement qui a été fait s'applique au groupe des déplacements de l'espace euclidien à n dimensions; le groupe continu

d'isotropie est ici, pour $n \geq 3$, le groupe continu d'une forme quadratique définie positive; son groupe de connexion est d'ordre 2. Pour $n = 3$ par exemple, on définira une rotation autour de l'origine au moyen des paramètres d'Olinde Rodrigues ρ, λ, μ, ν liés par la relation

$$\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

et l'on *dédoublera* ces rotations en regardant comme distinctes les deux opérations $(\rho, \lambda, \mu, \nu)$ et $(-\rho, -\lambda, -\mu, -\nu)$. On combinera ensuite cette rotation avec une translation (a, b, c) . Les formules de composition des déplacements définiront alors un groupe simplement connexe isomorphe au groupe des déplacements de l'espace (1). En introduisant comme paramètres un quaternion unitaire A et un vecteur B, comme variables un quaternion unitaire T et un vecteur U, les équations du groupe simplement connexe sont

$$\begin{aligned} T' &= AT, \\ U' &= AUA^{-1} + B. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, le groupe d'isotropie est le groupe des rotations du plan. On prendra alors comme paramètres l'angle c de rotation (qu'on regardera comme une variable susceptible de prendre toutes les valeurs réelles) et les composantes a, b de la translation. On arrivera ainsi au groupe *simplement connexe*

$$\begin{aligned} x' &= a \cos z - b \sin z + x, \\ y' &= a \sin z + b \cos z + y, \\ z' &= z + c. \end{aligned}$$

infinitésimalement isomorphe au groupe des déplacements du plan, ce dernier ayant un groupe de connexion d'ordre infini.

La courbure riemannienne de l'espace \mathcal{S} et les variétés euclidiennes E_n .

37. Dans l'espace à connexion affine sans torsion d'un groupe G dont les constantes de structure sont c_{ij}^k , la courbure riemannienne

(1) Ce groupe, ainsi dédoublé, a été considéré depuis longtemps par E. Study dans ses importants travaux sur la géométrie des « Somas ».

est donnée par la formule (1)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_k c_{\alpha\beta}^k c_{k\beta}^{\alpha}.$$

Supposons pour un instant que nous ayons choisi, pour base du groupe unitaire Γ_u , des transformations infinitésimales X_i, Y_α toutes de module égal à 1 et orthogonales entre elles, de manière que la somme des carrés des racines caractéristiques de la transformation

$$\sum_i u_i X_i + \sum_\alpha v_\alpha Y_\alpha,$$

soit

$$\sum_i u_i^2 + \sum_\alpha v_\alpha^2.$$

Les constantes de structure du groupe formeront alors un système de trivecteurs; la courbure riemannienne de l'espace \mathcal{E} dans la direction déterminée par les deux transformations infinitésimales iY_α et iY_β sera

$$-\frac{1}{4} \sum_k c_{\alpha\beta}^k c_{k\alpha}^\beta = -\frac{1}{4} \sum_k (c_{\alpha\beta k})^2.$$

Elle est donc négative, et ne pourrait être nulle que si tous les coefficients $c_{\alpha\beta k}$ étaient nuls, c'est-à-dire si les deux transformations infinitésimales Y_α et Y_β étaient échangeables entre elles.

38. Comme nous l'avons vu (n° 4), il existe pour l'espace \mathcal{E} un entier λ déterminé, que nous appellerons le *rang* de l'espace, et qui jouit de la propriété caractéristique suivante :

Les vecteurs issus de l'origine dépendent, à une rotation près du groupe continu d'isotropie, de λ paramètres arbitraires.

Comme les transformations infinitésimales Y échangeables avec une transformation générale Y_0 engendrent un groupe abélien, il en résulte que toute géodésique issue de l'origine appartient à au moins une variété E_λ à λ dimensions, totalement géodésique et de courbure rieman-

(1) E. CARTAN, *J. Math. pures et appl.*, t. 6, 1927, p. 64, formule (7).

nienne nulle, de telle sorte que toute rotation qui laisse fixe la géodésique laisse fixe chaque point de E_λ . Toutes les variétés E_λ sont congruentes entre elles.

La propriété de la variété E_λ d'être *euclidienne* (de courbure nulle) résulte de l'expression trouvée plus haut pour la courbure riemannienne.

Rappelons du reste qu'on aura une variété E_λ particulière en choisissant d'une manière quelconque un système de transformations infinitésimales Y échangeables entre elles et telles qu'aucune autre transformation Y ne soit échangeable avec toutes celles-là.

39. Si l'on prend une variété euclidienne particulière E_λ issue de l'origine, toute géodésique issue de O est congruente à une géodésique située dans E_λ . Mais on peut aller plus loin. La variété E_λ n'est en effet que l'espace euclidien à λ dimensions sur lequel nous avons fait la représentation des transformations Y . Tout point de \mathcal{E} représente une transformation $T = e^{iY}$, et les paramètres angulaires φ_α de Y peuvent être regardés comme constituant un système de coordonnées cartésiennes dans E_λ , le carré de la distance d'un point à l'origine étant la somme des carrés des φ_α .

La variété euclidienne E_λ peut alors être partagée (n° 10) en un certain nombre de régions indéfinies (D) qui peuvent se déduire les unes des autres par les opérations du groupe fini (S), lesquelles produisent le même effet que certaines rotations du groupe continu d'isotropie. Toute demi-géodésique issue de O est donc congruente à une géodésique située dans une des régions (D) de la variété euclidienne E_λ .

Ajoutons enfin la remarque à peu près évidente que par deux points de l'espace \mathcal{E} il passe une géodésique et une seule, et que cette géodésique réalise le minimum de la distance des deux points.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES ESPACES A COURBURE NÉGATIVE
ATTACHÉS AUX GROUPE SIMPLES RÉELS NON UNITAIRES.

Nous allons maintenant passer en revue les différentes classes d'espaces \mathcal{E} à courbure négative, attachés aux groupes simples réels non unitaires. Nous nous bornerons essentiellement aux quatre grands types de groupes simples. Nous indiquerons, pour chaque classe, une interprétation géométrique de l'espace \mathcal{E} , ainsi que les propriétés principales des variétés euclidiennes E_i ; nous déterminerons enfin le groupe de connexion du groupe des déplacements ainsi que le groupe mixte d'isométrie ⁽¹⁾.

Les espaces du type (A1).

40. La structure simple de la forme (A1) est celle du groupe linéaire unimodulaire réel G de l variables réelles (l étant le rang du groupe). Les transformations infinitésimales sont

$$\begin{aligned} (X) \quad & x_i p_j - x_j p_i \quad (i, j = 1, \dots, l+1), \\ (iY) \quad & x_i p_i - x_{l+1} p_{l+1}, \quad x_i p_j + x_j p_i \quad (i, j = 1, \dots, l+1). \end{aligned}$$

Ses transformations X engendrent le groupe orthogonal à $l+1$ variables; chaque transformation Y engendre une substitution linéaire à tableau symétrique.

Au lieu de définir l'espace \mathcal{E} comme le lieu des matrices T du groupe adjoint continu, on peut le regarder comme le lieu des transformées par le groupe G d'une forme invariante par le sous-groupe g ; par exemple, *le lieu des formes quadratiques définies positives de discriminant 1*

$$F = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Il est clair, en effet, que toute forme de cette nature est invariante par

⁽¹⁾ Les tableaux des transformations infinitésimales X et Y relatives à chaque type d'espaces \mathcal{E} se trouvent à la fin du Mémoire: *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bull. Soc. math.*, t. 53, 1927, p. 126-132). L'entier qui y est désigné par λ n'est pas le rang de l'espace.

un sous-groupe g' de G isomorphe de g ; d'autre part, toutes ces formes constituent un ensemble *connexe*, car si F_1 et F_2 sont deux d'entre elles, la forme $F_1 \cos t + F_2 \sin t$, où t varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$, est aussi définie positive; en la divisant par un facteur convenable positif, fonction continue de t , on aura une suite continue de formes allant de F_1 à F_2 .

41. *Le rang et les variétés E_l .* — On aura ici un sous-groupe γ_l en prenant, par exemple, les transformations infinitésimales

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=l+1} a_{\alpha} x_{\alpha} p_{\alpha} \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_{l+1} = 0).$$

Le rang λ de l'espace est donc égal à l . Les racines de l'équation caractéristique des transformations correspondantes du groupe adjoint sont les quantités $a_{\alpha} - a_{\beta}$. Le groupe (S) est le groupe de substitutions le plus général sur les $l + 1$ lettres a_{α} .

La variété E_l est à l dimensions et est le lieu des formes quadratiques définies positives

$$\Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 + \dots + \Lambda_{l+1} x_{l+1}^2 \quad (\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{l+1} = 1).$$

Le ds^2 de cette variété est, à un facteur constant près,

$$ds^2 = \frac{d\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2} + \frac{d\Lambda_2^2}{\Lambda_2^2} + \dots + \frac{d\Lambda_{l+1}^2}{\Lambda_{l+1}^2}.$$

Toute géodésique est congruente à la géodésique lieu des formes quadratiques

$$e^{a_1 s} x_1^2 + e^{a_2 s} x_2^2 + \dots + e^{a_{l+1} s} x_{l+1}^2,$$

où les constantes a_1, a_2, \dots, a_{l+1} sont liées par les relations

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{l+1} &= 0, \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{l+1}^2 &= 1, \end{aligned}$$

et où l'on peut, de plus, supposer

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{l+1}.$$

Ces dernières inégalités définissent le domaine fondamental (D) du groupe (S).

On voit que si la géodésique est tout entière intérieure à (D), elle part, pour $s = -\infty$, du point impropre x_{l+1}^2 pour aboutir, pour $s = +\infty$, au point impropre x_1^2 .

L'*absolu* est ici formé par les formes quadratiques définies dégénérées. Dans le cas très particulier $l = 2$, $n = 5$, l'*absolu* est formé, dans l'espace projectif (a_{ij}) , d'une partie de la variété cubique obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme (a_{ij}) , à savoir la partie correspondant aux coniques décomposées en deux droites imaginaires conjuguées. Il contient aussi la *surface de Veronese*, qui correspond aux formes quadratiques carrés parfaits. Chaque plan E_2 coupe l'*absolu* suivant un triangle; les géodésiques qui partent d'un point donné du plan vont, en général, d'un sommet du triangle à un autre; il y a exception pour trois géodésiques particulières (représentées par des droites), qui partent d'un sommet (x_1^2 , par exemple), pour aboutir à un point particulier du côté opposé ($x_2^2 + x_3^2$). Dans cette image du plan euclidien, on voit que l'ensemble des points propres (à distance finie) est complété par des points impropres (points à l'infini); mais les différentes géodésiques issues d'un point donné du plan n'aboutissent pas à n'importe quel point à l'infini.

42. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — Le groupe g , considéré comme le groupe continu d'isotropie, est celui qui indique comment les coefficients d'une forme quadratique harmonique à $l+1$ variables sont transformés par les substitutions orthogonales effectuées sur ces variables : les formes quadratiques définies positives, de discriminant 1, infiniment voisines de la forme unité, sont, en effet,

$$(1 + a_{11})x_1^2 + \dots + (1 + a_{l+1, l+1})x_{l+1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots,$$

avec

$$a_{11} + \dots + a_{l+1, l+1} = 0.$$

Le groupe g est, pour l pair, du type (B) de rang $\frac{l}{2}$: c'est le groupe g_2^2 , pour lequel $k = 1$, $\bar{K} = 2$. Le groupe de connexion cherché est cyclique d'ordre 2 (n° 31).

Si l est impair, g est du type (D) de rang $\frac{l+1}{2}$. En supposant $l \geq 3$, on

a le groupe g_3^2 , pour lequel $k = 1$, $K = 4$. Le groupe de connexion est d'ordre 4, cyclique si $\frac{l+1}{2}$ est impair, ou $l \equiv 1 \pmod{4}$; non cyclique (Vierergruppe) si $l \equiv 3 \pmod{4}$.

Pour $l = 1$, g est isomorphe au groupe des rotations du plan; son groupe de connexion est cyclique d'ordre infini.

Le groupe adjoint, dont nous venons de déterminer le groupe de connexion, est isomorphe au groupe homographique de l variables réelles. Le groupe linéaire *unimodulaire* de $l+1$ variables réelles lui est isomorphe holoédrique si l est pair; si l est impair, il correspond à une transformation homographique de deux transformations linéaires distinctes. Par suite, *le groupe linéaire unimodulaire de n variables réelles n'est jamais simplement connexe; son groupe de connexion est cyclique d'ordre infini ($n = 2$), ou d'ordre 2 ($n \geq 3$).*

On déduit en particulier de là *qu'aucun groupe linéaire de même structure infinitésimale que le groupe homographique de l variables réelles n'est simplement connexe.*

Dans le cas $l = 1$, on obtient un groupe simplement connexe en prenant le groupe

$$\operatorname{tang} x' = \frac{a \operatorname{tang} x + b}{a' \operatorname{tang} x + b'} \quad (ab' - ba' > 0),$$

où l'équation est supposée résolue par rapport à x' , en se donnant une des déterminations de x' correspondant à une valeur numérique donnée de x .

43. *Le groupe mixte d'isométrie.* — Appliquons les considérations générales des nos 27-29.

Si l est pair, g est le groupe g_2^2 du type (B) dont le groupe adjoint est continu. L'entier k étant égal à 1, *le groupe d'isométrie est formé de deux familles continues distinctes.* La symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement proprement dit.

Si l est impair, g est le groupe g_3^2 du type (D), dont le groupe adjoint est mixte. On aura une opération \mathcal{R} ne faisant pas partie du groupe continu d'isotropie en effectuant sur les variables x_i une substitution orthogonale de déterminant -1 . D'autre part, l'entier k est égal à 1. *Le groupe d'isométrie est donc formé de quatre familles continues dis-*

tinctes; la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement proprement dit.

Les quatre familles d'isométries peuvent être représentées par les formules

$$\begin{aligned} T' &= T_0 R_0^{-1} T R_0 T_0, \\ T' &= T_0 R_0^{-1} A T A R_0 T_0, \\ T' &= T_0 R_0^{-1} T^{-1} R_0 T_0, \\ T' &= T_0 R_0^{-1} A T^{-1} A R_0 T_0, \end{aligned}$$

dans lesquelles R_0 désigne une matrice orthogonale de déterminant 1, A la matrice diagonale dont tous les éléments sont égaux à 1, sauf un égal à -1 .

Les quatre familles d'isométries correspondent aux homographies directes, aux homographies inverses et aux deux familles correspondantes de corrélations. En particulier, la symétrie par rapport à l'origine revient à changer une forme quadratique définie positive en son adjointe.

44. *Le groupe adjoint mixte.* — Le groupe adjoint mixte du type (D), dans le domaine complexe, se compose de deux familles distinctes; tout groupe isomorphe de g s'en déduit soit par une homographie, soit par une corrélation. Or, la corrélation particulière $u_i = x_i$ laisse invariant le sous-groupe g . Par suite, tout sous-groupe g' isomorphe de g laisse invariante une forme quadratique nécessairement réelle et aussi définie positive, sans quoi la structure de g' dans le domaine réel ne serait pas la même que celle de g . Par suite, le groupe adjoint mixte laisse invariant l'ensemble des sous-groupes homologues de g dans le groupe adjoint continu. *Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.*

45. *Le ds^2 de l'espace \mathcal{E} .* — Il est facile d'avoir explicitement l'expression analytique du ds^2 de l'espace. Soit A la matrice (a_{ij}) unimodulaire symétrique positive variable; considérons le déterminant de la matrice $A + \rho dA$, où ρ est un paramètre scalaire, et développons-le suivant les puissances de ρ . On a

$$|A + \rho dA| = 1 + \rho^2 \varphi(a_{ij}, da_{ij}) + \dots$$

La forme différentielle quadratique φ a une signification invariante par les transformations du groupe G; si l'on prend pour A la matrice diagonale e^{a_i} , avec

$$\sum a_i = 0, \quad \sum a_i^2 = 1,$$

cette forme φ est égale à $ds^2 \sum a_i a_j = -\frac{1}{2} ds^2$. Par suite, le ds^2 cherché est défini par l'égalité

$$|\Lambda + \rho d\Lambda| = 1 - \frac{1}{2} \rho^2 ds^2 + \dots$$

Si, au lieu de prendre la matrice A unimodulaire, on la prenait simplement symétrique positive, et si l'on posait

$$|\Lambda + \rho d\Lambda| = \alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 + \dots,$$

on aurait

$$ds^2 = \frac{\frac{l}{l+1} \beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}.$$

Les espaces du type (AII).

46. Ces espaces n'existent que pour l impair. Ils sont à

$$n = \frac{(l-1)(l+2)}{2}$$

dimensions, et leur groupe d'isotropie est à

$$s = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

paramètres, du type $g_2 \left(G_{\frac{l+1}{2}} \right)$.

Désignons par α, β, \dots , les indices impairs 1, 3, ..., l ; par α', β', \dots , les indices pairs 2, 4, ..., $l+1$ qui les suivent immédiatement.

Partons du groupe linéaire unimodulaire G à $l+1$ variables complexes, et posons

$$X_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\beta}.$$

Les transformations infinitésimales X sont :

$$\begin{aligned} & i(X_{\alpha\alpha} - X_{\alpha'\alpha'}), \\ & X_{\alpha\alpha'} - X_{\alpha'\alpha}, \\ & i(X_{\alpha\alpha'} + X_{\alpha'\alpha}), \\ & X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'} - X_{\beta\alpha} - X_{\beta'\alpha'}, \\ & i(X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'} + X_{\beta\alpha} - X_{\beta'\alpha'}), \\ & X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta} + X_{\beta\alpha'} - X_{\beta'\alpha}, \\ & i(X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta} + X_{\beta\alpha'} + X_{\beta'\alpha}). \end{aligned}$$

Les transformations infinitésimales iY sont :

$$\begin{aligned} & X_{\alpha\alpha} + X_{\alpha'\alpha'}, \\ & X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'} + X_{\beta\alpha} + X_{\beta'\alpha'}, \\ & i(X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'} - X_{\beta\alpha} + X_{\beta'\alpha'}), \\ & X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta} - X_{\beta\alpha'} + X_{\beta'\alpha}, \\ & i(X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta} - X_{\beta\alpha'} - X_{\beta'\alpha}). \end{aligned}$$

Regardons les x_α comme des variables complexes

$$\begin{aligned} x_\alpha &= u_\alpha + iv_\alpha, \\ x_{\alpha'} &= w_\alpha + is_\alpha, \end{aligned}$$

et considérons le quaternion

$$\tilde{x}_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha + jw_\alpha + ks_\alpha.$$

Les transformations infinitésimales X peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\alpha i, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\alpha j, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\alpha k, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= -\xi_\beta, & \partial_{\tilde{x}_\beta} &= \xi_\alpha, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha, \beta); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\beta i, & \partial_{\tilde{x}_\beta} &= \xi_\alpha i, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha, \beta); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\beta j, & \partial_{\tilde{x}_\beta} &= \xi_\alpha j, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha, \beta); \\ \partial_{\tilde{x}_\alpha} &= \xi_\beta k, & \partial_{\tilde{x}_\beta} &= \xi_\alpha k, & \partial_{\tilde{x}_\lambda} &= 0 & (\lambda \neq \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Quant aux transformations iY , elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial \xi_\alpha &= \xi_\alpha, & \partial \xi_l &= -\xi_l; \\ \partial \xi_\alpha &= \xi_\beta, & \partial \xi_\beta &= \xi_\alpha; \\ \partial \xi_\alpha &= -\xi_\beta i, & \partial \xi_\beta &= \xi_\alpha i; \\ \partial \xi_\alpha &= -\xi_\beta j, & \partial \xi_\beta &= \xi_\alpha j; \\ \partial \xi_\alpha &= -\xi_\beta k, & \partial \xi_\beta &= \xi_\alpha k. \end{aligned}$$

47. Le groupe engendré par les transformations X et iY est le groupe quaternionien linéaire unimodulaire à $\frac{l+1}{2}$ variables

$$\xi_l' = \sum_k \xi_k a_{lk},$$

les a_{lk} étant des quaternions. Quant aux transformations X , elles laissent invariante la forme d'Hermite quaternionienne définie positive

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_l \bar{\xi}_l,$$

où $\bar{\xi}_\alpha$ désigne le quaternion conjugué de ξ_α .

Cette forme sera transformée par G en une forme également définie positive

$$\sum_{i,j} \xi_i A_{ij} \bar{\xi}_j,$$

où les quaternions A_{ij} satisfont aux relations

$$\bar{A}_{ij} = A_{ji};$$

les coefficients A_{ii} sont des scalaires positifs.

Réciproquement, toute forme d'Hermite quaternionienne définie positive pourra se ramener, par une substitution linéaire à paramètres quaternioniens effectuée sur les ξ_i , à la forme

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_l \bar{\xi}_l,$$

et par suite, sera invariante par un sous-groupe g' isomorphe de g . Toutes ces formes constituent un ensemble connexe; on le démontre comme dans le cas du type (AI); par suite, l'espace \mathcal{E} est l'espace des formes d'Hermite quaternioniennes définies positives, en ne regardant

pas comme distinctes deux formes ne différant que par un facteur constant scalaire.

48. *Les variétés euclidiennes E_l et les géodésiques.* — On obtient un groupe $\gamma_l = \gamma_{\frac{l-1}{2}}$ en prenant les $\frac{l-1}{2}$ transformations infinitésimales

$$X_{\alpha\alpha} + X_{\alpha'\alpha'} - X_{ll} - X_{l+1, l+1}.$$

Le rang de l'espace \mathfrak{E} est donc $\frac{l-1}{2}$, c'est-à-dire le nombre, diminué de 1, des variables quaternioniennes. L'espace euclidien correspondant est le lieu des formes définies

$$\sum_i \xi_i \Lambda_i \bar{\xi}_i,$$

où les scalaires positifs Λ_i ont un produit égal à 1. Le ds^2 de cet espace est

$$ds^2 = \sum \frac{d\Lambda_i^2}{\Lambda_i^2}.$$

Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\varphi_i - \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, \lambda + 1),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{\lambda+1} = 0;$$

chacun est multiple d'ordre 4.

Le domaine fondamental (D) peut être défini par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_{\lambda+1},$$

et le groupe (S) est le groupe de toutes les substitutions effectuées sur les $l + 1$ paramètres.

Toute géodésique est congruente à la géodésique lieu des formes

$$\sum_i \xi_i e^{a_i s} \bar{\xi}_i \quad (i = 1, 3, 5, \dots, l),$$

avec

$$\sum a_i = 0, \quad \sum a_i^2 = 1.$$

On peut supposer, de plus,

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_l.$$

La géodésique commence, pour $s = -\infty$, à la forme $\xi_i \bar{\xi}_i$ et se termine à la forme $\xi_1 \bar{\xi}_1$.

49. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — Le groupe continu d'isotropie est de la forme $g_2(C_{\frac{l+1}{2}})$; il correspond à $k = 1$, $K = 2$; son groupe de connexion est donc cyclique d'ordre 2. Si l'on part du groupe linéaire quaternionien, les transformations X engendrent un groupe du type $g_1(C_{\frac{l-1}{2}})$, pour lequel $k = 2$. *Le groupe linéaire quaternionien unimodulaire est donc simplement connexe.*

50. *Groupe mixte d'isométrie.* — Comme le groupe adjoint unitaire du type (C) est continu et que, pour le groupe g , l'entier k est égal à 1, *le groupe d'isométrie se compose de deux familles continues*; la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement proprement dit.

51. *Le groupe adjoint mixte.* — En revenant aux variables complexes primitives x_2 , on vérifie facilement que la corrélation $u_i = x_i$ laisse invariant le sous-groupe g . Par suite, tout sous-groupe g' isomorphe de g pourra se déduire de g par une homographie (complexe), qui correspondra à une substitution linéaire à paramètres quaternioniens complexes, effectuée sur les variables ξ_i . Le groupe g' laissera donc invariante une forme d'Hermite quaternionienne à coefficients complexes; ces coefficients seront, d'autre part, nécessairement des quaternions réels, et la forme sera définie, sans quoi la structure de g' dans le domaine réel ne serait pas la même que celle de g . On voit donc que le groupe adjoint mixte laisse invariant l'ensemble des sous-groupes homologues de g dans le groupe adjoint continu.

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Espaces du type (AIV).

52. *Définition géométrique.* — En conservant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, on a, pour les transformations X,

$$X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}, \quad i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), \quad iX_{\alpha\alpha} \\ (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, l);$$

quant aux transformations iY , ce sont les suivantes :

$$X_{\alpha, l+1} + X_{l+1, \alpha}, \quad i(X_{\alpha, l+1} - X_{l+1, \alpha}).$$

On a

$$n = 2l, \quad s = l^2$$

et

$$g = g_1(A_{l-1}) \times g_0.$$

Le groupe G est formé des substitutions linéaires unimodulaires qui laissent invariante la forme d'Hermite indéfinie

$$F = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_l \bar{x}_l - x_{l+1} \bar{x}_{l+1},$$

ou plutôt c'est le groupe adjoint de ce groupe. Le groupe engendré par les transformations X est celui qui laisse invariant le point

$$(0, 0, \dots, 0, 1).$$

On peut regarder \mathcal{E} comme l'espace projectif complexe à l dimensions, ou plutôt comme le lieu des points de cet espace transformés du point $(0, 0, \dots, 1)$, ou enfin comme le lieu des points complexes rendant négative la forme F (points intérieurs à l'absolu $F = 0$). C'est l'espace hermitien hyperbolique. L'existence d'un ds^2 défini dans cet espace a été démontrée pour la première fois pour $l = 2$ par H. Poincaré ⁽¹⁾.

53. *Géodésiques.* — L'espace \mathcal{E} est ici de rang 1; sa courbure riemannienne est donc toujours négative, sans pouvoir jamais s'anuler dans aucune direction plane. Toute géodésique est congruente à la géodésique

$$(1) \quad x_1 = 0, \dots, x_{l-1} = 0, \quad x_l = \operatorname{sh} s, \quad x_{l+1} = \operatorname{ch} s.$$

(1) *Comptes rendus*, t. 98, 1884, p. 503-504.

Dans l'espace projectif complexe, les géodésiques sont représentées par des *filles* (*Normalketten* de E. Study). La géodésique (1) part du point $(0, \dots, 0, -1, 1)$ pour aboutir au point $(0, \dots, 0, 1, 1)$ de l'absolu.

54. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — Ici, le groupe de connexion de $g_i(A_{l-1})$ se réduit à l'opération identique. Par suite, le groupe de connexion cherché est cyclique d'ordre infini.

Quant au groupe linéaire de la forme d'Hermite F, il a aussi un groupe de connexion cyclique d'ordre infini.

55. *Groupe mixte d'isométrie.* — La présence du sous-groupe invariant à un paramètre g_0 montre que le groupe mixte d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes; la symétrie par rapport à un point est un vrai déplacement. Les deux familles d'isométries sont les homographies et les antihomographies.

56. *Groupe adjoint mixte.* — Les opérations qui jouent ici le rôle des corrélations sont les antihomographies; en particulier, l'antihomographie $x'_i = \overline{x}_i$ laisse invariant le groupe g ; par suite, tout groupe g' isomorphe de g s'en déduit par une homographie; il laisse donc invariant un point et ce point doit rendre la forme F négative, sans quoi la structure de g' ne serait pas la même que celle de g .

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Espaces du type (AIII).

57. *Définition géométrique.* — On a ici

$$n = 2pq, \quad s = p^2 + q^2 - 1,$$

où p et q sont deux entiers supérieurs à 1 et de somme $l + 1$.

Les transformations X sont

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}, & \quad i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), & iX_{\alpha\alpha} & \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p); \\ X_{\lambda\mu} - X_{\mu\lambda}, & \quad i(X_{\lambda\mu} + X_{\mu\lambda}), & iX_{\lambda\lambda} & \quad (\lambda, \mu = p + 1, \dots, l + 1). \end{aligned}$$

Les transformations iY sont

$$X_{\alpha\lambda} + X_{\lambda\alpha}, \quad i(X_{\alpha\lambda} - X_{\lambda\alpha}).$$

On peut prendre pour groupe G le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite indéfinie à p carrés positifs et q carrés négatifs

$$F = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_p \bar{x}_p - x_{p+1} \bar{x}_{p+1} - \dots - x_{l+1} \bar{x}_{l+1}.$$

Le groupe g est celui qui laisse invariante la variété

$$(2) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

et, par suite, aussi la variété polaire par rapport à F

$$x_{p+1} = \dots = x_{l+1} = 0.$$

Les variétés planes transformées de (2) par le groupe G rendent la forme F définie négative. Réciproquement, toute variété plane à $q - 1$ dimensions, jouissant de cette propriété, est invariante par un groupe isomorphe de g . On peut la définir analytiquement, et cela sans aucune exception, par p équations de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_{p+1} + \dots + a_{1q} x_{l+1}, \\ x_2 &= a_{21} x_{p+1} + \dots + a_{2q} x_{l+1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_p &= a_{p1} x_{p+1} + \dots + a_{pq} x_{l+1}, \end{aligned}$$

les coefficients complexes a_{ij} étant assujettis à la condition que la forme d'Hermite

$$x_{p+1} \bar{x}_{p+1} + \dots + x_{l+1} \bar{x}_{l+1} - \sum_i (a_{i1} x_{p+1} + \dots + a_{iq} x_{l+1}) (\bar{a}_{i1} \bar{x}_{p+1} + \dots + \bar{a}_{iq} \bar{x}_{l+1})$$

soit définie positive. Il est clair que cette condition ne cessera pas d'être remplie si l'on remplace les coefficients a_{ij} par ta_{ij} , avec un facteur t réel compris entre zéro et un. Par suite, l'ensemble des variétés considérées est connexe.

L'espace \mathcal{E} est donc l'espace des variétés planes à $q - 1$ dimensions rendant la forme F définie négative.

58. Géodésiques. — Supposons $p > q$. Toute transformation iY est

réductible à la forme

$$a_1(X_{1,p+1} + X_{p+1,1}) + a_2(X_{2,p+2} + X_{p+2,2}) + \dots + a_q(X_{q,l+1} + X_{l+1,q}),$$

où les coefficients a_i sont des quantités réelles arbitraires. En faisant varier ces coefficients, on obtient dans \mathcal{E} une variété euclidienne E_q issue de l'origine. Le rang de l'espace est donc q . Toute géodésique peut, par déplacement, être ramenée à passer par l'origine et à être dans une de ces variétés E_q . Une telle géodésique sera le lieu des variétés planes

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tanh} a_1 s x_{p+1}, \\ x_2 &= \operatorname{tanh} a_2 s x_{p+2}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_q &= \operatorname{tanh} a_q s x_{l+1}, \\ x_{q+1} &= \dots = x_p = 0, \end{aligned}$$

avec

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_q^2 = 1.$$

Si l'on suppose les a tous positifs, la géodésique partira, pour $s = -\infty$, du point représentatif de la variété plane

$$x_1 = -x_{p+1}, \quad \dots, \quad x_q = -x_{l+1}, \quad x_{q+1} = \dots = x_p = 0,$$

pour aboutir, pour $s = +\infty$, au point représentatif de la variété plane

$$x_1 = x_{p+1}, \quad \dots, \quad x_q = x_{l+1}, \quad x_{q+1} = \dots = x_p = 0.$$

59. *Le groupe (S).* — Les paramètres angulaires d'une transformation infinitésimale quelconque de G sont de la forme

$$\psi_i - \psi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l+1).$$

Pour les transformations Y , il existe $2q$ quantités ψ deux à deux égales et opposées, et $p - q$ quantités ψ identiquement nulles. Par suite, les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \pm \varphi_i,$$

respectivement multiples d'ordres 1, 2 et $p - q$.

Le groupe (S) est formé des substitutions les plus générales effectuées sur les lettres $\varphi_1, \dots, \varphi_q$, accompagnées d'un nombre quelconque de changements de signes. Le domaine fondamental (D) de (S)

est, par exemple, défini par

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q > 0.$$

60. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — On a ici

$$g = g_1(A_{p-1}) \times g_1(A_{q-1}) \times g_0.$$

Le groupe de connexion du sous-groupe

$$g_1(A_{p-1}) \times g_1(A_{q-1})$$

est un groupe cyclique d'ordre égal au plus grand commun diviseur de p et de q . Le groupe de connexion cherché se décompose dans ce groupe cyclique d'ordre fini et dans un groupe cyclique d'ordre infini.

Le groupe linéaire de la forme F se comporte d'une manière analogue.

61. *Groupe mixte d'isométrie.* — Le groupe adjoint unitaire du type (A) n'admet qu'une famille de transformations laissant invariant le groupe linéaire g_1 .

Donc, si $p \neq q$, le groupe d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes.

Si $p = q$, le groupe d'isométrie se compose de quatre familles continues distinctes.

Dans les deux cas, la symétrie par rapport à un point est un déplacement proprement dit.

Dans le cas particulier, $p = q = 2$, l'espace \mathcal{E} est à huit dimensions : c'est le lieu des points représentatifs des droites

$$\begin{aligned} x &= a z + b t, \\ y &= a' z + b' t, \end{aligned}$$

de l'espace projectif complexe à trois dimensions, où les quatre coordonnées complexes a, b, a', b' sont assujetties à satisfaire aux inégalités

$$\begin{aligned} 1 - \bar{a}a - \bar{b}b - \bar{a}'a' - \bar{b}'b' + (ab' - ba')(\bar{a}b' - \bar{b}a') &> 0, \\ 1 - \bar{a}a - \bar{a}'a' &> 0, \quad 1 - \bar{b}b - \bar{b}'b' &> 0. \end{aligned}$$

L'une des transformations isométriques, qui ne sont pas des déplacements, consiste à échanger les deux coordonnées a' et b .

62. *Groupe adjoint mixte.* — Le même raisonnement que pour le type (AIV) montre que tout sous-groupe g' isomorphe de g laisse invariante une variété plane à $q - 1$ dimensions, et cette variété doit rendre la forme F définie, sans quoi il n'aurait pas, dans le domaine réel, la même structure que g . Si $p = q$, cette forme F pourrait être rendue positive, mais le groupe g' laisserait invariante la variété polaire de la première par rapport à F , laquelle rendrait encore F définie négative.

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Espaces du type (BDII).

63. Ce sont les espaces à courbure constante négative. Le groupe des déplacements a un groupe de connexion cyclique d'ordre 2. Le groupe continu d'une forme quadratique indéfinie à un carré négatif a le même groupe de connexion.

Le groupe d'isométrie est formé de deux familles continues distinctes.

Le rang est égal à 1.

Espaces du type (BDI).

64. On a ici

$$n = pq, \quad s = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2},$$

où p et q sont deux entiers quelconques supérieurs ou égaux à 2 ($p + q > 4$).

On peut prendre pour groupe G le groupe de la forme quadratique réelle indéfinie

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Il est du type (B) ou du type (D), suivant que $p + q$ est impair ou pair.

Les transformations X sont

$$\begin{aligned} & x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha, \quad x_\lambda p_\mu - x_\mu p_\lambda \\ & (\alpha, \beta = 1, \dots, p; \lambda, \mu = p + 1, \dots, p + q); \end{aligned}$$

les transformations iY sont

$$x_2 p_1 + x_1 p_2.$$

L'espace \mathcal{E} est l'espace représentatif des variétés planes homologues de la variété à $q - 1$ dimensions

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

On démontre, comme dans le cas du type (AIII), qu'elles constituent l'ensemble connexe des variétés planes à $q - 1$ dimensions rendant la forme F définie négative.

65. *Les variétés euclidiennes E_n et le groupe (S).* — On aura un sous-groupe γ_n en prenant les q transformations infinitésimales

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} + x_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_{p+2}} + x_{p+2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad x_q \frac{\partial f}{\partial x_{p+q}} + x_{p+q} \frac{\partial f}{\partial x_q}.$$

Le rang de l'espace est donc q . La variété euclidienne correspondante est le lieu des variétés planes

$$(1) \quad \begin{cases} x_\alpha = \lambda_\alpha x_{p+\alpha} & (\alpha = 1, \dots, q), \\ x_{p+1} = \dots = x_p = 0, \end{cases}$$

avec

$$\lambda_\alpha^2 < 1.$$

Le ds^2 de cette variété est

$$ds^2 = \frac{d\lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2} + \dots + \frac{d\lambda_q^2}{1 - \lambda_q^2}.$$

Si p et q sont de parités différentes, le groupe G est du type (B), et ses paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm \psi_i, \quad \pm \psi_i \pm \psi_j \quad \left(i, j = 1, 2, \dots, \frac{p+q-1}{2} \right).$$

Pour une transformation Y , $\frac{p-q-1}{2}$ des quantités ψ sont nulles. Ses paramètres angulaires sont donc

$$\pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, q),$$

les premiers étant multiples d'ordre $\frac{p-q+1}{2}$.

certain nombre des paramètres λ à 1 ou à -1 . Par exemple, pour $p = q = 2$, l'absolu peut être représenté par le périmètre d'un carré. Les géodésiques passant par le point origine vont, en général, d'un sommet du carré au sommet opposé; il y a exception pour deux géodésiques particulières parallèles aux côtés du carré. On voit que là encore les géodésiques issues d'un point donné n'aboutissent pas à n'importe quel point (impropre) de l'absolu.

67. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — Le groupe g résulte de la multiplication du groupe orthogonal g_1 à p variables par le groupe orthogonal g_2 à q variables.

Si $q = 2, p > 2$, g admet un sous-groupe invariant g_2 à un paramètre, et le groupe de connexion de g_1 est cyclique d'ordre 2. Par suite, *le groupe de connexion se décompose en un groupe cyclique d'ordre 2 et un groupe cyclique d'ordre infini.*

Si p et q sont tous les deux plus grands que 2, on a :

p et q impairs,

$$k_1 = k_2 = 1, \quad K_1 = K_2 = 2;$$

p impair et q pair,

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad K_1 = 2, \quad K_2 = 4;$$

p et q pairs,

$$k_1 = k_2 = 2, \quad K_1 = K_2 = 4.$$

D'après la règle établie n° 32, on voit que *le groupe de connexion est d'ordre 4 si p et q ne sont pas tous les deux pairs, d'ordre 8 s'ils sont tous les deux pairs.*

Si l'on considère maintenant le groupe linéaire continu de la forme quadratique F , l'ordre de son groupe de connexion est égal à l'ordre précédent, divisé par le plus grand commun diviseur de k_1 et de k_2 . Par suite, *le groupe linéaire de la forme quadratique indéfinie a un groupe de connexion d'ordre 4 si les entiers p et q sont tous les deux supérieurs à 2.*

68. *Groupe mixte d'isométrie.* — Il y a à distinguer suivant la parité des entiers p et q .

Si p et q sont impairs, g se décompose en deux sous-groupes linéaires de la forme $g_2(B)$, pour lesquels le groupe adjoint unitaire

est continu. Comme $k_1 = k_2 = 1$, la symétrie ne fait pas partie du groupe continu d'isotropie. Si $p = q$, les deux sous-groupes composants sont semblables. Par suite, *le groupe d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes si $p \neq q$, de quatre familles continues distinctes si $p = q$. La symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement.*

Si p est impair et q pair, g se décompose en deux sous-groupes linéaires de la forme $g_2(B)$ et $g_3(D)$, et l'on a $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Comme le groupe adjoint unitaire du type (D) admet deux familles distinctes laissant invariant le groupe g_3 , on arrive au résultat suivant : *Le groupe d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes. La symétrie par rapport à un point est un déplacement.*

Si p et q sont tous les deux pairs, g se décompose en deux sous-groupes linéaires du type $g_3(D)$ avec $k_1 = k_2 = 2$. *Le groupe d'isométrie se compose donc de quatre familles continues distinctes si $p \neq q$, de huit familles si $p = q$. La symétrie par rapport à un point est un déplacement.*

Le cas où l'un des entiers p et q serait égal à 2 échappe au raisonnement précédent parce que le sous-groupe linéaire correspondant serait à un seul paramètre, mais les résultats subsistent.

Il en est de même si l'un des entiers p ou q était égal à 4 : le groupe linéaire correspondant (groupe orthogonal à quatre variables) serait semi-simple et non simple, mais les résultats ne seraient pas changés.

Il n'y a qu'un cas où les résultats sont en défaut, c'est celui où les deux entiers p et q sont égaux à 4. Le groupe g se décompose alors en quatre sous-groupes linéaires simples du type $g_1(A_1)$. A chaque permutation entre ces sous-groupes correspond une famille distincte de transformations du groupe d'isotropie. Par suite, *le groupe d'isométrie de l'espace \mathcal{E} , correspondant à une forme quadratique à quatre carrés positifs et quatre carrés négatifs, se compose de 24 familles continues distinctes; la symétrie par rapport à un point est un déplacement.*

Bien que le cas $p = q = 2$ ne rentre pas dans le problème étudié (le groupe G n'étant pas simple), les résultats indiqués sont tout de même exacts. On a alors l'espace \mathcal{E} à quatre dimensions des droites réelles tout entières intérieures à l'hyperboloïde à une nappe

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

de l'espace ordinaire. On obtient quatre familles du groupe isométrique en partant des déplacements proprement dits (qui proviennent d'une transformation homographique du groupe projectif continu de l'hyperboloïde) et en les combinant avec une symétrie par rapport au plan des xz , par rapport au plan des xy et par rapport à l'axe des y . Les quatre autres familles d'isométries s'obtiennent en combinant les précédentes avec la transformation qui fait passer de la droite

$$x = az + a', \quad y = bz + b'$$

à la droite

$$x = az + b, \quad y = a'z + b'.$$

69. *Groupe adjoint mixte.* — Dans le domaine complexe, le groupe adjoint du type (B) est continu, tandis que celui du type (D) contient (au moins si $l > 4$) deux familles distinctes. Si l'on prend le groupe d'une forme quadratique comme représentant du type considéré, tous les sous-groupes isomorphes d'un groupe donné s'en déduisent en effectuant sur les variables une substitution linéaire laissant la forme invariante. On déduit immédiatement de là, par le même raisonnement que celui qui a été utilisé dans le cas du type (AIII), que tout sous-groupe g' isomorphe de g est homologue de g dans le groupe adjoint continu.

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Nous traiterons plus loin (n° 76) le cas $l = 4$.

Espaces du type (DIII).

70. On a ici

$$n = l(l-1), \quad s = l^2.$$

Le groupe G est le groupe linéaire qui laisse invariante à la fois la forme quadratique

$$F \equiv x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2l-1}x_{2l}$$

et la forme d'Hermite indéfinie

$$\Phi \equiv x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - x_4\bar{x}_4 + \dots + x_{2l-1}\bar{x}_{2l-1} - x_{2l}\bar{x}_{2l}.$$

En désignant par α un indice impair, par α' l'indice pair qui le suit immédiatement, on obtient pour les transformations X les expressions

$$\begin{aligned} & i(x_\alpha p_\alpha - x_{\alpha'} p_{\alpha'}), \\ & x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha + x_{\alpha'} p_{\beta'} - x_{\beta'} p_{\alpha'}, \\ & i(x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha - x_{\alpha'} p_{\beta'} - x_{\beta'} p_{\alpha'}); \end{aligned}$$

quant aux transformations iY , ce sont les suivantes :

$$\begin{aligned} & x_\alpha p_{\beta'} - x_{\beta'} p_{\alpha'} - x_{\alpha'} p_\beta + x_\beta p_\alpha, \\ & i(x_\alpha p_{\beta'} - x_{\beta'} p_{\alpha'} + x_{\alpha'} p_\beta - x_\beta p_\alpha). \end{aligned}$$

Le sous-groupe engendré par les X laisse invariante la variété plane génératrice de l'absolu $F = 0$

$$(5) \quad x_1 = x_3 = \dots = x_{2l-1} = 0;$$

elle rend la forme d'Hermite Φ définie négative; il laisse aussi invariante la variété polaire par rapport à Φ

$$x_2 = x_4 = \dots = x_{2l} = 0,$$

qui rend Φ définie positive.

Réciproquement, toute variété plane à $l - 1$ dimensions génératrice de l'absolu et rendant Φ définie négative peut être, sans exception, définie analytiquement par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \star + a_{12} x_2 + \dots + a_{1l} x_{2l}, \\ x_3 &= a_{21} x_2 + \star + \dots + a_{2l} x_{2l}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{2l-1} &= a_{l1} x_2 + a_{l2} x_4 + \dots + \star, \end{aligned}$$

où les coefficients complexes a_{ij} sont symétriques gauches et sont assujettis à la condition que la forme d'Hermite

$$x_2 \bar{x}_2 + x_4 \bar{x}_4 + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l} - \sum_i (a_{i1} x_2 + a_{i2} x_4 + \dots + a_{il} x_{2l}) (\bar{a}_{i1} \bar{x}_2 + \dots + \bar{a}_{il} \bar{x}_{2l})$$

soit définie positive.

Toutes ces variétés forment évidemment un ensemble connexe, pour la raison déjà invoquée plusieurs fois. L'espace \mathcal{E} est donc l'espace des variétés planes génératrices de l'absolu et rendant Φ définie négative.

71. *Les variétés euclidiennes E_l et le groupe (S).* — Le rang λ de l'espace est égal à $\frac{l}{2}$ (l pair) ou $\frac{l-1}{2}$ (l impair); on peut prendre pour sous-groupe γ_l celui qui est engendré par les transformations

$$a_1(x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2(x_5 p_5 - x_6 p_6 - x_7 p_7 + x_8 p_8) + \dots$$

Les l quantités ψ_i qui entrent dans les expressions générales

$$\pm \psi_i \pm \psi_j$$

des paramètres angulaires d'une transformation infinitésimale arbitraire de G sont deux à deux égales si la transformation est Y , la dernière étant nulle pour l impair. Les paramètres angulaires d'une transformation Y sont donc :

1° Pour l pair, de la forme

$$\pm 2 \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad \left(i, j = 1, \dots, \frac{l}{2} \right),$$

les premiers simples, les derniers multiples d'ordre 4;

2° Pour l impair, de la forme

$$\pm 2 \varphi_i, \quad \pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad \left(i, j = 1, \dots, \frac{l-1}{2} \right),$$

respectivement multiples d'ordre 1, 2 et 4.

Le groupe (S) est le même que dans les cas précédents. Le domaine (D) est défini, par exemple, par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0.$$

On aura une variété euclidienne E_l en prenant le lieu des variétés planes

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_4, & x_3 &= -A_1 x_2, \\ x_5 &= A_2 x_8, & x_7 &= -A_2 x_6, \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

avec $A_1^2 < 1, A_2^2 < 1, \dots$; son ds^2 est

$$ds^2 = \frac{dA_1^2}{1 - A_1^2} + \frac{dA_2^2}{1 - A_2^2} + \dots + \frac{dA_\lambda^2}{1 - A_\lambda^2}.$$

Toute géodésique est congruente au lieu des variétés planes

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tanh}(a_1 s) x_1, & x_3 &= -\operatorname{tanh}(a_1 s) x_2, \\ x_5 &= \operatorname{tanh}(a_2 s) x_3, & x_7 &= -\operatorname{tanh}(a_2 s) x_6, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

72. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — On a ici

$$g = g_2(A_{l-1}) \times g_0.$$

Le groupe de connexion de $g_2(A_{l-1})$ est cyclique d'ordre 2 si l est impair; il se réduit à l'opération identique si l est pair. Par suite (n° 33), *le groupe de connexion cherché est cyclique d'ordre infini pour l pair, il se décompose en un groupe cyclique d'ordre 2 et un groupe cyclique d'ordre infini si l est impair.*

73. *Groupe mixte d'isométrie.* — La seconde famille de transformations du groupe adjoint unitaire du type (A) ne laisse pas invariant le groupe linéaire g_2 , du moins si $l > 4$. Par suite, *le groupe continu d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes. Le résultat est encore vrai si $l = 4$. La symétrie par rapport à un point est un vrai déplacement.*

74. *Le groupe adjoint mixte.* — Tout sous-groupe g' isomorphe de g laissera invariante une variété plane à $l - 1$ dimensions génératrice de l'absolu; pour que la structure de g' soit, au point de vue réel, la même que celle de g , il faut et il suffit que cette variété plane rende la forme Φ définie; alors cette variété, ou du moins sa polaire par rapport à Φ , rendra Φ définie négative. Tous les sous-groupes g' sont donc homologues de g dans le groupe adjoint continu.

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Le cas $l = 4$ est réservé.

75. *Autre définition géométrique de l'espace \mathcal{E} .* — On peut donner de l'espace \mathcal{E} une autre définition géométrique. Remarquons, en effet, que la forme d'Hermite Φ établit une relation involutive entre les variétés planes à $l - 1$ dimensions génératrices de l'absolu, ces

variétés étant deux à deux polaires par rapport à Φ . Tout couple de variétés planes génératrices définit, d'autre part, une *congruence de Clifford*, formée des droites qui rencontrent ces deux variétés. Ces droites sont les trajectoires de la *translation infinitésimale* définie par celle des transformations de g qui est échangeable avec toutes les autres. On pourrait donc substituer, comme élément générateur de l'espace \mathcal{E} , aux variétés planes transformées de (5), les congruences de Clifford correspondantes.

Le groupe adjoint mixte des groupes du type (D) de rang 4.

76. Dans le cas du type (D) de rang 4, le groupe adjoint mixte admet, dans le domaine complexe, six familles distinctes. Le groupe représentant étant le groupe linéaire d'une forme quadratique F à huit variables, tout sous-groupe g' isomorphe de g se déduira de g , soit par une substitution linéaire sur les variables, laissant invariante la forme F (cas déjà examiné), soit par une opération changeant chaque droite de l'espace projectif complexe à sept dimensions dans l'ensemble de deux variétés planes à trois dimensions tout entières situées sur l'absolu $F=0$ et n'ayant aucun point commun.

Analytiquement, les paramètres angulaires (complexes) d'une transformation infinitésimale de G sont de la forme

$$\pm \varphi_i \pm \varphi_j;$$

l'opération considérée du groupe adjoint mixte transforme l'ensemble des huit quantités $\pm \varphi_i$ dans l'un des ensembles

$$\frac{1}{2} (\pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 \pm \varphi_4),$$

où le nombre des signes — est, soit pair, soit impair. Or, pour chacun des groupes réels non unitaires, l'ensemble des quantités $\pm \varphi_i$ est réel; la question à examiner ne se posera donc que si chacun des deux autres ensembles est aussi réel.

Pour le type (DII) et pour le type (DI) correspondant à $p=5, q=3$, il existe dans G des transformations infinitésimales pour lesquelles un nombre impair de quantités $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont réelles, les autres

étant purement imaginaires. Supposons, par exemple, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ réelles, φ_4 purement imaginaire. La quantité imaginaire conjuguée de

$$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4),$$

à savoir

$$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4),$$

n'appartient pas alors au même ensemble de huit quantités, qui devrait être réel. Il n'y a donc pas lieu d'examiner les deux cas en question.

Restent le cas du type (DI) pour $p = 6, q = 2$, ou pour $p = 4, q = 4$, et le cas du type (DIII).

Dans le cas du type (DI) pour $p = 6, q = 2$, G est le groupe de la forme quadratique

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - x_7^2 - x_8^2,$$

et g laisse invariante la droite

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

Si le groupe g' laissait invariantes deux variétés planes à trois dimensions génératrices de l'absolu $F = 0$ et n'ayant aucun point commun, ces deux variétés devraient être imaginaires conjuguées, sans quoi g' laisserait quatre variétés invariantes. Soient

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$$

les équations de la première variété,

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0$$

celles de la seconde. La forme F est évidemment une forme d'Hermite aux quatre variables complexes y_1, y_2, y_3, y_4 , et cette forme d'Hermite est indéfinie et réductible, par une substitution linéaire convenable, à

$$y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + y_3 \bar{y}_3 - y_4 \bar{y}_4.$$

Par conséquent, la première variété est réductible à

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = x_5 + ix_6 = x_7 + ix_8 = 0.$$

Mais cela est impossible, car l'une des transformations de g' serait, par exemple,

$$x_5 p_7 + x_7 p_5 + x_6 p_8 + x_8 p_6,$$

et les racines caractéristiques de cette transformation sont *réelles*, tandis que toutes celles de g sont purement imaginaires.

Prenons maintenant le cas du type (DI) pour $p = q = 4$. Le groupe G est celui de la forme quadratique

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2,$$

et g laisse invariante la variété plane

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

On démontre facilement qu'une des opérations considérées du groupe adjoint mixte (dans le domaine complexe) transforme le sous-groupe g en un autre qui laisse également invariante deux variétés planes à trois dimensions polaires l'une de l'autre par rapport à l'absolu et sans point commun; par conséquent, l'effet de cette opération est le même que si l'on avait effectué une substitution linéaire sur les variables.

Reste enfin le cas du type (DIII). Le groupe G laisse invariante la forme quadratique

$$F = x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + x_7 x_8,$$

et la forme d'Hermite

$$\Phi = x_1 \overline{x_1} - x_2 \overline{x_2} + \dots + x_7 \overline{x_7} - x_8 \overline{x_8};$$

le sous-groupe g laisse invariante les deux variétés planes

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 0,$$

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 0,$$

génératrices de l'absolu. Une des opérations considérées changera g dans le sous-groupe g' laissant invariante une certaine droite complexe; il laissera donc également invariante les deux variétés planes à cinq dimensions polaires de la droite par rapport à F et par rapport à Φ ; il faut donc que ces deux variétés soient confondues, sans quoi g' laisserait invariante deux droites distinctes et n'aurait pas le nombre de transformations infinitésimales voulues. On démontre alors faci-

lement que les équations de la droite sont réductibles à la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= a_1 x_1 + b_1 x_2, & x_4 &= -\bar{b}_1 x_1 + \bar{a}_1 x_2, \\ x_5 &= a_2 x_1 + b_2 x_2, & x_6 &= -\bar{b}_2 x_1 + \bar{a}_2 x_2, \\ x_7 &= a_3 x_1 + b_3 x_2, & x_8 &= -\bar{b}_3 x_1 + \bar{a}_3 x_2. \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons bien le nombre voulu $l(l-1) = 12$ de paramètres réels. Mais là encore on peut trouver des transformations infinitésimales de g' admettant des racines caractéristiques réelles. Par suite, il est impossible que le groupe adjoint mixte de la forme réelle considérée contienne des opérations telles que celles que nous avons envisagées.

La conclusion est donc, dans tous les cas, que *le groupe adjoint mixte se confond avec le groupe mixte d'isométrie.*

Espaces du type (CI).

77. *Définition géométrique.* — On a ici

$$n = l(l+1), \quad s = l^2.$$

Le groupe G est le groupe d'un complexe linéaire réel dans l'espace à $2l-1$ dimensions, ou encore le groupe linéaire de la forme quadratique extérieure réelle

$$F \equiv [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}].$$

Désignons par α un indice impair, par α' l'indice pair qui le suit immédiatement. Les transformations X sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_\alpha p_{\alpha'} - x_{\alpha'} p_\alpha, \\ x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha + x_\alpha p_{\beta'} - x_{\beta'} p_\alpha, \\ x_\alpha p_{\beta'} - x_{\beta'} p_\alpha - x_\alpha p_\beta + x_\beta p_{\alpha'}; \end{aligned}$$

elles ne sont autres que les transformations de G qui laissent invariante la forme quadratique définie positive

$$\Phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{2l}^2.$$

Quant aux transformations $i\tilde{Y}$, ce sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_2 p_x - x_2' p_x', & \quad x_2 p_x' + x_2' p_x, \\ x_3 p_\beta + x_3' p_x - x_3 p_\beta' - x_3' p_x', & \\ x_2 p_\beta' + x_3 p_x' + x_3' p_\beta + x_3' p_x. & \end{aligned}$$

Si l'on cherche les points qui ont même hyperplan polaire par rapport au complexe $F = 0$ et par rapport à la quadrique $\Phi = 0$, on est ramené à résoudre les équations

$$\begin{aligned} x_1 + \rho x_2 = 0, & \quad x_2 - \rho x_1 = 0, \\ x_3 + \rho x_4 = 0, & \quad x_4 - \rho x_3 = 0, \\ \dots\dots\dots, & \quad \dots\dots\dots \\ x_{2l-1} + \rho x_{2l} = 0, & \quad x_{2l} - \rho x_{2l-1} = 0. \end{aligned}$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est $(\rho^2 + 1)^l$. A la racine $\rho = i$ de ce déterminant correspondent tous les points situés sur la variété plane à $l - 1$ dimensions

$$x_1 + i x_2 = x_3 + i x_4 = \dots = x_{2l-1} + i x_{2l} = 0,$$

qui est en même temps une variété du complexe et une variété plane génératrice de la quadrique. A la racine $\rho = -i$ correspond la variété plane imaginaire conjuguée.

78. On peut remarquer que les droites réelles qui rencontrent ces deux variétés planes forment une congruence; ce sont les trajectoires d'une certaine *translation* infinitésimale dans l'espace elliptique dont l'absolu serait la quadrique $\Phi = 0$. Cette translation infinitésimale a, du reste, pour symbole

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 + \dots + x_{2l-1} p_{2l} - x_{2l} p_{2l-1};$$

c'est celle des transformations X qui est échangeable avec toutes les autres.

On peut encore remarquer qu'à tout point réel (x), on peut faire correspondre un point réel (y) tel que l'hyperplan polaire de (x) par rapport à F soit confondu avec l'hyperplan polaire de (y) par rapport à la quadrique; cette correspondance est involutive, et la droite qui

joint les deux points appartient à la congruence dont il vient d'être question.

Soit alors S la matrice symétrique unimodulaire d'une forme quadratique définie positive transformée de Φ par le groupe G . Désignons par H la matrice symétrique gauche des coefficients a_{ij} de $F(a_{12} = -a_{21} = a_{33} = \dots = 1)$. L'égalité en matrices

$$S(x) = H(y)$$

devra entraîner

$$S(y) = \rho H(x),$$

ρ étant un scalaire convenablement choisi; on en déduit

$$SHS = -\rho H,$$

d'où, par la considération des déterminants, $|\rho| = 1$, et par suite, par raison de continuité, $\rho = -1$.

Réciproquement, considérons une matrice symétrique positive S satisfaisant à la condition

$$(6) \quad SHS = H;$$

soient λ et μ deux nombres positifs. On a, par un calcul facile,

$$(7) \quad (\lambda S + \mu) H (\lambda S + \mu) = (\lambda^2 + \mu^2) H + \lambda \mu (SH + HS).$$

Considérons alors la matrice

$$S' = (\lambda S + \mu) (\mu S + \lambda)^{-1} = (\mu S + \lambda)^{-1} (\lambda S + \mu);$$

elle est symétrique et *positive*, car ses racines caractéristiques r'_i se déduisent de celles r_i de S par la transformation homographique

$$r'_i = \frac{\lambda r_i + \mu}{\mu r_i + \lambda};$$

elles sont donc toutes positives. On déduit alors facilement de l'égalité (7), où le second membre est symétrique en λ et μ , la relation

$$S'HS' = H;$$

il en résulte, en particulier, que le déterminant de S' est égal à ± 1 , et comme il est évidemment positif, il est égal à 1.

Prenons maintenant

$$\lambda = \frac{1+t}{2}, \quad \mu = \frac{1-t}{2},$$

t variant de zéro à un; nous aurons une suite continue de matrices S' satisfaisant aux conditions indiquées, cette suite allant de la matrice $\mathbf{1}$ pour $t = 0$ à la matrice \mathbf{S} pour $t = 1$. Par suite, l'ensemble des matrices \mathbf{S} est connexe.

L'espace \mathcal{E} est donc l'espace des matrices symétriques unimodulaires positives \mathbf{S} satisfaisant à la relation

$$\mathbf{S}\mathbf{H}\mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

A chaque point de l'espace \mathcal{E} correspond aussi, dans l'espace projectif à $2l - 1$ dimensions, une congruence de droites trajectoires d'une translation infinitésimale dans l'espace cayleyen elliptique dont l'absolu est défini par la matrice symétrique positive \mathbf{S} . C'est aussi une transformation infinitésimale du groupe \mathbf{G} .

79. *Les variétés euclidiennes \mathbf{E}_l et le groupe (\mathbf{S}) .* — Le rang de l'espace \mathcal{E} est égal à l ; on a, par exemple, un sous-groupe γ_l en prenant les transformations infinitésimales

$$\sum_{\alpha}^{1,3,\dots,2l-1} a_{\alpha}(x_{\alpha}p_x - x_{\alpha}p_x),$$

avec l coefficients réels a_{α} . La variété \mathbf{E}_l est le lieu des matrices diagonales dont les éléments sont

$$\mathbf{A}_1, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}_1}, \mathbf{A}_3, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}_3}, \dots, \mathbf{A}_{2l-1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}_{2l-1}},$$

les \mathbf{A}_i étant réels et positifs. Le ds^2 de cette variété est

$$ds^2 = \frac{d\mathbf{A}_1^2}{\mathbf{A}_1^2} + \frac{d\mathbf{A}_3^2}{\mathbf{A}_3^2} + \dots + \frac{d\mathbf{A}_{2l-1}^2}{\mathbf{A}_{2l-1}^2}.$$

Les paramètres angulaires d'une transformation \mathbf{Y} sont évidemment de la même forme que pour une transformation arbitraire de \mathbf{G} , à

savoir :

$$\pm \alpha \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l),$$

et le groupe (S) est le même que précédemment.

On aura dans la variété E_l une géodésique passant par l'origine, en prenant

$$A_\alpha = e^{\alpha s} \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{l-1}^2 = 1).$$

80. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — Le sous-groupe g est du type $g_1^2(A_{l-1}) \times g_0$. Le groupe de connexion de $g_1^2(A_{l-1})$ est cyclique d'ordre 2 si l est pair; il se réduit à l'opération identique si l est impair. Par suite, le groupe de connexion cherché est cyclique d'ordre infini si l est impair; il se décompose en un groupe cyclique d'ordre 2 et un groupe cyclique d'ordre infini si l est pair.

Le groupe linéaire d'une forme quadratique extérieure réelle admet toujours un groupe de connexion cyclique d'ordre infini.

81. *Groupe mixte d'isométrie.* — La seconde famille continue du groupe adjoint unitaire du type (A) ne laisse pas invariant le groupe g_1^2 ; par suite, le groupe d'isométrie de l'espace \mathcal{E} se compose de deux familles continues distinctes; la symétrie par rapport à un point est un vrai déplacement.

82. *Groupe adjoint mixte.* — Dans le domaine complexe, le groupe adjoint du type (C) est continu. Par suite, tout sous-groupe g' isomorphe de g pourra s'en déduire par une substitution linéaire conservant la forme F . Il laissera donc invariante une forme quadratique Φ qui sera nécessairement réelle définie positive et qui jouira de la propriété que les points ayant même hyperplan polaire par rapport au complexe F et à la quadrique Φ , forment deux variétés planes appartenant à la fois au complexe et à la quadrique. Le groupe g' est donc homologue de g dans le groupe adjoint continu, et le groupe adjoint mixte est identique au groupe mixte d'isométrie.

Espaces du type (CII).

83. On a ici

$$n = 4pq, \quad s = p(2p+1) + q(2q+1);$$

la somme $p + q$ donne le rang l du groupe G . Ce groupe peut être regardé comme le groupe linéaire à $2l$ variables complexes laissant invariants à la fois la forme quadratique extérieure

$$F \equiv [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}]$$

et la forme d'Hermité indéfinie

$$\Phi \equiv x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{2p} \bar{x}_{2p} - (x_{2p+1} \bar{x}_{2p+1} + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l}).$$

Le sous-groupe g est ici formé des transformations de G qui laissent invariants la variété plane

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2p} = 0$$

et aussi la variété polaire de la précédente par rapport au complexe,

$$x_{p+1} = \dots = x_{2l} = 0.$$

L'espace \mathcal{E} peut être regardé par exemple comme le lieu des variétés transformées de la première par les opérations du groupe G . Les équations d'une telle variété sont de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_{2p+1} + \dots + a_{1,2q} x_{2l}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ x_{2p} &= a_{2p,1} x_{2p+1} + \dots + a_{2p,2q} x_{2l}. \end{aligned}$$

Les coefficients a_{ij} ne sont pas quelconques; en effet la variété considérée doit avoir même variété polaire par rapport à la forme d'Hermité et par rapport à la forme quadratique extérieure. Il en résulte les relations

$$a_{i'z} = -(-1)^{i+\alpha} \bar{a}_{p\alpha'} \quad (i = 1, 2, \dots, 2p; \alpha = 1, 2, \dots, 2q),$$

où i et i' d'une part, α et α' d'autre part, désignent deux entiers dont l'un est impair et l'autre est le nombre pair le suivant immédiatement; en particulier

$$a_{11} = -\bar{a}_{22}, \quad a_{12} = \bar{a}_{21}.$$

Enfin les coefficients $a_{i\alpha}$ doivent satisfaire à la condition que la

forme d'Hermité

$$x_{2p+1}\bar{x}_{2p+1} + \dots + x_{2l}\bar{x}_{2l} - \sum_i (a_{i1}x_{2p+1} + \dots + a_{i,2q}x_{2l})(\bar{a}_{i1}\bar{x}_{2p+1} + \dots + \bar{a}_{i,2q}\bar{x}_{2l})$$

soit définie positive.

Il résulte de là, par un raisonnement déjà fait, que l'espace \mathcal{E} est l'espace des variétés planes à $2q - 1$ dimensions qui ont même polaire par rapport à la forme d'Hermité Φ et à la forme F , et qui de plus rendent la forme Φ définie négative. Toutes ces variétés forment un ensemble connexe.

84. *Les variétés euclidiennes E_q et le groupe (S).* — Si l'on a $p \geq q$, le rang de l'espace \mathcal{E} est égal à q , et l'on aura un sous-groupe γ_q en partant des transformations infinitésimales

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} a_{\alpha} \left(x_{2\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_{2p+2\alpha}} + x_{2\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{2p+2\alpha-1}} + x_{2p+2\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_{2\alpha}} + x_{2p+2\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{2\alpha-1}} \right),$$

où les a_{α} sont des coefficients réels arbitraires. La variété E_q correspondante est le lieu des variétés planes

$$(8) \quad \begin{cases} x_{2\alpha-1} = A_{\alpha} x_{2p+2\alpha} & (\alpha = 1, \dots, q), \\ x_{2\alpha} = -A_{\alpha} x_{2p+2\alpha-1} & (\alpha = 1, \dots, q), \\ x_{2q+1} = \dots = x_{2p} = 0, \end{cases}$$

les paramètres réels A_{α} étant compris entre -1 et $+1$. Le ds^2 de E_q est égal à

$$ds^2 = \frac{dA_1^2}{1-A_1^2} + \dots + \frac{dA_q^2}{1-A_q^2}.$$

Les l quantités ψ_i qui entrent dans les expressions générales

$$\pm 2\psi_i, \quad \pm \psi_i \pm \psi_j$$

des paramètres angulaires d'une transformation de G sont, pour une transformation Y , de la forme

$$\varphi_1, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_2, \quad \dots, \quad \varphi_q, \quad \varphi_q, \quad 0, \quad \dots, \quad 0.$$

Les paramètres angulaires de Y sont donc

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \pm \varphi_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, q),$$

respectivement multiples d'ordres 3, 4 et $2p - 2q$.

Le groupe (S) est toujours de la même forme, et son domaine fondamental (D) est, par exemple,

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q > 0.$$

On aura une géodésique en prenant, dans les formules (8),

$$A_s = \operatorname{tanh}(a_s s),$$

avec

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_q^2 = 1.$$

85. *Groupe de connexion du groupe des déplacements.* — On a ici

$$g = g_1(C_p) \times g_1(C_q)$$

avec

$$k_1 = k_2 = K_1 = K_2 = 2.$$

Le groupe de connexion cherché est donc cyclique d'ordre 2. Le groupe linéaire G, qui a servi de base à la représentation géométrique, est simplement connexe.

86. *Groupe mixte d'isométrie.* — Le groupe adjoint unitaire du type (C) étant continu, et les deux entiers k_1 et k_2 étant pairs, *le groupe d'isométrie de l'espace est continu*; la symétrie par rapport à un point est un vrai déplacement. Il y a exception si $p = q$, auquel cas le groupe d'isométrie contient deux familles distinctes.

87. *Le groupe adjoint mixte.* — Tout sous-groupe g' isomorphe de g laissera invariante une variété plane à $2q - 1$ dimensions; il laissera donc invariante également la variété polaire par rapport à F et la variété polaire par rapport à Φ ; ces deux variétés devront être confondues, sans quoi g' laisserait invariantes deux variétés distinctes à $2q - 1$ dimensions, et il n'aurait pas le nombre voulu de transformations infinitésimales. Enfin la variété doit rendre la forme Φ définie, de sorte que le groupe g' est finalement homologue de g dans le groupe adjoint continu.

Le groupe adjoint mixte est donc identique au groupe mixte d'isométrie.

Conclusions relatives aux groupes adjoints mixtes.

88. Si nous nous bornons aux quatre grands types de structures simples qui viennent d'être passés en revue, nous voyons que le groupe adjoint mixte d'un groupe simple réel non unitaire est en général formé de deux familles continues distinctes.

Exceptionnellement le groupe adjoint est continu pour le groupe linéaire (type CII) d'une forme quadratique extérieure

$$[x_1 x_2] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}]$$

et d'une forme d'Hermite indéfinie

$$x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_{2p} \bar{x}_{2p} - (x_{2p+1} \bar{x}_{2p+1} + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l}),$$

avec $l \neq 2p$.

Le groupe adjoint se compose de quatre familles distinctes :

1° Pour le groupe homographique à un nombre impair de variables réelles (type AI);

2° Pour le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite indéfinie réductible au même nombre de termes positifs et de termes négatifs (type AIII, pour $p = q$);

3° Pour le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle indéfinie réductible à un même nombre impair de carrés positifs et de carrés négatifs (type DI, pour $p = q$ impair);

4° Pour le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle indéfinie réductible à deux nombres différents, mais pairs tous les deux, de carrés positifs et de carrés négatifs (type DI, pour $p \neq q$ pairs).

Le groupe adjoint mixte se compose de huit familles continues distinctes pour le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle indéfinie réductible à un même nombre, pair et au moins égal à 6, de carrés positifs et de carrés négatifs.

Enfin le groupe adjoint mixte se compose de 24 familles continues distinctes pour le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle indéfinie réductible à une somme de 4 carrés positifs et de 4 carrés négatifs.

89. Observons enfin que l'identité du groupe complet d'isométrie avec le groupe adjoint mixte montre que toute géométrie de Klein, dont le groupe fondamental est un groupe simple réel non unitaire (de l'une des quatre grandes classes générales), peut être rendue riemannienne, avec un ds^2 défini positif et une courbure riemannienne inaltérée par le transport parallèle. Il suffit pour cela de choisir convenablement l'élément générateur de l'espace, *et ce choix n'est essentiellement possible que d'une manière* ⁽¹⁾; tous les éléments générateurs forment un ensemble connexe, et même simplement connexe.

Espaces des types exceptionnels.

90. Nous allons nous borner à une simple énumération, en indiquant pour chaque classe le nombre n de dimensions, l'ordre s et la nature du groupe d'isotropie, le rang l du groupe des déplacements, le rang λ de l'espace, la forme des paramètres angulaires des transformations Y , la nature du groupe de connexion du groupe adjoint, ainsi que le nombre de familles continues du groupe total d'isométrie.

Espaces du type (EI). — On a

$$n = 42, \quad s = 36, \quad l = 6, \quad \lambda = 6, \quad g = g_1(C_4), \quad k = 1.$$

Les paramètres angulaires sont les mêmes que pour une transformation arbitraire de G . Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 2. Le groupe d'isométrie est formé de deux familles distinctes; la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement.

Espaces du type (EII). — On a

$$n = 40, \quad s = 38, \quad l = 6, \quad \lambda = 4, \quad g = g_3(A_3) \times g_1(A_1), \\ k_1 = k_2 = 2, \quad K_1 = 6, \quad K_2 = 2.$$

Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 \pm \varphi_4,$$

respectivement multiples d'ordres 1, 2 et 1.

⁽¹⁾ Cela signifie qu'on ne regarde pas comme distincts deux éléments générateurs qui sont invariants par le même sous-groupe du groupe fondamental.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 6. Le groupe d'isométrie se compose de deux familles distinctes; la symétrie par rapport à un point est un déplacement.

Espaces du type (EIII). — On a

$$n = 32, \quad s = 46, \quad l = 6, \quad \lambda = 2, \quad g = g_1(D_3) \times g_0, \quad k = 4.$$

Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm 2\varphi_1, \quad \pm 2\varphi_2, \quad \pm \varphi_1 \pm \varphi_2, \quad \pm \varphi_1, \quad \pm \varphi_2,$$

respectivement d'ordres 1, 1, 6, 6, 8, 8.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre infini. Le groupe d'isométrie se compose de deux familles continues distinctes; la symétrie par rapport à un point est un déplacement.

Espaces du type (EIV). — On a

$$n = 26, \quad s = 52, \quad l = 6, \quad \lambda = 2, \quad g = g_1(F), \quad k = K = 1.$$

Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\varphi_i - \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

tous multiples d'ordre 8.

Le groupe de connexion se réduit à l'opération identique. Le groupe d'isométrie est formé de deux familles distinctes; la symétrie par rapport à un point n'est pas un déplacement.

Espaces du type (EV). — On a

$$n = 70, \quad s = 63, \quad l = 7, \quad \lambda = 7, \quad g = g_4(A_7), \quad k = 2, \quad K = 8.$$

Les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la même forme que pour une transformation arbitraire de G.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 4. Le groupe d'isométrie se compose de deux familles distinctes; la symétrie par rapport à un point est un déplacement.

Espaces du type (EVI). — On a

$$n = 64, \quad s = 69, \quad l = 7, \quad \lambda = 4, \quad g = g_1(D_6) \times g_1(A_1), \\ k_1 = k_2 = 2, \quad K_1 = 4, \quad K_2 = 2.$$

Les paramètres angulaires sont de la même forme que pour le type (EII), mais avec des degrés de multiplicité différents (1, 4, 1 au lieu de 1, 2, 1).

Le groupe de connexion est non cyclique d'ordre 4. Le groupe d'isométrie est continu.

Espaces du type (EVII). — On a

$$n = 54, \quad s = 79, \quad l = 7, \quad \lambda = 3, \quad g = g_1(E_6) \times g_0, \quad k = 3.$$

Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

multiples d'ordres 1 et 8.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre infini. Le groupe d'isométrie se compose de deux familles distinctes; la symétrie par rapport à un point est un déplacement.

Espaces du type (EVIII). — On a

$$n = 128, \quad s = 120, \quad l = 8, \quad \lambda = 8, \quad g = g_1(D_8), \\ k = 2, \quad K = 4.$$

Les paramètres angulaires sont les mêmes pour une transformation Y que pour une transformation arbitraire du groupe.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 2. Le groupe d'isométrie est continu.

Espaces du type (EIX). — On a

$$n = 112, \quad s = 136, \quad l = 8, \quad \lambda = 4, \quad g = g_1(E_7) \times g_1(A_1), \\ k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad K_1 = K_2 = 2.$$

Les paramètres angulaires sont de la même forme que pour le

type (EII), mais avec les degrés de multiplicité (1, 8, 1) au lieu de (1, 2, 1).

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 2. Le groupe d'isométrie est continu.

Espaces du type (FI). — On a

$$n = 28, \quad s = 24, \quad l = \lambda = 4, \quad g = g_3(C_3) \times g_1(A_1), \\ k_1 = k_2 = K_1 = K_2 = 2.$$

Les paramètres angulaires sont de la même forme pour une transformation Y que pour une autre transformation arbitraire.

Le groupe de connexion est cyclique d'ordre 2. Le groupe d'isométrie est continu.

Espaces du type (FII). — On a

$$n = 16, \quad s = 36, \quad l = 4, \quad \lambda = 1, \quad g = g_1(B_4), \quad k = K = 2.$$

Les paramètres angulaires sont

$$\pm 2\varphi, \quad \pm \varphi,$$

multiples d'ordres 7 et 8.

Le groupe des déplacements est simplement connexe, et le groupe d'isométrie est continu.

Espaces du type (G). — On a

$$n = 8, \quad s = 6, \quad l = \lambda = 2, \quad g = g_4^3(A_1) \times g_1(A_1), \\ k_1 = k_2 = K_1 = K_2 = 2.$$

Les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la même forme que pour une transformation arbitraire. Le groupe de connexion est d'ordre 2. Le groupe d'isométrie est continu.

CHAPITRE III.

LES ESPACES A COURBURE POSITIVE ATTACHÉS AUX GROUPEs SIMPLes RÉELS NON UNITAIRES.

Généralités.

91. Reprenons une structure simple et la base

$$X_1, X_2, \dots, X_s; \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n,$$

qui permet de passer à la forme réelle unitaire en donnant aux coefficients u_i et v_α de la transformation infinitésimale

$$\sum u_i X_i + \sum v_\alpha Y_\alpha$$

des valeurs réelles, et à une forme réelle non unitaire en donnant aux u_i des valeurs réelles et aux v_α des valeurs purement imaginaires.

Dans l'espace du groupe adjoint unitaire Γ_u , les points représentatifs des matrices $\Theta = e^Y$ définissent une variété totalement géodésique \mathcal{E}_u , qu'on peut regarder comme un espace de Riemann à ds^2 défini positif, et à courbure riemannienne *positive* ou nulle.

La plupart des problèmes que nous nous sommes proposés sur l'espace \mathcal{E} à courbure négative se posent et se résolvent de la même façon pour l'espace \mathcal{E}_u . Il y a cependant des différences importantes.

92. La première question à élucider est celle de savoir si l'espace \mathcal{E}_u des matrices Θ a une métrique partout régulière. Remarquons d'abord qu'une matrice Θ admet $n - \lambda$ paramètres angulaires φ_α , qui sont ceux de sa matrice infinitésimale génératrice Y . Ces paramètres ne sont pas définis en général d'une manière univoque. Dans l'espace à λ dimensions des φ_α , les points pour lesquels les $n - \lambda$ paramètres φ_α sont entiers forment un réseau (R), et deux points M et M' homologues par rapport à ce réseau représentent deux matrices Θ et Θ' identiques, ou tout au moins homologues entre elles dans le groupe g .

Les matrices Θ pour lesquelles un des paramètres angulaires est un nombre entier différent de zéro remplissent, dans l'espace \mathcal{E}_n , une ou plusieurs variétés à $n - 2$ dimensions au plus; la raison est la même que celle qui a été donnée pour les transformations infinitésimales singulières (n° 6).

Cela posé, soit $\Theta_0^{\frac{1}{2}}$ une matrice donnée. Nous pourrons toujours mettre la matrice $\Theta_0^{\frac{1}{2}}\Theta\Theta_0^{\frac{1}{2}}$ sous la forme Θ' , du moins tant que nous n'arriverons pas à une matrice Θ' pour laquelle un des paramètres angulaires sera un entier non nul. Les points Θ pour lesquels cette circonstance pourra se présenter forment, dans l'espace \mathcal{E}_n , des variétés à $n - 2$ dimensions. Si donc on fait varier Θ , dans l'espace \mathcal{E}_n , à partir du point origine, sans traverser ces variétés, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$\Theta_0^{\frac{1}{2}}\Theta\Theta_0^{\frac{1}{2}} = \Theta'$$

pour une valeur convenablement choisie de Θ' . Si maintenant Θ est sur une des variétés à éviter, cette matrice pourra être regardée comme la limite d'une matrice variable non située sur cette variété et la conclusion subsiste.

93. De là résulte en particulier la conséquence qu'on aura toutes les matrices voisines de Θ_0 en remplaçant, dans l'expression $\Theta_0^{\frac{1}{2}}\Theta\Theta_0^{\frac{1}{2}}$, la matrice Θ par une matrice infinitésimale arbitraire; si l'on prend comme coordonnées, au voisinage du point Θ_0 de \mathcal{E}_n , les composantes c_x de la matrice $\Theta = e^{\sum c_x Y_x}$, la métrique de \mathcal{E}_n au voisinage de Θ_0 sera évidemment régulière. De plus toutes les formules établies pour les rotations et les transvections de l'espace \mathcal{E} s'étendent à l'espace \mathcal{E}_n . La seule différence est que tout déplacement de l'espace \mathcal{E}_n peut être *de plusieurs manières* décomposé en une rotation autour de l'origine et une transvection ayant pour base une géodésique passant par l'origine; cela tient à ce qu'il peut y avoir plusieurs géodésiques joignant l'origine à un point donné, une matrice Θ_0 pouvant avoir plusieurs transformations infinitésimales génératrices.

94. Le groupe des déplacements de l'espace \mathcal{E}_n est le groupe

adjoint Γ_n , et le groupe d'isométrie est formé des familles du groupe adjoint mixte qui transforment le sous-groupe g dans un sous-groupe homologue dans le groupe adjoint continu. Le groupe mixte d'isotropie est le même que dans le cas de l'espace \mathcal{E} , mais il n'est plus sûr que le groupe d'isométrie contienne autant de familles distinctes que le groupe mixte d'isotropie; cela n'est certain que si l'espace \mathcal{E}_n est simplement connexe. Du reste nous connaissons directement le nombre de familles distinctes du groupe adjoint mixte (n° 28); en général ce groupe est continu, sauf si le groupe G est de l'un des types (A), (D) ou (E) de rang 6, auquel cas il se compose de deux familles continues distinctes; dans le cas particulier du type (D) de rang 4, il se compose de six familles distinctes.

Le polyèdre (P).

95. Considérons, dans l'espace à λ dimensions des φ_x , les hyperplans (H) obtenus en égalant à un entier arbitraire un des paramètres angulaires φ_x . Ces hyperplans partagent l'espace en une infinité de régions polyédrales convexes (P). Supposons qu'on parte d'un point M_0 déterminé *intérieur* à l'une de ces régions (P) et soit Θ_0 une des matrices représentées par M_0 . *Toute matrice Θ infiniment voisine de Θ_0 est représentée sans ambiguïté par un point M et un seul infiniment voisin de M_0 .* En effet, soit Y_0 la transformation infinitésimale représentée par M_0 ; elle engendre la matrice finie Θ_0 . Comme aucun des paramètres angulaires de Y_0 n'est entier, la matrice Θ est engendrée par une transformation infinitésimale et une seule Y infiniment voisine de Y_0 (n° 16). Cette transformation Y , qui est générale, fait partie d'un sous-groupe γ_λ bien déterminé infiniment voisin de celui auquel appartient Y_0 , et il existe une rotation infiniment petite (transformation infinitésimale de g) bien déterminée amenant en coïncidence le premier sous-groupe γ_λ avec le second, de sorte que la transformation Y admet des paramètres angulaires infiniment voisins de ceux de Y_0 et *déterminés sans ambiguïté.*

Il résulte de là que si, en partant du point Θ_0 de l'espace \mathcal{E}_n , on décrit dans cet espace un chemin continu ne rencontrant aucune matrice singulière, il lui correspondra, à l'intérieur du polyèdre (P),

un chemin continu déterminé sans ambiguïté. Donc, en particulier, toute matrice Θ non singulière admet au moins un point représentatif à l'intérieur de (P) ; il en est de même, par un passage à la limite, de toute matrice singulière, qui admettra au moins un point représentatif sur la frontière de (P) . La matrice unitaire devra donc être représentée aussi; par suite, *l'un au moins des sommets de (P) appartient au réseau (R)* . Tout polyèdre (P) peut donc, par une translation laissant le réseau (R) invariant, être amené à avoir un de ses sommets à l'origine.

96. Nous allons démontrer que le symétrique d'un polyèdre (P) par rapport à une de ses hyperfaces est encore un des polyèdres (P) . Soit en effet $\varphi_x = n_x$ l'équation de cette hyperface, n_x étant un entier différent de zéro. Soient M un point intérieur à (P) et Θ une des matrices qu'il représente. La transformation infinitésimale correspondante (représentée également par M) appartient à un sous-groupe γ_x déterminé; soit Y_0 une des transformations de γ_x dont le point représentatif soit situé sur l'hyperface $\varphi_x = n_x$; la transformation génératrice de Θ sera de la forme $Y_0 + Y$, où Y appartient à γ_x .

Soit maintenant U l'une des transformations infinitésimales de g qui appartiennent au paramètre angulaire φ_x ; la transformation Θ_0 engendrée par Y_0 laisse invariante U , puisque le paramètre φ_x de Θ_0 est un nombre entier. Réciproquement U laisse invariante Θ_0 . Nous avons vu (n° 8) que l'une des transformations finies du sous-groupe engendré par U laissait invariant le sous-groupe γ_x , les transformations de ce sous-groupe étant échangées entre elles par une symétrie prise par rapport à l'hyperplan $\varphi_x = 0$. Soient Y'_0 et Y' les transformations qui proviennent de Y_0 et de Y par cette symétrie. La transformation finie Θ' engendrée par $Y'_0 + Y'$ sera le produit des transformations engendrées par Y'_0 et Y' (cela tient à ce que les transformations Y'_0 et Y' sont échangeables entre elles); or la transformation engendrée par Y'_0 est précisément la transformation finie Θ_0 *invariante par U* . Par suite on peut prendre comme transformation génératrice de Θ' la transformation infinitésimale $Y_0 + Y'$. Le point Y' se déduit du point Y par symétrie par rapport à l'hyperplan $\varphi_x = 0$; donc le point $Y_0 + Y'$ se déduit du point $Y_0 + Y$ par symétrie par rapport à l'hyperplan parallèle mené

par le point Y_0 , autrement dit par symétrie par rapport à l'hyperplan (H) considéré.

Deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à (H) étant susceptibles de représenter deux matrices Θ et Θ' homologues, les hyperfaces qui limitent (P) se transformeront également en d'autres hyperplans (H) , lesquels limiteront un polyèdre (P') symétrique de (P) .

Il est facile de voir que cette symétrie fait partie du groupe fini obtenu en combinant le groupe (S) des rotations et symétries autour de l'origine avec le groupe (T) des translations qui laissent le réseau (R) invariant. En effet si l'hyperface (H) contient un des sommets O_i du réseau (R) , la symétrie par rapport à (H) se déduit de la symétrie par rapport à l'hyperplan parallèle (H_0) mené par l'origine en la transformant par la translation qui amène O en O_i . Si au contraire l'hyperface (H) ne contient aucun des sommets du réseau (R) , le polyèdre (P) admet au moins un sommet O_i appartenant à (R) et non situé dans (H) ; son symétrique par rapport à (H) est un autre sommet O'_i appartenant également à (R) . La symétrie considérée peut alors s'obtenir en effectuant successivement la translation qui amène O_i en O , puis la symétrie par rapport à (H_0) , enfin la translation qui amène O en O'_i .

97. L'ensemble des polyèdres (P) se conserve, d'après ce qui précède, par symétrie prise par rapport à l'une quelconque des hyperfaces de l'un quelconque de ces polyèdres. Ce sont donc les domaines fondamentaux d'un certain groupe fini de déplacements et de symétries, admettant pour opérations génératrices les symétries par rapport aux hyperfaces d'un polyèdre (P) particulier. Ce groupe est le groupe résultant des combinaisons des groupes (S) et (T) , ou bien il en est un sous-groupe.

Ajoutons que, dans le cas des espaces de groupes simples, tout hyperplan (H) contient des sommets du réseau (R) , tandis que dans le cas des espaces \mathcal{E}_n , il peut ne plus en être de même.

98. On sait qu'étant donnée une transformation arbitraire de G , il est impossible que deux de ses paramètres angulaires soient multiples l'un de l'autre (à moins d'être égaux et opposés), tandis que, comme nous l'avons déjà constaté (nos 59, 71, 84), cette particularité peut se

présenter pour une transformation Y arbitraire. Néanmoins, si l'on considère deux paramètres angulaires de la forme φ_x et $m\varphi_x$, où m est plus grand que 1, l'hyperplan $m\varphi_x = 1$ ne contenant évidemment aucun sommet du réseau (R) (lequel sommet devrait rendre φ_x entier), l'hyperplan $m\varphi_x = 2$ devra en contenir au moins un, à savoir le symétrique de l'origine par rapport au premier hyperplan; par suite $\frac{2}{m}$ est un nombre entier nécessairement égal à 1. Autrement dit, *il ne peut exister que deux paramètres angulaires φ_x qui soient proportionnels entre eux, et l'un est le double de l'autre.*

Les formes de Klein de l'espace \mathcal{E}_n .

99. Reprenons un polyèdre (P) ayant l'origine pour sommet. Il est facile de démontrer que *si le polyèdre (P) n'admet pas d'autre sommet appartenant au réseau (R), l'espace \mathcal{E}_n est simplement connexe.*

Considérons en effet dans l'espace \mathcal{E}_n un contour fermé (\mathcal{C}); nous pourrons toujours le déformer d'une manière continue de manière qu'après déformation il parte de l'origine et ne rencontre aucune des variétés à $n - 2$ dimensions représentatives des matrices Θ singulières. Le point M de l'espace des φ_i qui correspond au point mobile Θ , qui décrit le contour (\mathcal{C}), partira de l'origine; on pourra toujours supposer qu'il pénètre dans le polyèdre (P): *il ne pourra jamais en sortir*, il reviendra donc à l'origine après avoir décrit un contour fermé (\mathcal{C}'). Tout point M de (\mathcal{C}') représente non seulement la matrice Θ correspondante de (\mathcal{C}), mais encore une transformation infinitésimale déterminée Y , génératrice de Θ , laquelle varie d'une manière continue. La droite OM définit donc dans l'espace \mathcal{E}_n une géodésique déterminée joignant O à Θ , et cette géodésique varie d'une manière continue quand Θ décrit le contour (\mathcal{C}).

Soit maintenant t un nombre réel compris entre 0 et 1. Le point Θ_t engendré par la transformation infinitésimale tY décrit un contour fermé (\mathcal{C}_t) qui résulte, quand t varie de 1 à 0, d'une déformation continue du contour (\mathcal{C}). Pour $t = 0$, ce contour se réduit au point origine. L'espace \mathcal{E}_n est donc bien simplement connexe.

100. Dans le cas où plusieurs des sommets du polyèdre (P) appartiennent au réseau (R), il est facile de trouver un espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ localement applicable sur \mathcal{E}_u et simplement connexe. Au lieu de partir, comme nous l'avons fait pour définir l'espace de Riemann \mathcal{E}_u , du groupe adjoint linéaire de la structure donnée, partons d'un autre groupe linéaire G de même structure, et désignons toujours par Θ et R les matrices qui représentent les transformations finies de G engendrées par les transformations infinitésimales Y et X. Rien ne sera changé aux raisonnements faits précédemment et relatifs à l'espace \mathcal{E}_u des matrices Θ . Tout déplacement de ce nouvel espace \mathcal{E}'_u sera défini par une transformation de G qui sera réductible à la forme $R\Theta^{\frac{1}{2}}$; il se pourra du reste que deux transformations distinctes de G fournissent le même déplacement de \mathcal{E}'_u . Tout point de \mathcal{E}'_u pourra être représenté par un point de l'espace euclidien auxiliaire E_n , mais il pourra arriver que certains sommets du polyèdre (P), faisant partie du réseau (R), ne représentent plus la transformation identique de G. *Si le groupe G est choisi de manière qu'aucun des sommets autres que O du polyèdre (P) ne représente la transformation identique de G, l'espace \mathcal{E}'_u sera simplement connexe.* D'une manière générale son ordre de connexion dépendra du nombre des sommets distincts de (P) représentant la transformation identique de G.

101. Si en particulier on prend pour G un groupe linéaire simplement connexe, groupe de l'existence duquel on est assuré *a priori*, le sommet O sera le seul sommet de (P) représentant la transformation identique de G; le polyèdre (P) attaché à l'espace \mathcal{E}'_u est en effet une section hyperplane du polyèdre (P) attaché à l'espace du groupe G, et ce dernier polyèdre n'admet qu'un sommet représentant la transformation identique de G. L'espace \mathcal{E}'_u correspondant au groupe simplement connexe G est donc lui-même simplement connexe. Nous le désignerons par $\overline{\mathcal{E}}_u$, la notation \mathcal{E}_u désignant l'espace correspondant au groupe adjoint Γ et la notation \mathcal{E}'_u désignant l'espace correspondant à un groupe quelconque de la structure donnée.

102. Tous les espaces \mathcal{E}'_u sont localement applicables les uns sur les

autres et admettent un groupe continu des déplacements, partout régulier et uniforme, de la structure infinitésimale donnée : ce sont évidemment les seuls espaces qui jouissent de ces deux propriétés ou, comme nous dirons, les seules *formes de Klein* de l'espace \mathcal{E}_n . Il est clair qu'à un point de \mathcal{E}'_n correspond un point et un seul de \mathcal{E}_n , puisqu'à une transformation d'un groupe G correspond une transformation et une seule de son groupe adjoint. Il est clair aussi que si l'on *développe* l'espace \mathcal{E}'_n sur l'espace *simplement connexe* $\overline{\mathcal{E}}_n$, à un point de $\overline{\mathcal{E}}_n$ correspondra un seul point de \mathcal{E}'_n . Si l'on attache à un point déterminé A de \mathcal{E}'_n un repère rectangulaire, le point A et son repère prendront dans le développement de \mathcal{E}'_n sur $\overline{\mathcal{E}}_n$ un certain nombre de positions, et l'on passera de la position initiale à l'une quelconque de ces positions par une transformation isométrique déterminée \mathcal{O}_i de $\overline{\mathcal{E}}_n$; toutes ces transformations forment un groupe, qui est le groupe d'holonomie de \mathcal{E}'_n par rapport à $\overline{\mathcal{E}}_n$. Nous l'appellerons plutôt, pour éviter toute confusion, le *groupe de connexion* de \mathcal{E}'_n . Les groupes de connexion des différentes formes de Klein sont des sous-groupes du groupe de connexion de l'espace \mathcal{E}_n .

103. Cherchons à déterminer le groupe de connexion de l'espace \mathcal{E}_n correspondant au groupe adjoint Γ . Au point origine de \mathcal{E}_n correspondent dans $\overline{\mathcal{E}}_n$ autant de points distincts que le polyèdre (P) a de sommets appartenant au réseau (R) ; soit h ce nombre. Soit O_i un de ces sommets autre que l'origine : il correspond, dans l'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_n$, à une transformation Θ_i du groupe simplement connexe G , transformation échangeable avec toutes les transformations de G . Il existe une opération du groupe de connexion cherché, amenant le point origine de $\overline{\mathcal{E}}_n$ au point O_i ; c'est une isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_n$, qui est nécessairement de la forme $\mathcal{R}_i\Theta_i^{\frac{1}{2}}$, en désignant par \mathcal{R}_i une opération convenablement choisie du groupe *mixte* d'isotropie de $\overline{\mathcal{E}}_n$.

Il est d'abord facile de voir que la transformation $\Theta_i^{\frac{1}{2}}$ laisse invariant le sous-groupe g de G engendré par les transformations infinitésimales X . En effet Θ_i est engendrée par une certaine transformation infinitésimale Y ; en conservant les notations du n° 3, les transformations infinités-

simales U_k et V_k sont transformées par $\Theta_i^{\frac{1}{2}}$ suivant la substitution linéaire

$$\begin{aligned} U'_k &= U_k \cos \alpha_k - V_k \sin \alpha_k, \\ V'_k &= U_k \sin \alpha_k + V_k \cos \alpha_k; \end{aligned}$$

la tranformation Θ_i les laissant invariantes, c'est que α_k est un multiple de π , par suite on a

$$U'_k = \varepsilon U_k, \quad V'_k = \varepsilon V_k \quad (\varepsilon^2 = 1);$$

toutes les transformations de g sont donc échangées entre elles par $\Theta_i^{\frac{1}{2}}$.

La transformation $\Theta_i^{\frac{1}{2}}$ laissant invariant le groupe *continu* d'isotropie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ laisse par cela même invariant le groupe *mixte* d'isotropie; autrement dit, \mathcal{R} étant une transformation quelconque de ce dernier groupe, on a une relation de la forme

$$(1) \quad \mathcal{R} \Theta_i^{\frac{1}{2}} = \Theta_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}',$$

\mathcal{R}' appartenant encore au groupe mixte d'isotropie.

Nous savons que les h transformations $\mathcal{R}_i \Theta_i^{\frac{1}{2}}$ engendrent un groupe, le groupe de connexion de \mathcal{E}_u . Par suite, on a des relations de la forme

$$\mathcal{R}_i \Theta_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_j \Theta_j^{\frac{1}{2}} = \mathcal{R}_k \Theta_k^{\frac{1}{2}},$$

ou, d'après (1),

$$(2) \quad \Theta_i^{\frac{1}{2}} \Theta_j^{\frac{1}{2}} = \mathcal{R} \Theta_k^{\frac{1}{2}},$$

\mathcal{R} appartenant nécessairement au groupe *continu* g .

Comme les opérations du groupe de connexion sont échangeables avec tous les déplacements de l'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$, on doit avoir également

$$\Theta_i^{\frac{1}{2}} \Theta_j^{\frac{1}{2}} = \mathcal{R}' \Theta_k^{\frac{1}{2}};$$

du reste cela peut se vérifier directement, car l'égalité (2) entraîne, en prenant les inverses des conjuguées des deux membres,

$$\Theta_j^{\frac{1}{2}} \Theta_i^{\frac{1}{2}} = \Theta_k^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}' \Theta_k^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons enfin que le produit $\Theta_i \Theta_j$ correspond à la transformation identique du groupe adjoint, et l'on montre immédiatement que

ce produit est de la forme $R\Theta_k$, l'indice k étant le même que dans les formules précédentes. On peut donc avoir immédiatement la structure du groupe de connexion de \mathcal{E}_u en calculant les produits $\Theta_i\Theta_j$ au lieu des produits $\Theta_i^{\frac{1}{2}}\Theta_j^{\frac{1}{2}}$.

Le groupe de connexion de \mathcal{E}_u étant connu, on en déduira ses sous-groupes, et par suite les différentes formes de Klein de l'espace $\overline{\mathcal{E}_u}$.

Le groupe continu des déplacements de l'espace $\overline{\mathcal{E}_u}$.

104. Le groupe continu des déplacements de l'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}_u}$ construit en partant d'un groupe linéaire G simplement connexe est formé, comme nous l'avons vu, des transformations $R_0\Theta_0$ de G ; une telle transformation donnera un déplacement nul si l'on a, quelle que soit la matrice Θ ,

$$\Theta = \Theta_0 R_0^{-1} \Theta R_0 \Theta_0;$$

on en déduit, en faisant $\Theta = \mathbf{1}$, qu'on a $\Theta_0^2 = \mathbf{1}$, d'où

$$\Theta_0 R_0^{-1} = (R_0 \Theta_0)^{-1};$$

la transformation $R_0\Theta_0$ est donc échangeable avec toutes les transformations de G , c'est-à-dire correspond à la transformation identique du groupe adjoint. Du reste cette transformation fait partie du groupe mixte d'isotropie, puisqu'elle laisse le point origine invariant; mais, *comme l'espace $\overline{\mathcal{E}_u}$ est simplement connexe*, la partie du groupe mixte d'isotropie qui appartient au groupe continu des déplacements se réduit au groupe continu d'isotropie. *Nous aurons donc les transformations de G qui correspondent à un déplacement nul en cherchant toutes les transformations du groupe continu d'isotropie g qui correspondent à la transformation identique du groupe adjoint.*

Les groupes mixtes d'isométrie de \mathcal{E}_u et de $\overline{\mathcal{E}_u}$.

105. Nous connaissons le nombre de familles continues distinctes du groupe mixte d'isométrie de l'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}_u}$: il

est le même que pour le groupe mixte d'isotropie, et il a été déterminé dans l'étude des espaces \mathcal{E} à courbure négative. Nous désignerons ce nombre par $\bar{\nu}$.

Quant au groupe d'isométrie de \mathcal{E}_n , il est formé des familles du groupe adjoint mixte qui laissent invariant l'ensemble des sous-groupes homologues de g dans le groupe adjoint continu; soit ν leur nombre. Les deux nombres ν et $\bar{\nu}$ ne sont pas nécessairement égaux; en effet, si le groupe de connexion de \mathcal{E}_n contient une isométrie de $\overline{\mathcal{E}_n}$ n'appartenant pas au groupe continu des déplacements, nous aurons dans $\overline{\mathcal{E}_n}$ deux familles distinctes d'isométries qui n'en feront qu'une dans \mathcal{E}_n . D'une manière générale le rapport $\frac{\bar{\nu}}{\nu}$ sera égal au nombre des familles distinctes d'isométries de $\overline{\mathcal{E}_n}$ dont font partie les différentes opérations du groupe de connexion de \mathcal{E}_n . Ce rapport $\frac{\bar{\nu}}{\nu}$ est en particulier un diviseur de l'ordre h du groupe de connexion, c'est-à-dire du nombre des sommets du polyèdre (P) qui appartiennent au réseau (R). On aura ainsi des vérifications arithmétiques simples des résultats obtenus.

Les variétés localement euclidiennes E_λ et les géodésiques.

106. Les matrices Θ engendrées par les transformations infinitésimales d'un sous-groupe γ_λ déterminé engendrent une variété E_λ passant par l'origine et qui a une courbure riemannienne nulle, autrement dit qui est *localement euclidienne*. Le carré de la distance d'un point Θ à l'origine est, à un facteur constant près, la somme des carrés des paramètres angulaires de la transformation infinitésimale de γ_λ qui engendre Θ . La variété E_λ est une *forme de Clifford* de l'espace euclidien à λ dimensions. Si l'on est dans l'espace *simplement connexe* $\overline{\mathcal{E}_n}$, on a une représentation complète de E_λ sur cet espace euclidien au moyen d'un polyèdre (P) ayant l'origine pour sommet auquel on ajouterait tous ceux qui s'en déduisent par les opérations du groupe (S). Le domaine polyédral (\mathcal{O}) ainsi obtenu représente complètement la variété E_λ (1), à condition de regarder comme identiques deux points de

(1) Cf. *Ann. di Mat., loc. cit.*, p. 228 et 236.

deux hyperfaces opposées de (\mathcal{O}) , se déduisant l'un de l'autre par la translation qui amène ces deux hyperfaces en coïncidence. Les symétriques de O par rapport aux hyperfaces de (\mathcal{O}) appartiennent à un réseau (\bar{R}) ; les translations qui laissent invariant ce réseau transformeraient le domaine (\mathcal{O}) en une infinité d'autres domaines égaux remplissant une fois et une fois seulement tout l'espace euclidien indéfini à λ dimensions : ces translations engendrent le *groupe d'holonomie* de la variété E_λ développée sur l'espace euclidien.

Les géodésiques de E_λ ont pour images les droites de l'espace à λ dimensions des φ_i . On voit que si λ est supérieur à 1, il passe par deux points de l'espace \bar{E}_λ une infinité dénombrable de géodésiques, dont certaines sont fermées. Soit une géodésique issue de l'origine; elle correspond à une transformation infinitésimale Y admettant certains paramètres angulaires φ_α . Prenons sur cette géodésique un point Θ tel qu'aucun des paramètres angulaires non nuls de Y ne prenne en Θ une valeur entière; toute rotation laissant invariant le point Θ laissera invariante la géodésique, qui sera ainsi *isolée* dans l'ensemble des géodésiques joignant O à Θ . Si, au contraire, l'un des paramètres angulaires non nuls de Y a en Θ une valeur entière, il existera au moins une rotation autour de O laissant le point A invariant sans laisser la géodésique invariante : cette géodésique fera donc partie d'un ensemble continu de géodésiques joignant O à Θ . Prenons inversement un point Θ , que nous pouvons supposer représenté par un point A à l'intérieur ou sur la frontière du polyèdre (P) . Les différentes géodésiques joignant l'origine au point Θ seront représentables par les droites joignant, dans l'espace des φ_i , le point A aux différents sommets O_i du réseau (\bar{R}) ; pour qu'une de ces géodésiques soit isolée dans l'ensemble des géodésiques joignant O à Θ , il faudra et il suffira que si φ_α est un quelconque des paramètres ayant une valeur entière en A , ce paramètre ait en O_i la même valeur entière; autrement dit la variété plane (hyperface, hyperarête, etc.) frontière de (P) à l'intérieur de laquelle se trouve le point A devra passer, si au besoin on la prolonge, par un point du réseau (\bar{R}) . On voit qu'en particulier *il sera impossible de joindre par une géodésique isolée l'origine O à un point représenté par un des sommets autres que O du polyèdre (P)* . Ces som-

mets, quand la variété E_λ varie, engendrent λ variétés antipodiques de l'origine. Ceux qui appartiennent au réseau (R) sont indépendants de la variété E_λ : ce sont les points antipodes (quand ils existent) de O ; ils sont confondus en un seul dans l'espace \mathcal{E}_u .

107. Dans les espaces de rang 1, les choses sont beaucoup plus simples que dans le cas général. Toutes les géodésiques sont fermées et égales entre elles. Par deux points arbitraires de l'espace il passe en général une géodésique et une seule ; il y a exception (au moins pour les espaces simplement connexes) si le second point est sur la variété antipodique du premier ; dans ce cas il passe par les deux points une infinité de géodésiques formant une variété continue. Si la variété antipodique se réduit à un point (point antipode), c'est que l'espace admet une forme non simplement connexe, et dans cette forme il passe une géodésique et une seule par deux points donnés, *quels qu'ils soient*. C'est ce qui arrive pour l'espace elliptique, forme non simplement connexe de l'espace sphérique.

Les espaces du type (AI).

108. *Définition géométrique.* — Nous prenons pour G le groupe linéaire unimodulaire simplement connexe d'une forme d'Hermite définie positive

$$F \equiv x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{l+1} \bar{x}_{l+1}.$$

Le groupe g est engendré par les transformations infinitésimales

$$x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha ;$$

c'est celui qui laisse invariante la forme quadratique

$$\Phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{l+1}^2.$$

Le groupe adjoint mixte se compose de deux familles, correspondant aux homographies et aux *antihomographies* de l'espace projectif complexe à l dimensions. Comme l'antihomographie particulière

$$x'_i = \bar{x}_i$$

laisse le sous-groupe g invariant, *tous les sous-groupes g' isomorphes de g forment un ensemble connexe.*

A la forme quadratique Φ est associée l'*antiinvolution* de première espèce

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

ou

$$\bar{x}_i = \rho x_i;$$

c'est une antiinvolution parce que, effectuée deux fois de suite sur un point (x) de l'espace projectif complexe, elle redonne ce même point; elle est de première espèce parce qu'elle admet une infinité de points doubles, à savoir les points de coordonnées (homogènes) réelles. De plus elle jouit de la propriété que deux points conjugués par rapport à la forme d'Hermite F sont transformés en deux points également conjugués par rapport à F .

Réciproquement, considérons une antiinvolution de première espèce jouissant de cette dernière propriété; supposons-la définie par les équations

$$\bar{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k,$$

et désignons par A la matrice (a_{ik}) . On devra avoir d'abord la relation

$$(3) \quad \bar{A}A = m^2,$$

m étant un scalaire réel, qui exprime qu'on a affaire à une antiinvolution de première espèce. On aura ensuite la relation

$$(4) \quad \bar{A}^*A = k,$$

où l'on a désigné par A^* la matrice transposée de A et par k un scalaire; cette relation exprime que deux points conjugués par rapport à la forme F sont transformés en deux autres points conjugués. Le nombre k est réel, puisque, en échangeant les lignes et les colonnes, on a

$$k = A^* \bar{A} = \bar{k}.$$

On déduit de (3) et (4)

$$A^* = \frac{k}{m^2} A,$$

et comme le déterminant de A^* est égal à celui de A ,

$$\frac{k}{m^2} = \pm 1.$$

La matrice A est donc ou symétrique, ou symétrique gauche.

Elle ne peut pas être symétrique gauche, car un calcul immédiat montre que le produit $\bar{A}A$ serait négatif; elle est donc symétrique, et l'on peut de plus la multiplier par un scalaire convenable de manière à avoir $\bar{A}A = 1$.

Soit maintenant une matrice A symétrique égale à l'inverse de son imaginaire conjuguée. Il est facile de trouver un point double de l'antiinvolution qu'elle détermine; il suffit de partir d'un point (x) quelconque et de poser

$$y_i = \lambda x_i + \bar{\lambda} \sum \bar{a}_{ik} \bar{x}_k,$$

λ étant un nombre complexe indéterminé; l'antiinvolution le change dans le point

$$z_i = \sum \bar{a}_{ik} \bar{y}_k = \bar{\lambda} \sum \bar{a}_{ik} \bar{x}_k + \lambda \sum_{k,h} \bar{a}_{ik} a_{kh} x_h = y_i.$$

Effectuons une substitution linéaire conservant la forme F et transformant le point y dans un point $(x_1, 0, 0, \dots, 0)$. On aura

$$a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1,j+1} = 0,$$

$$x_1 = \bar{a}_{11} \bar{x}_1;$$

a_{11} est donc de module égal à 1 et, en remplaçant x_1 par $x_1 e^{i\theta}$, on peut s'arranger pour que a_{11} devienne égal à 1.

L'antiinvolution ne portera plus maintenant que sur les variables x_2, \dots, x_{l+1} et l'on pourra de proche en proche s'arranger pour réduire la matrice A à l'unité. L'antiinvolution donnée est donc certainement invariante par un sous-groupe g' isomorphe de g .

Par suite l'espace \mathcal{E}_u est l'espace des antiinvolutions de première espèce qui changent deux points conjugués par rapport à la forme F en deux autres points conjugués. C'est aussi l'espace des matrices symétriques inverses de leurs imaginaires conjuguées, en ne regardant pas comme distinctes deux matrices ne différant que par un facteur scalaire.

On peut supposer que la matrice A est unimodulaire; il ne faut pas alors regarder comme distinctes les matrices A et εA si ε est une racine $(l+1)^{\text{ième}}$ quelconque de l'unité.

109. *Le rang et le polyèdre (P).* — Le rang λ de l'espace \mathcal{E}_u est égal à l . Les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\varphi_i - \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l+1)$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{l+1} = 0.$$

Le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_{l+1}, \quad \varphi_1 - \varphi_{l+1} < 1.$$

Tous ses sommets appartiennent au réseau (R). Les transformations Θ_i correspondantes sont les transformations de G qui correspondent à la transformation identique de Γ_u , à savoir

$$x'_\alpha = \varepsilon^k x_\alpha \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{l+1}} \right);$$

elles engendrent un groupe cyclique.

110. *L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$.* — A tout point de \mathcal{E}_u correspondent $l+1$ points distincts de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Lorsqu'on applique à la forme quadratique Φ les transformations de G , on obtient une forme quadratique dont les coefficients forment une matrice A symétrique unimodulaire inverse de son imaginaire conjuguée. Or à chaque anti-involution symétrique (point de \mathcal{E}_u) correspondent précisément $l+1$ matrices A distinctes. Par suite, *l'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ est celui des matrices symétriques unimodulaires inverses de leurs imaginaires conjuguées.*

111. *Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u .* — Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ contient autant de familles distinctes que le groupe mixte d'isotropie, c'est-à-dire (n° 43) $\overline{\nu} = 2$ si l est pair et $\overline{\nu} = 4$ si l est impair. Comme le groupe d'isométrie de \mathcal{E}_u , qui se confond avec le groupe adjoint mixte, contient $\nu = 2$ familles, les opérations du groupe de connexion de \mathcal{E}_u appartiennent toutes au

groupe continu des déplacements de $\overline{\mathcal{E}}_u$ si l est pair; elles appartiennent par moitié à deux des quatre familles d'isométries de $\overline{\mathcal{E}}_u$ si l est impair.

Ce résultat est facile à vérifier. Prenons la transformation Θ_1 ,

$$x'_\alpha = \varepsilon x_\alpha;$$

la transformation $\Theta_1^{\frac{1}{2}}$ peut être regardée comme engendrée par la transformation infinitésimale

$$-i\pi x_1 p_1 + \frac{i\pi}{l+1} \sum_k x_k p_k;$$

elle s'écrit

$$x'_1 = -e^{\frac{i\pi}{l+1}} x_1, \quad x'_\alpha = e^{\frac{i\pi}{l+1}} x_\alpha \quad (\alpha = 2, 3, \dots, l+1).$$

En effectuant d'abord la rotation \mathcal{R}

$$x'_1 = x_1, \quad x'_\alpha = -x_\alpha,$$

puis la transvection $\Theta_1^{\frac{1}{2}}$, on aura l'opération génératrice cherchée du groupe de connexion de \mathcal{E}_u , à savoir

$$x'_\alpha = -e^{\frac{i\pi}{l+1}} x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l+1),$$

qui transforme A en εA . On voit que la rotation \mathcal{R} fait partie du groupe continu d'isotropie, et par suite l'opération considérée du groupe continu des déplacements de $\overline{\mathcal{E}}_u$, si l est pair; dans le cas contraire, \mathcal{R}^2 en fait partie. On vérifie facilement que dans ce dernier cas l'espace \mathcal{E}_u est *non orientable* (1).

Il résulte encore de ce qui précède que si l est pair, à un déplacement de \mathcal{E}_u correspondent $l+1$ déplacements distincts de $\overline{\mathcal{E}}_u$; si l est impair, à un déplacement de \mathcal{E}_u correspondent seulement $\frac{l+1}{2}$ déplacements de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Par suite il existe, suivant les cas, $l+1$ ou $\frac{l+1}{2}$ trans-

(1) Cela veut dire qu'on peut passer par continuité, dans l'espace \mathcal{E}_u , d'un repère rectangulaire donné à un repère rectangulaire de même origine et d'orientation différente.

formations de g correspondant à la transformation identique de Γ_u , ce qui serait facile à vérifier directement.

En dehors des espaces \mathcal{E}_u et $\overline{\mathcal{E}}_u$ il existe en général d'autres formes de Klein; leur nombre total est égal au nombre des diviseurs de $l+1$.

112. *Les variétés euclidiennes E_l et les géodésiques.* — On aura une variété euclidienne E_l en prenant le lieu des matrices diagonales unimodulaires dont tous les éléments $e^{i\theta_\alpha}$ sont de module 1; son ds^2 est

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l+1} d\theta_\alpha^2 \quad (\theta_1 + \dots + \theta_{l+1} = 0).$$

Toute géodésique est congruente au lieu des formes quadratiques

$$e^{ia_1 s} x_1^2 + \dots + e^{ia_{l+1} s} x_{l+1}^2,$$

avec

$$\sum_{\alpha} a_\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha} a_\alpha^2 = 1.$$

Le cas $l=1$ donne la sphère et le plan elliptique.

Les espaces \mathcal{E}_u du type (AII).

113. *Définition géométrique.* — Le groupe G étant le même que pour le type (AI), le sous-groupe g est celui qui laisse invariante la forme quadratique extérieure

$$\Phi = [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_l x_{l+1}] \quad (l \text{ impair}).$$

L'antihomographie $\overline{x}_i = x_i$ laisse ce sous-groupe invariant. Par suite, l'ensemble des sous-groupes g' isomorphes de g est connexe.

Le sous-groupe g laisse invariante, en même temps que la forme Φ , l'antiinvolution de seconde espèce qui lui est associée

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{x}_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

ou

$$\overline{\overline{x}}_1 = x_2, \quad \overline{\overline{x}}_2 = -x_1, \quad \dots, \quad \overline{\overline{x}}_l = x_{l+1}, \quad \overline{\overline{x}}_{l+1} = -x_l.$$

Elle jouit de la propriété que tout point (x) est changé en un point (x') conjugué de (x) par rapport à la forme F .

Réciproquement, considérons une antiinvolution de seconde espèce

telle que tout point (x) soit changé en un point (x') conjugué de (x) par rapport à la forme F ; soient

$$\bar{x}'_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

les équations de cette antiinvolution. On devra avoir $a_{ij} = -a_{ji}$; autrement dit, la matrice A des coefficients devra être symétrique gauche; on aura ensuite

$$\bar{A}A = k,$$

k étant un scalaire qu'on vérifie facilement être négatif. On pourra même supposer k réduit à la valeur -1 .

Si maintenant on part d'une matrice A opposée à l'inverse de son imaginaire conjuguée, nous pourrons effectuer sur les variables une substitution linéaire laissant invariante la forme d'Hermite F et telle que le point transformé de $(1, 0, \dots, 0)$ par l'antiinvolution soit le point $(0, 1, \dots, 0)$ conjugué du premier par rapport à la forme F . On aura alors

$$a_{13} = a_{14} = \dots = a_{1, l+1} = 0,$$

a_{12} étant de module égal à 1 et, par une substitution $x'_2 = x_2 e^{i\theta}$, on pourra supposer $a_{12} = 1$. L'antiinvolution ne fait plus alors intervenir que les variables x_3, \dots, x_{l+1} , et l'on réduira de proche en proche la matrice A à celle qui correspond à la forme quadratique extérieure Φ . Autrement dit, le sous-groupe g' qui laisse invariante une antiinvolution de l'espèce considérée est isomorphe de g .

L'espace \mathcal{E}_n est donc l'espace des antiinvolutions de seconde espèce qui changent un point quelconque en un autre point conjugué du premier par rapport à la forme F .

La matrice A qui définit une de ces antiinvolutions n'est définie qu'à un facteur scalaire près; on pourra toujours le choisir de manière que le pfaffien

$$(5) \quad \Sigma a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_l i_{l+1}},$$

où la somme est étendue à toutes les combinaisons $(i_1 i_2), (i_3 i_4), \dots, (i_l i_{l+1})$, pour lesquelles la permutation $i_1 i_2 \dots i_{l+1}$ des $l+1$ indices $1, 2, \dots, l+1$ est paire, soit égal à 1 . Cela est possible de $\frac{l+1}{2}$

manières différentes, car on peut multiplier tous les a_{ij} par une même racine $\left(\frac{l+1}{2}\right)^{\text{ième}}$ de l'unité.

L'espace \mathcal{E}_u est donc aussi l'espace des matrices antisymétriques A opposées aux inverses de leurs imaginaires conjuguées et pour lesquelles le pfaffien (5) est égal à 1, en ne regardant pas comme distinctes deux matrices ne différant que par un facteur scalaire.

114. *Le rang et le polyèdre (P).* — Le rang est ici $\lambda = \frac{l-1}{2}$. Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\varphi_i - \varphi_j \quad \left(i, j = 1, 2, \dots, \frac{l+1}{2}\right),$$

et le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_{\frac{l+1}{2}}, \quad \varphi_1 - \varphi_{\frac{l+1}{2}} < 1.$$

Tous ses sommets appartiennent au réseau (R). Les transformations Θ_k correspondantes sont

$$x'_\alpha = e^{\frac{4ki\pi}{l+1}} x_\alpha \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{l-1}{2}\right).$$

115. *L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$.* — A tout point de \mathcal{E}_u correspondent $\frac{l+1}{2}$ points distincts de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Lorsqu'on applique à la forme extérieure Φ une transformation quelconque de G, on obtient une forme extérieure dont les coefficients forment une matrice A symétrique gauche, à pfaffien égal à 1 et opposée à l'inverse de son imaginaire conjugué. Or, à chaque antiinvolution antisymétrique (point de \mathcal{E}_u), correspondent précisément $\frac{l+1}{2}$ matrices A distinctes. L'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ est donc l'espace des matrices symétriques gauches à pfaffien égal à 1, opposées à l'inverse de leurs imaginaires conjugués.

116. *Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u .* — Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ contient (n° 50) $\bar{\nu} = 2$ familles distinctes, comme le groupe d'isométrie de \mathcal{E}_u (groupe adjoint mixte).

Par suite, toutes les opérations du groupe d'holonomie de \mathcal{E}_u sont de vrais déplacements de $\overline{\mathcal{E}_u}$.

Pour obtenir l'opération génératrice du groupe de connexion, partons de la transformation $\Theta_1^{\frac{1}{2}}$ qui peut s'écrire

$$x'_1 = -e^{\frac{2l\pi}{l+1}}x_1, \quad x'_2 = -e^{\frac{2l\pi}{l+1}}x_2, \quad x'_\alpha = e^{\frac{2l\pi}{l+1}}x_\alpha \quad (\alpha = 3, 4, \dots, l+1);$$

en la combinant avec la rotation \mathcal{R}

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_\alpha = x_\alpha \quad (\alpha = 3, \dots, l+1),$$

qui fait partie du groupe continu d'isotropie, on obtient l'opération cherchée

$$x'_\alpha = e^{\frac{2l\pi}{l+1}}x_\alpha = \varepsilon x_\alpha,$$

qui transforme la matrice A dans la matrice $\varepsilon^2 A$.

Il existe autant de formes de Klein de l'espace que le nombre $\frac{l+1}{2}$ admet de diviseurs.

417. *Les variétés euclidiennes E_l et les géodésiques.* — On aura une variété euclidienne E_l en prenant le lieu des formes

$$e^{i\theta_1}[x_1 x_2] + e^{i\theta_2}[x_3 x_4] + \dots + e^{i\theta_{l+1}}[x_l x_{l+1}],$$

avec

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{l+1} = 0.$$

Le ds^2 de cette variété est

$$ds^2 = d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + \dots + d\theta_{l+1}^2.$$

Toute géodésique est congruente au lieu des formes

$$e^{ia_1 s}[x_1 x_2] + \dots + e^{ia_{l+1} s}[x_l x_{l+1}],$$

les constantes a_α satisfaisant aux relations

$$\Sigma a_\alpha = 0, \quad \Sigma a_\alpha^2 = 1.$$

Le cas $l = 3$ donne un espace de rang 1 qui n'est autre que l'espace sphérique à 5 dimensions (avec sa forme de Klein l'espace elliptique).

Les espaces du type (AIV).

118. *Définition géométrique.* — Le groupe G étant toujours le même, le sous-groupe g est celui qui laisse invariant le point

$$x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$$

de l'espace projectif complexe à l dimensions. L'espace \mathcal{E}_u est donc l'espace hermitien elliptique.

119. *Le rang et le polyèdre (P).* — Ici, le rang λ est égal à 1; si l'on prend la transformation infinitésimale

$$Y_0 = x_1 p_{l+1} - x_{l+1} p_1,$$

ses paramètres angulaires sont

$$2\varphi \quad \text{et} \quad \varphi,$$

respectivement multiples d'ordres 1 et $l-1$.

Le polyèdre (P) se réduit au segment $(0, \frac{1}{2})$ de l'axe des φ .

L'extrémité $\varphi = \frac{1}{2}$ n'appartient pas au réseau (R). Par suite, l'espace \mathcal{E}_u est simplement connexe.

Le groupe d'isométrie de l'espace est donc formé de deux familles continues distinctes, comme dans le cas de l'espace hermitien hyperbolique.

120. *Les géodésiques.* — Le rang de l'espace étant 1, il passe, en général, par deux points donnés une géodésique et une seule. Il y a exception si le second point appartient à la variété antipodique du premier. Pour tout point de cette variété antipodique, on a $\varphi = \frac{1}{2}$; par suite, un seul couple de paramètres angulaires devient entier; ce point admet donc $\infty^{n-\lambda-1} = \infty^{n-2}$ homologues, de sorte que la variété antipodique est à $n-2$ dimensions; par un point donné et un point de sa variété antipodique passent ∞^1 géodésiques formant une variété continue.

Si l'on part toujours de la transformation infinitésimale

$$x_1 p_{l+1} - x_{l+1} p_1,$$

la matrice Θ , qui correspond au sommet $\varphi = \frac{1}{2}$ du segment (P), fournit la transformation finie

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_{l+1} = -x_{l+1}, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_l = x_l;$$

la matrice $\Theta^{\frac{1}{2}}$ est alors, par exemple,

$$x'_1 = x_{l+1}, \quad x'_{l+1} = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_l = x_l.$$

Cette transformation, appliquée au point origine

$$x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0,$$

donne le point

$$x_2 = \dots = x_l = x_{l+1} = 0,$$

qui est ainsi un point de la variété antipodique du point origine. On voit immédiatement que cette variété est la variété plane (complexe) polaire du point origine par rapport à l'*absolu*

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{l+1} \bar{x}_{l+1} = 0.$$

Les ∞^1 géodésiques qui joignent le point origine au point

$$x_2 = \dots = x_l = x_{l+1} = 0$$

proviennent des transformations infinitésimales

$$e^{i\alpha} x_1 p_{l+1} - e^{-i\alpha} x_{l+1} p_1,$$

où α est un paramètre arbitraire; elles sont définies par les équations

$$x_1 = \sin s, \quad x_2 = \dots = x_l = 0, \quad x_{l+1} = -e^{i\alpha} \cos s;$$

elles engendrent la *droite* complexe

$$x_2 = x_3 = \dots = x_l = 0.$$

Tous ces résultats ont déjà été obtenus par G. Fubini et E. Study.

Les espaces du type (AIII).

121. *Définition géométrique.* — Le groupe G étant toujours le même, le sous-groupe g est celui qui laisse invariante, dans l'espace

hermitien elliptique, la variété plane complexe

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0,$$

et aussi, par suite, la variété, polaire de la précédente par rapport à l'absolu,

$$x_{p+1} = \dots = x_{l+1} = 0.$$

L'antihomographie $x'_i = \bar{x}_i$ laissant invariant le sous-groupe g , l'ensemble des sous-groupes g' isomorphes de g est connexe. Il en résulte immédiatement que l'espace \mathcal{E}_u est l'espace des couples de variétés planes à $q - 1$ et $p - 1$ dimensions polaires l'une de l'autre par rapport à la forme F .

Si $p > q$, on peut encore, sans ambiguïté, définir l'espace \mathcal{E}_u comme celui des variétés planes à $q - 1$ dimensions de l'espace projectif complexe à l dimensions.

122. *Le rang et le polyèdre (P).* — Comme nous l'avons vu (n° 58), le rang λ est égal à q , et les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \pm \varphi_i,$$

respectivement multiples d'ordres $1, 2, p - q$.

Le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q > 0;$$

si $p > q$, aucun de ses sommets autres que l'origine ne donne à tous les paramètres angulaires des valeurs entières. Par suite, si $p > q$, l'espace \mathcal{E}_u des variétés planes à $q - 1$ dimensions de l'espace hermitien elliptique est simplement connexe.

Si, au contraire, $p = q$, le sommet

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}$$

du polyèdre (P) appartient au réseau (R); il y a alors deux formes de Klein distinctes de l'espace considéré.

le groupe d'isométrie de l'espace elliptique est continu. Si le nombre des dimensions est impair, le groupe de connexion de l'espace elliptique est un vrai déplacement de l'espace sphérique; le groupe d'isométrie de l'espace elliptique est formé de deux familles continues distinctes. L'espace elliptique est orientable ou non suivant que le nombre des dimensions est impair ou pair. Tous ces résultats sont classiques. Le rang est ici égal à 1.

Les espaces du type (BDI).

127. On a ici

$$n = pq,$$

où p et q sont deux entiers quelconques au moins égaux à 2, $p + q$ étant au moins égal à 5. Nous supposons $p \geq q$.

Nous prendrons pour G le groupe (*non simplement connexe*) de la forme quadratique définie positive

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{p+q}^2.$$

Le sous-groupe g est formé des transformations de G qui laissent séparément invariante chacune des formes

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2, \quad x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2.$$

Si $p + q$ est impair, le groupe adjoint est continu; si $p + q$ est pair, le groupe adjoint mixte est formé de deux familles distinctes correspondant à une substitution orthogonale de déterminant $+1$ ou -1 effectuée sur les variables. Il est clair, par suite, que les sous-groupes g' isomorphes de g forment un ensemble connexe.

On peut définir l'espace \mathcal{E}_u comme l'espace des couples de variétés planes à $p - 1$ et $q - 1$ dimensions polaires l'une de l'autre par rapport à la forme F .

Si $p > q$, on peut encore sans ambiguïté définir l'espace \mathcal{E}_u comme l'espace des variétés planes à $q - 1$ dimensions.

128. *Le rang et le polyèdre (P).* — Le rang est égal à q . Comme nous l'avons vu (n° 65), les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, q)$$

respectivement d'ordres $\frac{p-q}{2}$ ou $\frac{p-q+1}{2}$ et 1 (suivant la parité de la différence $p - q$).

Si $p = q$, les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, q).$$

Si nous supposons d'abord $p > q$, le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$1 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q > 0;$$

un et un seul de ses sommets autres que l'origine appartient au réseau (R), c'est celui dont les coordonnées sont

$$1, 0, \dots, 0.$$

Si $p = q$, le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q, \quad \varphi_{q-1} + \varphi_q > 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Trois de ses sommets autres que l'origine appartiennent au réseau (R), à savoir :

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \dots, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \dots, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}. & \end{array}$$

129. *L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$ pour $p > q$.* — Si p est plus grand que q , à un point de \mathcal{E}_u correspondent deux points distincts de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Définissons une variété plane à $q - 1$ dimensions par un système de coordonnées pluckériennes x_{i_1, i_2, \dots, i_q} assujetties à la relation

$$\sum x_{i_1, i_2, \dots, i_q}^2 = 1.$$

Toute transformation de G, appliquée à un tel système de quantités, donne encore un système de quantités analogues. Or, à une variété plane donnée correspondent deux systèmes de coordonnées x_{i_1, \dots, i_q} . Nous dirons que chacun d'eux définit une *variété plane orientée*. *L'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ est donc celui des variétés planes orientées à $q - 1$ dimensions, qui forment ainsi un ensemble simplement connexe,*

130. *Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u pour $p > q$.* — Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ contient $(n^\circ 68) \bar{\nu} = 2$ familles distinctes, à moins que p et q ne soient pairs tous les deux, auquel cas il en contient 4. Quant au groupe d'isométrie de \mathcal{E}_u , il contient une seule famille continue ($\nu = 1$) si p et q sont de parités différentes; il contient deux familles ($\nu = 2$) si p et q sont de même parité.

Le groupe de connexion de \mathcal{E}_u est d'ordre 2; son opération non identique est un vrai déplacement de $\overline{\mathcal{E}}_u$ si $\bar{\nu} = \nu$, c'est-à-dire si p et q sont tous les deux impairs. Dans le cas contraire (l'un au moins des entiers p et q est pair), cette opération n'est pas un vrai déplacement de $\overline{\mathcal{E}}_u$.

131. *L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$ pour $p = q$.* — A tout point de \mathcal{E}_u correspondent quatre points distincts de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Par suite, l'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ est l'espace des variétés planes orientées à $q - 1$ dimensions.

132. *Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u pour $p = q$.* — Il y a à distinguer suivant que q est impair ou pair.

1° Si q est impair, on a $\nu = 2$, $\bar{\nu} = 4$. Les quatre opérations du groupe de connexion appartiennent deux par deux à deux familles distinctes du groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ (qui en comprend quatre). Le groupe de connexion est cyclique; il est engendré par l'opération

$$x'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q} = x_{\alpha_{q+1} \dots \alpha_{2q}}$$

où les $2q$ indices $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{2q}$ forment une permutation paire. Cette opération n'est pas un vrai déplacement de $\overline{\mathcal{E}}_u$, mais son carré

$$x'_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = -x_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$$

en est un.

Il existe, dans ce cas, trois formes de Klein distinctes, les deux formes $\overline{\mathcal{E}}_u$ et \mathcal{E}_u , puis celle dont le groupe de connexion est le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par l'opération

$$x'_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = -x_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$$

2° Si q est pair, on a $\nu = 2$, $\bar{\nu} = 8$; le rapport $\frac{\bar{\nu}}{\nu} = 4$. Les quatre opérations du groupe de connexion appartiennent à quatre distinctes des huit familles du groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Le groupe de connexion n'est pas cyclique. En dehors des deux espaces \mathcal{E}_u et $\overline{\mathcal{E}}_u$, il existe encore :

a. Une forme dans laquelle on identifie les variétés planes orientées

$$x_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad \text{et} \quad -x_{\alpha_1 \dots \alpha_q};$$

b. Une forme dans laquelle on identifie les variétés orientées

$$x'_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad \text{et} \quad x_{\alpha_{q-1} \dots \alpha_{2q}};$$

c. Une forme dans laquelle on identifie les variétés orientées

$$x_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad \text{et} \quad -x_{\alpha_{q-1} \dots \alpha_{2q}}.$$

Les deux dernières formes donnent, du reste, des espaces de Riemann identiques, bien que leurs développements sur l'espace $\overline{\mathcal{E}}_u$ soient différents. Les groupes d'isométrie des trois dernières formes contiennent quatre familles distinctes.

133. *Les variétés euclidiennes E_q et les géodésiques.* — Elles sont analogues à celles qui se sont présentées pour les espaces à courbure négative.

Les espaces du type (DIII).

134. Le groupe G étant le groupe linéaire d'une forme quadratique définie positive à $2l$ variables

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2l}^2,$$

le sous-groupe g est celui qui laisse invariante la forme quadratique extérieure

$$(6) \quad \Phi \equiv [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}].$$

Si l est impair, l'une des opérations de la seconde famille du groupe adjoint mixte correspond à la substitution linéaire de déterminant -1

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_{2l-1} = -x_{2l-1}, \quad x'_{2l} = x_{2l},$$

qui laisse évidemment invariant le sous-groupe g . Par suite, les sous-groupes g' isomorphes de g forment un ensemble connexe.

Si l est pair, il n'en est plus de même. La substitution linéaire de déterminant -1

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_{2l-1} = x_{2l-1}, \quad x'_{2l} = -x_{2l}$$

transforme la forme Φ dans la forme

$$\Phi' \equiv [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots - [x_{2l-1} x_{2l}],$$

et l'on ne peut pas passer de Φ à Φ' par une transformation du groupe continu G , sinon les puissances $l^{\text{èmes}}$ symboliques seraient identiques, alors qu'elles sont égales et opposées. *Les sous-groupes g' isomorphes de g forment donc, pour l pair, deux ensembles connexes, distincts.*

Arrivons maintenant à la définition géométrique de l'espace \mathcal{E}_n . A la forme Φ est associée une *translation* infinitésimale de l'espace elliptique à $2l-1$ dimensions, à savoir

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 + \dots + x_{2l-1} p_{2l} - x_{2l} p_{2l-1}.$$

Dans cette translation, tous les points de l'espace ont des vitesses égales et décrivent des droites qui vont toutes rencontrer les deux variétés planes imaginaires conjuguées

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \dots = x_{2l-1} + ix_{2l} = 0, \\ x_1 - ix_2 = x_3 - ix_4 = \dots = x_{2l-1} - ix_{2l} = 0, \end{aligned}$$

dont chacune est située tout entière sur l'absolu. Réciproquement toute droite réelle s'appuyant sur ces deux variétés planes est trajectoire de la translation infinitésimale considérée.

Partons maintenant d'un couple de variétés planes à $l-1$ dimensions imaginaires conjuguées et génératrices de l'absolu. Soient

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_l = 0, \\ \overline{y}_1 = \overline{y}_2 = \dots = \overline{y}_l = 0, \end{aligned}$$

les équations de ces deux variétés, les y_i désignant l formes linéaires indépendantes à coefficients imaginaires. La forme F s'exprime au moyen des quantités y_i et \overline{y}_i comme une forme d'Hermité définie

positive

$$F \equiv \sum a_{ik} y_i \bar{y}_k \quad (a_{ik} = \bar{a}_{ki});$$

comme on sait, on peut, par une substitution linéaire à coefficients complexes effectuée sur les variables complexes y_i , réduire F à la forme

$$F \equiv y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \dots + y_l \bar{y}_l.$$

Il résulte de là que, par une substitution linéaire réelle effectuée sur les variables x_1, \dots, x_{2l} , et conservant la forme F , les équations des deux variétés considérées sont réductibles à la forme

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \dots = x_{2l-1} + ix_{2l} = 0, \\ x_1 - ix_2 = x_3 - ix_4 = \dots = x_{2l-1} - ix_{2l} = 0. \end{aligned}$$

Ces deux variétés définissent donc une translation infinitésimale de l'espace elliptique, invariante par un sous-groupe g' isomorphe de g .

Il résulte de ce qui précède que les translations forment un ensemble connexe si l est impair; elles forment au contraire deux ensembles connexes distincts si l est pair. Nous dirons, dans ce dernier cas, qu'une translation est *droite* ou *gauche* suivant que le déterminant des coefficients des x_i dans les formes P_i qui entrent dans les équations

$$P_1 + iP_2 = P_3 + iP_4 = \dots = P_{2l-1} + iP_{2l} = 0$$

de l'une des variétés génératrices de l'absolu est positif ou négatif (ce signe ne dépend pas de la manière dont les équations de la variété sont écrites).

L'espace \mathcal{E}_n est donc, pour l impair, l'espace des translations; pour l pair, l'espace des translations droites (ou des translations gauches).

135. *Le rang et le polyèdre (P).* — Le rang de l'espace \mathcal{E}_n est $\frac{l}{2}$ si l est pair, $\frac{l-1}{2}$ si l est impair (n° 71).

Si l est impair, les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad \left(i, j = 1, 2, \dots, \frac{l-1}{2} \right)$$

respectivement d'ordres 1, 2 et 4. Le polyèdre (P) est défini par les

inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0.$$

Aucun de ses sommets, autres que l'origine, n'appartient au réseau (R). Par suite l'espace \mathcal{E}_n est simplement connexe; son groupe d'isométrie (groupe adjoint mixte) est composé de deux familles distinctes.

Si l est pair, les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad \left(i, j = 1, 2, \dots, \frac{l}{2} \right),$$

respectivement d'ordres 1 et $\frac{1}{2}$. Le polyèdre (P) est défini par les mêmes inégalités que ci-dessus; seulement le sommet

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$$

appartient au réseau (R). Il y a donc une forme simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_n$ à côté de la forme non simplement connexe \mathcal{E}_n .

136. L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_n$ pour l pair. — A tout point de \mathcal{E}_n correspondent deux points distincts de $\overline{\mathcal{E}}_n$. Or un point de \mathcal{E}_n représente deux variétés planes à $l - 1$ dimensions imaginaires conjuguées génératrices de l'absolu. Par suite l'espace $\overline{\mathcal{E}}_n$ est l'espace des variétés planes à $l - 1$ dimensions génératrices de l'absolu. On peut aussi dire que c'est l'espace des translations orientées.

137. Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_n$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_n . — Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_n$ est formé de deux familles continues distinctes (n° 73), tandis que celui de \mathcal{E}_n est continu; le rapport $\frac{\overline{y}}{y}$ étant égal à 2, l'opération non identique du groupe de connexion de \mathcal{E}_n n'est pas un vrai déplacement de $\overline{\mathcal{E}}_n$. Pour l'obtenir, partons de la matrice Θ représentée par le sommet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$ du polyèdre (P).

On peut engendrer $\Theta^{\frac{1}{2}}$ par la transformation infinitésimale

$$Y = \frac{\pi}{2} (x_1 p_2 - x_2 p_1 - x_2 p_3 + x_3 p_2 + \dots \\ + x_{2l-3} p_{2l-1} - x_{2l-1} p_{2l-3} - x_{2l-2} p_{2l} + x_{2l} p_{2l-2});$$

elle s'écrit

$$\begin{array}{cccc} x'_1 & = -x_3, & x'_2 & = x_1, & x'_3 & = x_1, & x'_4 & = -x_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ x'_{2l-3} & = -x_{2l-1}, & x'_{2l-2} & = x_{2l}, & x'_{2l-1} & = x_{2l-3}, & x'_{2l} & = -x_{2l-2}, \end{array}$$

et elle transforme la forme

$$[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}]$$

dans la forme

$$-[x_1 x_2] - [x_3 x_4] - \dots - [x_{2l-1} x_{2l}],$$

ou encore la variété plane

$$(7) \quad x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \dots = x_{2l-1} + ix_{2l} = 0$$

dans la variété imaginaire conjuguée.

Pour obtenir la rotation \mathcal{R} qui, combinée avec la transvection Θ^1 , donne l'opération génératrice du groupe de connexion, remarquons que les variétés planes génératrices de l'absolu, voisines de la variété plane (7), sont données par un système d'équations

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 + ix_2 = & * & + a_{12}(x_3 - ix_4) + \dots + a_{1l}(x_{2l-1} - ix_{2l}), \\ x_3 + ix_4 = a_{21}(x_1 - ix_2) + & * & + \dots + a_{2l}(x_{2l-1} - ix_{2l}), \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ x_{2l-1} + ix_{2l} = a_{l1}(x_1 - ix_2) + a_{l2}(x_3 - ix_4) + \dots + & * & & & & & \end{array}$$

les coefficients a_{ij} étant symétriques gauches. La rotation \mathcal{R} est alors définie par les équations

$$a'_{ij} = (-1)^{+i} \bar{a}_{i'j'},$$

où l'on a désigné par i' le nombre précédant ou suivant immédiatement i suivant que i est pair ou impair.

On déduit facilement de là que l'espace \mathcal{S}_u est orientable.

138. *Remarque.* -- Si l'on porte son attention sur les congruences de Clifford (trajectoires des translations) orientées, ou encore sur les variétés planes génératrices de l'absolu, on voit que, dans tous les cas, elles forment deux ensembles connexes distincts (1). Si l est impair,

(1) Ce théorème est classique. Voir par exemple E. BERTINI, *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionalen Räume*, Chap. VI, n° 48, p. 142 (Vienne, Seidel, 1924).

chacun de ces ensembles est simplement connexe; deux congruences de Clifford opposées, ou deux variétés génératrices imaginaires conjuguées, appartiennent à des ensembles différents. Si l est pair, chacun des ensembles est aussi simplement connexe, mais deux congruences de Clifford opposées, ou deux variétés génératrices imaginaires conjuguées, appartiennent au même ensemble.

Le cas des types (D) de rang 4.

139. Nous avons supposé implicitement, dans tout ce qui concerne les espaces des types (DI), (DII) ou (DIII), que le rang l du groupe était différent de 4. Si $l=4$, le groupe adjoint mixte contient en effet 6 familles distinctes et non 2. Les nouvelles transformations du groupe adjoint mixte font correspondre à un point de l'espace elliptique à $2l-1=7$ dimensions un *parallélisme droit* ou un *parallélisme gauche* (1).

Si nous prenons d'abord les espaces du type (DII), les sous-groupes g isomorphes de g forment trois ensembles connexes distincts : celui des sous-groupes qui laissent invariant un point, celui des sous-groupes qui laissent invariant un parallélisme droit et celui des sous-groupes qui laissent invariant un parallélisme gauche.

Si nous prenons maintenant le type (DI), avec $p=6$, $q=2$, le groupe g laisse invariante une droite fixe; il lui correspond, par les quatre nouvelles familles de transformations du groupe adjoint mixte, les sous-groupes qui laissent invariante une congruence de Clifford droite et ceux qui laissent invariante une congruence de Clifford gauche (type DIII). Les deux types (DI) ($p=6$, $q=2$) et (DIII) donnent donc en réalité les mêmes espaces de Riemann, mais obtenus avec trois choix essentiellement distincts de l'élément générateur de l'espace.

Le type (DI) avec $p=5$, $q=3$ donnera aussi trois espaces de Riemann égaux, mais provenant de trois choix distincts de l'élément générateur de l'espace.

(1) E. CARTAN and J. A. SCHOUTEN, *On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 29, 1926, p. 11-13).

Quant au type (DI) avec $p = q = 4$, il ne donne qu'un seul espace de Riemann (avec quatre formes de Klein différentes). Le groupe d'isométrie de \mathcal{S}_n se confond avec le groupe adjoint mixte et contient 6 familles continues distinctes; celui de $\overline{\mathcal{S}}_n$ en contient 24 (n° 68); les autres formes de Klein donnent des groupes d'isométrie formés de 12 familles distinctes.

En résumé, il correspond au type (D) de rang 4 quatre ds^2 distincts, mais fournis par dix choix essentiellement différents de l'élément générateur de l'espace.

Les espaces du type (CI).

140. *Définition géométrique.* — On a

$$n = l(l+1), \quad s = l^2.$$

On peut prendre pour G le groupe linéaire simplement connexe d'une forme quadratique extérieure

$$F \equiv [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}]$$

et d'une forme d'Hermite

$$\Phi \equiv x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l}.$$

Le sous-groupe g est par exemple celui qui laisse invariante, dans l'espace projectif complexe à $2l-1$ dimensions, la variété plane à $l-1$ dimensions

$$(8) \quad x_1 = x_3 = \dots = x_{2l-1} = 0,$$

qui appartient au complexe linéaire $F = 0$; il laisse aussi invariante la variété polaire par rapport à la forme d'Hermite Φ , qui appartient aussi au complexe, à savoir

$$x_2 = x_4 = \dots = x_{2l} = 0.$$

Le groupe adjoint du type (C) étant continu, les sous-groupes g' isomorphes de g forment un ensemble connexe. L'espace \mathcal{S}_n est donc l'espace des couples de variétés planes à $l-1$ dimensions appartenant au complexe $F = 0$ et polaires l'une de l'autre par rapport à la forme d'Hermite Φ .

Toute variété du complexe voisine de la variété (8) aura ses équations de la forme

$$x_\alpha = \sum_{\rho} a_{\alpha\rho} x_{\rho'} \quad (\alpha = 1, 3, \dots, 2l-1),$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont symétriques et où α, ρ désignent des nombres impairs, α', ρ' les nombres pairs qui les suivent immédiatement. La variété polaire de la précédente est

$$x_{\alpha'} + \sum_{\rho} \bar{a}_{\alpha\rho} x_{\rho} = 0.$$

141. *Le rang et le polyèdre (P).* — Le rang de l'espace est l (n° 79); les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0.$$

Il contient, en dehors de l'origine, un sommet et un seul appartenant au réseau (R), à savoir $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$.

142. *L'espace simplement connexe $\bar{\mathcal{E}}_u$.* — D'après ce qui précède, l'espace $\bar{\mathcal{E}}_u$ est l'espace des variétés planes à $l-1$ dimensions appartenant au complexe; ces variétés forment donc un ensemble simplement connexe.

143. *Le groupe d'isométrie de $\bar{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u .* — Le groupe d'isométrie de \mathcal{E}_u est continu ($\nu = 1$), tandis que celui de $\bar{\mathcal{E}}_u$ contient $\bar{\nu} = 2$ familles continues distinctes (n° 81). L'opération non identique du groupe de connexion de \mathcal{E}_u n'est donc pas un vrai déplacement de $\bar{\mathcal{E}}_u$. Pour l'obtenir, déterminons une des transformations $\Theta^{\frac{1}{2}}$ dont le carré Θ soit représenté par le sommet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$

du polyèdre (P). On peut la définir par la transformation infinitésimale

$$\frac{\pi}{2}(x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 + \dots + x_{2l-1} p_{2l} - x_{2l} p_{2l-1});$$

elle s'écrit donc

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1, \quad \dots, \quad x'_{2l-1} = x_{2l}, \quad x'_{2l} = -x_{2l-1};$$

elle transforme la variété plane

$$x_1 = x_3 = \dots = x_{2l-1} = 0$$

dans la variété polaire par rapport à Φ

$$x_2 = x_4 = \dots = x_{2l} = 0.$$

En combinant la rotation \mathcal{R} qui consiste à remplacer les paramètres $a_{x\beta}$ par les paramètres conjugués $\bar{a}_{x\beta}$, avec la transvection $\Theta^{\frac{1}{2}}$, on obtient l'opération cherchée du groupe de connexion qui transforme chaque variété plane du complexe en sa polaire par rapport à Φ .

On constate facilement que l'espace \mathcal{E}_u est orientable ou non suivant que $\frac{l(l+1)}{2}$ est pair ou impair.

144. *Les variétés euclidiennes E_l et les géodésiques.* — On aura une variété euclidienne E_l en prenant le lieu des variétés planes

$$x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1 = 0, \quad x_3 \cos \theta_2 - x_4 \sin \theta_2 = 0, \quad \dots, \\ x_{2l-1} \cos \theta_l - x_{2l} \sin \theta_l = 0;$$

son ds^2 est

$$ds^2 = d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + \dots + d\theta_l^2.$$

Toute géodésique est congruente au lieu des variétés planes obtenues en faisant $\theta_x = a_x s$, les constantes a_x satisfaisant à la relation

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_l^2 = 1.$$

Les espaces du type (CII).

145. *Définition géométrique.* — Le groupe G étant le même, on a

$$n = 4pq, \quad s = p(2p+1) + q(2q+1),$$

avec

$$p + q = l.$$

Nous supposons $p \geq q$.

Le sous-groupe g est par exemple celui qui laisse invariante la variété plane à $2q - 1$ dimensions

$$(9) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{2p} = 0,$$

ainsi que la variété polaire de la précédente à la fois par rapport au complexe linéaire $F = 0$ et par rapport à la forme d'Hermite Φ

$$x_{2p+1} = \dots = x_{2p+2q} = 0.$$

L'espace \mathcal{E}_u est donc celui des couples de variétés planes à $2q - 1$ et $2p - 1$ dimensions polaires l'une de l'autre à la fois par rapport au complexe linéaire et par rapport à la forme d'Hermite.

Si $p > q$, on peut le définir aussi sans ambiguïté comme l'espace des variétés planes à $2q - 1$ dimensions admettant même variété polaire par rapport aux deux formes F et Φ .

Si l'on représente une variété plane voisine de la variété (9) par les équations

$$x_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2q} a_{\alpha\lambda} x_{2p+\lambda} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2p),$$

on devra avoir

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} a_{\alpha'\beta'},$$

en désignant par α' le nombre $\alpha + 1$ si α est impair et $\alpha - 1$ si α est pair.

146. *Le rang λ et le polyèdre (P).* — Le rang de l'espace λ est égal à q (n° 84), et les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm \varphi_i, \quad \pm \varphi_i \pm \varphi_j, \quad \pm \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, q).$$

Le polyèdre (P) est défini par les inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \dots > \varphi_q > 0,$$

Si $p > q$, aucun de ses sommets autres que l'origine n'appartient au réseau (R); l'espace \mathcal{E}_u est simplement connexe; son groupe d'isométrie est continu.

Si $p = q$, le sommet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ appartient au réseau (R). Il existe une forme simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$ distincte de \mathcal{E}_u .

147. *L'espace simplement connexe $\overline{\mathcal{E}}_u$ pour $p = q$.* — C'est évidemment l'espace des variétés planes à $2q - 1$ dimensions admettant même variété polaire par rapport aux deux formes F et Φ .

148. *Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ et le groupe de connexion de \mathcal{E}_u pour $p = q$.* — Le groupe d'isométrie de $\overline{\mathcal{E}}_u$ contient (n° 86) deux familles continues distinctes, tandis que celui de \mathcal{E}_u est continu. Le groupe de connexion de \mathcal{E}_u , d'ordre 2, admet une opération génératrice n'appartenant pas au groupe continu des déplacements de $\overline{\mathcal{E}}_u$. Pour l'obtenir calculons une des transformations $\Theta^{\frac{1}{2}}$ dont le carré Θ est représenté par le sommet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ du polyèdre (P). On peut la supposer engendrée par la transformation infinitésimale

$$\frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2p} (x_{\alpha} p_{2q+\alpha} - x_{2q+\alpha} p_{\alpha});$$

elle s'écrit donc

$$x'_{\alpha} = x_{2q+\alpha}, \quad x'_{2q+\alpha} = -x_{\alpha};$$

on voit qu'elle transforme la variété plane en sa polaire par rapport au complexe linéaire. La rotation \mathcal{R} qui, combinée avec la transvection $\Theta^{\frac{1}{2}}$, donne l'opération génératrice du groupe de connexion de \mathcal{E}_u , est celle qui remplace chaque coefficient $a_{\alpha\beta}$ par $\overline{a}_{\beta\alpha}$ ou $(-1)^{\alpha+\beta} a_{\beta\alpha}$.

On constate facilement que l'espace \mathcal{E}_u est orientable ou non suivant que q est pair ou impair.

149. *Les variétés euclidiennes E_q et les géodésiques.* — On aura une

variété euclidienne E_q en prenant le lieu des variétés planes

$$\begin{aligned} x_1 \cos \theta_1 - x_{2\rho+1} \sin \theta_1 = 0, & \quad x_2 \cos \theta_1 - x_{2\rho+2} \sin \theta_1 = 0, \\ x_3 \cos \theta_2 - x_{2\rho+3} \sin \theta_2 = 0, & \quad x_4 \cos \theta_2 - x_{2\rho+4} \sin \theta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots \\ x_{2q-1} \cos \theta_q - x_{2\rho+2q-1} \sin \theta_q = 0, & \quad x_{2q} \cos \theta_q - x_{2\rho+2q} \sin \theta_q = 0, \\ x_{2q+1} = \dots = x_{2\rho} = 0; & \end{aligned}$$

son ds^2 est

$$ds^2 = d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + \dots + d\theta_q^2.$$

Toute géodésique sera congruente à une de celles qu'on obtiendra en faisant $\theta_x = a_x s$, avec

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_q^2 = 1.$$

150. *L'espace à $4p$ dimensions de rang 1.* — Si l'on fait $q = 1$, on obtient un espace simplement connexe à $4p$ dimensions dont le rang est 1. Si l'on prend pour point origine celui qui représente la variété plane (droite) complexe Δ

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2\rho} = 0,$$

toute géodésique issue de ce point est fermée et partagée en deux parties égales par sa variété antipodique. Un des points de cette variété antipodique représente la droite

$$x_{2\rho+1} = x_{2\rho+2} = x_3 = \dots = x_{2\rho} = 0.$$

La variété antipodique est donc le lieu des droites Δ situées dans la variété plane polaire de Δ par rapport au complexe, à savoir

$$x_{2\rho+1} = x_{2\rho+2} = 0.$$

Elle est à $n - 4$ dimensions (réelles).

On le voit autrement en remarquant que les paramètres angulaires d'une transformation Y sont de la forme

$$\pm 2\varphi, \quad \pm \varphi,$$

multiples d'ordres 3 et $2p - 2$. Le sommet $\varphi = \frac{1}{2}$, qui correspond à un point de la variété antipodique de l'origine, a donc trois couples de

paramètres angulaires entiers; par suite la variété antipodique est à

$$n - \lambda - 3 = n - 4$$

dimensions.

Par deux points quelconques de \mathcal{E}_n il passe une géodésique et une seule, exception faite si le second est sur la variété antipodique du premier, auquel cas il passe par les deux points ∞^3 géodésiques. Dans le cas des deux points précédemment considérés, ces géodésiques sont données par les équations

$$\begin{aligned} x_1 + (\bar{a}x_{2\rho+1} + \bar{b}x_{2\rho+2}) \operatorname{tang} s = 0, & \quad x_2 + (ax_{2\rho+2} - bx_{2\rho+1}) \operatorname{tang} s = 0, \\ x_3 = \dots = x_{2\rho} = 0, \end{aligned}$$

où a et b sont deux paramètres complexes liés par la relation

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1$$

Les espaces des types exceptionnels.

151. D'après les indications données au n° 100, on voit facilement qu'il n'existe plusieurs formes de Klein que pour les types (EI), (EIV), (EV) et (EVII). Pour les deux premiers types, le groupe de connexion de \mathcal{E}_n est d'ordre 3; pour les deux derniers, il est d'ordre 2, l'opération génératrice n'étant pas un vrai déplacement de \mathcal{E}_n .

Un seul des espaces exceptionnels est de rang 1 (type FII); toutes ses géodésiques sont fermées; les géodésiques issues d'un point sont partagées en deux parties égales par la variété antipodique de ce point, qui est à $n - 8 = 8$ dimensions; par un point donné et un point pris sur sa variété antipodique, il passe ∞^7 géodésiques.

152. On peut remarquer que parmi les espaces \mathcal{E} à courbure positive, les seuls qui jouissent de la propriété que par deux points il passe une géodésique et une seule, *et cela sans exception*, sont les espaces elliptiques (à courbure constante); ils ne sont pas simplement connexes.

Les seuls espaces \mathcal{E} à courbure positive jouissant de la propriété que par deux points il passe *en général* une seule géodésique, sont les espaces de rang 1, qui appartiennent soit au type (AIII) (espaces her-

mitiens elliptiques), soit au type (BDI) (espaces à courbure constante), soit au type (CII), soit au type (FII).

Enfin nous avons constaté, chemin faisant, que toute géométrie de Klein, dont le groupe fondamental est un groupe simple unitaire, peut être de plusieurs manières rendue riemannienne (avec une courbure inaltérée par le transport parallèle) par un choix convenable de l'élément générateur de l'espace. *Le nombre de choix possibles essentiellement distincts est égal en général au nombre de formes réelles non unitaires distinctes de la structure simple considérée. Il y a exception si le groupe est du type (D) de rang pair supérieur ou égal à 6, auquel cas il faut augmenter ce nombre d'une unité.* Le cas du type (D) de rang 4 est tout à fait à part et a été examiné au n° 139; le cas des structures simples exceptionnelles est à réserver pour être étudié de plus près.

