BENIAMINO SEGRE

Les systèmes conjugués et autoconjugués d'espèce ν et leur transformation de Laplace

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 44 (1927), p. 153-212
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__153_0>

SYSTÈMES CONJUGUÉS ET AUTOCONJUGUÉS
D'ESPÈCE ν
ET
LEUR TRANSFORMATION DE LAPLACE

PAR M. BENIAMINO SEGRE

1. M. E. Bompiani, dans un remarquable Mémoire qui remonte à l'année 1922 [1], a introduit la très importante conception des doubles systèmes conjugués de courbes, d'espèce ν quelconque. Pour $\nu = 1$ on a les ordinaires systèmes conjugués : mais, tandis qu'une surface de E_n, dès que n dépasse 4, n'a pas en général aucun de ces derniers systèmes de courbes, elle contient toujours quelque système conjugué d'espèce ν suffisamment grande; bien plus, pour n impair et égal à $2\nu + 1$, l'un des deux systèmes ∞^1 de courbes peut être donné arbitrairement, et alors en conséquence on peut déterminer, et généralement de façon unique, un autre système ∞^1 qui, avec le premier, constitue un double système conjugué d'espèce ν.

La théorie des ordinaires systèmes conjugués porte de la manière la plus naturelle à considérer les systèmes d'*asymptotiques*, qui se présentent ainsi comme les systèmes autoconjugués de première espèce. De même — a observé Bompiani — sur les surfaces de E_5 les *lignes principales* de C. Segre paraissent comme les systèmes autoconjugués de deuxième espèce.

Dans la première partie de ce travail, je considère les systèmes autoconjugués d'espèce ν quelconque, dont je donne une définition directe. Après avoir donné quelques propriétés de ces systèmes et des doubles systèmes conjugués d'espèce ν, j'étends à ces systèmes

---

(1) E. BOMPIANI, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi* (*Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, 46, 1922, p. 91).

(pour les premiers exclu le cas $\nu = 1$) l'ordinaire et bien connue transformation de Laplace des doubles systèmes conjugués de la première espèce ([1]).

La traduction analytique de ces résultats fournit un procédé de transformation de certaines équations différentielles d'ordre quelconque $\nu + 1 \geqq 2$, procédé qui, pour $\nu = 1$, se réduit à la classique *méthode de Laplace* pour les équations différentielles du deuxième ordre. Ledit procédé est exposé dans la deuxième Partie. Avec tout cela, la belle théorie de M. Bompiani se trouve complétée dans quelques points essentiels.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Les systèmes autoconjugués d'espèce ν.

2. Considérons dans un hyperespace une surface Σ quelconque : les plans qui la touchent dans deux points infiniment voisins ont un point commun (présentent, comme dit S. Lie, la *vereinigte Lage*). Si donc nous prenons une courbe λ générique de Σ, et sur elle un point P, les plans qui touchent Σ en P et dans les $\nu - 1$ points de λ consécutifs à P, appartiendront à un espace Ξ dont la dimension ne surpasse pas 2ν. Nous supposons que la dimension n de l'espace d'appartenance de Σ soit

$$n \geqq 2\nu + 1, \tag{1}$$

et par conséquent la dimension de Ξ sera précisément 2ν.

On voit très aisément que l'espace Ξ contient toujours le E_ν osculateur à la courbe λ dans le point P, sans en contenir toutefois en général

---

([1]) *Cf.* G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e édition 1915, 2e partie, Livre IV, Chap. I et II, notamment les nos 329 et 335.

C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (*Atti R. Accad. delle Scienze di Torino*, t. 42, 1907, p. 1047; nos 16, 17, 18).

Quelques-unes des propositions démontrées dans le présent Mémoire, sont contenues dans la Note de l'auteur : *Généralisation de la transformation de Laplace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 183, 1926, p. 1248).

le $E_{\nu+1}$ osculateur. Et bien *une courbe λ de Σ, telle que dans chacun de ses points* P, *l'espace Ξ construit comme on a dit contient le relatif* $E_{\nu+1}$ *osculateur, s'appellera une courbe autoconjuguée d'espèce ν de Σ.*

Cette locution sera justifiée ensuite (n° 9). Cependant, dès à présent on voit bien qu'une courbe autoconjuguée de première espèce n'est autre chose qu'une *asymptotique*, tandis qu'une courbe autoconjuguée de deuxième espèce est simplement une *ligne principale* [1].

3. Pris dans le E_n ambiant des coordonnées projectives homogènes x_i (pour $i = 0, 1, \ldots, n$), soient $x = x(u, v)$ [2] les équations de Σ. Si λ est une courbe de Σ, d'équation $v = v(u)$, le $E_{\nu+1}$ osculateur à λ dans un de ses points $P(u, v)$ est l'espace qui joint les points

$$x, \quad \frac{dx}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{d^\nu x}{du^\nu}, \quad \frac{d^{\nu+1} x}{du^{\nu+1}}, \tag{2}$$

où, si pour abréger l'on pose

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k} \qquad \left(\text{en particulier : } \quad x^{i0} = \frac{\partial^i x}{\partial u^i}, \quad x^{00} = x\right),$$

on a

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = x^{10} + v' x^{01}, \\ \dfrac{d^2 x}{du^2} = x^{20} + 2 v' x^{11} + v'^2 x^{02} + v'' x^{01}, \\ \dfrac{d^3 x}{du^3} = x^{30} + 3 v' x^{21} + 3 v'^2 x^{12} + v'^3 x^{03} + 3 v''(x^{11} + v' x^{02}) + v''' x^{01}, \\ \dfrac{d^4 x}{du^4} = x^{40} + 4 v' x^{31} + 6 v'^2 x^{22} + 4 v'^3 x^{13} + v'^4 x^{04} \\ \qquad + 6 v''(x^{21} + 2 v' x^{12} + v'^2 x^{03}) + 3 v''^2 x^{02} + 4 v'''(x^{11} + v' x^{02}) + v^{(\mathrm{IV})} x^{01}, \\ \dfrac{d^5 x}{du^5} = x^{50} + 5 v' x^{41} + 10 v'^2 x^{32} + 10 v'^3 x^{23} + 5 v'^4 x^{14} + v'^5 x^{05} \\ \qquad + 10 v''(x^{31} + 3 v' x^{22} + 3 v'^2 x^{13} + v'^3 x^{04}) + 15 v'^2 (x^{12} + v' x^{03}) \\ \qquad + 10 v'''(x^{21} + 2 v' x^{12} + v'^2 x^{03} + v'' x^{02}) + 5 v^{(\mathrm{IV})}(x^{11} + v' x^{02}) + v^{(\mathrm{V})} x^{01}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

---

[1] *Cf.* C. SEGRE, *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese* (*Rendic. R. Accad. dei Lincei*, 5e série, t. XXX_1, p. 200, n° 3).

[2] Avec une convention qui s'explique de soi-même, ici et dans la suite, les indices inférieurs sont sous-entendus.

L'espace Ξ (dont au numéro précédent), relatif au point P de la courbe λ considérée, est l'espace qui joint les points

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x, & \dfrac{dx}{du}, & \ldots, & \dfrac{d^{\nu-1}x}{du^{\nu-1}}; \\ \dfrac{\partial}{\partial u}x, & \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{dx}{du}, & \ldots, & \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{d^{\nu-1}x}{du^{\nu-1}}; \\ \dfrac{\partial}{\partial v}x, & \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{dx}{du}, & \ldots, & \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{d^{\nu-1}x}{du^{\nu-1}}. \end{array}\right.$$

Or, on a

$$\frac{d^m x}{du^m} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{m-1}x}{du^{m-1}} + v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{d^{m-1}x}{du^{m-1}},$$

ce qui montre que les points (4) de la première ligne qui suivent le premier dépendent linéairement des restants, et par conséquent Ξ est bien en général de dimension 2ν. On voit, en outre, que l'espace Ξ contient généralement tous les points (2) sauf le dernier, et donc aussi le E_ν osculateur à λ en P, mais non le $E_{\nu+1}$ osculateur.

De ce qui précède, on conclut que si nous voulons que λ soit une courbe de Σ autoconjuguée d'espèce ν, il faut et il suffit que, pour $v = v(u)$, soit nulle la matrice suivante :

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} x, \quad \dfrac{\partial}{\partial u}x, \quad \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{dx}{du}, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{d^{\nu-1}x}{du^{\nu-1}}, \\ \qquad \dfrac{\partial}{\partial v}x, \quad \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{dx}{du}, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{d^{\nu-1}x}{du^{\nu-1}}, \quad \dfrac{d^{\nu+1}x}{du^{\nu+1}} \end{array}\right| \text{ (1)}.$$

4. La matrice (5) a $n+1$ lignes et $2\nu+2$ colonnes, et se réduit à un déterminant pour $n = 2\nu+1$. La précédente condition est donc équivalente à $n - 2\nu$ équations différentielles aux dérivées ordinaires, pour la même fonction inconnue $v = v(u)$; elle ne pourra être remplie si $n > 2\nu+1$, tant que la surface Σ donnée est *générique*. Bornons-nous donc pour le moment au cas où $n = 2\nu+1$. Dans ce cas, la surface Σ contient sûrement un nombre infini de courbes autoconjuguées d'espèce ν, c'est-à-dire les courbes intégrales de l'équation différentielle qu'on obtient en annulant le déterminant (5).

---

(1) Avec cette écriture, j'entends représenter la matrice dont les diverses lignes s'obtiennent en substituant, dans chacun des termes (5), à x les diverses coordonnées $x_i(u, v)$ (pour $i = 0, 1, \ldots, n$) du point P de Σ. En outre, on doit se rappeler que par hypothèse subsiste la (1).

Pour déterminer l'ordre de cette équation, remarquons d'abord que, pour $m \geqq 5$, on a

$$(6) \qquad \frac{d^m x}{du^m} = v^{(m)} \frac{\partial x}{\partial v} + m v^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{dx}{du} + \binom{m}{2} v^{(m-2)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{d^2 x}{du^2} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant seulement des dérivées de la $v(u)$ d'ordre inférieur à $m-2$. En effet, pour la dernière des équations (3), la (6) est vérifiée pour $m=5$, et alors on la démontre aisément pour $m>5$ quelconque, en appliquant la méthode d'induction complète. Si l'on se borne aux deux premiers termes, la (6) est valable aussi pour $m=3$ et $m=4$, comme il est évident d'après les (3). En supposant $\nu \geqq 4$ on a donc, pour ce qui précède,

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^{\nu+1} x}{du^{\nu+1}} = v^{(\nu+1)} \dfrac{\partial x}{\partial v} + (\nu+1) v^{(\nu)} \dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{dx}{du} + \dbinom{\nu+1}{2} v^{(\nu-1)} \dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{d^2 x}{du^2} + \ldots, \\ \dfrac{\partial}{\partial u} \dfrac{d^{\nu-1} x}{du^{\nu-1}} = v^{(\nu)} \dfrac{\partial x}{\partial v} + v^{(\nu-1)} [\nu x^{11} + (\nu-1) v' x^{02}] + \ldots, \\ \dfrac{\partial}{\partial v} \dfrac{d^{\nu-1} x}{du^{\nu-1}} = v^{(\nu-1)} x^{02} + \ldots, \\ \dfrac{\partial}{\partial u} \dfrac{d^{\nu-2} x}{du^{\nu-2}} = v^{(\nu-1)} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \ldots. \end{cases}$$

en n'écrivant que les termes qui contiennent les dérivées de la $v(u)$ d'ordre plus grand ou égal à $\nu-1$.

Dans le développement du déterminant (5), ces dernières dérivées peuvent seulement provenir des termes (7); on voit alors aisément que, à réductions faites, paraît seulement la dérivée d'ordre $\nu-1$, et *au premier degré*.

Pour $\nu = 1$, $n=3$, l'équation considérée, pour les (3), (5), s'écrit simplement

$$| x^{00} \quad x^{10} \quad x^{01} \qquad x^{20} + 2 v' x^{11} + v'^2 x^{02} | = 0,$$

et elle est l'équation différentielle des asymptotiques de la surface Σ de E_3.

Pour $\nu = 2$, $n=5$, ladite équation devient

$$| x^{00} \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{20} + v' x^{11} \quad x^{11} + v' x^{02} \quad x^{30} + 3 v' x^{21} + 3 v'^2 x^{12} + v'^3 x^{03} | = 0,$$

et elle est l'équation différentielle des lignes principales de la surface Σ de E_5.

De même pour $\nu = 3$, $n = 7$, elle devient

$$
\begin{aligned}
|\, & x^{00}, x^{10}, x^{01}, x^{20} + \varphi' x^{11}, x^{11} + \varphi' x^{02}, x^{30} + 2\varphi' x^{21} + \varphi'^2 x^{12} + \varphi'' x^{11}, \\
& x^{21} + 2\varphi' x^{12} + \varphi'^2 x^{03} + \varphi'' x^{02}, x^{40} + 4\varphi' x^{31} + 6\varphi'^2 x^{22} + 4\varphi'^3 x^{13} + \varphi'^4 x^{04} \\
& \qquad\qquad - 3\varphi''^2 x^{02} \,| = 0,
\end{aligned}
$$

et celle-ci est pour la $\varphi(u)$ une équation différentielle du deuxième ordre, *quadratique dans la* φ''.

Nous avons donc en conclusion :

Une surface Σ générique de E_n n'a pas de courbes autoconjuguées d'espèce ν si $n > 2\nu + 1$, tandis qu'elle en a un nombre infini si $n = 2\nu + 1$.

Les courbes autoconjuguées de première espèce sont les asymptotiques, et effectivement si $n = 3$ on en a deux systèmes ∞^1.

Les courbes autoconjuguées de deuxième espèce sur une surface de E_5 en sont les lignes principales, et l'on en a généralement cinq systèmes ∞^1.

Les courbes autoconjuguées de troisième espèce sur une surface de E_7 sont ∞^2, et l'on en a généralement deux qui passent par un point donné en y touchant une droite donnée.

Enfin une surface générique de $E_{2\nu+1}$ avec $\nu \geqq 4$, a $\infty^{\nu-1}$ courbes autoconjuguées d'espèce ν, dont on en a une et une seule qui contient un élément générique fixé $\mathcal{E}(\nu - 2)$ (1).

5. Nous appellerons *système autoconjugué d'espèce* ν, un quelconque système ∞^1 de courbes autoconjuguées d'espèce ν d'une surface Σ.

En conservant les notations du n° 3, si sur Σ on a un système autoconjugué d'espèce ν, nous pouvons prendre les courbes de ce système comme courbes $v = \text{const.}$ Dans ce cas les formules (3) se simplifient, en se réduisant manifestement à

$$\frac{d^m x}{du^m} = x^{m0},$$

et en conséquence la condition considérée à la fin du n° 3 s'écrit

$$|\, x, x^{10}, x^{20}, \ldots, x^{\nu 0}, x^{01}, x^{11}, \ldots, x^{\nu-1,1}, x^{\nu+1,0} \,| = 0. \tag{8}$$

(1) Avec cela nous entendons dire brièvement, que de la courbe cherchée on peut donner arbitrairement un point et les $E_1, E_2, \ldots, E_{\nu-2}$ qui doivent l'osculer dans ce point.

La (8) exige que les x_i doivent satisfaire à une même équation du type suivant :

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} A_{i0} x^{i0} + \sum_{i=0}^{\nu-1} A_{i1} x^{i1} = 0, \tag{9}$$

et inversement. Donc :

Afin qu'un système ∞^1 de courbes constitue sur une surface Σ un système autoconjugué d'espèce ν, il est nécessaire et suffisant que si l'on prend ces courbes comme lignes $v = const.$, les coordonnées projectives et homogènes $x_i(u, v)$ des points de Σ satisfassent à une même équation différentielle linéaire d'ordre $\nu + 1$ du type (9).

6. Ayant une courbe λ sur une surface Σ, considérons pour chaque point P de λ, l'espace $\Xi^\star$ qui contient les plans qui touchent Σ en P et (supposé $\nu \geqq 2$) dans les $\nu - 2$ points consécutifs à P sur λ. Pour ce que l'on a dit au n° 2, $\Xi^\star$ aura en général la dimension $2\nu - 2$, et sera joint à E_ν osculateur à λ en P par un espace $\Omega^\star$ *de dimension* $2\nu - 1$.

Construisons de même l'espace Ω qui joint le $E_{\nu+1}$ osculateur à λ en P avec l'espace Ξ déjà considéré au n° 2.

On voit très facilement que deux consécutifs des espaces $\Omega^\star$ sont dans un même espace Ω, et alors, en se rappelant la définition donnée au n° 2, on voit aisément que :

Si l'on a une courbe λ d'une surface Σ, construisons pour chacun de ses points P *les espaces $\Omega^\star$ et Ω qui joignent ordonnément le E_ν et le $E_{\nu+1}$ osculateurs à λ en* P, *avec les plans qui touchent Σ en* P *et respectivement dans les $\nu - 2$ et les $\nu - 1$ points consécutifs à* P *sur λ (avec $\nu \geqq 2$). On a alors les deux conditions suivantes — équivalentes entre elles — dont chacune est à la fois nécessaire et suffisante afin que la courbe λ de Σ soit autoconjuguée d'espèce ν :*

a. Les ∞^1 espaces $\Omega^\star$, relatifs aux divers points P *de λ sont les $E_{2\nu-1}$ osculateurs d'une même courbe que nous appellerons λ_{-1} ;*

b. Les ∞^1 espaces Ω, relatifs aux divers points P *de λ, ont seulement la dimension 2ν, et sont les $E_{2\nu}$ osculateurs de la même courbe λ_{-1}.*

II. — Les doubles systèmes conjugués d'espèce ν.

7. Suivant Bompiani, un *double système conjugué d'espèce* ν se compose de deux familles ∞^1 de courbes, φ' et φ'', tracées sur une même surface Σ, telles que si nous considérons un point P de Σ, l'espace $E_{2\nu}$ qui contient les plans qui touchent Σ dans les ν points consécutifs à P sur la courbe φ' de la première famille qui passe par ce point, a une droite en commun avec le plan tangent à Σ dans P, et cette droite est précisément la droite tangente en P à la courbe φ'' de la deuxième famille qui contient ce point (¹).

En se basant sur cette définition, on démontre très aisément les deux propriétés suivantes, dont chacune est à la fois nécessaire et suffisante pour que le système soit conjugué.

a. Les E_ν *osculateurs aux courbes de la première famille dans les points d'une même courbe* φ'' *de la deuxième, touchent une même courbe, que nous appellerons* φ''_1 (²).

b. Les droites tangentes aux courbes de la deuxième famille dans les points d'une courbe φ' *de la première forment une surface réglée dont le premier indice de développabilité est* ν (³), *c'est-à-dire que les génératrices de ladite surface sont dans les* E_ν *osculateurs d'une même courbe, que nous appellerons* φ'_{-1}.

8. Supposons qu'on ait sur une surface Σ de E_n un double système conjugué d'espèce ν de courbes (φ', φ''). Pris dans E_n des coordonnées projectives homogènes x_i, soient $x = x(u, v)$ les équations de Σ.

(¹) On doit bien remarquer que les deux familles du système (que je distingue par les adjectifs *première* et *deuxième*) n'ont pas pour $\nu > 1$ des rôles échangeables [*cf.* Mémoire cité dans la note (¹), § 3].

(²) Cette propriété peut être démontrée avec des simples considérations synthétiques : analytiquement elle découle des développements du numéro suivant (*voir* la note de la page 161).

(³) Pour la signification de cette locution et les propriétés qui s'y rapportent, *voir* E. Bompiani, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (*Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, t. 37, 1914, p. 305).

La propriété *b.* se trouve déjà dans le travail cité dans la note (¹), du paragraphe 4.

Nous pouvons toujours supposer qu'on ait les courbes φ' de la première famille pour lignes $v = \text{const.}$

Considérons deux points infiniment voisins de Σ

$$x = x(u, v); \qquad x^* = x(u + du, v + dv);$$

s'ils sont sur une même courbe φ'' de la deuxième famille, on a, pour la proposition (a) du n° 7, que les E_ν osculateurs dans ces points aux courbes φ' qui les contiennent doivent avoir un point commun. Cela s'exprime avec l'équation

$$|x^{00} \quad x^{10} \quad \ldots \quad x^{\nu-1,0} \quad x^{\nu 0} \quad x^{*00} \quad x^{*10} \quad \ldots \quad x^{*\nu-1,0} \quad x^{*\nu 0}| = 0.$$

Or, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on a

$$\begin{aligned} x^{*00} &= x^{00} + x^{10}\,du + x^{01}\,dv, \\ x^{*10} &= x^{10} + x^{20}\,du + x^{11}\,dv, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{*\nu 0} &= x^{\nu 0} + x^{\nu+1,0}\,du + x^{\nu 1}\,dv, \end{aligned}$$

et par conséquent la précédente condition s'écrit

$$(10) \quad |x^{00} \quad x^{10} \quad \ldots \quad x^{\nu-1,0} \quad x^{\nu 0} \quad x^{01} \quad x^{11} \quad \ldots \quad x^{\nu-1,1} \quad x^{\nu+1,0}\,du + x^{\nu 1}\,dv| = 0.$$

Si nous prenons les courbes φ'' de la deuxième famille comme courbes $u = \text{const.}$, la (10) doit être satisfaite en y faisant $du = 0$, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$|x^{00} \quad x^{10} \quad \ldots \quad x^{\nu-1,0} \quad x^{\nu 0} \quad x^{01} \quad x^{11} \quad \ldots \quad x^{\nu-1,1} \quad x^{\nu 1}| = 0 \text{ (1)}.$$

D'ici, on conclut :

Afin que deux familles ∞^1 de courbes φ' et φ'', tracées sur une même surface Σ, forment un double système conjugué d'espèce $\nu(\varphi', \varphi'')$, il est nécessaire et suffisant que, si l'on prend les φ' comme courbes $v = \text{const.}$, et les φ'' comme courbes $u = \text{const.}$, les coordonnées projectives homogènes des points de Σ satisfassent à une même équation différentielle linéaire

(1) On peut très aisément s'assurer qu'on parvient à cette même équation, en partant de la définition de Bompiani des doubles systèmes conjugués d'espèce ν.

d'ordre $\nu+1$, du type suivant :

$$(11) \qquad \sum_{i=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{1} A_{ik}x^{ik}=0.$$

9. Si $n=2\nu+1$, la première famille de courbes φ' peut être donnée arbitrairement sur Σ, et l'on peut toujours en conséquence déterminer la deuxième famille φ'', et généralement de façon unique. Cela résulte très bien de la (10) qui, dans ce cas-là, se réduit à une équation unique, qui est précisément l'équation différentielle des courbes φ''.

La famille φ'' ainsi déterminée peut néanmoins coïncider avec la famille donnée φ', si ladite équation différentielle se réduit à $dv=0$: cela arrive seulement si l'équation (8) est vérifiée, donc si cette famille constitue sur Σ un système autoconjugué d'espèce ν.

On voit par conséquent que *les systèmes autoconjugués d'espèce ν peuvent être considérés comme des systèmes doubles conjugués d'espèce ν, dont les deux familles de courbes sont confondues.*

III. — La transformation de Laplace des doubles systèmes conjugués d'espèce ν.

10. Reprenons les notations et les considérations développées au n° 7. En partant d'un système conjugué donné (φ', φ''), nous aurons deux autres familles ∞^1 de courbes φ''_1 et φ'_{-1} qui, à leur tour, constitueront en général deux nouvelles surfaces Σ_1 et Σ_{-1}.

Ces surfaces Σ_1 et Σ_{-1} seront respectivement appelées la première et la deuxième transformée de Laplace d'espèce ν de la surface donnée Σ.

11. Nous avons une correspondance biunivoque entre les deux surfaces Σ et Σ_1, en disant homologues deux points P de Σ et P_1 de Σ_1, lorsque le E_ν qui oscule en P la courbe φ' qui y passe, touche en P_1 la courbe φ''_1 qui contient ce point.

Appelons φ'_1 les courbes de Σ_1 homologues dans cette correspondance des courbes φ' de Σ. On a évidemment que les tangentes aux courbes φ''_1 dans les points d'une même courbe φ'_1 sont dans les E_ν

osculateurs de la courbe homologue φ'. Pour la proposition *b*. du n° 7, on en déduit que :

1° *Sur la surface Σ_1 les courbes $(\varphi'_1, \varphi''_1)$ forment un double système conjugué d'espèce ν, dont les φ'_1 sont les courbes de la première famille, et les φ''_1 celles de la deuxième ;*

2° *La surface Σ est la deuxième transformation de Laplace d'espèce ν de la Σ_1.*

12. Nous avons de même une correspondance biunivoque entre les deux surfaces Σ et Σ_{-1}, en disant homologues deux points P de Σ et P_{-1} de Σ_{-1}, lorsque la droite qui touche en P la courbe φ'' qui y passe est dans le E_ν qui oscule en P_{-1} la courbe φ'_{-1} qui contient ce point.

Appelons φ''_{-1} les courbes de Σ_{-1} homologues dans cette correspondance des courbes φ'' de Σ. On a évidemment que les E_ν osculateurs aux courbes φ'_{-1} dans les points d'une même courbe φ''_{-1} sont tangents à la courbe homologue φ''. Pour la proposition *a* du n° 7, on en déduit que :

1° *Sur la surface Σ_{-1} les courbes $(\varphi'_{-1}, \varphi''_{-1})$ forment un double système conjugué d'espèce ν, dont les φ'_{-1} sont les courbes de la première famille, et les φ''_{-1} celles de la deuxième ;*

2° *La surface Σ est la première transformée de Laplace d'espèce ν de la Σ_{-1}.*

13. Les deux sortes de transformations d'espèce ν que nous avons considérées dans les numéros précédents changent un système conjugué d'espèce ν encore en un système conjugué d'espèce ν. Les deux transformations pour $\nu > 1$ sont de nature essentiellement différente. Cependant, dans tous les cas, on a pour ce qui précède que :

Si l'on applique successivement à un système conjugué les deux *transformations de Laplace* (dans l'une ou bien dans l'autre des deux façons possibles) *on tombe toujours de nouveau sur le système conjugué initial.*

Un système conjugué d'espèce ν détermine en général une chaîne, *ouverte aux deux côtés, d'infinis systèmes analogues, à laquelle il appartient, et dans laquelle chaque système a pour consécutifs ses deux transformés de Laplace d'espèce* ν (¹).

IV. — La transformation de Laplace des systèmes autoconjugués d'espèce $\nu > 1$.

14. Soit donné, sur une surface Σ, un système autoconjugué de courbes λ, d'espèce $\nu > 1$. Prenons sur Σ deux points infiniment voisins quelconques P et P', qui soient seulement tels que les courbes λ et λ' dudit système qui les contiennent soient distinctes. L'espace Ξ qui contient les plans qui touchent Σ en P et dans les $\nu - 1$ points consécutifs à P sur λ contient le point P' et les $\nu - 1$ points de λ' consécutifs à P' : donc il contient le $E_{\nu-1}$ osculateur à λ' dans ce point. On a par conséquent que le $E_{\nu+1}$ osculateur à λ dans le point P, et le $E_{\nu-1}$ osculateur à λ' dans le point P', sont dans un même espace Ξ de dimension 2ν, ce qui exige qu'ils aient un point commun P'_1.

Considérons sur Σ un *autre* système quelconque de courbes ψ. Si nous prenons sur Σ un point quelconque P', soit P le point consécutif à P' sur la courbe ψ qui contient ce point : comme on vient de le voir on a en correspondance un certain point P'_1. Lorsque P' décrit la surface Σ le point P'_1 décrira en général une autre surface Σ_1. Soient λ_1 et ψ_1 les courbes de Σ_1 qui correspondent aux courbes λ et ψ de Σ.

15. Nous nous proposons d'étudier la correspondance définie au numéro précédent entre les points P' et P'_1 de Σ et Σ_1. On a par construction que :

Si P, P_1 *sont deux points homologues de* Σ, Σ_1, *l'espace* $E_{\nu-1}$ *osculateur en* P *à la courbe* λ *qui passe par ce point* contient *le point* P_1.

Lorsque P se meut sur une courbe λ, le point P_1 décrit la courbe homologue λ_1, donc le $E_{\nu+1}$ osculateur à λ dans le point P contient le

(¹) Bien entendu que tout cela est valable seulement *en général*. Les cas d'exception qui peuvent se présenter (et qui pourraient être étudiés en suivant cette voie) seront examinés avec l'instrument analytique dans la deuxième Partie de ce Mémoire.

plan osculateur à λ_1 en P_1, et par conséquent, en particulier, touche en P_1 la courbe λ_1. Mais, pour ce qui précède, ledit $E_{\nu+1}$ touche aussi en P_1 la courbe ψ_1 qui y passe, puisqu'il en contient le point consécutif P'_1 ; donc :

Si P, P_1 *sont deux points homologues de* Σ, Σ_1, *l'espace* $E_{\nu+1}$ *osculateur en* P *à la courbe* λ *qui passe par ce point* touche *en* P_1 *la surface* Σ_1.

16. Ce qui précède montre que la surface Σ_1, et même la correspondance définie naguère entre Σ et Σ_1, *ne dépendent nullement du système* ψ choisi sur Σ, mais seulement du système autoconjugué considéré. En effet, soit P un point quelconque de Σ. Prenons n'importe comment un point $P^\star$ de Σ, infiniment voisin de P ; soient λ et $\lambda^\star$ les courbes dudit système (que nous supposons distinctes) qui contiennent ces points. Si P_1 et $P^\star_1$ sont les points de Σ_1 (infiniment voisins) qui correspondent à P et $P^\star$, on a que le plan tangent à Σ_1 en $P^\star_1$ passe par P_1 : donc pour les propositions du numéro précédent, P_1 est le point commun à l'$E_{\nu+1}$ osculateur à λ en P, et à l'$E_{\nu+1}$ osculateur à $\lambda^\star$ en $P^\star$. Pour le n° 14 cela démontre l'assertion faite.

17. Pour ce qui précède et pour les propositions du n° 6, en partant du système autoconjugué de courbes λ donné sur Σ, nous avons deux autres familles ∞^1 de courbes, λ_1 et λ_{-1}, qui en général constitueront deux nouvelles surfaces Σ_1 et Σ_{-1}.

Ces surfaces Σ_1 *et* Σ_{-1} *seront respectivement appelées la première et la deuxième transformée de Laplace d'espèce* ν, *de la surface donnée* Σ.

18. Pour les propositions du n° 15, nous avons que, P et P_1 étant deux points homologues quelconques de Σ et Σ_1, l'espace $E_{2\nu}$ osculateur en P à la courbe λ qui passe par ce point contient le $E_{\nu+1}$ osculateur en P_1 à la courbe homologue λ_1, et en outre les plans qui touchent Σ_1 en P_1 et dans les $\nu - 1$ points qui suivent P_1 sur λ_1. Pour la proposition *b* du n° 6, on en déduit que :

1° *Sur la surface* Σ_1 *les courbes* λ_1 *forment elles aussi un système autoconjugué d'espèce* ν;

2° *La surface* Σ *est la deuxième transformée de Laplace d'espèce* ν *de la* Σ_1

19. Nous avons aussi une correspondance biunivoque entre Σ et Σ_{-1}, deux points P de Σ et P_{-1} de Σ_{-1} étant homologues, lorsque le $E_{2\nu}$ osculateur en P_{-1} à la courbe λ_{-1} qui passe par ce point contient le $E_{\nu+1}$ osculateur en P à la courbe λ correspondante, et en plus les plans qui touchent Σ en P et dans les $\nu - 1$ points qui suivent P sur λ. Il s'ensuit de là que le $E_{\nu-1}$ osculateur de la courbe λ_{-1} en P_{-1}, *contient* P, et de plus que le $E_{\nu+1}$ osculateur à cette courbe en P_{-1} *touche* la surface Σ en P. Si donc on considère sur Σ_{-1} un point générique P^*_{-1} infiniment voisin de P_{-1}, et la courbe λ^*_{-1} qui passe par ce point, on voit comme au n° 16 que le $E_{\nu-1}$ osculateur à λ_{-1} en P_{-1}, et le $E_{\nu+1}$ osculateur à λ^*_{-1} en P^*_{-1}, ont le point P commun. Cela démontre que :

1° *Sur la surface* Σ_{-1} *les courbes* λ_{-1} *forment, elles aussi, un système autoconjugué d'espèce* ν;

2° *La surface* Σ *est la première transformée de Laplace d'espèce* ν *de la* Σ_{-1}.

20. A ce point on voit qu'on peut répéter, pour les systèmes autoconjugués de courbes, tout ce qu'on a dit au n° 13 pour les doubles systèmes conjugués.

Remarquons de plus que pour le cas exclu $\nu = 1$, les deux transformations précédentes ne conduiraient pas à des nouveaux systèmes autoconjugués (¹).

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Généralités sur les équations $\mathcal{E}$ d'espèce ν.

21. En nous basant sur les théorèmes des n°s 8 et 5, nous pouvons

---

(¹) Cela n'arrive pas en général pour $\nu > 1$. On doit relever que, pour $\nu = 2$, on tire en particulier, des développements précédents, une très remarquable transformation des surfaces de E_5, en relation à leurs lignes principales.

dire qu'*une équation différentielle d'ordre* $\nu+1$, du type (11) ou bien du type (9), *représente* respectivement un système double conjugué ou bien un système autoconjugué d'espèce ν.

Pour abréger, nous appellerons *équation* $\mathfrak{L}$ *d'espèce* ν une telle équation; et nous dirons la (11) du *type hyperbolique*, et la (9) du *type parabolique*.

Les considérations géométriques développées dans la première Partie de ce travail, vont nous conduire à une très remarquable transformation des équations $\mathfrak{L}$ d'espèce ν [1].

22. Si dans les équations (11) ou bien (9) manque le terme avec la dérivée d'ordre le plus élevé $\nu+1$, l'une et l'autre se réduisent à une équation du type suivant :

$$A_{\nu 0}\, x^{\nu 0} + \sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1} A_{jk}\, x^{jk} = 0.$$

Dans cette équation, nous pouvons supposer que $A_{\nu 0}$ et $A_{\nu-1,1}$ ne soient pas nuls à la fois, car dans ce cas elle se réduirait à une équation du même type, mais dans laquelle, au lieu de ν, on a $\nu-1$.

Si un seul des coefficients $A_{\nu 0}$, $A_{\nu-1,1}$ est nul, l'équation donnée serait une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce $\nu-1$. Et bien, s'il est $A_{\nu 0}\neq 0$ et $A_{\nu-1,1}\neq 0$, on peut encore reconduire l'équation donnée à une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce $\nu-1$. Il suffit, en effet, de prendre des nouvelles variables :

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v),$$
$$\bar{v} = v,$$

en indiquant avec $\bar{u}$ une solution (non constante) de l'équation différentielle

$$A_{\nu 0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + A_{\nu-1,1}\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0.$$

---

[1] Pour $\nu=1$, ces équations sont les ordinaires équations de Laplace, et ladite transformation n'est autre chose que la bien connue *Méthode de Laplace*. Une équation $\mathfrak{L}$ du type parabolique a toutes ses caractéristiques confondues dans les $v=$ const. Une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν du type hyperbolique a comme caractéristiques les $v=$ const. comptées ν fois, et les $u=$ const. comptées une seule fois.

Si dans une équation $\mathcal{L}$ d'espèce ν manque le terme avec la dérivée d'ordre le plus élevé $\nu + 1$, on peut toujours reconduire l'équation donnée à une équation $\mathcal{L}$ d'espèce inférieure à ν.

Dorénavant, nous supposerons qu'une équation $\mathcal{L}$, d'espèce ν, soit toujours *effectivement* d'ordre $\nu + 1$.

23. D'après les théorèmes des nos 8 et 5, il est évident que si l'on a une équation $\mathcal{L}$ d'espèce ν, elle se transforme encore en une équation $\mathcal{L}$ d'espèce ν, si au lieu de la fonction inconnue x on prend αx, α étant une arbitraire fonction de u et de v.

Cela résulte aussi tout de suite analytiquement; puisque si l'on pose

$$x = \alpha \bar{x}, \tag{12}$$

il s'ensuit

$$\left\{\begin{array}{l} x^{i0} = \alpha \bar{x}^{i0} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les } \bar{x}^{i'0} \\ x^{i1} = \alpha \bar{x}^{i1} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les } \bar{x}^{i0}, \bar{x}^{i'0} \text{ et } \bar{x}^{i'1} \end{array}\right. \quad (i' < i). \tag{13}$$

De même si l'on a une équation $\mathcal{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique, si l'on change les variables en posant

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(u), \\ \bar{v} = \bar{v}(v), \end{array}\right. \tag{14}$$

la nouvelle variable $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = x(u, v)$ satisfait encore à une équation du même genre. Analytiquement, il suffit de remarquer que, pour les (14), on a

$$\left\{\begin{array}{l} x^{i0} = \left(\dfrac{d\bar{u}}{du}\right)^i \bar{x}^{i0} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les } \bar{x}^{i'0} \\[2ex] x^{i1} = \left(\dfrac{d\bar{u}}{du}\right)^i \dfrac{d\bar{v}}{dv} \bar{x}^{i1} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les } \bar{x}^{i'1} \end{array}\right. \quad (i' < i). \tag{15}$$

Pour les équations $\mathcal{L}$ du type parabolique on peut, au lieu des (14), effectuer le groupe plus ample de transformations

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(u, v) \\ \bar{v} = \bar{v}(v) \end{array}\right. \tag{16}$$

qui se *prolonge* de la manière suivante :

$$(17)\quad \begin{cases} x^{i0} = \left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^{i} \bar{x}^{i0} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les } \bar{x}^{i'0} \\ x^{i1} = \left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^{i} \dfrac{d\bar{v}}{dv} \bar{x}^{i1} + \text{des termes du } \textit{premier degré} \text{ dans les} \\ \qquad\qquad \bar{x}^{i+1,0},\ \bar{x}^{i0},\ \bar{x}^{i'0} \text{ et } \bar{x}^{i'1} \end{cases} \quad (i' < i).$$

Deux équations $\mathfrak{L}$ de même genre, qu'on peut obtenir l'une de l'autre avec une des transformations (12), (14) *ou* (16), *seront dites* équivalentes *entre elles* [1].

II. — La première transformation de Laplace des équations $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique.

24\. Soit donnée une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique

$$(18)\qquad \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{1} A_{ik} x^{ik} = 0;$$

nous supposerons — comme il est permis d'après le n° 22 — qu'on ait

$$(19)\qquad A_{\nu 1} = 1,$$

et, pour abréger, nous désignerons l'équation (18) par la lettre (E).

Tâchons de déterminer des quantités

$$b_{000},\quad b_{100},\quad \ldots,\quad b_{\nu 00},$$

qui ne soient pas toutes nulles, et telles que si l'on pose

$$(20)\qquad y = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\lambda 00} x^{\lambda 0},$$

[1] Ici se poserait la question de savoir s'il est possible de *caractériser* les équations $\mathfrak{L}$ équivalentes entre elles, avec un nombre suffisant *d'invariants différentiels*. Nous n'aborderons pas ce sujet-là, quoique dans la suite nous aurons occasion de considérer des tels invariants.

on ait *en conséquence de la* (18), c'est-à-dire chaque fois que x est une solution de l'équation (E),

$$(21) \qquad y^{01} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\lambda 01} x^{\lambda 0},$$

où les $b_{\lambda 01}$ sont des fonctions convenables de u et v.

En éliminant la y entre les (20), (21), et en mettant à la place de $x^{\nu 1}$ la valeur fournie par la (18), on obtient

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} (b_{\lambda 01} - b_{\lambda 00}^{01} + b_{\nu 1} A_{\lambda 0}) x^{\lambda 0} - \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} (b_{\lambda 00} - b_{\nu 00} A_{\lambda 1}) x^{\lambda 1} = 0,$$

et pour cela on doit avoir

$$(22) \qquad b_{\lambda 00} - b_{\nu 00} A_{\lambda 1} = 0 \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

$$(23) \qquad b_{\lambda 01} - b_{\lambda 00}^{01} + b_{\nu 00} A_{\lambda 0} = 0 \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Les (22), en tenant présente la (19), fournissent

$$(24) \qquad b_{\lambda 00} = \alpha A_{\lambda 1} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \nu),$$

α étant un facteur arbitraire et non nul de proportionnalité. Donc, en posant

$$(25) \qquad y = \alpha \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{\lambda 1} x^{\lambda 0},$$

si x vérifie la (E), on a la relation (21), où les $b_{\lambda 01}$ sont données par les (23) en tenant compte des (24).

Supposons inversement que soient valables les (20), (21), dans lesquelles les $b_{\lambda 00}$, $b_{\lambda 01}$ soient déterminées d'après les (24), (23). Si les $x^{\lambda 0}$ sont telles que $x^{\lambda 0} = \frac{\partial^\lambda x}{\partial u^\lambda}$, et si l'on a $y^{01} = \frac{\partial y}{\partial v}$, on voit tout de suite que la x est une solution de l'équation (E).

25. En dérivant $1, 2, \ldots, \nu - 1$ fois par rapport à u les égalités (20) et (21), nous obtenons

$$(26) \qquad y^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{\nu+j} b_{\lambda jk} x^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right),$$

dans lesquelles les coefficients $b_{\lambda jk}$ se calculent de proche en proche, en partant des $b_{\lambda 0k}$, avec les formules suivantes :

$$b_{\lambda jk} = b_{\lambda-1,\,j-1,\,k} + b^{10}_{\lambda,\,j-1,\,k}, \tag{27}$$

où pour $\lambda = 0$ on doit prendre $b_{-1,\,j-1,\,k} = 0$, et pour $\lambda = \nu + j$ on doit prendre $b_{\nu+j,\,j-1,\,k} = 0$, et donc on a

$$b_{\nu+j,\,j,\,k} = b_{\nu+j-1,\,j-1,\,k}. \tag{28}$$

Pour plus de symétrie, nous écrirons les formules (20), (21) et (26) sous la forme suivante :

$$y^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} b_{\lambda jk}\, x^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, \nu-1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right), \tag{29}$$

où l'on doit prendre

$$b_{\lambda jk} = 0 \qquad \text{pour } \lambda > \nu + j. \tag{30}$$

26. Dans ce numéro, nous nous bornerons à considérer les équations (26) ou (29) pour $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mu,\ (\mu \leqq \nu - 1)$, $k = 0,\ 1$, les coefficients $b_{\lambda jk}$ ayant été déterminés comme on l'a dit plus haut. Supposons que les $x^{\lambda 0}$ soient des fonctions *quelconques*, et que les y^{jk} soient telles que

$$y^{jk} = \frac{\partial^{j+k} y}{\partial u^j \partial v^k}.$$

Si ces quantités vérifient lesdites équations, on a

$$\left.\begin{aligned} y^{jk} &= \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu} b_{\lambda jk}\, x^{\lambda 0} \\ y^{j-1,\,k} &= \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu} b_{\lambda,\,j-1,\,k}\, x^{\lambda 0} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

et par suite, puisque $y^{jk} = \dfrac{\partial}{\partial u} y^{j-1,\,k}$, on en déduit en tenant compte des (27) :

$$\sum_{=0}^{\nu+\mu} b_{\lambda,\,j-1,\,k} \frac{\partial}{\partial u} x^{\lambda 0} - \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu} b_{\lambda-1,\,j-1,\,k}\, x^{\lambda 0} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(31)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu-1} b_{\lambda,j-1,k}\left(\frac{\partial}{\partial u}x^{\lambda 0}-x^{\lambda+1,0}\right)=0 \qquad \left(\text{pour}\ \begin{matrix} j=1,2,\ldots,\mu \\ k=0,1,\end{matrix}\right).$$

27. Les (29) sont 2ν équations linéaires non homogènes dans les 2ν quantités $x^{\lambda,0}$ (pour $\lambda=0, 1, \ldots, 2\nu-1$) [1]. Nous avons deux cas essentiellement divers, suivant que le déterminant des coefficients

$$(32)\qquad B=\begin{vmatrix} b_{000} & b_{100} & b_{200} & \ldots & b_{2\nu-1,00} \\ b_{001} & b_{101} & b_{201} & \ldots & b_{2\nu-1,01} \\ b_{010} & b_{110} & b_{210} & \ldots & b_{2\nu-1,10} \\ b_{011} & b_{111} & b_{211} & \ldots & b_{2\nu-1,11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{0,\nu-1,0} & b_{1,\nu-1,0} & b_{2,\nu-1,0} & \ldots & b_{2\nu-1,\nu-1,0} \\ b_{0,\nu-1,1} & b_{1,\nu-1,1} & b_{2,\nu-1,1} & \ldots & b_{2\nu-1,\nu-1,1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro ou bien est nul.

Supposons d'abord $B\neq 0$. — Dans ce cas, on peut résoudre le système (29), et l'on obtient

$$(33)\qquad x^{\lambda 0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1} C_{\lambda jk}\,y^{jk} \qquad (\lambda=0,1,\ldots,2\nu-1),$$

où

$$(34)\qquad C_{\lambda jk}=\frac{B_{\lambda jk}}{B}$$

en indiquant avec $B_{\lambda jk}$ le complément algébrique de $b_{\lambda jk}$ dans le déterminant (32).

Considérons la matrice constituée par les $2\nu-2$ premières lignes de ce déterminant : à cause de l'hypothèse faite, elle sera différente de zéro; or, les éléments de sa dernière colonne [pour les (30)] sont tous nuls, et par suite un au moins de ses mineurs d'ordre $2\nu-2$ qui ne contiennent pas cette colonne sera différent de zéro, par exemple le

---

[1] Nous penserons ces équations rangées dans l'ordre qu'on a en donnant successivement aux indices j, k les valeurs : $0,0$; $0,1$; $1,0$; $1,1$; $\ldots$; $\nu-1,0$; $\nu-1,1$.

mineur Δ qu'on obtient en y supprimant cette colonne et la colonne qui correspond à la valeur λ' de l'indice $\lambda (0 \leqq \lambda' \leqq 2\nu - 2)$. Si alors nous considérons le déterminant $B_{\lambda', \nu-1, 1}$ on démontre aisément qu'il est différent de zéro; en effet, on voit en le développant suivant la dernière colonne qu'il vaut $b_{2\nu-1, \nu-1, 0} \cdot \Delta$, et pour les (28), (24), on a

$$b_{2\nu-1, \nu-1, 0} = b_{\nu 0 0} = \alpha \neq 0.$$

Cela posé, prenons parmi les (33) les deux équations suivantes :

$$x^{\lambda' 0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} C_{\lambda' j k} y^{jk},$$

$$x^{\lambda'+1, 0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} C_{\lambda'+1, j, k} y^{jk},$$

et exprimons qu'il est

$$\frac{\partial}{\partial u} x^{\lambda' 0} - x^{\lambda'+1, 0} = 0. \tag{35}$$

On obtiendra une équation de la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{1} \Phi_{ik} y^{ik} = 0, \tag{36}$$

c'est-à-dire que *y devra satisfaire à une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique*. On doit remarquer que dans la (36) paraît effectivement le terme avec la dérivée d'ordre $\nu + 1$, puisque pour ce qui précède, on a

$$\Phi_{\nu, 1} = C_{\lambda', \nu-1, 1} = \frac{B_{\lambda', \nu-1, 1}}{B} \neq 0.$$

28. Avant de procéder, il sera bien que nous démontrions que des équations (33), on ne peut pas tirer *deux équations différentes* du type (36). En effet, étant rappelé d'abord que les (33) sont *équivalentes* aux (29), commençons par déduire des (29), avec une nouvelle dérivation, les équations suivantes :

$$y^{ik} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu} b_{\lambda i k} x^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, \nu \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right). \tag{37}$$

Celles-ci sont $2\nu+2$ équations linéaires dans les $2\nu+1$ quantités $x^{00}, x^{10}, \ldots, x^{2\nu,0}$, et l'on voit aisément que (puisque $B \neq 0$) *la matrice des coefficients est différente de zéro*. Si alors nous remarquons que les quantités $x^{\lambda 0}$ sont entre elles linéairement indépendantes [1], on a tout de suite qu'il y a entre les y^{jk} *une et une seule* liaison linéaire, qu'on peut obtenir sous forme de déterminant en éliminant les $x^{\lambda 0}$ entre les (37).

L'équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν à laquelle doit satisfaire la fonction y sera appelée *la première transformée de Laplace de l'équation* (E).

Nous aurons un nombre infini de premières transformées de Laplace, puisque la fonction y peut prendre un nombre infini de déterminations; mais, comme pour la (25) toutes ces déterminations s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles par une fonction arbitraire de u, v, on a que *toutes les premières transformées de Laplace, d'une équation $\mathfrak{L}$ donnée, sont équivalentes entre elles*, au sens donné à ce mot au nº 23. On peut fixer *une* de ces équations transformées, en fixant la fonction α qui paraît dans les formules (24) et (25), par exemple en prenant $\alpha = 1$.

29. Nous allons maintenant démontrer que :

L'intégration de l'équation (E) *est parfaitement équivalente à celle de sa première transformée de Laplace* (36) : *précisément à toute solution x de la première, correspond une solution y de la seconde, qu'on calcule avec la* (20); *et à toute solution y de cette dernière équation, correspond une solution x de l'équation donnée, qu'on calcule avec la formule*

$$x = x^{00} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} C_{0jk}\, y^{jk}.$$

La première partie de cette proposition résulte sans plus de ce que nous avons dit aux nºs 24 et 27.

Pour la deuxième partie, nous allons démontrer d'abord que si y est

---

[1] En effet, la x doit *uniquement* satisfaire à l'équation (E), et de celle-ci on ne peut tirer, comme conséquence, aucun lien linéaire entre les seules $x^{\lambda 0}$.

une solution de la (36), les $x^{\lambda 0}$ qu'on calcule d'après les (33), en y faisant

$$y^{jk} = \frac{\partial^{j+k} y}{\partial u^j \partial v^k}, \tag{38}$$

sont telles que

$$x^{\lambda 0} = \frac{\partial^\lambda x^{00}}{\partial u^\lambda}. \tag{39}$$

En effet, les valeurs ainsi déterminées pour les y^{jk} et pour les $x^{\lambda 0}$ vérifient les (33) et donc aussi les (29). Puisque les y^{jk} satisfont aux (38), on a, d'après le n° 26, que les quantités

$$\varphi_\lambda = \frac{\partial}{\partial u} x^{\lambda 0} - x^{\lambda+1,0} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu - 2)$$

vérifient les équations (31) dans lesquelles $\mu = \nu - 1$. Or, comme y est une solution de la (36), on a pour la (35) que $\varphi_\nu = 0$. Les (31) sont ainsi $2\nu - 2$ équations linéaires homogènes dans les $2\nu - 2$ quantités φ_λ restantes : puisque le déterminant des coefficients est précisément le déterminant Δ qu'on a supposé différent de zéro (n° 27), ainsi il s'ensuit que toutes les expressions φ_λ doivent être nulles, ce qui démontre bien que les équations (39) sont vérifiées.

Effectivement, donc, les valeurs déterminées comme on a dit pour les y^{jk} et pour les $x^{\lambda 0}$ vérifient les (29) [et par suite, en particulier, les (20), (21)] et en outre les (38), (39); pour ce que nous avons dit à la fin du n° 24, la $x = x^{00}$ doit être une solution de l'équation (E).

30. *Supposons maintenant* $B = 0$. — Ce cas se présente si, par exemple, *la matrice* M_2 formée avec les deux premières lignes de B *est nulle*. Nous dirons alors que *l'équation donnée est* ν *fois particularisée*.

Dans cette hypothèse, on peut éliminer les $x^{\lambda 0}$ entre les (20), (21), et l'on obtient ainsi une relation telle que

$$y^{01} + \omega y = 0, \tag{40}$$

où ω est une fonction déterminée de u, v. La (21) est une conséquence des (40), (20); donc, pour ce que nous avons dit au n° 24, *dans ce cas, on obtient toutes et seules les solutions* x *de l'équation* (E), *en inté-*

grant successivement les équations (40), (20) *linéaires, aux dérivées ordinaires, respectivement d'ordre* 1 *et* ν.

31. Considérons les matrices M_2, M_4, ..., $M_{2\nu}$, formées avec les premières 2, 4, ..., 2ν lignes de B. Si nous excluons le cas (déjà étudié au numéro précédent) où M_2 est nulle, puisque par hypothèse $B = 0$, nous aurons dans la série précédente une matrice $M_{2\mu}$ telle que, $M_{2\mu}$ étant différente de zéro, la matrice $M_{2\mu+2}$ soit nulle (avec $1 \leqq \mu \leqq \nu - 1$). Nous dirons alors *que l'équation donnée est* $\nu - \mu$ *fois particularisée*.

Dans cette hypothèse, l'on voit aisément que la matrice $M_{2\mu+1}$ formée avec les premières $2\mu + 1$ lignes de B n'est pas nulle, puisque tous les termes $b_{\nu+\mu,jk}$ de la $(\nu + \mu + 1)^{\text{ième}}$ colonne sont nuls d'après la (30), sauf $b_{\nu+\mu,\mu,0}$ qui est différent de zéro [puisque pour les (28), (24), il vaut α].

Si donc nous considérons les équations (29) pour $j = 0, 1, \ldots, \mu$ et $k = 0, 1$, on pourra entre elles éliminer toutes les $x^{\lambda 0}$ puisque $M_{2\mu+2} = 0$, et obtenir ainsi une relation de la forme

$$\sum_{j=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{1} \omega_{jk} y^{jk} = 0, \tag{41}$$

dans laquelle figure effectivement le terme en $y^{\mu 1}$, puisque $M_{2\mu+1} \neq 0$. La (41) est une conséquence algébrique des $2\mu + 2$ équations considérées; inversement, en tenant compte de l'observation qu'on vient de faire, on voit qu'il suffit que soient vérifiées la (41) et les premières $2\mu + 1$ de ces équations pour que soit aussi vérifiée la dernière de ces équations.

Considérons les équations

$$y^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu-1} b_{\lambda jk} x^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, \mu - 1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right); \tag{42}$$

puisque nous verrons dans la suite que le déterminant

$$\Delta_{\nu\mu} = \begin{vmatrix} b_{\nu-\mu,0,0} & b_{\nu-\mu+1,0,0} & \ldots & b_{\nu+\mu-1,0,0} \\ b_{\nu-\mu,0,1} & b_{\nu-\mu+1,0,1} & \ldots & b_{\nu+\mu-1,0,1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{\nu-\mu,\mu-1,1} & b_{\nu-\mu+1,\mu-1,1} & \ldots & b_{\nu+\mu-1,\mu-1,1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra résoudre le système (42) par rapport aux quantités $x^{\nu-\mu,0}$, $x^{\nu-\mu+1,0}$, ..., $x^{\nu+\mu-1,0}$; en particulier l'expression de $x^{\nu-\mu,0}$ sera de la forme

$$x^{\nu-\mu,0}=\sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu-1} m_\lambda x^{\lambda 0}+\sum_{j=0}^{\mu-1}\sum_{k=0}^{1} n_{jk}y^{jk}. \tag{43}$$

32. Nous allons maintenant démontrer que :

On obtient toutes et seules les solutions x de l'équation (E), *en intégrant successivement les équations* (41) *et* (43), *dont la première est une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce μ, et la seconde est une équation linéaire non homogène aux dérivées ordinaires, d'ordre $\nu-\mu (0 \leqq \mu \leqq \nu-1)$.*

Pour ce qui précède on a tout de suite que, si x est une solution quelconque de (E), et si y est la fonction fournie en correspondance par la (20), ces deux fonctions doivent vérifier les (41), (43).

Inversement, soient x et y deux fonctions qui satisfassent à ces dernières équations. Définissons les y^{jk} et les $x^{\lambda 0}$ avec les

$$y^{jk}=\frac{\partial^{j+k}y}{\partial u^j\partial v^k}\qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j=0,1,\ldots,\mu \\ k=0,1\end{matrix}\right),$$

$$x^{\lambda 0}=\frac{\partial^\lambda x}{\partial u^\lambda}\qquad (\text{pour } \lambda=0,1,\ldots,\nu-\mu-1), \tag{44}$$

et substituons ces valeurs dans les (42). Ces équations détermineront les $x^{\nu-\mu,0}$, $x^{\nu-\mu+1,0}$, ..., $x^{\nu+\mu-1,0}$, et, puisque la $x^{\nu-\mu,0}$ est donnée par la (43), on aura

$$x^{\nu-\mu,0}=\frac{\partial^{\nu-\mu}x}{\partial u^{\nu-\mu}}. \tag{45}$$

Cela posé, considérons les équations (29) pour $j=0,1,\ldots,\mu$ et $k=0,1$: elles sont $2\mu+2$ équations dont les premières 2μ sont précisément les (42), qui sont vérifiées si l'on prend pour les y^{jk} et pour x^{00}, x^{10}, ..., $x^{\nu+\mu-1,0}$ les valeurs susdites. La $(2\mu+1)^{\text{ième}}$ de ces équations déterminera alors la $x^{\nu+\mu,0}$ (qui y paraît avec un coefficient $b_{\nu+\mu,\mu,0}\neq 0$). Puisque, par hypothèse, les y^{jk} vérifient la (41), on a, pour ce que nous avons dit au n° 31, que les y^{jk} et les $x^{\lambda 0}$ ainsi déterminées vérifieront *toutes* les $2\mu+2$ équations considérées.

Je dis que les $x^{\lambda 0}$ ne sont autre chose que

$$(46)\qquad x^{\lambda 0} = \frac{\partial^\lambda x}{\partial u^\lambda} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \nu + \mu).$$

En effet, pour ce qu'on a démontré au n° 26, ces quantités doivent satisfaire aux équations (31). Celles-ci sont 2μ équations dans les expressions suivantes :

$$\varphi_\lambda = \frac{\partial}{\partial u} x^{\lambda 0} - x^{\lambda+1, 0} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \nu + \mu - 1).$$

Les (44) et la (45) montrent que ces expressions sont nulles pour

$$\lambda = 0, 1, \ldots, \nu - \mu - 1,$$

et par conséquent les équations (31) se réduisent à 2μ équations linéaires homogènes dans les 2μ expressions φ_λ restantes. Puisque le déterminant des coefficients est précisément le déterminant non nul $\Delta_{2\mu}$ du n° 31, ainsi il s'ensuit que *toutes* les expressions φ_λ doivent être nulles, ce qui démontre bien que les équations (46) sont vérifiées.

On voit alors tout de suite — comme à la fin du n° 29 — que la fonction x considérée est effectivement une solution de l'équation (E).

33. Il nous reste encore à démontrer que le déterminant $\Delta_{2\mu}$ considéré au n° 31 n'est pas nul. Supposons par l'absurde $\Delta_{2\mu} = 0$; on pourra entre les équations (42) éliminer les 2μ quantités $x^{\nu-\mu, 0}$, $x^{\nu-\mu+1, 0}$, ..., $x^{\nu+\mu-1, 0}$, et dans le résultat de l'élimination paraîtront effectivement quelques-unes des x^{00}, x^{10}, ..., $x^{\nu-\mu-1, 0}$, puisque par hypothèse on a $M_{2\mu} \neq 0$. On déduira donc des (42) une relation du type suivant :

$$(47)\qquad x^{\nu-\mu', 0} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu'-1} p_\lambda x^{\lambda 0} + \sum_{j=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{1} q_{jk} y^{jk} \qquad (\text{avec } \mu' > \mu).$$

Aux n^{os} 24 et 25 nous avons vu que, si x est une *solution quelconque* de l'équation (E), et si l'on définit la fonction y avec la (20), ces deux fonctions x et y satisfont aux équations (29). De ces équations on a tiré dans les hypothèses actuelles la relation (41) entre les seules y^{jk}; au contraire, on ne doit pas pouvoir tirer d'elles aucune relation linéaire et homogène entre *les seules* $x^{\lambda,0}$, puisqu'une telle relation ne peut pas évidemment être *une conséquence* de l'équation (E).

Cela posé, dérivons l'équation (47) par rapport à u, et dans le résultat éliminons la $y^{\mu,1}$ au moyen de la (41). Je dis qu'avec cela disparaît aussi la $y^{\mu,0}$: en effet, dans le cas contraire on obtiendrait une équation entre *les seules* $x^{\lambda,0}$ en exprimant dans la relation obtenue les y^{jk} au moyen des (29); et cette équation linéaire et homogène dans les $x^{\lambda,0}$ ne serait pas une identité, puisque la $x^{\nu+\mu,0}$, qui provient *seulement* du terme en $y^{\mu,0}$, y paraîtrait effectivement. On obtient donc une relation du même genre que la (47), sauf que $\nu-\mu'$ est remplacé par $\nu-\mu'+1$. A celle-ci on peut appliquer le même raisonnement de tout à l'heure, et ainsi de suite; et l'on voit ainsi que comme conséquence des équations (29) on a des relations du type suivant

$$x^{\sigma,0}=\sum_{\lambda=0}^{\sigma-1}p_{\lambda,\sigma}x^{\lambda,0}+\sum_{j=0}^{\mu-1}\sum_{k=0}^{1}q_{jk,\sigma}y^{jk} \tag{48}$$

pour

$$\sigma=\nu-\mu',\ \nu-\mu'+1,\ \ldots,\ \nu+\mu-1.$$

Les (48) sont en nombre de $\mu+\mu'$ et, par conséquent, on peut éliminer, entre un certain nombre d'entre elles, les 2μ quantités y^{jk} qui y figurent (puisque $\mu'>\mu$). On aurait donc ainsi (au moins) une relation linéaire et homogène entre les seules $x^{\lambda,0}$; et cette relation ne serait certainement pas une identité, puisque dans chacune des (48) figure une $x^{\lambda,0}$ qui ne paraît pas dans les équations qui la précèdent.

Pour une remarque que nous avons faite plus haut, ce résultat constitue un absurde; ce qui démontre qu'effectivement on doit avoir $\Delta_{2\mu}\neq 0$.

En résumant les principaux résultats obtenus jusqu'à présent dans ce paragraphe, nous pouvons dire que :

Lorsqu'on a une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique, on a deux cas, suivant que le déterminant B *du n° 27 est différent de zéro, ou bien est nul.*

Si $B \neq 0$, *ce qui sera le cas général, on peut considérer une autre équation* $\mathfrak{L}$ *d'espèce* ν *et du type hyperbolique — la première transformée de Laplace de l'équation donnée — dont l'intégration est parfaitement équivalente à celle de l'équation proposée.*

Si $B = 0$, *l'équation donnée est particularisée un certain nombre* ρ *de fois* $(1 \leqq \rho \leqq \nu)$; *et pour en obtenir toutes les solutions il suffit d'intégrer successivement une équation* $\mathfrak{L}$ *d'espèce* $\nu - \rho$ *et du type hyperbolique, et une équation linéaire non homogène aux dérivées ordinaires d'ordre* ρ.

34. Dans ce qui précède nous avons tacitement admis que pour les matrices $M_{2\mu}$ (en particulier pour le déterminant B) le fait d'être ou de ne pas être nulles, ne dépend pas de la fonction α arbitraire qui entre dans les $b_{\lambda jk}$ d'après les nos 24 et 25.

Ce fait est à peu près évident; puisque si y et $\overline{y}$ sont les fonctions fournies par la (20) en correspondance à deux diverses déterminations $b_{\lambda jk}$ et $\overline{b}_{\lambda jk}$ des quantités susdites, on a pour la (25) une relation de la forme

$$y = \alpha \overline{y}, \tag{49}$$

α étant une certaine fonction de u, v. Or, on a à la fois les équations (42) et les analogues

$$\overline{y}^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{\nu+\mu-1} \overline{b}_{\lambda jk} x^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, \mu - 1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right)$$

et il suffit de remarquer que (pour ce qu'on a dit au commencement du n° 23) la (49) se *prolonge* en une substitution linéaire *invertissable* entre les $\overline{y}^{jk}$ et les y^{jk} (pour $j = 0, 1, \ldots, \mu - 1$; $k = 0, 1$), substitution linéaire qui transforme les précédentes équations dans les (42).

Si, en particulier, nous prenons $\mu = \nu$, le déterminant de cette substitution linéaire [d'après les (13)] vaut $\alpha^{2\nu}$: on voit donc de plus, pour des propositions connues sur les substitutions linéaires, que, si nous indiquons avec $\overline{B}$ le déterminant (32) des quantités $\overline{b}_{\lambda jk}$, on a

$$B = \alpha^{2\nu} \overline{B}.$$

35. Au n° 23 nous avons vu que si nous changeons la fonction

inconnue x dans une fonction $\overline{x}$, en faisant une transformation (12) ou (14), l'équation (E) donnée sera transformée dans une équation du même genre dans la nouvelle inconnue $\overline{x}$, les deux équations étant *équivalentes* entre elles.

Si l'on se rappelle la définition donnée au n° 24 pour la fonction y qui vérifie la première transformée de Laplace de la (E), on voit aisément que :

Deux équations $\mathcal{E}$ d'espèce ν et type hyperbolique équivalentes entre elles ont les mêmes premières transformées de Laplace.

Si l'on a exécuté la transformation (12), on aura à la fois les équations (29) et les

$$(\overline{29}) \qquad y^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} \overline{b}_{\lambda jk} \overline{x}^{\lambda k} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, \nu - 1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right);$$

cela résulte aussi de ce qu'on a dit au n° 23, qui montre de plus que les (29) sont changées dans les $(\overline{29})$ au moyen d'une substitution linéaire entre les $\overline{x}^{\lambda 0}$ et les $x^{\lambda 0}$, dont le déterminant des coefficients vaut $\alpha^{2\nu}$. Si donc nous indiquons avec $\overline{B}$ le déterminant (32) des $\overline{b}_{\lambda jk}$, on a

$$\overline{B} = \alpha^{2\nu} B.$$

On peut faire un raisonnement tout semblable pour la transformation (14); si elle transforme $x(u, v)$ en $\overline{x}(\overline{u}, \overline{v})$ et $y(u, v)$ en $\overline{y}(\overline{u}, \overline{v})$, on aura à côté des (29), des formules du type suivant :

$$\overline{y}^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} \overline{b}_{\lambda jk} \overline{x}^{\lambda k} \qquad \left(\text{pour } \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, \nu - 1 \\ k = 0, 1 \end{matrix}\right);$$

et dans ce cas il sera

$$\left(\frac{d\overline{v}}{dv}\right)^{\nu} \overline{B} = \left(\frac{d\overline{u}}{du}\right)^{\nu^2} B.$$

36. Comme nous l'avons déjà remarqué, dans les quantités $b_{\lambda jk}$ que nous avons définies aux n$^{\text{os}}$ 24 et 25, figure une fonction arbitraire α. Disons $b^{*}_{\lambda jk}$ ce que devient $b_{\lambda jk}$ en y faisant $\alpha = 1$: les $b^{*}_{\lambda jk}$ seront des

fonctions déterminées des coefficients A_{ik} de l'équation donnée, qui se calculent d'après les (24), (23) et (27). Soit B^* le déterminant des $b^*_{\lambda jk}$; pour ce qui précède, il sera une fonction rationnelle entière déterminée des coefficients A_{ik} de l'équation donnée et de leurs dérivées, faites au plus $\nu - 1$ fois par rapport à u et une fois par rapport à v. Je dis que :

B^* *est un invariant de l'équation proposée, par rapport aux transformations* (12) *et* (14).

Considérons en effet la fonction

$$y^* = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b^*_{\lambda 00} x^{\lambda 0}; \tag{50}$$

elle est une des fonctions y définies au n° 24, et précisément est la fonction (20) pour laquelle le coefficient $b_{\nu 00}$ de $x^{\nu 0}$ vaut $b^*_{\nu 00} = 1$. En nous basant sur cette observation et sur le numéro précédent, on voit aisément que si l'on applique la transformation (12), et si l'on considère pour la transformée de la (E) la fonction $\overline{y}^*$ analogue de la (50), on a

$$y^* = \alpha \overline{y}^*.$$

Si nous nommons $\overline{B}^*$ l'expression en question calculée pour l'équation transformée, on voit alors, en se basant sur les n^os^ 34 et 35, qu'on a

$$B^* = \overline{B}^*. \tag{51}$$

On peut raisonner de même pour la transformation (14); avec des notations semblables aux précédentes, on est conduit dans ce cas aux formules

$$y^* = \left(\frac{d\overline{u}}{du}\right)^{\nu} \overline{y}^*,$$

$$B^* = \left(\frac{d\overline{u}}{du}\right)^{\nu^2} \left(\frac{d\overline{v}}{dv}\right)^{\nu} \overline{B}^*. \tag{52}$$

Les (51), (52) démontrent la proposition énoncée.

37. Soit $\Delta^*_{2\mu}$ ce que devient le déterminant $\Delta_{2\mu}$ du n° 31, pour $\alpha = 1$.

$\Delta^{\star}_{2\mu}$ est une fonction rationnelle entière déterminée des coefficients A_{ik} de l'équation donnée, et de leurs dérivées faites au plus $\mu - 1$ fois par rapport à u, et une fois par rapport à v. Pour $\mu = \nu$ on a évidemment : $\Delta^{\star}_{2\nu} = B^{\star}$. Cela posé, on peut faire par rapport au déterminant $\Delta^{\star}_{2\mu}$ en relation avec le système (42), un raisonnement pareil à ce que nous venons de faire pour $B^{\star}$ en relation avec le système (29). On démontre ainsi que :

Les déterminants $\Delta^{\star}_{2\mu}$ (pour $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$) sont des invariants de l'équation proposée, par rapport aux transformations (12) *et* (14).

Précisément, on voit aisément que (avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes) si l'on applique la transformation (12), on a

$$\Delta^{\star}_{2\mu} = \overline{\Delta}^{\star}_{2\mu};$$

tandis que, si l'on applique la transformation (14), on a

$$\Delta^{\star}_{2\mu} = \left(\frac{d\overline{u}}{du}\right)^{\nu\mu - \frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu-1)}{2}} \left(\frac{d\overline{v}}{dv}\right)^{\mu} \overline{\Delta}^{\star}_{2\mu}.$$

En se rappelant les résultats des nos 30, 31 et 33, on peut en outre énoncer la proposition suivante :

Afin qu'une équation $\mathcal{E}$ donnée d'espèce ν et du type hyperbolique soit particularisée un certain nombre ρ de fois ($1 \leqq \rho \leqq \nu$), *il est nécessaire et suffisant que ses invariants $\Delta^{\star}_{2\nu}$, $\Delta^{\star}_{2(\nu-1)}$, $\ldots$, $\Delta^{\star}_{2(\nu-\rho+1)}$ soient nuls, et que $\Delta^{\star}_{2(\nu-\rho)}$ soit différent de zéro.*

III. — La deuxième transformation de Laplace des équations $\mathcal{E}$ d'espèce ν et du type hyperbolique.

38. Nous nous proposons maintenant d'*intervertir* la transformation étudiée au paragraphe précédent. Pour faire cela nous tâchons de déterminer des quantités $\gamma_{000}, \gamma_{001}, \ldots, \gamma_{0,\nu-1,0}, \gamma_{0,\nu-1,1}$ qui ne soient pas toutes nulles, et telles que, si l'on pose

$$(53) \qquad z = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} \gamma_{0jk}\, x^{jk},$$

on ait *en conséquence de la* (18), c'est-à-dire chaque fois que x est une solution de l'équation (E),

$$(54)\qquad z^{\lambda 0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda jk}x^{jk}\qquad (\text{pour } \lambda=0,1\ \ldots,\ \mu)$$

où $z^{\lambda 0}=\frac{\partial^\lambda z}{\partial u}$, et en indiquant avec μ un nombre entier, pour le moment quelconque, et avec $\gamma_{\lambda jk}$ des convenables fonctions de u et de v.

Si nous éliminons la z entre les deux équations (54) qui donnent $z^{\lambda 0}$ et $z^{\lambda-1,0}$ $\left(\text{en exprimant que } z^{\lambda 0}=\frac{\partial}{\partial u}z^{\lambda-1,0}\right)$, nous obtenons pour la x une équation $\mathcal{E}$ d'espèce ν et du type hyperbolique qui doit être vérifiée en vertu de la (E), et donc s'identifier avec elle. On a ainsi les équations

$$(55)\qquad \gamma_{\lambda jk}=\gamma_{\lambda-1,j-1,k}-A_{jk}\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}+\gamma^{10}_{\lambda-1,j,k},$$

$$(56)\qquad \gamma_{\lambda-1,\nu-1,0}-A_{\nu 0}\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}$$

$$[\text{pour } \lambda=1,2\ \ldots,\ \mu;\ j=0,1,\ \ldots,\ \nu-1;\ k=0,1],$$

qui expriment *complètement* les conditions énoncées. On doit remarquer que dans la (55), pour $j=0$, on doit poser $\gamma_{\lambda-1,-1,k}=0$.

39. Les formules (55) permettent de calculer de proche en proche les $\gamma_{\lambda jk}$ (pour $\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu$) en fonction des 2ν quantités inconnues γ_{0jk} et de leurs dérivées. Avec cela les (56) deviennent un système de μ *équations différentielles* dans ces inconnues. Et bien nous allons démontrer qu'*en vertu des* (55) *ce système est équivalent à un système d'autant d'équations linéaires homogènes dans lesdites* 2ν *inconnues*.

40. Pour avoir plus de netteté dans les formules que nous allons écrire, introduisons si $\mu>\nu$ des nouveaux symboles, par définition tous nuls

$$(57)\qquad \gamma_{\lambda jk}=0;\qquad A_{jk}=0$$

$$[\text{pour } \lambda=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu;\ j=-1,\ -2,\ \ldots,\ -(\mu-\nu);\ k=0,1].$$

Il est clair qu'avec cela les (55) seront valables identiquement pour les valeurs $-1,\ -2,\ \ldots,\ -(\mu-\nu)$ de l'indice j.

Ceci posé, en changeant dans la (56) λ en $\lambda+1$, nous aurons

$$\gamma_{\lambda,\nu-1,0}-A_{\nu 0}\gamma_{\lambda,\nu-1,1}=0 \qquad (\text{pour } \lambda=1,\, 2,\, \ldots,\, \mu-1), \tag{58}$$

et, en exprimant dans la (58) $\gamma_{\lambda,\nu-1,0}$ et $\gamma_{\lambda,\nu-1,1}$ au moyen de la (55),

$$\gamma_{\lambda-1,\nu-2,0}-A_{\nu 0}\gamma_{\lambda-1,\nu-2,1}-(A_{\nu-1,0}-A_{\nu 0}A_{\nu-1,1})\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}+\gamma^{10}_{\lambda-1,\nu-1,0}-A_{\nu 0}\gamma^{10}_{\lambda-1,\nu-1,1}=0.$$

Enfin, si de cette relation nous soustrayons celle qu'on obtient en dérivant les deux membres de la (56) par rapport à u, nous obtenons

$$\gamma_{\lambda-1,\nu-2,0}-A_{\nu 0}\gamma_{\lambda-1,\nu-2,1}-(A_{\nu-1,0}-A_{\nu 0}A_{\nu-1,1}-A^{10}_{\nu 0})\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}=0 \tag{59}$$
$$(\text{pour } \lambda=1,2,\, \ldots,\, \mu-1).$$

Plus en général, nous pouvons démontrer que :

Si les $\gamma_{\lambda jk}$ satisfont aux équations différentielles (55) *et* (56), *elles vérifient par conséquent le système suivant d'équations linéaires et homogènes*

$$\gamma_{\lambda-1,j,0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}T_{j\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma,1}=0, \tag{60}$$

où j peut prendre les valeurs $\nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\nu-\mu$, et, pour j fixé, λ peut prendre seulement les valeurs $1,2,\ \ldots,j-(\nu-\mu)+1$.

Les $T_{j\sigma}$ s'expriment uniquement au moyen des coefficients A_{ik} de l'équation donnée, et de leurs dérivées faites par rapport à u; elles sont définies pour $\nu-1\geqq j\geqq\nu-\mu$ et $0\leqq\sigma\leqq\nu-j-1$, et *se calculent de proche en proche avec les formules*

$$\left\{\begin{aligned} T_{j0}&=A_{\nu 0}\\ T_{j-1,\sigma}&=T_{j\sigma}-T^{10}_{j,\sigma-1} \qquad (\text{pour } \sigma=1,2,\ \ldots,\nu-j-1),\\ T_{j-1,\nu-j}&=A_{j0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}T_{j\sigma}A_{j+\sigma,1}-T^{10}_{j,\nu-j-1}.\end{aligned}\right. \tag{61}$$

Ainsi, par exemple, on a

$$T_{\nu-1,0}=A_{\nu 0}, \tag{62}$$

$$T_{\nu-2,0}=A_{\nu 0};\ T_{\nu-2,1}=A_{\nu-1,0}-A_{\nu 0}A_{\nu-1,1}-A^{10}_{\nu 0};\ \ldots. \tag{63}$$

Pour démontrer cette proposition, commençons par remarquer (ce qui nous sera aussi utile sous peu) que les équations (60), lorsque j prend sa valeur la plus haute $\nu-1$, se réduisent aux (56) : cela est évident d'après la (62). De même, en vertu des (63), on a que pour $j=\nu-2$ les (60) s'identifient avec les (59).

La (60) est ainsi démontrée lorsque l'indice j prend ses deux valeurs les plus hautes $\nu-1$ et $\nu-2$; avec la méthode d'induction complète nous pourrons donc supposer que les (60) soient valables pour une valeur $j>\nu-\mu$ dudit indice; et il suffira de démontrer qu'elles sont encore vraies pour la valeur $j-1$ inférieure d'une unité, c'est-à-dire que

$$(64)\qquad \gamma_{\lambda-1,j-1,0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j}\mathrm{T}_{j-1,\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma-1,1}=0 \qquad [\text{pour } \lambda=1,2\ldots,j-(\nu-\mu)].$$

Or, si λ prend *seulement* ces valeurs-ci, on a, à côté de la (60) (vraie par hypothèse), l'équation

$$(65)\qquad \gamma_{\lambda j0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\gamma_{\lambda,j+\sigma,1}=0,$$

qu'on obtient de la (60) en y écrivant $\lambda+1$ à la place de λ. En tenant compte des (55), l'équation (65) peut s'écrire

$$(66)\qquad \gamma_{\lambda-1,j-1,0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma-1,1}-\Big(\mathrm{A}_{j0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\mathrm{A}_{j+\sigma,1}\Big)\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}$$
$$+\gamma^{10}_{\lambda-1,j,0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\gamma^{10}_{\lambda-1,j+\sigma,1}=0.$$

Enfin, si nous soustrayons de cette relation celle qu'on a en dérivant par rapport à u les deux membres de la (60), nous obtenons

$$(67)\qquad \gamma_{\lambda-1,j-1,0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma-1,1}-\Big(\mathrm{A}_{j0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\mathrm{A}_{j+\sigma,1}\Big)\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}$$
$$+\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}^{10}_{j\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma,1}=0.$$

Il suffit alors de changer dans la dernière somme σ en $\sigma-1$, et d'appliquer les (61), pour voir que la (67) est précisément l'égalité (64) qu'on devait démontrer.

41. Les (60) sont des équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités $\gamma_{\lambda jk}$, qui doivent être vérifiées en conséquence des équations (55) et (56). L'indice λ peut prendre une valeur quelconque des valeurs $1, 2, \ldots, \mu$; si l'on *fixe* la valeur de λ, l'indice j peut seulement plus prendre les valeurs $\nu - 1, \nu - 2, \ldots, \nu - (\mu - \lambda + 1)$. Pour un λ fixé, nous avons ainsi $\mu - \lambda + 1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux 2ν quantités

$$\gamma_{\lambda-1,j,k} \, (j = 0, 1, \ldots, \nu - 1;\ k = 0, 1);$$

ces équations constituent un système que nous nommerons $S_\lambda^{(\mu)}$; et l'on a évidemment *toutes* les équations (60), en prenant les équations des divers $S_\lambda^{(\mu)}$, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu$.

Cela posé, considérons en particulier le système $S_1^{(\mu)}$: il est un système de μ équations linéaires et homogènes par rapport aux *seules* quantités γ_{0jk}, qui doit être vérifié en conséquence des équations (55) et (56). Ce système est celui dont nous avons parlé au n° 39; précisément on a que :

Pour déterminer toutes les solutions du problème que nous nous sommes posé au commencement du n° 38, il suffit de résoudre le système $S_1^{(\mu)}$; *cela revient à dire que si l'on considère un groupe de valeurs des* γ_{0jk} *qui ne soient pas toutes nulles, et qui satisfassent au système* $S_1^{(\mu)}$, *et si l'on détermine en conséquence les* $\gamma_{\lambda jk}$ *(pour* $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu$*) avec les* (55), *les valeurs qu'on a ainsi pour les* $\gamma_{\lambda,\nu-1,k}$ *vérifient les équations* (56).

Nous allons montrer, de plus, que les valeurs déterminées pour les $\gamma_{\lambda jk}$, comme on vient de le dire, satisfont à *toutes* les équations (60); la proposition énoncée résulte alors du fait, déjà remarqué, que les équations (56) s'obtiennent en particulier des (60), en y faisant $j = \nu - 1$.

Les équations (60) peuvent être groupées dans les μ systèmes $S_\lambda^{(\mu)}$ (pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu$); les λ_{0jk} ont été déterminées de façon à vérifier le système $S_1^{(\mu)}$. Avec la méthode d'induction complète il suffira donc de prouver que :

Si l'on a déterminé des quantités $\gamma_{\lambda-1,j,k}$ *(pour* $j = 0, 1 \ldots, \nu - 1$;

$k=0,1$) *qui satisfassent au système* $S_\lambda^{(\mu)}$, *les quantités* $\gamma_{\lambda jk}$ (*pour* $j=0, \ldots, \nu-1$; $k=0,1$) *qu'on détermine en conséquence avec les* (55), *rendront vérifiées les équations du système* $S_{\lambda+1}^{(\mu)}$.

Les diverses équations de $S_\lambda^{(\mu)}$ s'obtiennent de l'équation (60) en donnant à l'indice j les valeurs $\nu-1, \nu-2, \ldots, \nu-(\mu-\lambda+1)$, et sont vérifiées par hypothèse. De même, les diverses équations de $S_{\lambda+1}^{(\mu)}$ s'obtiennent de l'équation (65) en donnant à l'indice j les valeurs $\nu-1$, $\nu-2, \ldots, \nu-(\mu-\lambda)$, et ce sont les équations qu'on doit démontrer. Si l'indice j prend *seulement* ces dernières valeurs, à côté de la (60) on aura la (64) qui résulte de cette équation en y écrivant $j-1$ à la place de j. En vertu des (61), la (64) s'écrit sous la forme (67); si nous ajoutons à celle-ci l'équation qu'on a en dérivant par rapport à u les deux membres de la (60), nous obtenons la (66). Enfin, en tenant compte des (55) qui sont vérifiées par hypothèse), la (66) se réduit précisément à l'égalité (65) que nous devions démontrer.

42. Nous allons tirer maintenant de ce qui précède beaucoup de conséquences.

Considérons les équations (54) dans lesquelles les $\gamma_{\lambda jk}$ aient été déterminées de façon à satisfaire aux équations (55) et (56); nous supposons toujours que les $z^{\lambda,0}$ (pour $\lambda=0, 1, \ldots, \mu$) soient telles que $z^{\lambda,0}=\dfrac{\partial^\lambda z}{\partial u^\lambda}$; mais, pour le moment, nous ne faisons sur les x^{jk} d'autre hypothèse que celle de satisfaire aux équations (54).

Pour $\lambda=1, 2, \ldots, \mu$, nous aurons, à côté de l'équation (54), l'équation suivante :

$$z^{\lambda-1,0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda-1,j,k}x^{jk},$$

qu'on obtient de la (54) en y changeant λ en $\lambda-1$. Éliminons la z entre ces deux équations, en exprimant que $z^{\lambda,0}=\dfrac{\partial}{\partial u}z^{\lambda-1,0}$; nous aurons

$$\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\left[(\gamma_{\lambda jk}-\gamma_{\lambda-1,j,k}^{(10)})\,x^{jk}-\gamma_{\lambda-1,j,k}\frac{\partial}{\partial u}\,x^{jk}\right]=0.$$

En tenant compte des (55) cette équation peut s'écrire

$$\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda-1,j-1,k}x^{jk}-\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\mathrm{A}_{jk}x^{jk}-\sum_{j=0}^{\nu-2}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda-1,j,k}\frac{\partial}{\partial u}x^{jk}$$
$$-\gamma_{\lambda-1,\nu-1,0}\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,0}-\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,1}=0.$$

Si nous changeons dans notre dernière somme l'indice j en $j-1$, et si nous appliquons la (56) en tenant compte que $\gamma_{\lambda-1,-1,k}=0$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda-1,j-1,k}\left(x^{jk}-\frac{\partial}{\partial u}x^{j-1,k}\right)$$
$$-\gamma_{\lambda-1,\nu-1,1}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\mathrm{A}_{jk}x^{jk}+\mathrm{A}_{\nu 0}\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,0}+\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,1}\right)=0,$$

et enfin, si dans cette relation nous changeons λ en $\lambda+1$,

$$(68)\qquad \sum_{j=1}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda,j-1,k}\psi_{jk}+\gamma_{\lambda,\nu-1,1}\chi=0 \qquad (\text{pour}\quad \lambda=0,1,\ldots,\mu-1),$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(68')\qquad \left\{\begin{array}{l}\psi_{jk}=x^{jk}-\dfrac{\partial}{\partial u}x^{j-1,k}\qquad \left(\text{pour}\quad \begin{array}{l}j=1,2,\ldots,\nu-1\\ k=0,1\end{array}\right),\\[2ex] \chi=-\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\mathrm{A}_{jk}x^{jk}+\mathrm{A}_{\nu 0}\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,0}+\frac{\partial}{\partial u}x^{\nu-1,1}\right).\end{array}\right.$$

43. Le système $\mathrm{S}_1^{(\mu)}$ considéré au n° 41 se compose des équations suivantes :

$$(69)\qquad \gamma_{0j0}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1}\mathrm{T}_{j\sigma}\gamma_{0,j+\sigma,1}=0 \qquad (\text{pour}\quad j=\nu-1,\nu-2,\ldots,\nu-\mu),$$

en nombre de μ, linéaires et homogènes par rapport aux 2ν inconnues $\gamma_{0jk}(j=0,1,\ldots,\nu-1;\ k=0,1)$ [on doit se rappeler que les γ_{0jk} dont l'indice j est négatif sont identiquement nulles ; *cf.* les (57)]. Nous aurons à considérer la matrice des coefficients des inconnues du système $S_1^{(\mu)}$; cette matrice renferme μ lignes et 2ν colonnes, et sera nommée $M^{(\mu)}$; ses termes sont parfaitement déterminés par les formules (61), et s'expriment comme des fonctions rationnelles entières des coefficients A_{jk} de l'équation (E), et de leurs dérivées faites par rapport à u.

Si nous donnons au nombre μ deux valeurs μ' et μ'' avec $\mu'' > \mu'$, il est clair d'après les (69) que $S_1^{(\mu')}$ se compose précisément des premières μ' équations de $S_1^{(\mu'')}$; en d'autres termes, la matrice $M^{(\mu')}$ se compose des premières μ' lignes de la matrice $M^{(\mu'')}$.

La matrice $M^{(\mu)}$ se réduit à un déterminant d'ordre 2ν pour $\mu = 2\nu$; on reconnaît tout de suite que, à part le signe, il est égal au déterminant suivant d'ordre ν :

$$\Theta = \begin{vmatrix} T_{-1,1} & T_{-1,2} & \dots & T_{-1,\nu} \\ T_{-2,2} & T_{-2,3} & \dots & T_{-2,\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{-\nu,\nu} & T_{-\nu,\nu+1} & \dots & T_{-\nu,2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Ses éléments $T_{j\sigma}$ s'expriment avec les (61) comme des fonctions rationnelles entières des coefficients A_{ik} de l'équation donnée, et de leurs dérivées faites par rapport à la seule u, $1, 2, \dots, 2\nu - 1$ fois.

Cela posé, nous avons deux cas à distinguer suivant que $\Theta = M^{(2\nu)}$ est nul ou bien n'est pas nul. Dans le premier cas, si l'on considère les matrices $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, etc. (qui se composent des 1, 2, 3, etc., premières lignes de $M^{(2\nu)}$), on en trouvera *une* $M^{(\mu)}$ qui est la *dernière* de celles qui ne sont pas nulles, c'est-à-dire telle que $M^{(\mu)}$ étant différente de zéro, on ait au contraire $M^{(\mu+1)} = 0$. On dira alors que *l'équation* (E) *donnée est* ρ *fois spécialisée*, en posant

$$\rho = 2\nu - \mu.$$

Les équations (69) qu'on a pour $j = \nu - 1, \nu - 2, \dots, 1, 0$ sont évidemment indépendantes entre elles, puisque dans chacune paraît une inconnue γ_{0j0} qui ne figure pas dans les autres. Le nombre μ défini tout à l'heure est donc au moins égal à ν; comme il est plus petit que 2ν, on aura

$$(70) \qquad \nu \leqq \mu \leqq 2\nu - 1; \qquad 1 \leqq \rho \leqq \nu.$$

44. Laissons de côté, pour le moment, ce cas, et supposons donc que *l'équation donnée* NE SOIT PAS SPÉCIALISÉE; cela revient à dire que le déterminant $M^{(2\nu)}$ ne doit pas être nul, et ceci sera le cas qui se présentera *en général*.

La matrice $M^{(2\nu-1)}$ n'étant pas nulle, le système $S_1^{(2\nu-1)}$ *déterminera* les rapports mutuels des 2ν inconnues γ_{0jk}; précisément on aura

$$\gamma_{0jk} = \alpha M_{jk}, \tag{71}$$

α étant une fonction arbitraire de u, v, et en indiquant avec M_{jk} le déterminant (pris avec un signe convenable) qu'on obtient de $M^{(2\nu-1)}$ en y supprimant la colonne des coefficients de γ_{0jk}.

En faisant $\mu = 2\nu - 1$ dans ce que nous avons démontré au n° 41, nous pouvons donc dire que :

Dans le cas où l'équation (E) *ne soit pas spécialisée, les formules* (71) *nous donnent la solution la plus générale du problème que nous nous sommes posé au n°* 38, *pour* $\mu = 2\nu - 1$; *on a donc que, si nous définissons la fonction* z *avec la* (53), *et si* x *vérifie l'équation* (E), *subsistent les égalités suivantes :*

$$z^{\lambda,0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} \gamma_{\lambda jk} x^{jk} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1), \tag{72}$$

dans lesquelles les coefficients γ_{0jk} sont donnés par la (71) et les autres $\gamma_{\lambda jk}$ se calculent de proche en proche avec la (55).

En vertu des (53), (71), la fonction z s'exprime comme il suit :

$$z = \alpha \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} M_{jk} x^{jk}, \tag{73}$$

et donc elle est déterminée seulement à moins d'un facteur arbitraire α, différent de zéro.

45. Les (72) sont 2ν équations linéaires dans les 2ν quantités x^{jk}.

Nous démontrerons plus loin que le déterminant des coefficients

$$(74)\quad \Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{000} & \gamma_{001} & \gamma_{010} & \gamma_{011} & \dots & \gamma_{0,\nu-1,0} & \gamma_{0,\nu-1,1} \\ \gamma_{100} & \gamma_{101} & \gamma_{110} & \gamma_{111} & \dots & \gamma_{1,\nu-1,0} & \gamma_{1,\nu-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \gamma_{2\nu-1,00} & \gamma_{2\nu-1,01} & \gamma_{2\nu-1,10} & \gamma_{2\nu-1,11} & \dots & \gamma_{2\nu-1,\nu-1,0} & \gamma_{2\nu-1,\nu-1,1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Nous pouvons donc résoudre le système (72) par rapport aux x^{jk}, et nous obtenons ainsi les équations

$$(75)\qquad x^{jk} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} \beta_{\lambda jk} z^{\lambda 0} \qquad \left(\text{pour} \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, \nu-1 \\ k = 0, 1 \end{array}\right),$$

équivalentes aux (72), et où l'on a posé

$$(76)\qquad \beta_{\lambda jk} = \frac{\Gamma_{\lambda jk}}{\Gamma},$$

en indiquant avec $\Gamma_{\lambda jk}$ le complément algébrique de $\gamma_{\lambda jk}$ dans le déterminant (74).

46. Avant de procéder nous devons démontrer que :

Tous les déterminants Γ_{mnk} pour lesquels on a $m > \nu + n$ sont identiquement nuls.

Considérons en effet un tel déterminant (d'ordre $2\nu - 1$) Γ_{mnk}, et indiquons avec (j, k) la colonne des termes $\gamma_{0jk}, \gamma_{1jk}, \dots, \gamma_{m-1,jk}, \gamma_{m+1,jk}, \dots, \gamma_{2\nu-1,jk}$. On a $m \leqq 2\nu - 1$, et par hypothèse $m > \nu + n$; donc, on doit avoir $n < \nu - 1$.

Cela posé, considérons dans Γ_{mnk} la colonne $(j, 0)$, pour $j = n + 1$, $n + 2, \dots, \nu - 1$, et ajoutons-lui les colonnes $(j, 1), (j + 1, 1), \dots, (\nu - 1, 1)$ multipliées respectivement par $-T_{j0}, -T_{j1}, \dots, T_{j,\nu-j-1}$: le déterminant Γ'_{mnk}, qu'on obtient ainsi, sera égal à Γ_{mnk}.

Pour le théorème du n° 40, les $\gamma_{\lambda jk}$ vérifient les (65), dans lesquelles pour la valeur fixée de j, l'indice λ peut prendre toutes les valeurs $0, 1, \dots, j + \nu - 1$; et, comme est $j \geqq n + 1$, on peut (quelle que soit la valeur fixée pour j) donner à λ les valeurs $0, 1, \dots, \nu + n$. La ligne de Γ qu'on supprime pour avoir Γ_{mnk}, correspond à la valeur m de l'indice λ, et l'on a par hypothèse $m > \nu + n$. On voit donc, en se basant sur ces remarques, que dans le déterminant obtenu Γ'_{mnk}, sont *nuls* tous les termes qui sont en même temps dans une des premières $\nu + n + 1$ lignes et dans une des $\nu - n - 1$ colonnes $(n+1, 0)$, $(n+2, 0)$, ..., $(\nu - 1, 0)$; et, par conséquent, le déterminant Γ'_{mnk} est nul : cela résulte immédiatement en le développant suivant ces $\nu - n - 1$ colonnes, et en appliquant la bien connue règle de Laplace.

47. En tenant compte du précédent théorème et des (76), on voit que les équations (75), au changement des notations près, sont tout à fait identiques aux équations (29) du paragraphe précédent. On peut aussi voir que les coefficients $\beta_{\lambda jk}$ des (75) satisfont à des relations analogues aux relations (27) et (28). En effet, il suffit d'éliminer la x entre les deux équations (75) qui fournissent x^{jk} et $x^{j-1,k}$, au moyen de la $x^{jk} - \dfrac{\partial}{\partial u} x^{j-1} = 0$. On a ainsi une relation de la forme $\sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} m_\lambda z^{\lambda 0} = 0$, et l'on obtient les relations cherchées en annulant tous les coefficients m_λ (¹).

Une autre remarque, qui nous sera utile sous peu, est la suivante. Les (56) dans les hypothèses actuelles sont vérifiées pour $\lambda = 1, 2, \ldots, 2\nu - 1$; il s'ensuit de cela qu'on a, $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,1} = A_{\nu 0}\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,0}$. Pour le théorème du n° 46, dans Γ sont nuls tous les compléments algébriques des termes de la dernière ligne, sauf (au plus) $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,0}$ et $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,1}$; *on ne peut donc pas avoir* $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,0} = 0$, puisque dans ce cas serait aussi nul $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,1}$, et, par conséquent, le déterminant Γ ne pourrait pas être différent de zéro. En vertu de la (76), on a par suite $\beta_{2\nu-1,\nu-1,0} \neq 0$; en appliquant les formules analogues des (28), dont nous avons parlé plus haut, on voit donc que sont différentes de zéro *toutes* les $\beta_{\nu+j,j,0}$; en particulier, $\beta_{\nu 00} \neq 0$.

(¹) Une relation du type $\sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} m_\lambda z^{\lambda 0} = 0$ ne peut pas subsister en vertu des (75), que si les m_λ sont toutes nulles. Pour démontrer cela, il suffit de remarquer que les (75) sont équivalentes aux (72) et que : 1° le déterminant Γ des $\gamma_{\lambda jk}$ n'est pas nul; 2° les x^{jk} sont entre elles linéairement indépendantes.

48. Nous avons vu aux n^{os} 44 et 45 que si l'équation (E) n'est pas spécialisée, et si x en est une solution quelconque, on a les équations (75) dans lesquelles z est la fonction définie par la (73).

En particulier, on a des (75) les équations suivantes :

$$(77)\qquad \begin{cases} x^{00} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \beta_{\lambda 00}\, z^{\lambda 0}, \\ x^{01} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \beta_{\lambda 01}\, z^{\lambda 0}, \end{cases}$$

et dans les deux sommes on peut se borner à donner à λ les valeurs 0, $1, \ldots, \nu$, en vertu du théorème du n° 46.

Si nous éliminons la x entre les (77), en exprimant que

$$(78)\qquad x^{01} - \frac{\partial}{\partial v} x^{00} = 0,$$

nous obtenons que z doit satisfaire à une équation de la forme suivante :

$$(79)\qquad \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{1} \mathfrak{F}_{ik}\, z^{ik} = 0.$$

On a $\mathfrak{F}_{\nu,1} = -\beta_{\nu 00}$, et (comme on l'a remarqué au numéro précédent) cette quantité est différente de zéro. La (79) est donc *une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et type hyperbolique :* elle sera appelée *la deuxième transformée de Laplace* de l'équation donnée.

On aura un nombre infini de deuxièmes transformées de Laplace, puisque la fonction z peut prendre un nombre infini de déterminations; on voit cependant pour la (73) que *toutes les deuxièmes transformées de Laplace d'une équation $\mathfrak{L}$ donnée sont équivalentes entre elles*, au sens donné à ce mot au n° 23. On peut fixer *une* de ces équations transformées, en fixant la fonction α qui figure dans les formules (71), (73), par exemple en prenant $\alpha = 1$.

49. Nous allons maintenant démontrer que :

L'intégration de l'équation (E) *est parfaitement équivalente à celle* *de la deuxième transformée de Laplace* (79) : *précisément à toute solution x de la première correspond une solution z de la seconde, qu'on calcule avec la* (53); *et, à toute solution z de cette dernière équation, correspond une solution x de l'équation donnée, qu'on calcule avec la première des relations* (77).

La première partie de cette proposition résulte de ce que nous venons de dire au numéro précédent.

Pour la deuxième, supposons donc d'avoir déterminé une solution z quelconque de la (79). Calculons les x^{jk} avec les (75), dans lesquelles on ait pris $z^{\lambda 0} = \frac{\partial^\lambda z}{\partial u^\lambda}$: puisque z est une solution de la (79), on aura, en attendant, que la (78) sera vérifiée. Les $z^{\lambda 0}$ et x^{jk} déterminées ainsi vérifieront aussi les (72) [qui sont équivalentes aux (75)]. En conséquence, pour ce que nous avons démontré au n° 42, on aura les relations (68) pour $\lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu - 2$: celles-ci sont $2\nu - 1$ équations linéaires et homogènes dans les $2\nu - 1$ quantités $\psi_{jk}(j = 1, 2, \ldots, \nu - 1; k = 0, 1)$ et χ. Le déterminant des coefficients est le déterminant $\Gamma_{2\nu-1,\nu-1,0}$, et nous avons démontré (n° 47) qu'il n'est pas nul. De là s'ensuit que toutes les quantités ψ_{jk} et la χ doivent s'annuler. En tenant compte des (68') et de la (78), on voit alors que les x^{jk} sont telles que $x^{jk} = \frac{\partial^{j+k} x^{00}}{\partial u^j \partial v^k}$, et qu'effectivement $x = x^{00}$ est une solution de l'équation donnée.

50. Il nous reste maintenant à démontrer que le déterminant (74) n'est pas nul, tant que l'équation donnée n'est pas spécialisée, c'est-à-dire tant que $\Theta = M^{(2\nu)} \neq 0$. Dans ce cas les expressions (71) ne sont pas toutes nulles.

Supposons par l'absurde $\Gamma = 0$. Les éléments γ_{0jk} de la première ligne de ce déterminant ne sont pas tous nuls; si nous considérons les matrices $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$ constituées par les premières $1, 2, \ldots$ lignes de Γ, soit $\Gamma^{(\omega)}$ *la dernière* de celles qui ne sont pas nulles (on aura $1 \leqq \omega \leqq 2\nu - 1$). La matrice $\Gamma^{(\omega+1)}$ étant nulle, on aura des relations de la forme

$$(80) \qquad \gamma_{\omega jk} = \sum_{\lambda=1}^{\omega} c_\lambda \gamma_{\lambda-1,j,k} \qquad \left(\text{pour} \quad \begin{array}{l} j = \nu - 1, \nu - 2, \ldots, -(\nu - 1) \\ k = 0, 1 \end{array}\right).$$

Dans les hypothèses actuelles, nous pouvons appliquer le théorème du n° 40, en prenant pour μ la valeur $\mu = 2\nu - 1$. On verra donc que l'équation (60) est vérifiée pour

$$(81) \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \omega \qquad \text{et} \qquad j = \nu - 1, \nu - 2, \ldots, \nu - \pi,$$

où l'on a posé

$$2\nu - \omega = \pi \qquad (1 \leqq \pi \leqq 2\nu - 1).$$

Multiplions par c_λ les deux membres de ladite équation (60) et additionnons par rapport à l'indice λ entre les limites 1 et ω. En tenant compte de la (80) on voit ainsi que la (60) est aussi vérifiée pour $\lambda = \omega + 1$, et donc pour les valeurs (81) des indices sont vérifiées les (60) et (65); comme nous l'avons vu au n° 40, de là s'ensuit l'équation (64). Cela montre que l'équation (60) s'applique dans ce cas pour les valeurs suivantes des indices

$$\lambda = 1, 2, \ldots, \omega \qquad \text{et} \qquad j = \nu - 1, \nu - 2, \ldots, \nu - \pi, \nu - (\pi + 1).$$

Considérons le système suivant :

$$(82) \quad \theta_{j0} - \sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1} T_{j\sigma}\theta_{j+\sigma,1} = 0 \qquad [\text{pour } j = \nu - 1, \nu - 2, \ldots, \nu - (\pi + 1)],$$

dont les coefficients $T_{j\sigma}$ sont déterminés comme nous l'avons dit au n° 40; les inconnues sont les θ_{jk} ($j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$; $k = 0, 1$), avec l'avertissement que celles qui ont le premier indice j négatif sont par définition identiquement nulles. Les équations (82) sont identiques aux équations (69) du n° 43, sauf que les inconnues sont appelées θ_{jk} au lieu de γ_{0jk}, et qu'à la place de μ nous avons maintenant $\pi + 1$: ces équations sont donc linéairement indépendantes, puisque par hypothèse l'équation donnée n'est pas spécialisée.

Cela posé, le résultat auquel nous sommes parvenus peut s'énoncer ainsi : *le système* (82) *admet les solutions*

$$(83) \qquad \theta_{jk} = \gamma_{\lambda-1,j,k} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \omega.$$

Or ce système se compose de $\pi + 1 = 2\nu - (\omega - 1)$ équations indépendantes, linéaires et homogènes dans 2ν inconnues; les solutions (83) — en nombre de ω — doivent donc être entre elles dépendantes, c'est-à-dire que doit s'annuler la matrice qu'on peut former avec elles : et celle-ci est justement la matrice $\Gamma^{(0)}$ que nous avons supposée différente de zéro.

51. Supposons maintenant que *l'équation donnée* SOIT SPÉCIALISÉE *un certain nombre* ρ *de fois*.

Si l'on pose $\mu = 2\nu - \rho$, cela revient à dire que le système (69) du n° 43 se compose de μ équations linéairement indépendantes, qui portent comme conséquence l'équation qu'on obtient de la (69) en y faisant $j = \nu - (\mu + 1)$.

Déterminons une solution quelconque du système (69), comprenant *des quantités* γ_{0jk} *qui ne soient pas toutes nulles* : cela est certainement possible, et d'une infinité de manières, puisque le nombre des γ_{0jk} est 2ν, tandis que le nombre des équations (69) est $\mu < 2\nu$ [*cf.* la (70)]. En correspondance à ces valeurs des γ_{0jk}, les (55) nous permettent de calculer de proche en proche toutes les $\gamma_{\lambda jk}$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu$ [1]. Si l'on définit la fonction z avec la (53) on a alors pour le n° 41 que, si x est une solution quelconque de l'équation (E), sont aussi vérifiées toutes les équations (54).

52. Considérons les équations (82) pour $j = \nu - 1, \nu - 2, \ldots, \nu - \mu$, avec la convention faite au n° 50 pour les inconnues θ_{jk}; nous obtenons ainsi un système que nous appellerons $S^{(\mu)}$. Pour ce que nous avons dit au numéro précédent, $S^{(\mu)}$ se compose de μ équations *linéairement indépendantes* dans les 2ν inconnues θ_{jk}; donc $2\nu - \mu + 1 = \rho + 1$ solutions θ_{jk} sont entre elles dépendantes. En outre, si nous considérons le système $S^{(\mu+1)}$, ses premières μ équations sont celles de $S^{(\mu)}$, et la dernière est *une conséquence* des précédentes. Nous allons maintenant démontrer que :

Les groupes suivants de valeurs

$$\theta_{jk} = \gamma_{\lambda-1,j,k} \qquad (\text{pour } \lambda = 1, 2, \ldots, \mu + 1) \tag{84}$$

constituent $\mu + 1$ *solutions du système* $S^{(\mu)}$.

---

[1] Dans tout ce qui suit les $\gamma_{\lambda jk}$ sont les quantités déterminées de cette façon.

En effet, $\theta_{jk} = \gamma_{0jk}$ est, par hypothèse, une solution du système $S^{(\mu)}$, et donc aussi — pour la remarque qui précède — du système $S^{(\mu+1)}$. En d'autres termes, les γ_{0jk} satisfont au système $S_1^{(\mu+1)}$; pour le deuxième théorème (en italique) du n° 41, de là s'ensuit que les γ_{1jk} vérifient le système $S_2^{(\mu+1)}$. Cela démontre précisément que $\theta_{jk} = \gamma_{1jk}$ est une solution du système $S^{(\mu)}$. On peut répéter le même raisonnement en substituant γ_{1jk} à γ_{0jk} et l'on démontre ainsi que $\theta_{jk} = \gamma_{2jk}$ est une solution de $S^{(\mu)}$, et ainsi de suite.

En vertu des (70), on a $\rho \leqq \mu$; nous pouvons donc considérer les solutions (84) qu'on a pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \rho + 1$; pour une remarque précédente, elles sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire que la matrice $\Gamma^{(\rho+1)}$ de $\rho + 1$ lignes et 2ν colonnes qu'on forme avec ces valeurs $\gamma_{\lambda-1,j,k}$ est nulle. Par hypothèse, la première ligne se compose de quantités γ_{0jk} qui ne sont pas toutes nulles. Si nous considérons les matrices $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$, formées avec les premières 1, 2, ... lignes de $\Gamma^{(\rho+1)}$, soit $\Gamma^{(\omega)}$ *la dernière* de celles qui ne sont pas nulles. La matrice $\Gamma^{(\omega+1)}$ étant nulle, *nous aurons entre les $\gamma_{\lambda-1,jk}$ des relations de la forme* (80). Le nombre entier ω peut varier en changeant la solution γ_{0jk} considérée au numéro précédent; cependant, dans tous cas, on a

$$1 \leqq \omega \leqq \rho. \tag{85}$$

53. Pour ce que nous avons dit à la fin du n° 51, nous avons, en particulier, en tenant présente la (85), que, si l'on définit la fonction z avec la (53), il suffit que x soit une solution de l'équation (E), afin qu'on ait

$$z^{\lambda-1,0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} \gamma_{\lambda-1,j,k} x^{jk} \qquad (\text{pour} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1). \tag{86}$$

Multiplions les deux membres de la (80) par x^{jk}, et additionnons les relations ainsi obtenues pour $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, et $k = 0, 1$; en tenant compte des (86), nous aurons

$$z^{\omega,0} = \sum_{\lambda=1}^{\omega} c_\lambda z^{\lambda-1,0}. \tag{87}$$

Inversement, si sont vérifiées les équations

$$(88) \qquad z^{\lambda-1,0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} \gamma_{\lambda-1,j,k} x^{jk} \qquad (\text{pour } \lambda = 1, 2, \ldots, \omega),$$

et la (87), on a tout de suite pour les (80), que seront vérifiées *toutes* les équations (86).

Faisons encore une remarque qui nous sera utile plus loin. La fonction x est *uniquement* obligée à satisfaire à l'équation (E), et de cette équation ne peut venir comme conséquence aucun lien linéaire entre les *seules* x^{jk} pour $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ et $k = 0, 1$. Un tel lien ne peut donc non plus exister en vertu des équations (86), puisque celles-ci sont des conséquences de ladite équation (18) et de la (53) qui sert seulement à définir la z. On voit alors aisément qu'on ne peut pas tirer des équations (86) un lien linéaire entre les seules $z^{\lambda-1,0}$, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \omega$, puisque, par hypothèse, la matrice $\Gamma^{(\omega)}$ est différente de zéro [1].

54. Pour la première proposition du n° 52, nous aurons les relations

$$(89) \qquad \gamma_{\lambda-1,j0} - \sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1} T_{j\sigma} \gamma_{\lambda-1,j+\sigma,1} = 0$$

$$(\text{pour } \lambda = 1, 2, \ldots, \omega \quad \text{et} \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1).$$

En vertu des (89), les (88) peuvent s'écrire

$$(90) \qquad z^{\lambda-1,0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \gamma_{\lambda-1,j,1} x^{j1} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1} T_{j\sigma} \gamma_{\lambda-1,j+\sigma,1} x^{j0}$$

$$(\text{pour } \lambda = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Dans la dernière somme prenons, au lieu de l'indice σ,

$$\tau = j + \sigma;$$

ensuite, échangeons entre elles les deux lettres τ et j et les deux signes

[1] On a donc que la relation (87) est parfaitement déterminée, puisqu'on ne peut pas avoir deux diverses de ces relations sans qu'on ait en conséquence un lien linéaire entre les seules $z^{0,0}, z^{1,0}, \ldots, z^{\omega-1,0}$.

de Σ; nous aurons successivement

$$\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-1} \mathrm{T}_{j\sigma}\gamma_{\lambda-1,j+\sigma,1}\,x^{j0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{\tau=j}^{\nu-1}\mathrm{T}_{j,\tau-j}\gamma_{\lambda-1,\tau,1}\,x^{j0}$$
$$=\sum_{\tau=0}^{\nu-1}\sum_{j=\tau}^{\nu-1}\mathrm{T}_{\tau,j-\tau}\gamma_{\lambda-1,j,1}\,x^{\tau 0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\gamma_{\lambda-1,j,1}\sum_{\tau=0}^{j}\mathrm{T}_{\tau,j-\tau}\,x^{\tau 0};$$

par conséquent, les (90) peuvent aussi s'écrire

$$(91)\qquad z^{\lambda-1,0}=\sum_{j=0}^{\nu-1}\gamma_{\lambda-1,j,1}\,\xi_j \qquad (\text{pour } \lambda=1,\,2,\,\ldots,\,\omega),$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(91')\qquad \xi_j=x^{j1}+\sum_{\tau=0}^{j}\mathrm{T}_{\tau,j-\tau}\,x^{\tau 0} \qquad (\text{pour } j=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1).$$

Nous démontrerons plus loin que le suivant déterminant d'ordre ω,

$$\Delta=\begin{vmatrix} \gamma_{0,\nu-\omega,1} & \gamma_{0,\nu-\omega+1,1} & \cdots & \gamma_{0,\nu-1,1} \\ \gamma_{1,\nu-\omega,1} & \gamma_{1,\nu-\omega+1,1} & \cdots & \gamma_{1,\nu-1,1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_{\omega-1,\nu-\omega,1} & \gamma_{\omega-1,\nu-\omega+1,1} & \cdots & \gamma_{\omega-1,\nu-1,1} \end{vmatrix},$$

n'est pas nul. On pourra donc résoudre le système des ω équations (91) par rapport aux ω quantités $\xi_{\nu-\omega}$, $\xi_{\nu-\omega+1}$, $\ldots$, $\xi_{\nu-1}$. En particulier, on aura pour $\xi_{\nu-\omega}$ une expression de la forme suivante :

$$(92)\qquad \xi_{\nu-\omega}=\sum_{j=0}^{\nu-\omega-1} m_j\xi_j+\sum_{\lambda=1}^{\omega} n_\lambda z^{\lambda-1,0}.$$

55. Nous avons donc, de ce qui précède, que si x est une solution quelconque de l'équation (E), et si l'on considère la fonction z déterminée en correspondance par la (53), ces deux fonctions x et z vérifient les deux équations différentielles (87) et (92). L'équation (92), dans le cas que la z soit connue, est une équation différentielle dans la seule x, que nous dirons une *équation $\mathcal{E}$ d'espèce $\nu-\omega$ du type hyperbolique* et *non homogène*, puisque, en vertu des (91'), à part un

terme qui ne dépend pas de la x, elle est précisément une équation $\mathcal{C}$ d'espèce $\nu-\omega$. Ceci posé, on a que :

On obtient toutes et seules les solutions x de l'équation (E), *en intégrant successivement les équations* (87) *et* (92), *dont la première est une équation linéaire et homogène aux dérivées ordinaires, d'ordre ω, avec z pour inconnue, et la seconde est une équation $\mathcal{C}$ d'espèce $\nu-\omega$ du type hyperbolique et non homogène, dans l'inconnue $x (1 \leqq \omega \leqq \nu)$.*

Supposons que x et z satisfassent aux équations différentielles (87) et (92); il suffira de démontrer que x vérifie la (18). Pour cela, définissons les fonctions $z^{\lambda 0}$ et x^{jk} de la manière suivante :

$$z^{\lambda 0} = \frac{\partial^{\lambda} z}{\partial u^{\lambda}} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \omega), \tag{93}$$

$$x^{j0} = \frac{\partial^{j} x}{\partial u^{j}} \qquad (\text{pour } j = 0, 1, \ldots, \nu - 1), \tag{94}$$

$$x^{j1} = \frac{\partial^{j+1} x}{\partial u^{j}\, \partial v} \qquad (\text{pour } j = 0, 1, \ldots, \nu - \omega - 1). \tag{95}$$

En tenant compte des (94), (95), les (91′) déterminent les valeurs des ξ_j pour $j = 0, 1, \ldots, \nu - \omega - 1$. Dans le système (91) tout est connu, sauf les $\xi_{\nu-\omega}, \xi_{\nu-\omega+1}, \ldots, \xi_{\nu-1}$; comme nous l'avons remarqué au numéro précédent, nous pouvons résoudre ce système par rapport à ces quantités; les équations (91′) détermineront alors les quantités restantes $x^{\nu-\omega,1}, x^{\nu-\omega+1,1}, \ldots, x^{\nu-1,1}$. En particulier, la $\xi_{\nu-\omega}$ se calculera avec la (92), et, comme par hypothèse x et z vérifient cette équation différentielle, ainsi la valeur correspondante de $x^{\nu-\omega,1}$ n'est autre chose que

$$x^{\nu-\omega,1} = \frac{\partial^{\nu-\omega+1} x}{\partial u^{\nu-\omega}\, \partial v}. \tag{96}$$

Les valeurs déterminées, comme on vient de le dire pour les $x^{jk} (j = 0, 1, \ldots, \nu - 1;\ k = 0, 1)$ et les $z^{\lambda 0} (\lambda = 0, 1, \ldots, \omega)$, satisfont aux équations (91) et donc aussi aux équations (80) qui ne diffèrent des précédentes que par la forme. Par hypothèse, en outre, les $z^{\lambda 0}$ vérifient la (87); pour ce que nous avons dit au n° 53, il s'ensuit de là que seront vérifiées *toutes* les équations (86).

Nous sommes donc dans les mêmes hypothèses du n° 42 (sauf le changement de μ en ω); pour les équations (68) de ce numéro, nous avons, par conséquent,

$$(97) \qquad \sum_{j=1}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{1}\gamma_{\lambda,j-1,k}\psi_{jk}+\gamma_{\lambda,\nu-1,1}\chi=0 \qquad (\text{pour } \lambda=0,1,\ldots,\omega-1).$$

Les ψ_{jk} et les χ sont données par les (68'); or, les équations (94), (95), (96) montrent que

$$\psi_{j0}=0 \qquad (\text{pour } j=0,1,\ldots,\nu-1),$$
$$\psi_{j1}=0 \qquad (\text{pour } j=0,1,\ldots,\nu-\omega),$$

et, par conséquent, les (97) se réduisent à

$$\sum_{\nu=\nu-\omega+1}^{\nu-1}\gamma_{\lambda,j-1,1}\psi_{j1}+\gamma_{\lambda,\nu-1,1}\chi=0 \qquad (\text{pour } \lambda=0,1,\ldots,\omega-1).$$

Celles-ci sont ω équations linéaires et homogènes dans les ω quantités ψ_{j1} (pour $j=\nu-\omega+1, \ldots, \nu-1$) et χ; le déterminant des coefficients est précisément le déterminant Λ non nul, considéré au n° 54. D'ici on conclut que toutes les quantités ψ_{j1} et la χ doivent être nulles. Pour les premières, on doit avoir

$$x^{j1}=\frac{\partial^{j+1}x}{\partial u^j\,\partial v} \qquad (\text{pour } j=0,1,\ldots,\nu-1),$$

et alors ces relations avec les (94) montrent que la $\chi=0$ exprime précisément que la x est une solution de l'équation (E) proposée.

56. Il nous reste encore à prouver la propriété que nous avons admise au n° 54, c'est-à-dire que le déterminant Λ n'est pas nul.

Supposons, en effet, par l'absurde qu'on ait $\Lambda=0$. Dans cette hypothèse, on pourra éliminer entre les (91) les quantités $\xi_{\nu-\omega}$, $\xi_{\nu-\omega+1}, \ldots, \xi_{\nu-1}$, et nous obtenons ainsi une relation de la forme suivante :

$$(98) \qquad \xi_{\nu-\omega'}=\sum_{j=0}^{\nu-\omega'-1}p_j\xi_j+\sum_{\lambda=1}^{\omega}q_\lambda z^{\lambda-1,0} \qquad (\text{avec } \omega'>\omega),$$

puisque les ξ_j ne peuvent pas toutes disparaître en vertu d'une observation faite à la fin du n° 53. La (98) est une conséquence des équations (91), et donc aussi des équations (86). Dérivons-la par rapport à u 1, 2, ..., $\omega' - 1$ fois, en éliminant la $z^{\omega 0}$ chaque fois qui paraît au second membre, au moyen de la (87) [qui est — elle aussi — une conséquence des (86)]. Nous obtenons ainsi en total avec la (98), $\omega' > \omega$ équations linéaires entre les ω quantités $z^{\lambda-1,0}$ (pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \omega$), et par conséquent, on pourra toujours éliminer ces quantités entre un certain nombre d'entre elles. On obtient ainsi un lien linéaire entre les seules x^{jk} pour $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ et $k = 0, 1$, comme il est manifeste d'après les expressions (91') des ξ_j, et la forme de l'équation (98); et, d'autre part, une telle relation ne peut pas être une conséquence des équations (86), comme nous l'avons déjà observé au n° 53.

En résumant les principaux résultats obtenus jusqu'à présent dans ce paragraphe, nous pouvons dire que :

Lorsqu'on a une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique, on a deux cas, suivant que le déterminant Θ du n° 43 est différent de zéro ou bien est nul.

Si $\Theta \neq 0$, ce qui sera le cas général, on peut considérer une autre équation $\mathfrak{L}$ d'espèce ν et du type hyperbolique — la deuxième transformée de Laplace de l'équation donnée — dont l'intégration est parfaitement équivalente à celle de l'équation proposée.

Si $\Theta = 0$, l'équation donnée est spécialisée, et pour en obtenir toutes les solutions, il suffit d'intégrer successivement une équation linéaire homogène aux dérivées ordinaires d'ordre ω et une équation $\mathfrak{L}$ d'espèce $\nu - \omega$ du type hyperbolique et non homogène (avec $1 \leqq \omega \leqq \nu$).

57. Si l'équation donnée est spécialisée $\rho = 2\nu - \mu$ fois, le système (69) du n° 43 admet précisément ρ solutions γ_{0jk} linéairement indépendantes. Fixons-en une; en correspondance, l'équation (53) définira une fonction z telle que si x est une solution de l'équation proposée, soient valables des relations de la forme

$$(99) \qquad z^{\lambda 0} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{1} \gamma_{\lambda jk} x^{jk} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, \omega - 1),$$

ω étant le nombre défini au n° 52 ($\omega \leqq \rho \leqq \mu$). Mais l'équation (87), et celles qu'on tire d'elle en la dérivant successivement 1, 2, ..., fois par rapport à u, montrent que $z^{\omega 0}$, $z^{\omega+1,0}$, $z^{\omega+2,0}$, ... doivent, elles aussi, s'exprimer avec des formules de la forme (99). Donc :

La fonction z considérée est telle que, si x est une solution quelconque de l'équation (E), *elle et toutes ses dérivées successives $z^{\lambda 0}$ s'expriment avec des formules de la forme* (99). *La fonction z sera dite constituer une fonctionnelle de x.*

Si l'équation (E) *est ρ fois spécialisée* ($1 \leqq \rho \leqq \nu$), *les fonctionnelles de x forment un système linéaire ∞^ρ*, c'est-à-dire qu'on les obtient toutes en faisant une combinaison linéaire de ρ indépendantes d'entre elles. Si z est une fonctionnelle de x, sont encore telles *toutes* ses dérivées successives. A chaque fonctionnelle de x est attaché un nombre ω, que nous dirons *son degré* ($1 \leqq \omega \leqq \rho \leqq \nu$), qui est le degré de l'équation différentielle de la forme (87) et du degré *le plus bas*, à laquelle [en vertu de la (E) satisfait la fonctionnelle z considérée.

Si l'équation (E) *n'est pas spécialisée, la x n'admet pas des fonctionnelles z*; en effet (n° 43), si $\Theta = M^{(2\nu)} \neq 0$, le système $S_1^{(2\nu)}$ n'admet pas de solution (constituée de nombres γ_{0jk} qui ne soient pas tous nuls); et, par conséquent (n° 41), on ne peut pas avoir, en vertu de la (E), des relations de la forme (99), pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu$.

58. Si nous appliquons une transformation quelconque des transformations (12) ou (14) considérées au n° 23, la (E) se transforme en une équation du même genre dans la nouvelle inconnue $\overline{x}$. Cela posé, il est évident, d'après les (13), (15) et le numéro précédent, que :

Si z est une fonctionnelle de x du degré ω, elle est encore une fonctionnelle, et du même degré ω, de la fonction transformée $\overline{x}$.

Pour ce que nous avons dit au numéro précédent, on a alors le corollaire suivant :

Les transformations (12) *et* (14) *considérées au n° 23 changent une équation $\mathfrak{L}$ qui ne soit pas spécialisée, en une équation $\mathfrak{L}$ qui n'est pas* *spécialisée, et une équation $\mathcal{E}$ qui soit ρ fois spécialisée, en une équation $\mathcal{E}$ qui est, elle aussi, ρ fois spécialisée.*

Si nous nous rappelons que le fait que l'équation (E) soit spécialisée s'exprime en annulant le déterminant Θ considéré au n° 43, nous aurons que :

Le déterminant Θ est un invariant de l'équation (E), *par rapport aux transformations* (12) *et* (14) (1).

59. Nous avons déjà incidemment remarqué (n° 47) que, aux notations près, les (75) coïncident avec les (29); de même, les (72) coïncident avec les (33). Ceci démontre que :

Les deux transformations de Laplace, étudiées dans ce paragraphe et dans le paragraphe précédent, sont l'une l'inverse de l'autre.

En d'autres termes, si les invariants Δ et Θ de l'équation (E) ne sont pas nuls, nous pourrons substituer à cette équation deux équations de même forme, dont l'intégration entraînera celle de (E). Les deux nouvelles équations (E_1) et (E_{-1}) sont respectivement *la première et la deuxième transformée de* Laplace de l'équation donnée; on peut évidemment appliquer la même méthode à ces deux équations, mais elle ne donnera pas deux équations nouvelles pour chacune d'elles. En effet, pour les remarques qui précèdent, et pour des théorèmes des nos 28 et 48, la deuxième transformée de Laplace de (E_1) et la première transformée de Laplace de (E_{-1}) sont *équivalentes* à l'équation donnée (E).

On voit donc que les deux transformations de Laplace, appliquées successivement, nous donneront seulement *une suite linéaire d'équations :*

$$\ldots,\quad (E_{-2}),\quad (E_{-1}),\quad (E),\quad (E_1),\quad (E_2),\quad \ldots \tag{100}$$

à indices positifs et négatifs, dans laquelle chaque équation (E_i) se

(1) Si l'équation (E) est spécialisée, la plus grande et la plus petite des valeurs que peut atteindre le degré ω des diverses fonctionnelles de x sont manifestement des invariants numériques de l'équation (E).

déduira de l'équation (E_{i-1}) par la première transformation de Laplace, et de l'équation (E_{i+1}) par la deuxième.

La suite (100) sera en général illimitée des deux côtés; toutefois, elle pourra être bornée dans un sens ou dans l'autre. Précisément, elle s'arrêtera à droite si l'on parvient à une équation (E_i) avec $i \geqq 0$) qui soit *particularisée*, et à gauche si l'on parvient à une équation (E_i) (avec $i \leqq 0$) qui soit *spécialisée*. Dans ces deux cas, le problème d'intégrer l'équation (E_i) — et par suite la (E) — se décompose en deux de nature plus simple, comme il est précisé par les théorèmes des nos 32 et 55.

IV. — Transformation de Laplace des équations $\mathcal{E}$ d'espèce $\nu > 1$ et du type parabolique.

60. On peut démontrer, pour les équations du type parabolique, des propositions toutes pareilles à celles que nous avons développées dans les deux paragraphes précédents pour les équations $\mathcal{E}$ du type hyperbolique. Nous nous placerons dans le cas général et nous nous bornerons à traduire analytiquement les considérations géométriques du paragraphe IV de la première Partie.

61. Supposons qu'on ait une équation $\mathcal{E}$ d'espèce $\nu > 1$ et du type parabolique

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} A_{i0} x^{i0} + \sum_{i=0}^{\nu-1} A_{i1} x^{i1} = 0 \tag{101}$$

avec

$$A_{\nu+1,0} \neq 0.$$

Tâchons de déterminer des quantités $b_{000}, b_{100}, \ldots, b_{\nu-1,0,0}$ qui ne soient pas toutes nulles et telles que, si l'on pose

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} b_{\lambda 00} x^{\lambda 0}, \tag{102}$$

on ait, dès que x satisfait à la (101),

$$y^{01} = \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} b_{\lambda 01} x^{\lambda 0}. \tag{103}$$

On voit tout de suite en éliminant la y entre les (102), (103) et en comparant avec la (101), qu'on doit avoir

$$(104)\qquad b_{i00} = \alpha A_{i1} \qquad (\text{pour } i = 0, 1, \ldots, \nu - 1).$$

$$(105)\qquad \begin{cases} b_{i01} = b_{i00}^{01} - \alpha A_{i0} & (\text{pour } i = 0, 1, \ldots, \nu - 1), \\ b_{\nu 01} = -\alpha A_{\nu 0}, \\ b_{\nu+1,0,1} = -\alpha A_{\nu+1,0}, \end{cases}$$

α étant une fonction non nulle arbitraire de u et v.

Dérivons la (102) 1, 2, ..., $\nu+1$ fois par rapport à u et la (103) 1, 2, ..., $\nu-1$ fois par rapport à u; nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(106)\qquad \begin{cases} y^{i0} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu} b_{\lambda i0}\, x^{\lambda 0} & (\text{pour } i = 0, 1, \ldots, \nu+1), \\ y^{i1} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu} b_{\lambda i1}\, x^{\lambda 0} & (\text{pour } i = 0, 1, \ldots, \nu-1), \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients $b_{\lambda jk}$ se calculent aisément de proche en proche à partir des coefficients $b_{\lambda 00}$ et $b_{\lambda 01}$, qui sont fournis par les (104), (105). Remarquons seulement qu'on a

$$(107)\qquad \begin{cases} b_{\lambda i0} = 0 & \text{si} \quad \lambda > \nu + i - 1, \\ b_{\lambda i1} = 0 & \text{si} \quad \lambda > \nu + i + 1; \end{cases}$$

$$(108)\qquad \begin{cases} b_{\nu+i-1,i,0} = b_{\nu-1,0,0} = \alpha A_{\nu-1,1}, \\ b_{\nu+i+1,i,1} = b_{\nu+1,0,1} = -\alpha A_{\nu+1,0}. \end{cases}$$

En tenant compte des (107), on a en particulier des (106) :

$$(109)\qquad \begin{cases} y^{j0} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} b_{\lambda j0}\, x^{\lambda 0} & (\text{pour } i = 0, 1, \ldots, \nu), \\ y^{j1} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} b_{\lambda j1}\, x^{\lambda 0} & (\text{pour } j = 0, 1, \ldots, \nu-2). \end{cases}$$

Celles-ci sont 2ν équations linéaires dans les 2ν quantités

$$x^{\lambda 0} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1);$$

indiquons avec B le déterminant des coefficients; il sera une fonction rationnelle entière des coefficients A_{ik} de l'équation (101) donnée et de leurs dérivées, et en plus de la fonction α arbitraire qui paraît dans les formules (104), (105). Supposons, ce qui sera le cas général,

$$B \neq 0.$$

Nous pourrons résoudre les (109) par rapport aux $x^{\lambda 0}$, et nous aurons ainsi des relations

$$x^{\lambda 0} = \sum_{j=0}^{\nu} c_{\lambda j 0} y^{j0} + \sum_{j=0}^{\nu-2} c_{\lambda j 1} y^{j1} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1). \tag{110}$$

Les (106) sont $2\nu + 2$ équations linéaires par rapport aux $2\nu + 1$ quantités

$$x^{\lambda 0} \qquad (\text{pour } \lambda = 0, 1, \ldots, 2\nu);$$

en éliminant ces quantités, nous obtiendrons une relation de la forme

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} \varpi_{i0} y^{i0} + \sum_{i=0}^{\nu-1} \varpi_{i1} y^{i1} = 0. \tag{111}$$

En tenant compte des (107), (108), on voit en particulier que

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi_{\nu+1,0} &= - b_{2\nu,\nu-1,1} B = \alpha A_{\nu+1,0} B \neq 0, \\ \varpi_{\nu-1,1} &= \quad b_{2\nu,\nu+1,0} B = \alpha A_{\nu-1,1} B. \end{aligned} \right. \tag{112}$$

On peut démontrer qu'on obtient encore l'équation (111) en éliminant la x entre deux des équations (110), en exprimant que $x^{\lambda 0} - \frac{\partial}{\partial u} x^{\lambda-1,0} = 0$.

On a donc vu, pour ce qui précède, que si x est une solution quelconque de l'équation (101) donnée, la fonction y définie par

$$y = \alpha \sum_{j=0}^{\nu-1} A_{i1} x^{i}$$

satisfait à l'équation (111).

Ce résultat peut être inverti. Précisément, on peut démontrer que, si y est une solution quelconque de l'équation (111), la fonction $x = x^{00}$ qu'on a des (110) pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$x = \sum_{j=0}^{\nu} c_{0j0} y^{j0} + \sum_{j=0}^{\nu-2} c_{0j1} y^{j1},$$

est une solution de l'équation (101).

La (111) est pour y une équation $\mathcal{L}$ du même genre de l'équation proposée. Elle peut prendre un nombre infini de déterminations, suivant la valeur qu'on donne à la fonction α; cependant, toutes ces déterminations sont *équivalentes* entre elles. L'équation (111) sera dite *la première transformée* de Laplace de l'équation donnée.

Nous n'insistons pas sur l'invariance de cette transformation par rapport aux transformations (12) et (16) du n° 23; ni, non plus, sur les divers cas particuliers qui se présentent si $B = 0$, et dans lesquels le problème de l'intégration de l'équation donnée se décompose en deux problèmes de nature plus simple. Remarquons seulement que maintenant, aux invariants analogues de ceux que nous avons considérés au paragraphe II, on doit ajouter l'expression

$$\frac{A_{\nu-1,1}}{A_{\nu+1,0}}.$$

Elle ne change pas en appliquant à l'équation donnée la première transformation de Laplace [*cf.* les (112)], ou bien une transformation (12) [*voir* les (13)]; tandis que si l'on applique une transformation (16), elle est seulement multipliée par $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^{-2} \frac{d\bar{v}}{dv}$ [*voir* les (17)]. Un système autoconjugué, qui correspond à une équation (111) pour laquelle ladite expression soit nulle, est tel que pour chacun de ses points, l'espace Ω^* considéré au n° 6 contient (non seulement le E_ν, mais) le $E_{\nu+1}$ osculateur à la courbe du système à laquelle il appartient.

62. En général, on peut intervertir, et d'une seule manière, la transformation précédente.

Tâchons, à cet effet, de déterminer des quantités

$$\gamma_{000}, \gamma_{010}, \ldots, \gamma_{0\nu 0}; \quad \gamma_{001}, \gamma_{011}, \ldots, \gamma_{0,\nu-2,1} \tag{113}$$

qui ne soient pas toutes nulles et telles que, si nous posons

$$z = \sum_{j=0}^{\nu} \gamma_{0j0}\, x^{j0} + \sum_{=0}^{\nu-2} \gamma_{0j1}\, x^{j1}, \tag{114}$$

on ait, dès que x satisfait à la (101),

$$(115)\qquad z^{\lambda 0}=\sum_{j=0}^{\nu}\gamma_{\lambda j0}\,x^{j0}+\sum_{j=0}^{\nu-2}\gamma_{\lambda j1}\,x^{j1}\qquad (\text{pour}\quad \lambda=0,\,1,\,\ldots,\,2\nu-1).$$

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités inconnues (113) s'obtiennent aisément en éliminant la z entre la (115) et la

$$z^{\lambda-1,0}=\sum_{j=0}^{\nu}\gamma_{\lambda-1,j,0}\,x^{j0}+\sum_{j=0}^{\nu-2}\gamma_{\lambda-1,j,1}\,x^{j1}\qquad (\text{pour}\quad \lambda=1,\,2,\,\ldots,\,2\nu-1),$$

et en comparant avec la (101) l'équation obtenue ainsi. En supposant pour simplifier $A_{\nu+1,0}=1$, ce qui ne diminue en rien la généralité, on a

$$(116)\qquad \gamma_{\lambda jk}=\gamma_{\lambda-1,j-1,k}-A_{jk}\gamma_{\lambda-1,\nu,0}+\gamma^{10}_{\lambda-1,j,k}$$

$$\left(\text{pour}\quad \begin{matrix} k=0 & \text{et} & j=0,\,1,\,\ldots,\,\nu \\ k=1 & \text{et} & j=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-2 \end{matrix}\qquad \lambda=1,\,2,\,\ldots,\,2\nu-1\right),$$

$$(117)\qquad \gamma_{\lambda-1,\nu-2,1}-A_{\nu-1,1}\,\gamma_{\lambda-1,\nu,0}=0\qquad (\text{pour}\quad \lambda=1,\,2,\,\ldots,\,2\nu-1).$$

Les formules (116) déterminent les $\gamma_{\lambda jk}$ de proche en proche, en partant des γ_{0jk}; il faut déterminer ces quantités de façon que les $\gamma_{\lambda jk}$ (obtenues comme il a été dit) vérifient les $2\nu-1$ équations (117). On démontre que, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que les quantités (113) satisfassent au système suivant :

$$(118)\qquad \gamma_{0j1}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-2}T_{j\sigma}\gamma_{0,j+\sigma+2,0}=0\qquad (\text{pour}\quad j=\nu-2,\,\nu-3,\,\ldots,\,-\nu),$$

dans lequel les quantités γ_{0jk} dont l'indice j est négatif, sont identiquement nulles. Les $T_{j\sigma}$ se calculent de proche en proche avec les formules

$$\begin{aligned} T_{j0} &= A_{\nu-1,1},\\ T_{j-1,\sigma} &= T_{j\sigma}-T^{10}_{j,\sigma-1}\qquad (\text{pour}\quad \sigma=1,\,2,\,\ldots,\,\nu-j-2),\\ T_{j-1,\nu-j-1} &= A_{j1}-\sum_{\sigma=0}^{\nu-j-2}T_{j\sigma}A_{j+\sigma+2,0}-T^{10}_{j,\nu-j-2}. \end{aligned}$$

Les (118) sont $2\nu-1$ équations linéaires et homogènes dans les

2ν quantités (113); en général, elles *détermineront* d'une seule façon les rapports mutuels de ces inconnues. Par suite, la fonction z, pour laquelle les (115) coexistent en vertu de la (101), est *définie* par la (114), à un facteur arbitraire près.

Les (115) (dans lesquelles les $\gamma_{\lambda jk}$ ont été déterminées comme on l'a dit) sont 2ν équations linéaires dans les 2ν quantités x^{jk}. En général, on pourra les résoudre par rapport à ces quantités; et l'on obtiendra des relations de la forme

$$(119) \quad \begin{cases} x^{j0} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} \beta_{\lambda j0} z^{\lambda 0} & (\text{pour } j = 0, 1, \ldots, \nu) \\ x^{j1} = \sum_{\lambda=0}^{2\nu-1} \beta_{\lambda j1} z^{\lambda 0} & (\text{pour } j = 0, 1, \ldots, \nu-2). \end{cases}$$

On démontre que

$$\beta_{\lambda j0} = 0 \quad \text{si} \quad \lambda > \nu + j - 1,$$
$$\beta_{\lambda j1} = 0 \quad \text{si} \quad \lambda > \nu + j + 1,$$

donc des (119) on a en particulier, pour $j = 0$,

$$(120) \quad \begin{aligned} x^{00} &= \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \beta_{\lambda 00} z^{\lambda 0}, \\ x^{01} &= \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} \beta_{\lambda 01} z^{\lambda 0}. \end{aligned}$$

En éliminant la x entre ces équations, on obtient une relation du type suivant :

$$(121) \quad \sum_{i=0}^{\nu+1} F_{i0} z^{i0} + \sum_{i=0}^{\nu-1} F_{i1} z^{i1} = 0,$$

avec $F_{\nu+1,0} \neq 0$.

On a vu, par conséquent, que si x est une solution quelconque de l'équation (101) donnée, la fonction z définie par la (114) satisfait à l'équation (121). On démontre inversement que, si z est une solution quelconque de la (121), la fonction $x = x^{00}$ définie par la (120) est une solution de l'équation proposée.

La (121) est une équation $\mathcal{L}$ d'espèce ν et du type parabolique, qui sera appelée *la deuxième transformée de Laplace* de l'équation donnée.

On voit pour tout ce qui précède l'analogie étroite qu'il y a entre les équations $\mathcal{L}$ des types hyperbolique et parabolique ; la raison de ce fait est expliquée par la remarque faite au n° 9. Nous nous contenterons, par conséquent, pour le cas parabolique, des quelques considérations que nous avons rapidement ébauchées jusqu'ici dans le présent paragraphe.