ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. BLOCH

**Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 43 (1926), p. 309-362
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1926_3_43__309_0>

SUR

# LES SYSTÈMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

## A VARIÉTÉS LINÉAIRES LACUNAIRES

PAR M. A. BLOCH

### I. — Introduction.

1. Le présent Mémoire est le développement d'une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le 13 octobre 1924 (1). Il s'agit d'une généralisation du théorème sur les sommes d'exponentielles donné par M. Borel, dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX). Les propositions établies ici sont à ce théorème ce que les théorèmes de MM. Landau et Schottky sont à celui de M. Picard. Elles généralisent à la fois le théorème de M. Borel et ceux de MM. Landau et Schottky.

Un des énoncés analogues au théorème de M. Landau qui seront obtenus est le suivant :

THÉORÈME. VIII. — *Soient*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots; \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots; \qquad \ldots; \qquad k(x) = e_0 + e_1 x + \ldots$$

*n fonctions d'une variable $x$, holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, ne s'y annulant pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. Les termes constants $a_0$, $b_0$, ..., $e_0$ sont supposés différents de l'unité, et tels que la somme d'un nombre quelconque d'entre eux diffère de zéro et de l'unité.*

---

(1) *Sur le théorème de M. Borel et sur une généralisation de la théorie de Picard-Landau* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 666).

*Alors les coefficients* $a_1, b_1, \ldots, e_1$ (*et d'une manière plus générale, les coefficients des termes de degré* $i$, $a_i, b_i, \ldots, e_i$) *admettent une borne supérieure dépendant uniquement de* $a_0, b_0, \ldots, e_0$ (*et de* $i$).

Cet énoncé contient, comme on voit, une condition restrictive relative aux termes constants; cela tient à ce qu'une somme d'exponentielles de fonctions entières en nombre supérieur à 2 peut être égale à 1 sans que toutes se réduisent à des constantes; il y a donc dans la théorie actuelle des cas *spéciaux*, ce qui ne se présentait pas dans la théorie de Picard-Landau.

2. Dans la section II du présent Mémoire sont établis sommairement les théorèmes de MM. Picard, Landau et Schottky par une méthode à la fois élémentaire et relativement rapide, dont l'exposition est destinée à alléger la substance des sections ultérieures.

Dans la section III, le théorème de M. Borel est établi et interprété (comme dans la Note citée des *Comptes rendus*), de manière adéquate à l'objet du Mémoire actuel.

La section IV contient certains lemmes, d'ailleurs intéressants en eux-mêmes, qui seront utilisés dans la suivante.

L'objet de la section V est l'étude des systèmes de deux fonctions holomorphes d'une variable, qui, dans un domaine donné, ne s'annulent pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. Des théorèmes sont obtenus (donnés déjà en partie dans la Note des *Comptes rendus*), analogues à ceux de MM. Landau et Schottky; ils comportent la distinction entre le cas général et deux cas spéciaux pour lesquels les énoncés sont un peu plus restrictifs.

Il s'agit dans la section VI des systèmes de $n$ fonctions holomorphes de $n$ variables qui, dans un domaine donné, ne s'annulent pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. Un théorème ressemblant à celui de M. Landau, et déjà annoncé aux *Comptes rendus*, est démontré à leur sujet, et à la fin de cette section et de la suivante sont établis divers compléments.

Dans la section VII sont étudiés les systèmes de $n$ fonctions holomorphes d'une variable qui, dans un domaine donné, ne s'annulent pas et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. On obtient pour ces systèmes des résultats généralisant ceux de la section V. La démonstration est donnée sous forme condensée; l'interprétation géométrique permet de simplifier les recherches accessoires et d'obtenir avec aisance des énoncés invariants dans le groupe projectif.

La section VIII contient diverses observations et suppositions, tant à propos des différentes parties du Mémoire que sur des sujets voisins.

3. Il n'était pas douteux *a priori* qu'au théorème de M. Borel dussent correspondre des propositions en termes finis, de même qu'au théorème de M. Picard correspond le théorème de M. Landau. Cela résulte d'un principe général qu'on peut formuler ainsi : *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito*. Mais quelles étaient les propositions en question? Voilà ce qui n'était pas évident au premier abord. Les résultats publiés aux *Comptes rendus* sont, comme nous l'avons dit, exacts, et seront démontrés dans ce Mémoire; mais la démonstration n'en est pas tout à fait aussi simple que le texte de la Note pouvait le donner à croire (1). C'est là un point sur lequel nous reviendrons au paragraphe VIII.

Il ne sera pas inutile de rappeler les principales phases du développement de la théorie des fonctions entières (2).

Les idées génératrices de la théorie contemporaine sont dues, pour la plupart, à M. Hadamard : démonstration du théorème de M. Picard au moyen du théorème du minimum du module et de la dérivation; inégalité relative aux zéros, qui devait conduire M. Jensen à la formule bien connue sous son nom; polygone de Newton donnant la croissance d'une fonction entière dont les coefficients sont donnés; convexité de $\log M(r)$ en fonction de $\log r$.

M. Borel montra que ces principes étaient vrais pour des fonctions entières absolument quelconques; dans ses travaux, le rôle essentiel est joué par les modules maxima et minima des fonctions considérées, qu'il compare à l'aide des méthodes de sa théorie de la croissance.

---

(1) D'autre part il s'est glissé dans le texte de la proposition donnée comme lemme (p. 666-667) une erreur de transcription, d'ailleurs sans importance.

(2) Pour les renseignements bibliographiques : G. Valiron, *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, 1925).

Dans deux Mémoires publiés en 1914 et 1918 aux *Acta mathematica*, M. Wiman, envisageant encore le module maximum, obtint par des considérations nouvelles des résultats beaucoup plus serrés; ceux-ci furent amenés par les travaux de M. Valiron à un haut degré de précision et de généralité.

Enfin, dans ces toutes dernières années, MM. F. et R. Nevanlinna créèrent la méthode originale et féconde des *valeurs moyennes logarithmiques* (1), qui s'applique avec une simplicité inattendue à la résolution d'un grand nombre de questions.

Ces deux dernières méthodes, celle de MM. Wiman et Valiron, et celle de MM. Nevanlinna, sont le dernier mot de la théorie moderne des fonctions uniformes. Suivant la question traitée, c'est l'une ou c'est l'autre dont l'emploi se trouve être le plus commode. Elles réclament d'ailleurs encore toutes deux un certain nombre de perfectionnements.

Dans un travail antérieur (2), nous avons développé les conséquences en termes finis de la théorie de M. Valiron. Nous y avons trouvé que les propositions de théorie des fonctions obtenues jusqu'alors exclusivement à l'aide de l'uniformisation fuchsienne pouvaient se déduire avec la plus grande simplicité du théorème suivant :

*Soit*

$$f(x) = x + \ldots$$

*une fonction holomorphe dans le cercle-unité* $|x| < 1$, *s'annulant à l'origine et y ayant une dérivée égale à un. Alors, il existe une constante numérique* K *telle que le domaine riemannien engendré par la fonction contienne un cercle à un seul feuillet (dont le centre peut être supposé réel) de rayon au moins égal à* K.

Dans le présent Mémoire, nous nous placerons alternativement, suivant que cela se trouvera être plus rapide, au point de vue de M. Borel ou à celui de MM. F. et R. Nevanlinna.

---

(1) *Cf.*, par exemple, R. NEVANLINNA, *Untersuchungen über den Picard'schen Satz* (*Acta Societatis Fennicæ*, 1924).

(2) *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières, et la théorie de l'uniformisation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1925).

## II. — Les théorèmes de MM. Picard, Landau, Schottky.

4. Nous allons, dans ce paragraphe, nous placer au point de vue de M. Borel dans son Mémoire des *Acta mathematica*, mais en remplaçant l'emploi du minimum du module par des considérations plus simples.

Lemme 1. — *Soit $f(z)$ une fonction égale à* 1 *à l'origine, holomorphe dans le cercle $|z| \leqq R$, dont le module maximum y est égal à $M(R, f)$. On pose $f(z) = P(z)\varphi(z)$, où $P(z)$ est un polynome égal à* 1 *à l'origine, dont les zéros appartiennent aussi à $f(z)$, avec un ordre de multiplicité au moins égal, et sont inférieurs en module à un nombre $r < R$. Dans ces conditions, le module maximum de $\varphi(z)$ dans le cercle de rayon R satisfait à l'inégalité*

$$\log M(R, \varphi) < \frac{2R^2}{(R-r)^2} \log M(R, f).$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de $P(z)$. Le long de la circonférence de rayon R, $P(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|P(z)| > \left(\frac{R}{|a_1|} - 1\right) \cdots \left(\frac{R}{|a_n|} - 1\right) = \Omega.$$

Le théorème de M. Jensen donne

$$n < \frac{\log M(R, f)}{\log \frac{R}{r}}.$$

On a donc

$$\log \Omega > \log\left(\frac{R}{r} - 1\right) \frac{\log M(R, f)}{\log \frac{R}{r}} > -\frac{R^2}{(R-r)^2} \log M(R, f).$$

Or, en tout point de la circonférence $|z| = R$ a lieu l'inégalité

$$\log|\varphi(z)| < \log M(R, f) - \log|P(z)|.$$

Eu égard à la limite inférieure de $\log \Omega$ qui vient d'être trouvée, on obtient l'inégalité de l'énoncé du lemme.

Ce lemme 1 nous sert à établir le suivant :

Lemme 2. — *Soit* $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ *une fonction holomorphe dans le cercle* $|z|\leqq R$, *les fonctions* $f_1$ *et* $f_2$ *étant holomorphes dans ce même cercle, et* $f_2$ *égale à* 1 *à l'origine. On a, pour tout cercle de rayon* $r<R$, *l'inégalité*

$$\log M(r, f)<\log M(R, f_1)+\frac{36 R^3}{(R-r)^3}\log M(R, f_2).$$

Soit $P(z)$ le polynome égal à 1 à l'origine dont les zéros sont, avec leur ordre de multiplicité, ceux de $f_2$ dans le cercle de rayon $r<R$. Posons

$$f_1=P\varphi_1, \quad f_2=P\varphi_2, \qquad f=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

On a, d'après le lemme 1,

$$\log M(R, \varphi_2)<\frac{2 R^2}{(R-r)^2}\log M(R, f_2).$$

D'autre part, d'après la démonstration même de ce lemme, on a, le long de la circonférence de rayon R,

$$\log|P(z)|>-\frac{R^2}{(R-r)^2}\log M(R, f_2),$$

et il en résulte, comme plus haut,

$$\log M(R, \varphi_1)<\log M(R, f_1)+\frac{R^2}{(R-r)^2}\log M(R, f_2).$$

On a donc des bornes supérieures de $|\varphi_1|$ et $|\varphi_2|$ sur le cercle de rayon R, valables aussi sur le cercle de rayon $r$; de plus, $\varphi_2$ n'a pas de zéros à l'intérieur de ce cercle, et est égale à 1 à l'origine. Soit alors $r'$ un nombre inférieur à $r$; l'inégalité de Hadamard-Borel donne sur le cercle de rayon $r'$

$$\log|\varphi_2(z)|>-\frac{2 r'}{r-r'}\log M(r, \varphi_2).$$

Si nous supposons $r=\frac{R+r'}{2}$, nous avons donc

$$\log M\left(r', \frac{1}{\varphi_2}\right)<\frac{32 R^3}{(R-r')^3}\log M(R, f_2),$$

et, d'autre part,

$$\log M(r', \varphi_1) \lessgtr \log M(R, f_1) + \frac{4R^2}{(R-r')^2} \log M(R, f_2).$$

D'où, en écrivant de nouveau $r$ à la place de $r'$, l'inégalité à établir.

De cette inégalité, on peut déduire sans peine par les méthodes classiques de la théorie des fonctions croissantes, que si $f, f_1, f_2$ sont des fonctions entières, on a, si petit que soit $\varepsilon$ positif donné,

$$\log M(r, f) < \log M(r, f_1) + [\log M(r, f_2)]^{1+\varepsilon}$$

à partir d'une certaine valeur de $r$, sauf peut-être pour des valeurs de $r$ appartenant à des intervalles où la variation totale de $\log r$ est finie ; et l'on pourrait donner à cet énoncé une forme précise suffisante pour les applications qui suivent. Mais il nous sera aussi commode d'employer directement l'inégalité obtenue.

5. Le premier théorème de M. Picard sur l'impossibilité pour une fonction entière d'admettre deux valeurs lacunaires finies distinctes, à moins de se réduire à une constante, s'en déduit en effet aisément. Soit

$$e^F + e^G - 1 = 0.$$

Il vient, en dérivant et résolvant,

$$e^F = -\frac{G'}{F'-G'}, \qquad e^G = \frac{F'}{F'-G'}.$$

Si F et G ne sont pas des constantes, nous pouvons placer l'origine en un point où $F' - G' \neq 0$, et dès lors appliquer le lemme 2 aux seconds membres, en utilisant l'inégalité $M'(r) < \frac{M(R)}{R-r}$ qui a lieu entre le module maximum $M(R)$ d'une fonction holomorphe, et celui $M'(r)$ de sa dérivée ; nous obtenons ainsi des bornes supérieures des modules des seconds membres en fonction de $M(\rho, F)$ et $M(\rho, G)$, dans lesquelles nous pouvons remplacer ceux-ci par le plus grand des deux, soit $U(\rho)$.

Or, en appliquant aux premiers membres l'inégalité de Hadamard-Borel, nous obtenons une borne supérieure de $M(r, F)$ en fonction de $M(R, e^F)$, de $M(r, G)$ en fonction de $M(R, e^G)$, et par suite de $U(r)$ en fonction de $M(R, e^F)$ et $M(R, e^G)$.

Eu égard enfin à l'égalité des premiers membres aux seconds, il vient une inégalité entre les valeurs de la fonction positive croissante $U(\rho)$ pour deux valeurs différentes de $\rho$, de laquelle il résulte, par un procédé classique, que $U(\rho)$, pour une valeur finie de $\rho$, dépasse toute valeur finie ; ce qui est absurde.

La même démonstration s'applique, avec de légères modifications, à l'impossibilité pour une fonction à point essentiel isolé d'admettre dans le voisinage de ce point trois valeurs lacunaires distinctes (pouvant comprendre $\infty$) ; cette impossibilité revient, en effet, à celle de l'identité

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x} + \ldots\right) x^m e^F + \left(1 + \frac{\beta}{x} + \ldots\right) x^p e^G - 1 = 0,$$

où F et G sont des fonctions entières, $m$ et $p$ des entiers qui peuvent être supposés positifs, et où les fonctions entre parenthèses sont holomorphes à l'infini.

6. Pour obtenir le théorème de M. Landau, il suffit d'observer que, posant

$$e^{F(x)} = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots,$$

on obtient, d'après ce qui précède, en fonction de $a_0$ et $a_1$, le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel $U(\rho)$ dépasse toute valeur finie.

Le théorème de M. Schottky s'établit de manière un peu différente, et il y a lieu d'utiliser le fait qu'une fonction dont la dérivée est nulle se réduit à une constante. Observons d'abord que si l'on connaît $a_0$ et $a_1$, ce dernier non nul, on obtient par le procédé habituel, à partir de l'inégalité à laquelle satisfait $U(\rho)$ dans le cercle de rayon 1 où les valeurs 0 et 1 ne sont pas prises par la fonction holomorphe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

une borne supérieure pour $U(r)$, et par suite, pour $M(r, f)$ en fonction de $a_0$, $a_1$, et de $r < 1$. Mais supposons que $f(0) = a_0$ soit seul connu ; nous allons voir qu'on peut encore trouver une borne supérieure de $U(r)$ et de $M(r, f)$ en fonction de $a_0$ seul et de $r$.

A cet effet, distinguons deux cas, suivant que $M(r, F' - G')$ est inférieur ou supérieur à 1. S'il est inférieur, $F - G$, et par suite, $f$ sont visiblement bornés en fonction de $a_0$ et $r$. S'il est supérieur, reprenons le calcul indiqué plus haut pour le théorème de Picard-Landau, mais avec les deux modifications suivantes : d'abord, nous ne considérons, pour l'obtention des inégalités successives, que des cercles de rayon compris entre $\frac{1+r}{2}$ et 1 ; de plus, puisque l'on ne connaît plus $a_1$, mais que l'on sait seulement que $M(r, F' - G')$ est supérieur à 1, nous transportons provisoirement, pour la partie du raisonnement relative aux seconds membres des égalités, l'origine au point du cercle de rayon $r$ où $F' - G'$ dépasse 1 ; on obtient ainsi encore des bornes supérieures des seconds membres en fonction de $M(\rho, F)$ et $M(\rho, G)$, et par suite, de $U(\rho)$ ; ensuite, revenant à la première origine, on continue comme ci-dessus.

## III. — Le théorème de M. Borel.

7. Les considérations de la section précédente permettent d'établir sans peine le théorème de M. Borel :

*Si les fonctions entières $F_i(x)$ en nombre fini satisfont à une identité*

$$\sum e^{F_i} = 0,$$

*les $e^{F_i}$ se divisent en un certain nombre de groupes, et les $e^{F_i}$ de chaque groupe ne diffèrent de l'un d'entre eux que par des facteurs constants dont la somme est nulle.*

Cette proposition, qui se réduit à une tautologie lorsque l'identité n'a que deux termes, se démontre par récurrence ; c'est ainsi que nous l'avons établie précédemment lorsque l'identité a trois termes, et l'on a alors le théorème de M. Picard. Voyons donc comment on peut passer du cas de trois termes au cas de quatre.

Soit

Supposons d'abord que $e^F$, $e^G$, $e^H$ ne soient liées par aucune relation linéaire et homogène.

La somme des quatre quantités $e^F$, $e^G$, $e^H$ et $1$ étant nulle, leurs wronskiens trois à trois sont deux à deux égaux ou égaux et de signes contraires, ce que nous écrirons

$$|e^F e^G e^H| = -|e^G e^H 1| = |e^H 1 e^F| = -|1 e^F e^G|.$$

Nous avons

$$e^F = -\frac{|e^G e^H 1|}{e^G e^H} : \frac{|e^F e^G e^H|}{e^F e^G e^H}$$

et deux expressions analogues pour $e^G$, $e^H$.

Le wronskien $|e^F e^G e^H|$ n'étant pas identiquement nul, nous pouvons prendre pour origine un point où il est différent de zéro. $e^F$, $e^G$, $e^H$ sont égales à des fractions ayant un même dénominateur, et dont les termes sont visiblement des polynomes entiers par rapport aux dérivées premières et secondes de F, G, H. Désignant par $U(\rho)$ le plus grand des nombres $M(\rho, F)$, $M(\rho, G)$, $M(\rho, H)$, et opérant comme au paragraphe précédent pour la démonstration du théorème de M. Picard, on obtient encore une inégalité à laquelle satisfait $U(\rho)$ pour deux valeurs différentes de $\rho$, et cette inégalité conduit à une impossibilité.

Si maintenant nous supposons $e^F$, $e^G$, $e^H$ liées par une nouvelle relation, linéaire et homogène, nous nous servons de ce que le théorème est démontré pour une identité à trois termes : il en résulte immédiatement que si $e^F$, $e^G$, $e^H$ ne sont pas toutes des constantes, deux d'entre elles sont égales et de signes contraires, et l'autre égale à $-1$, ce qui achève la démonstration.

Cette démonstration par récurrence s'étend au cas d'une identité à un nombre quelconque de termes. Observons, en effet, que le théorème équivaut à celui-ci. *Deux au moins des termes* $e^{F_i}$ *de l'identité* $\Sigma e^{F_i} = 0$ *sont proportionnels*. Supposons alors que nous ayons une identité à $n+1$ termes, le théorème étant démontré pour $n$ termes. Si les $n$ premiers termes sont linéairement indépendants, le calcul direct déjà fait pour trois et quatre termes conduit à une impossibilité. S'ils sont liés par une relation linéaire et homogène, deux d'entre eux sont proportionnels.

Le théorème est donc démontré pour $n+1$ termes.

8. La même démonstration s'applique, avec de légères modifications, à la démonstration du théorème plus général :

*Soit supposée une identité à un nombre fini de termes*

$$\sum \left(1 + \frac{\alpha_i}{x} + \ldots\right) x^{m_i} e^{F_i} = 0,$$

*où les* $F_i$ *sont des fonctions entières, les* $m_i$ *des entiers quelconques, et où les fonctions entre parenthèses sont holomorphes à l'infini. Alors les termes de cette identité se divisent en un certain nombre de groupes, et les termes de chaque groupe ne diffèrent de l'un d'eux que par des facteurs constants dont la somme est nulle.*

Ce théorème peut s'énoncer aussi :

Théorème I. — *Soit un nombre fini de fonctions, uniformes dans le voisinage d'un même point qu'elles admettent effectivement toutes pour point essentiel isolé, et dont la somme n'est pas identiquement nulle. Alors dans un cercle, si petit soit-il, contenant ce point se présente une des circonstances suivantes : une des fonctions devient nulle ou infinie, ou bien leur somme devient égale à l'unité.*

## IV. — Quelques lemmes préliminaires.

9. Pour la démonstration des théorèmes donnés aux *Comptes rendus*, il sera indiqué d'employer ici, au lieu de la méthode proprement élémentaire des deux derniers paragraphes, la méthode des valeurs moyennes logarithmiques de MM. F. et R. Nevanlinna ; la démonstration ainsi construite sera non seulement un peu moins longue, mais encore naturellement susceptible d'extension au cas des systèmes de plusieurs fonctions d'une variable liées par une relation algébrique.

Rappelons que MM. Nevanlinna posent, la fonction $f(x)$ étant holomorphe ou méromorphe,

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}[f(re^{i\theta})]\, d\theta.$$

En désignant par $n(r, f)$ le nombre des zéros de la fonction intérieurs au cercle $|x| < r$, ils posent aussi, avec M. Valiron :

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f)}{t} dt.$$

Nous poserons, la fonction $f(x)$ étant supposée méromorphe,

$$gm(r, f) = m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Lemme 3. — *La fonction $f(x)$ étant holomorphe pour $|x| < \rho$, on a, sur tout cercle de rayon $r$ inférieur à $\rho$, l'inégalité*

$$m[r, f^{(n)}(x)] < 3\log 2 + \log n! + \overset{+}{\log}|f_0| + n\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + (n+1)\log\frac{\rho}{\rho - r} + \overset{+}{\log} m(\rho, e^f).$$

En effet, on a, d'après MM. Nevanlinna,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{f(\rho e^{i\theta})}| \frac{\rho e^{i\theta} + x}{\rho e^{i\theta} - x} d\theta,$$

d'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{f(\rho e^{i\theta})}| \frac{2n!\,\rho e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta} - x)^{n+1}} d\theta$$

et, puisque

$$m(\rho, e^f) - m(\rho, e^{-f}) = \mathcal{R}(f_0),$$

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{2n!\,\rho}{(\rho - r)^{n+1}}[-\mathcal{R}(f_0) + 2m(\rho, e^f)],$$

d'où se conclut l'inégalité annoncée.

Lemme 4. — *La fonction $f(x)$ étant méromorphe dans le cercle $x < \rho$, on a pour tout nombre $x$ de module $r$ inférieur à $\rho$, l'inégalité*

$$\log|f(x)| < \left[\frac{\rho + r}{\rho - r} m(\rho, f) + \Sigma \log\left|\frac{\rho^2 - \overline{b_\nu} x}{\rho(x - b_\nu)}\right|\right] - \left[\frac{\rho - r}{\rho + r} m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + \Sigma \log\left|\frac{\rho^2 - \overline{a_\mu} x}{\rho(x - a_\mu)}\right|\right]$$

*où les sommes du second membre sont étendues respectivement aux pôles $b_\nu$ et aux zéros $a_\mu$ de module inférieur à $\rho$.*

C'est là une conséquence immédiate de la formule de Poisson-Jensen.

L'inégalité ci-dessus a lieu *a fortiori*, si l'on supprime au second membre la somme relative aux zéros, ou bien $m\left(\rho, \frac{1}{f}\right)$.

10. Lemme 5. — *Soit*

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

*un polynome de degré n dont tous les zéros sont intérieurs au cercle-unité. A tout nombre positif $r < 1$ et à tout nombre positif $\gamma$, si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre* H *dépendant uniquement de r et de $\gamma$ (nullement des $\alpha$ ni de $n$), tel que l'inégalité*

$$|g(x)| > e^{-\mathrm{H}n}$$

*soit vérifiée pour toute valeur de $x$ inférieure à $r$ en module, sauf peut-être pour celles comprises dans des contours de longueur totale au plus égale à $\gamma$.*

Pour le cas où tout est réel et où l'on ne sort pas du domaine réel (les contours étant remplacés par des segments), cette proposition est établie dans l'Ouvrage de M. Valiron : *Lectures on the general theory of integral functions* (p. 78-79), par le calcul d'une limite supérieure de $\int_{-1}^{+1} \log|g(x)|\,dx$.

Dans un but d'abréviation nous admettrons le lemme 5, dont il est d'ailleurs facile de se passer, comme nous le montrerons dans la dernière section de ce Mémoire.

Du lemme 5, résulte le suivant :

Lemme 6. — *Soient des nombres $t$, assujettis seulement à être de module inférieur à l'unité. A tout nombre positif $r < 1$ et à tout nombre positif $\gamma$, si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre $h$ dépendant uniquement de $r$ et de $\gamma$ (nullement des $t$), tel que pour toute valeur de $x$ inférieure à $r$ en module, sauf peut-être celles comprises à l'intérieur* *de contours de longueur totale au plus égale à $\gamma$, ait lieu l'inégalité*

$$\Sigma \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| < h \Sigma \log \left| \frac{1}{t} \right|,$$

*les deux sommes étant étendues à tous les $t$.*

Nous distinguerons les $t$ de module compris entre $\frac{1+r}{2}$ et $1$, et ceux de module inférieur à $\frac{1+r}{2}$; nous poserons pour chacune des sommes

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'',$$

où $\Sigma'$ est étendue aux premiers et $\Sigma''$ aux seconds.

Remarquons que si $c$ et $d$ sont des nombres inférieurs à un en module, on a, par exemple, à l'aide de la géométrie non euclidienne,

$$\left| \frac{c-d}{1-\bar{c}d} \right| \geqq \frac{||c|-|d||}{1-|c||d|}.$$

Obtenons d'abord une inégalité entre les $\Sigma'$ : le nombre $t$ étant supposé de module compris entre $\frac{1+r}{2}$ et $1$, nous avons

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| &\leqq \log \frac{1-|x||t|}{|t|-|x|} \\ &= \log \left[ 1 + \frac{(1-|t|)(1+|x|)}{|t|-|x|} \right] < \frac{(1-|t|)(1+|x|)}{|t|-|x|} \\ &< (1-|t|)\frac{4}{1-r} < \frac{4}{1-r} \log \left| \frac{1}{t} \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Sigma' \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| < \frac{4}{1-r} \Sigma' \log \left| \frac{1}{t} \right|.$$

Passons aux $\Sigma''$. Soit $n$ le nombre des $t$ inférieurs en module à $\frac{1+r}{2}$; on a, pour un de ces $t$,

$$\log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| < \log \frac{1}{|x-t|}.$$

Alors, d'après le lemme 5, on a pour $|x| < r$, sauf peut-être à l'intérieur de contours de longueur totale inférieure à $\gamma$,

$$\Sigma'' \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| < \Sigma'' \log \frac{1}{|x-t|} < \mathrm{H}n < \mathrm{K} \Sigma'' \log \left| \frac{1}{t} \right|,$$

où K ne dépend que de $r$ et $\gamma$.

Il suffit alors de prendre pour $h$ le plus grand des deux nombres $\frac{4}{1-r}$ et K pour obtenir l'énoncé du lemme 6.

## V. — Les systèmes de deux fonctions d'une variable, en termes finis.

11. Théorème II. — *Soient dans le plan projectif quatre droites fixes* X, Y, Z, T, *en position générale, les premiers membres de leurs équations satisfaisant à*

$$X + Y + Z + T = 0.$$

*Les coordonnées d'un point* M *de ce plan sont, à l'intérieur du cercle* $|x| < 1$, *fonctions méromorphes de la variable* $x$; *pour* $|x| < 1$, *le point* M *ne vient sur aucune des quatre droites; il a pour* $x = 0$ *une position* $M_0$.

1° *Si* $M_0$ *n'est sur aucune des diagonales du quadrilatère complet, les rapports respectifs de* X, Y, Z, T *admettent, lorsque* $x$ *demeure intérieur à un cercle* $|x| < \rho < 1$, *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$ *et* $\rho$.

2° *Si* $M_0$ *appartient à une seule diagonale du quadrilatère complet*

$$X_0 + Y_0 = Z_0 + T_0 = 0,$$

*les deux rapports* $\frac{X}{Y}$ et $\frac{Z}{T}$ *admettent, pour* $|x| < \rho < 1$, *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$ *et* $\rho$. *De plus, si, toujours pour* $|x| < \rho < 1$, *on a en un certain point, soit* $\left|\frac{X}{Y} + 1\right| > \delta$ *positif, soit* $\left|\frac{Z}{T} + 1\right| > \delta$ *positif, le rapport de deux quelconques des coordonnées* X, Y, Z, T *admet dans un cercle quelconque* $|x| < \rho' < 1$ *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$, $\rho$, $\delta$ et $\rho'$.

3° *Si* $M_0$ *est à l'intersection de deux diagonales*

$$X_0 = -Y_0 = Z_0 = -T_0,$$

*le rapport* $\frac{XZ}{YT}$ *admet pour* $|x| < \rho < 1$ *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$ et $\rho$. *De plus, si, toujours pour* $|x| < \rho < 1$, *on a en un certain point, soit* $\left|\frac{X}{Y}+1\right|>\delta$ *positif, soit* $\left|\frac{Z}{T}+1\right|>\delta$ *positif, les deux rapports* $\frac{X}{T}$ *et* $\frac{Y}{Z}$ *admettent dans un cercle quelconque* $|x|<\rho'<1$ *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$, $\rho$, $\delta$ *et* $\rho'$ ; *de même, si l'on a en un point où* $|x|<\rho<1$, *soit* $\left|\frac{X}{T}+1\right|>\delta$ *positif, soit* $\left|\frac{Y}{Z}+1\right|>\delta$ *positif, les deux rapports* $\frac{X}{Y}$ *et* $\frac{Z}{T}$ *admettent dans un cercle quelconque* $|x|<\rho'<1$ *des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$, $\rho$, $\delta$ *et* $\rho'$.

Rappelons l'identité

$$A\,|ABC| = \big|\,|AB|\,|AC|\,\big|,$$

d'où résulte que $\frac{A\,|ABC|}{|AB|\,|AC|}$ est la dérivée logarithmique de $\frac{|AC|}{|AB|}$.

D'autre part, le lemme 3 donne, pour $r<R$,

$$(1)\quad m\left(r,\ \frac{|e^f e^g e^h|}{e^f e^g e^h}\right) < K + K\overset{+}{\log}\frac{1}{R} + K\log\frac{R}{R-r} + K\overset{+}{\log} m(\overline{R, e^f, e^g, e^h}),$$

inégalité où $m(\overline{R, e^f, e^g, e^h})$ désigne le plus grand des nombres $m(R, e^f)$, $m(R, e^g)$, $m(R, e^h)$; K désigne une constante quelconque ne dépendant que des valeurs initiales; dans la suite, les K pourront dépendre, en outre, des rayons des cercles *fixes* qui seront introduits.

1° Démontrons d'abord la proposition numérotée 1°. La limitation de l'expression de MM. Nevanlinna entraînant celle du module maximum, il suffira de prouver que $m\left(\rho, \frac{X}{Y}\right)$ et les expressions semblables sont bornées.

Nous considérerons, pour plus d'homogénéité, au lieu du cercle-unité, un cercle de rayon $R_1$ ; entre le cercle $R_1$ et le cercle $\rho$, nous intercalons deux cercles fixes $R_2$ et $R_3$ avec $R_1>R_2>R_3>\rho$. Nous distinguerons trois cas :

*a*. A l'intérieur du cercle $R_3$, l'une au moins des expressions $\frac{|XY|}{XY}$, $\frac{|YZ|}{YZ}$, $\frac{|ZX|}{ZX}$ est inférieure à $\varepsilon$ en module.

*b*. L'hypothèse précédente est exclue ; mais à l'intérieur du cercle $R_2$, chacune des expressions $\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}$, $\frac{Y|YZX|}{|YZ||YX|}$, $\frac{Z|ZXY|}{|ZX||ZY|}$ est inférieure à $\varepsilon'$, sauf peut-être à l'intérieur de contours de longueur totale inférieure à $\varepsilon''$.

*c*. Les deux hypothèses précédentes sont exclues.

Les nombres $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ sont des nombres positifs dont la borne supérieure, ne dépendant d'ailleurs que de $M_0$ et des rayons des cercles fixes, sera choisie d'après la démonstration même qui va suivre.

*a*. Supposons qu'à l'intérieur du cercle $R_3$, on ait $\frac{|XY|}{XY}$ inférieur en valeur absolue à $\varepsilon$. Une quadrature prouve alors que l'on aura, à l'intérieur du même cercle,

$$Y = e^{\eta}\frac{Y_0}{X_0}X \qquad (|\eta| < \varepsilon R_3),$$

$\frac{X}{Y}$ est donc borné supérieurement et inférieurement. On a

$$\left[\frac{X_0+Y_0}{X_0} + (e^{\eta}-1)\frac{Y_0}{X_0}\right]X + Z + T = 0.$$

Pour $e^{\varepsilon R_3} - 1 < \left|\frac{X_0+Y_0}{Y_0}\right|$, aucun des trois termes du premier membre ne s'annule; à l'origine, ces trois termes ont des valeurs initiales égales respectivement à $X_0 + Y_0$, $Z_0$ et $T_0$. On peut donc appliquer, à l'intérieur du cercle $R_3$, le théorème de M. Schottky : les rapports respectifs de X, Z, T sont bornés inférieurement et supérieurement sur le cercle de rayon $\rho$.

*b*. De l'hypothèse faite résulte par quadrature que, sauf peut-être à l'intérieur de contours de longueur totale inférieure à $3\varepsilon''$, le rapport des valeurs de $\frac{|XY|}{|XZ|}$ en deux points intérieurs au cercle $R_2$ est égal à $e^{\theta}$, où $|\theta| < \varepsilon'(2R_2 + \varepsilon'')$, et que la même propriété a lieu pour $\frac{|XZ|}{|YZ|}$ et pour $\frac{|YZ|}{|XY|}$. Par conséquent, chacun de ces quotients est, à l'extérieur des mêmes contours, suivant qu'il y prend des valeurs inférieures ou supérieures à un en module, ou toujours inférieur à $e^{\varepsilon'(2R_2+\varepsilon'')}$, ou toujours supérieur à $e^{-\varepsilon'(2R_2+\varepsilon'')}$. Deux d'entre eux y sont donc toujours inférieurs à la première ou toujours supérieurs à la seconde de ces deux quantités; supposons, par exemple, que $\frac{|XY|}{|XZ|}$ et $\frac{|XZ|}{|YZ|}$ y soient toujours inférieurs à $e^{\varepsilon'(2R_2+\varepsilon'')}$.

On aura, dans le cercle $R_2$, sauf peut-être dans des couronnes où la variation totale de $r$ est inférieure à $3\varepsilon''$ :

$$m\left(r, \frac{Y}{Z}\right) < \varepsilon'(2R_2+\varepsilon'') + m\left(r, \frac{|XZ|}{XZ}\right) + m\left(r, \frac{XY}{|XY|}\right).$$

Or, d'après le lemme 4, eu égard à l'exclusion de l'hypothèse $a$, le dernier terme satisfait à l'inégalité

$$m\left(r, \frac{XY}{|XY|}\right) < \frac{r+R_3}{r-R_3}\log\frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{r+R_3}{r-R_3}\right)^2 m\left(r, \frac{|XY|}{XY}\right),$$

$r$ étant supposé compris entre $R_2$ et $R_3$. Il résulte alors du lemme 3 que l'on a, sauf peut-être dans les couronnes exceptionnelles, pour R et $r$ compris entre $R_2$ et $\frac{R_2+R_3}{2}$,

$$m\left(r, \frac{Y}{Z}\right) < \varepsilon'(2R_2+\varepsilon'') + K + K\log\frac{Y}{R-r} + \overset{+}{\log} m\left(R, \frac{Z}{X}\right) + K\overset{+}{\log} m\left(R, \frac{Y}{X}\right).$$

La considération de $\frac{|XZ|}{|YZ|}$ donnant une inégalité analogue, il vient

$$m\left(r; \overline{\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}}\right) < \varepsilon'(2R_2+\varepsilon'') + K + K\log\frac{R}{R-r} + K\overset{+}{\log} m\left(R; \overline{\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}}\right)$$

entre $R_2$ et $\frac{R_2+R_3}{2}$, sauf toujours peut-être dans des couronnes où la variation totale du rayon est inférieure à $3\varepsilon''$. Si alors on prend $\varepsilon'' < \frac{R_2-R_3}{12}$, il résulte de l'inégalité précédente que la fonction croissante $m\left(r; \overline{\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}}\right)$ est bornée dans la couronne $\left(\frac{3R_2+R_3}{4}, \frac{R_2+R_3}{2}\right)$, l'existence d'intervalles exceptionnels ne modifiant que légèrement le raisonnement classique à utiliser en la circonstance.

Donc les rapports respectifs de X, Y, Z sont encore bornés sur le cercle de rayon $\rho$.

$c$. Supposons qu'à l'intérieur du cercle $R_2$, l'ensemble des points où $\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}$, par exemple, dépasse $\varepsilon$ ne puisse être enfermé dans des contours de longueur totale inférieure à $\varepsilon''$; de plus, $\frac{|XY|}{XY}$ et $\frac{|XZ|}{XZ}$ ne sont pas en tout point intérieur au cercle $R_3$ inférieures à $\varepsilon$.

Considérons $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$; nous avons pour le premier de ces rapports, eu égard à $X+Y+Z+T=0$,

$$(2) \qquad \frac{X}{T} = -\frac{\frac{|TYZ|}{TYZ}}{\frac{|XYZ|}{XYZ}} = -\frac{\frac{|TYZ|}{TYZ}}{\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}} \frac{XY}{|XY|} \frac{XZ}{|XZ|},$$

et de même, pour les deux autres,

$$\frac{Y}{T} = -\frac{\frac{|XTZ|}{XTZ}}{\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}} \frac{XY}{|XY|} \frac{XZ}{|XZ|}; \qquad \frac{Z}{T} = -\frac{\frac{|XYT|}{XYT}}{\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}} \frac{XY}{|XY|} \frac{XZ}{|XZ|}.$$

Envisageons les valeurs de $x$ comprises dans la couronne $\left(R_1, \frac{R_1+R_2}{2}\right)$. Nous avons dans cette couronne, d'après le lemme 4,

$$m\left(r, \frac{XY}{|XY|}\right) < K + Km\left(r, \frac{|XY|}{XY}\right)$$

et la même inégalité pour $m\left(r, \frac{XZ}{|XZ|}\right)$. Or,

$$\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|} = \frac{|XYZ|}{XYZ} \frac{XY}{|XY|} \frac{XZ}{|XZ|}.$$

Donc,

$$(3) \qquad m\left(r, \frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}\right) < K + Km\left(r, \frac{|XY|}{XY}\right) + Km\left(r, \frac{|XZ|}{XZ}\right) + m\left(r, \frac{|XYZ|}{XYZ}\right).$$

Désignons par $a'$ les zéros de $\frac{|XY|}{XY}$, par $a''$ les zéros de $\frac{|XZ|}{XZ}$ inférieurs à $r$ en module. Pour un certain point $x'$ intérieur au cercle $R_3$, nous avons, d'après le lemme 4, la somme étant étendue aux $a'$,

$$\Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}' x'}{r(x'-a')} \right| < K + Km\left(r, \frac{|XY|}{XY}\right)$$

et pour un certain point $x''$ intérieur au même cercle, de même,

$$\Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}'' x''}{r(x'' - a'')} \right| < \mathrm{K} + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XZ}|}{\mathrm{XZ}}\right).$$

Utilisons maintenant le lemme 6. Il en résulte immédiatement que sauf peut-être dans des contours de longueur totale inférieure à $\frac{\varepsilon''}{2}$, on a, en un point $x'_0$ intérieur au cercle $\mathrm{R}_2$,

$$\Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}' x'_0}{r(x'_0 - a')} \right| < h' \, \Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}' x'}{r(x' - a')} \right|$$

$h'$ ne dépendant que de $\frac{\varepsilon''}{2}$ et des rayons des cercles donnés, et par suite seulement de ceux-ci puisque $\varepsilon''$ a été fixé précédemment. De même on a

$$\Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}'' x''_0}{r(x''_0 - a'')} \right| < h'' \Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}'' x''}{r(x'' - a'')} \right|$$

pour tout point $x''_0$ intérieur au cercle $\mathrm{R}_2$, extérieur toutefois à d'autres contours de longueur totale inférieure à $\frac{\varepsilon''}{2}$.

Mais nous pouvons prendre $x'_0 = x''_0 = x_0$, le point $x_0$ étant tel que $\frac{\mathrm{X}\,|\mathrm{XYZ}|}{|\mathrm{XY}|\,|\mathrm{XZ}|}$ y surpasse $\varepsilon$. Pour ce point $x_0$, nous aurons

$$\Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}' x_0}{r(x_0 - a')} \right| + \Sigma \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}'' x_0}{r(x_0 - a'')} \right| < \mathrm{K} + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XY}|}{\mathrm{XY}}\right) + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XZ}|}{\mathrm{XZ}}\right).$$

En ayant égard à la limitation (3) précédemment obtenue pour $m\left(r, \frac{\mathrm{X}\,|\mathrm{XYZ}|}{|\mathrm{XY}|\,|\mathrm{XZ}|}\right)$ et au lemme 4, nous obtenons

$$m\left(r, \frac{|\mathrm{XY}|\,|\mathrm{XZ}|}{\mathrm{X}\,|\mathrm{XYZ}|}\right) < \mathrm{K} + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XY}|}{\mathrm{XY}}\right) + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XZ}|}{\mathrm{XZ}}\right) + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XYZ}|}{\mathrm{XYZ}}\right)$$

et l'expression (2) de $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{T}}$ donne alors

$$m\left(r, \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{T}}\right) < \mathrm{K} + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XY}|}{\mathrm{XY}}\right) + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XZ}|}{\mathrm{XZ}}\right)$$
$$+ \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{XYZ}|}{\mathrm{XYZ}}\right) + \mathrm{K}\, m\left(r, \frac{|\mathrm{TYZ}|}{\mathrm{TYZ}}\right).$$

De même $m\left(r, \frac{Y}{T}\right)$ et $m\left(r, \frac{Z}{T}\right)$ satisfont à des inégalités qui ne diffèrent de la précédente que par le dernier terme.

Considérons maintenant R compris entre $r$ et $R_1$; appliquons la remarque préliminaire (1); il vient, puisque $\frac{|XYZ|}{XYZ}$ ne change pas si X, Y, Z sont multipliés par une même fonction

$$m\left(r, \frac{X}{T}\right) < K + K \log \frac{R}{R-r} + K \overset{+}{\log} m\left(R, \frac{Y}{X}\right) + K \overset{+}{\log} m\left(R, \frac{Z}{X}\right)$$
$$+ K \overset{+}{\log} m\left(R; \overline{\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}}\right) + K \overset{+}{\log} m\left(R; \overline{\frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}}\right).$$

On a donc

$$m\left(r; \overline{\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}}\right) < K + K \log \frac{R}{R-r} + K \overset{+}{\log} m\left(R; \overline{\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}}\right),$$

pour les valeurs de $r$ et R $(r < R)$ comprises entre $R_1$ et $\frac{R_1+R_2}{2}$. Il résulte de cette inégalité que $m\left(r; \overline{\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}}\right)$ est bornée dans cette couronne. Dans l'hypothèse $c$, les rapports respectifs de X, Y, Z, T sont encore bornés sur le cercle de rayon $\rho$.

La proposition 1° est donc démontrée.

Ajoutons une remarque utile pour la suite. Nous avons démontré la proposition 1° dans l'hypothèse $a$ en utilisant le théorème de M. Schottky, et cette manière de faire était simple et correcte. Mais maintenant que la démonstration de la proposition 1° est terminée, il est préférable d'observer que l'on peut se passer de la connaissance préalable de la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires. Il convient alors de remplacer l'hypothèse $a$ par la suivante :

$\bar{a}$. A l'intérieur du cercle $R_3$, deux au moins des six expressions $\frac{|XY|}{XY}, \frac{|YZ|}{YZ}, \frac{|ZX|}{ZX}, \frac{|XT|}{XT}, \frac{|YT|}{YT}, \frac{|ZT|}{ZT}$ sont inférieures à $\varepsilon$.

Les hypothèses $b$ et $c$ ne sont pas modifiées, l'exclusion de l'hypothèse $a$ étant bien entendu remplacée par celle de l'hypothèse $\bar{a}$.

Le raisonnement relatif aux hypothèses $b$ et $c$ n'est alors pas modifié, car si une seule ou aucune des six expressions n'est partout à l'intérieur de $R_3$ inférieure à $\varepsilon$, il existe parmi les quatre triangles que forment les quatre droites X, Y, Z, T au moins un triangle (et même au moins deux) que l'on peut prendre pour jouer le rôle du triangle XYZ.

Reste donc l'hypothèse $\overline{a}$. Or, le point $M_0$ n'étant sur aucune diagonale, les six droites le joignant aux six sommets du quadrilatère complet sont distinctes; il est alors évident que, connaissant $M_0$, on peut choisir $\varepsilon$ suffisamment petit pour que dans le cercle $R_3$ les rapports respectifs de X, Y, Z, T demeurent bornés.

Le nombre $\varepsilon$ ainsi obtenu est, bien entendu, celui qui doit figurer dans le raisonnement relatif aux hypothèses $b$ et $c$.

2° Pour démontrer la proposition 2°, nous prendrons $R_3 > \rho'$. Les hypothèses $\overline{a}$, $b$, $c$ sont les mêmes que pour la proposition 1°.

Il n'y a rien à modifier dans les hypothèses $b$ et $c$ : les rapports respectifs de X, Y, Z, T étant bornés dans le cercle $R_3$, le sont dans les cercles $\rho$ et $\rho'$.

$\overline{a}$. Dans l'hypothèse $\overline{a}$, plusieurs cas sont à distinguer : les deux sommets du quadrilatère complet correspondant aux deux expressions demeurant inférieures à $\varepsilon$ peuvent être sur un même côté, ou bien ils peuvent être opposés sur une diagonale différente de celle à laquelle appartient $M_0$; dans l'un ou l'autre de ces cas, il est encore clair que l'on peut prendre, connaissant $M_0$, $\varepsilon$ suffisamment petit pour que dans le cercle $R_3$ les rapports respectifs de X, Y, Z, T demeurent bornés.

Un troisième cas est celui où $\frac{|XY|}{XY}$ et $\frac{|ZT|}{ZT}$ sont dans le cercle $R_3$, inférieurs à $\varepsilon$. Alors $\frac{X}{Y}$ et $\frac{Z}{T}$ sont bornés inférieurement et supérieurement. La première partie de la proposition 2° est donc démontrée.

Pour établir la seconde partie, observons que, connaissant $\delta$, on peut toujours échapper au troisième cas de l'hypothèse $\overline{a}$; il suffit de prendre $\varepsilon$ assez petit pour qu'il ne puisse avoir lieu. On retombe alors nécessairement sur un des deux premiers cas de l'hypothèse $\overline{a}$, sur l'hypothèse $b$ ou sur l'hypothèse $c$ : tout est donc borné.

3° La démonstration de la proposition 3° est parallèle à celle de la proposition 2°; mais dans l'hypothèse $\overline{a}$, on a à considérer, en outre du troisième cas où $\frac{|XY|}{XY}$ et $\frac{|ZT|}{ZT}$ sont dans le cercle $R_3$ inférieurs à $\varepsilon$, un quatrième cas, celui où $\frac{|XT|}{XT}$ et $\frac{|YZ|}{YZ}$ satisfont à la même condition; dans le troisième, $\frac{X}{Y}$ et $\frac{Z}{T}$ sont bornés supérieurement et inférieurement; dans le quatrième, ce sont $\frac{X}{T}$ et $\frac{Z}{Y}$; ainsi, pour un système de fonctions *déterminé*, ou bien $\frac{X}{Y}$ et $\frac{Z}{T}$ sont bornés, ou bien $\frac{X}{T}$ et $\frac{Z}{Y}$ le sont, propriété que l'on pourrait faire figurer dans l'énoncé de 3° (elle en résulte d'ailleurs sans peine). Par multiplication des deux rapports, la première partie de 3° est démontrée.

Pour établir la seconde, qui se subdivise elle-même en deux, correspondant chacune à une supposition différente, observons que, connaissant $\delta$, on peut, suivant la supposition faite, choisir $\varepsilon$ assez petit pour que le troisième ou le quatrième cas se trouve exclu; on retombe alors sur le quatrième ou le troisième cas, ou sur des cas ou des hypothèses où tout est borné.

Le théorème II est donc complètement démontré.

12. Le suivant en résulte immédiatement.

Théorème III. — *Soient*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots; \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots$$

*deux fonctions holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, ne s'y annulant pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité.*

1° *Si $a_0$ et $b_0$ sont différents de l'unité, $a_0 + b_0$ différent de zéro, les coefficients $a_1$ et $b_1$ (et plus généralement les coefficients $a_i$, $b_i$, des termes de degré $i$), admettent une borne supérieure dépendant uniquement du point $(a_0, b_0)$ (et de $i$).*

2° *Si $a_0 + b_0 = 0$, $a_0$ et $b_0$ étant différents de l'unité, $a_1 + b_1$ admet une borne supérieure dépendant uniquement de $(a_0, b_0)$. Si $a_0 = 1$, $b_0$ étant différent de 1 et de $-1$, $a_1$ admet une borne supérieure dépendant uniquement de $b_0$. Si $b_0 = 1$, $a_0$ étant différent de 1 et de $-1$, $b_1$ admet une borne supérieure dépendant uniquement de $a_0$.*

3° *Si $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 b_1$ est borné supérieurement par une constante* *numérique. Si* $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, *c'est* $a_1(a_1 + b_1)$. *Si* $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, *c'est* $b_1(a_1 + b_1)$.

Pour voir que si $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 b_1$ est borné supérieurement, observons que d'après le théorème II $\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)-1}$ est borné pour $|x| < 1$. Or,

$$\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)-1} = \frac{(1+a_1x+\ldots)(1+b_1x+\ldots)}{1+a_1x+b_1x+\ldots} = 1 + a_1b_1x^2 + \ldots.$$

13. Revenons au théorème II pour en examiner les conséquences en ce qui concerne la région couverte par le point M dans le plan des quatre droites lorsque $|x| < \rho < 1$. Pour plus de netteté, nous nous bornons à examiner ce qui se passe dans le plan réel des quatre droites, supposées toutes réelles; $M_0$ est réel, $x$ peut être réel ou complexe.

L'ensemble des points du plan réel qui peuvent être atteints pour $|x| < \rho < 1$ est un domaine parfaitement déterminé $\Delta(M_0, \rho)$. Si $M_0$ n'appartient à aucune diagonale, il n'a aucun point commun avec le quatre droites, il est même à une distance non nulle de chacune de ces droites. Si $M_0$ appartient à une diagonale ou est à l'intersection de deux diagonales, le domaine $\Delta$ parvient en deux ou en quatre des sommets du quadrilatère complet. Il y possède une propriété intéressante, celle d'être tangent à la diagonale correspondante; autrement dit, une droite joignant le sommet à un point infiniment voisin du domaine tend nécessairement vers la diagonale.

$M_0$ étant donné, si $\rho$ est suffisamment petit, le domaine $\Delta$ a une forme simple. Si $M_0$ n'appartient à aucune diagonale, c'est approximativement une ellipse entourant $M_0$. Si $M_0$ est sur une seule diagonale et intérieur par exemple au quadrilatère convexe, la partie de $\Delta$ intérieure à ce quadrilatère est une sorte de profil de fuseau ayant la diagonale pour axe et s'amincissant indéfiniment vers les sommets; elle est voisine d'une certaine courbe fermée du sixième degré ayant comme elle deux rebroussements; la partie extérieure est homographiquement analogue. Si $M_0$ est le point de rencontre des deux diagonales du quadrilatère convexe, le domaine $\Delta$ est formé par l'union de deux domaines semblables à celui qui vient d'être décrit, s'anastomosant en quelque sorte au voisinage de $M_0$. Ces différentes formes, dont il conviendrait d'ailleurs de prouver en toute rigueur qu'elles sont effectivement réalisées, ne le sont, bien entendu, que si $\rho$ est suffisamment petit.

Pour un système *déterminé* de fonctions, il est clair que notre domaine $\Delta(M_0, \rho)$ ne peut pas être recouvert en entier pour $|x| < \rho < 1$. Mais il y a plus, et, en nous bornant au cas où $M_0$ appartient à une ou deux diagonales, on peut, toujours d'après le théorème II, déterminer une succession de domaines intérieurs à $\Delta$ telle que le domaine couvert soit toujours intérieur à l'un au moins d'entre eux. Ce seront approximativement, à l'intérieur du quadrilatère convexe, des ellipses quadritangentes à la frontière de $\Delta$; elles ne peuvent s'approcher indéfiniment d'un sommet qu'en s'amincissant indéfiniment et se confondant à la limite avec la diagonale correspondante.

Les théorèmes II et III subsistent, avec les conséquences que nous venons d'en déduire, lorsque le cercle-unité est remplacé *par un domaine quelconque* simplement ou multiplement connexe, les cercles $|x| < \rho$ et $|x| < \rho'$ étant remplacés par des domaines intérieurs contenant $M_0$. Il suffit pour le reconnaître de rendre le domaine simplement connexe par des coupures, d'ajouter une bande étroite, intérieure au domaine initial, à chaque bord de chaque coupure, et de faire sur un cercle la représentation conforme du domaine total.

## VI. — Les systèmes de $n$ fonctions de $n$ variables.

14. Il nous sera commode de revenir à la méthode purement élémentaire des paragraphes II et III pour établir une proposition concernant les fonctions F, G, ..., K de $n$ variables elles-mêmes en nombre $n$, satisfaisant à la relation

$$e^F + e^G + \ldots + e^K + 1 = 0.$$

Tout d'abord ces $n$ fonctions, supposées entières, sont évidemment fonctions de $n-1$ d'entre elles, puisque l'une d'elles au moins est une constante. La proposition plus générale que nous avons en vue est la suivante :

Théorème IV. — *Soient*

$$f x, y, \ldots, t), \qquad g(x, y, \ldots, t), \qquad \ldots, \qquad k(x, y, \ldots, t)$$

*n fonctions de n variables déterminées à l'intérieur de la variété hermitienne*

$$\frac{x\bar{x}}{A} + \frac{y\bar{y}}{B} + \ldots + \frac{t\bar{t}}{E} - 1 = 0,$$

*où* A, B, ..., E *sont positifs; elles y sont supposées holomorphes, ne s'y annulent pas, et leur somme n'y devient pas égale à l'unité; elles prennent à l'origine des valeurs* $a_0$, $b_0$, ..., $e_0$. *Dans ces conditions, la valeur absolue du déterminant fonctionnel*

$$\frac{\partial(f, g, \ldots, k)}{\partial(x, y, \ldots, t)} \qquad (x = y = \ldots = t = 0)$$

*admet une borne supérieure dépendant uniquement du point* $(a_0, b_0, \ldots, e_0)$ *et du produit* AB...E.

Cette proposition (considérée déjà comme vraisemblable dans la Note publiée aux *Comptes rendus*) pourrait peut-être s'établir au moyen des théorèmes de la section précédente. Mais elle est susceptible d'une démonstration directe plus simple que celle de ces derniers, qui aurait pu prendre place après la section II, et dont le principe peut d'ailleurs être adopté avec profit dans bien des questions analogues.

Nous pouvons évidemment, sans nuire à la généralité, supposer dans l'énoncé du théorème

$$A = B = \ldots = E.$$

De plus, pour fixer les idées, nous nous placerons dans le cas de deux variables; le raisonnement sera général.

Le lemme 2 conduit au suivant :

Lemme 7. — *Soit* $f(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ *une fonction holomorphe à l'intérieur de l'hypersphère* $x\bar{x} + y\bar{y} - R^2 = 0$, *les fonctions* $f_1$ *et* $f_2$ *étant holomorphes dans cette même hypersphère et* $f_2$ *égale à* 1 *à l'origine. On a, pour toute hypersphère* $x\bar{x} + y\bar{y} - r^2 = 0$, *de rayon* $r < R$, *l'inégalité*

$$\log M(r, f) < \log M(R, f_1) + \frac{36 R^3}{(R - r)^3} \log M(R, f_2).$$

En effet, considérons une droite complexe quelconque issue de l'origine $x = \alpha t, y = \beta t$. Son intersection avec l'hypersphère de rayon $r$, ou avec l'hypersphère de rayon R, satisfait à l'équation

$$(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})t\bar{t} - r^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})t\bar{t} - R^2 = 0.$$

Ce sont là deux cercles concentriques du plan de la variable $t$; et l'application du lemme 2 à la fonction d'une variable $f(\alpha t, \beta t)$ et à ces deux cercles donne le lemme 7.

L'inégalité de Hadamard-Borel donne de la même manière :

LEMME 8. — *Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de l'hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} - R^2 = 0$, et nulle à l'origine. On a entre le maximum de son module sur l'hypersphère de rayon $r < R$ et le maximum de sa partie réelle sur l'hypersphère de rayon R, l'inégalité*

$$M(r, f) \leqq \frac{2r}{R - r} A(R, f).$$

Enfin les dérivées partielles satisfont à la même inégalité que pour une seule variable :

LEMME 9. — *La fonction $f(x, y)$ étant holomorphe à l'intérieur de l'hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} - R^2 = 0$, on a pour $r < R$*

$$M(r, f'_x) < \frac{1}{R - r} M(R, f).$$

Car si l'on suppose $y$ constant dans les équations des hypersphères, on obtient deux cercles d'équations

$$x\bar{x} = r^2 - y\bar{y} = \rho^2; \qquad x\bar{x} = R^2 - y\bar{y} = P^2,$$

et l'on vérifie que $P - \rho > R - r$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème IV. Soit, à l'intérieur de l'hypersphère-unité

$$e^F + e^G + e^H + 1 = 0,$$

les fonctions F, G, H y étant holomorphes. Considérons trois quelconques des fonctions $e^F$, $e^G$, $e^H$, et 1, le déterminant de ces fonctions et de leurs dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$. Les quatre déterminants ainsi obtenus sont deux à deux égaux et de signes contraires, ce que nous écrirons

$$[e^F e^G e^H] = -[e^G e^H \, 1] = [e^H \, 1 \, e^F] = -[1 \, e^F e^G].$$

Nous avons

$$e^F = -\frac{[e^G e^H \, 1]}{e^G e^H} : \frac{[e^F e^G e^H]}{e^F e^G e^H},$$

et deux expressions analogues pour $e^G$, $e^H$.

Il s'agit de faire voir que la valeur absolue de $\frac{[e^F e^G e^H]}{e^F e^G e^H}$ à l'origine admet une borne supérieure dépendant uniquement des valeurs de F, G, H en ce point. Il suffit évidemment de se placer dans le cas où cette quantité est supérieure à 1 (1).

Les expressions obtenues pour $e^F$, $e^G$, $e^H$ sont des fractions de même dénominateur dont les termes sont des polynomes entiers par rapport aux dérivées de F, G, H. Désignant par $U(\rho)$ le plus grand des nombres $M(\rho, F)$, $M(\rho, G)$, $M(\rho, H)$, on peut, grâce aux lemmes 7, 8, 9 faire un calcul tout à fait pareil à celui de la section II, d'où l'on conclut pour toute valeur de $\rho$ inférieure à 1 une borne supérieure de $U(\rho)$ dépendant uniquement de $\rho$ et des valeurs initiales de F, G, H, ceci dans l'hypothèse où $\frac{[e^F e^G e^H]}{e^F e^G e^H}$ est supérieur à 1 à l'origine; les valeurs absolues des dérivées partielles de F, G, H à l'origine sont donc bornées supérieurement en fonction des valeurs de F, G, H au même point; il en est de même pour $[e^F e^G e^H]$.

15. Le théorème IV s'étend aisément au cas où l'on considère, au lieu de l'intérieur d'une variété hermitienne, une région quelconque de l'espace projectif à $n$ variables non homogènes (et $2n$ dimensions réelles).

Théorème V. — *Soient*

$$f\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \dots, \frac{t}{u}\right), \quad g\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \dots, \frac{t}{u}\right), \quad \dots, \quad k\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \dots, \frac{t}{u}\right), \quad l\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \dots, \frac{t}{u}\right)$$

---

(1) *Cf.* R. Nevanlinna, *Beweis des Picard-Landauschen Satzes* (*Gött. Nachr.*, 6 juin 1924).

$n+1$ *fonctions de* $n$ *variables non homogènes* $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \ldots, \frac{t}{u}$, *déterminées à l'intérieur d'un certain domaine de l'espace projectif à* $n$ *variables; elles y sont supposées holomorphes, ne s'y annulent pas, leur somme ne s'y annule pas non plus. Alors, en un point* $(x, y, \ldots, t, u)$ *intérieur au domaine, le jacobien* $\frac{\partial(f, g, \ldots, k, l)}{\partial(x, y, \ldots, t, u)}$ *est borné en valeur absolue par une quantité dépendant uniquement du domaine, des coordonnées homogènes* $x, y, \ldots, t, u$, *du point considéré, et des valeurs en ce point des fonctions* $f, g, \ldots, k, l$.

Cet énoncé suppose la définition de l'*écart* de deux points de l'espace projectif; l'écart de deux points de coordonnées homogènes $(x, y, \ldots, t, u)$ et $(x', y', \ldots, t', u')$ est la *distance* au sens de Study-Fubini de ces deux points par rapport à l'hermitien

$$x\bar{x} + y\bar{y} + \ldots + t\bar{t} + u\bar{u},$$

c'est-à-dire par exemple la racine carrée de l'expression

$$1 - \frac{(x\overline{x'} + y\overline{y'} + \ldots + t\overline{t'} + u\overline{u'})(\bar{x}x' + \bar{y}y' + \ldots + \bar{t}t' + \bar{u}u')}{(x\bar{x} + y\bar{y} + \ldots + t\bar{t} + u\bar{u})(x'\overline{x'} + y'\overline{y'} + \ldots + t'\overline{t'} + u'\overline{u'})},$$

expression que l'identité de Lagrange-Hermite transforme d'ailleurs en une seule fraction

$$\frac{\Sigma(xy' - yx')(\overline{x}\overline{y'} - \overline{y}\overline{x'})}{(x\bar{x} + y\bar{y} + \ldots + t\bar{t} + u\bar{u})(x'\overline{x'} + y'\overline{y'} + \ldots + t'\overline{t'} + u'\overline{u'})}.$$

Inférieure à 1 en module, s'annulant alors et seulement quand les deux points coïncident, l'expression ci-dessus se reproduit par une transformation homographique, multipliée par un facteur borné inférieurement et supérieurement. On peut la poser égale à $\sin^2 \frac{\lambda}{2}$, $\lambda$ étant un angle compris entre 0 et $\pi$.

16. Occupons-nous maintenant de l'extension aux fonctions de plusieurs variables du théorème II et de ses conséquences. Nous allons nous borner dans cette section aux systèmes de deux fonctions de deux variables; le cas général sera vu plus loin (§ VII, *in fine*).

LEMME 10. — *Soient $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ trois fonctions holomorphes dans le cercle-unité, y demeurant inférieures à M en valeur absolue; en des points $x_1, x_2, x_3$, de modules $\rho_1, \rho_2, \rho_3$, inférieurs à $\rho$, on a*

$$|f(x_1)| = \alpha; \qquad |g(x_2)| = \beta; \qquad |h(x_3)| = \gamma.$$

*Dans ces conditions, il existe sur le cercle-unité des points où $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont tous trois supérieurs en valeur absolue à l'expression*

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{M}^2}\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{M}^3}\right)^{\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2}.$$

Nous avons en effet, en vertu du lemme 4,

$$m\left(1, \frac{\alpha}{f}\right) < \left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)^2 m\left(1, \frac{f}{\alpha}\right) < \left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)^2 \log\frac{\mathrm{M}}{\alpha},$$

et de même pour les deux autres; donc

$$\begin{aligned} m\left(1, \frac{\alpha\beta\gamma}{fgh}\right) &< m\left(1, \frac{\alpha}{f}\right) + m\left(1, \frac{\beta}{g}\right) + m\left(1, \frac{\gamma}{h}\right) \\ &< \left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)^2 \log\frac{\mathrm{M}}{\alpha} + \left(\frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}\right)^2 \log\frac{\mathrm{M}}{\beta} + \left(\frac{1+\rho_3}{1-\rho_3}\right)^2 \log\frac{\mathrm{M}}{\gamma}. \end{aligned}$$

Donc il y a sur le cercle-unité des points où

$$|fgh| > \alpha\beta\gamma\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{M}^3}\right)^{\left(\frac{1+\rho}{1+\rho}\right)^2};$$

comme en ces points, $|f|$, $|g|$, $|h|$ sont inférieurs à M, ils satisfont bien à l'inégalité annoncée.

THÉORÈME VI. — *Le théorème II demeure vrai lorsque les coordonnées du point M, ne venant sur aucune des quatre droites, sont fonctions méromorphes de deux variables $(x, y)$ à l'intérieur de l'hypersphère-unité*

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 1,$$

*les cercles de rayons $\rho$ et $\rho'$ étant remplacés dans l'énoncé par les hypersphères de rayons $\rho$ et $\rho'$.*

*Ce théorème demeure vrai si l'hypersphère-unité est remplacée par un domaine connexe quelconque du plan projectif, les hypersphères de* *rayons $\rho$ et $\rho'$ étant remplacés de même par des domaines intérieurs au précédent, et contenant* $M_0$.

Démontrons d'abord ce théorème dans le cas de l'hypersphère. Pour la proposition 1° et les premières parties des propositions 2° et 3°, il n'y a aucune difficulté puisque, comme on l'a vu, toute droite complexe passant par l'origine donne lieu, par son intersection avec deux hypersphères ayant l'origine pour centre, à deux cercles ayant aussi l'origine pour centre et dont les rayons sont entre eux comme ceux des hypersphères.

Passons à la seconde partie de la proposition 2°. Nous supposons que $M_0$ appartient à la seule diagonale $X_0 + Y_0 = Z_0 + T_0 = 0$, et qu'en un certain point de l'hypersphère de rayon $\rho$, on a $\left|\frac{X}{Y} + 1\right| > \delta$ positif. Considérons ce qui se passe sur la droite complexe joignant $M_0$ à ce point, à l'intérieur d'une hypersphère de rayon $\rho''$ compris entre $\rho$ et 1. D'après le théorème II, les rapports respectifs des coordonnées de M sont bornés dans cette région, frontière comprise; or à l'origine, $\frac{X_0 + Z_0}{Z_0}$ et $\frac{Y_0 + Z_0}{Z_0}$ sont différents de zéro, tandis qu'au point de l'hypersphère de rayon $\rho$, on a $\left|\frac{X + Y}{Y}\right| > \delta$. Il résulte de là, d'après le lemme 10, qu'en un point au moins de l'intersection de la droite complexe avec l'hypersphère de rayon $\rho''$, $\frac{X + Z}{Z}$, $\frac{Y + Z}{Z}$ et $\frac{X + Y}{Y}$ sont supérieurs à une quantité ne dépendant que de $M_0$, $\rho$, $\rho''$ et $\delta$, les rapports respectifs des coordonnées étant bornés. Il est alors à peu près évident que si l'on fait jouer au point correspondant du plan des quatre droites le rôle de $M_0$, la proposition 1° du théorème II s'applique; c'est d'ailleurs ce qu'on établirait en en reprenant la démonstration. Considérant maintenant une droite complexe arbitraire passant par le point de l'hypersphère de rayon $\rho''$, nous voyons donc, comme il fallait l'établir, que les rapports respectifs des coordonnées X, Y, Z, T sont bornés sur une hypersphère quelconque ayant l'origine pour centre et $\rho'$ pour rayon par une quantité dépendant uniquement de $M_0$, $\rho$, $\delta$ et $\rho'$.

La seconde partie de la proposition 3° s'établirait de manière analogue.

Pour démontrer le théorème VI dans le cas où l'hypersphère-unité est remplacée par un domaine connexe quelconque du plan projectif, prouvons d'abord : *étant donnés deux points dans un domaine connexe de l'espace projectif à p dimensions complexes, on peut trouver une courbe algébrique passant par eux, telle qu'il soit possible de passer sur elle de l'un à l'autre en restant à l'intérieur du domaine.*

Plaçons-nous par exemple dans le cas de l'espace à trois dimensions. On peut visiblement en opérant de proche en proche trouver des plans $P_1, P_2, \ldots, P_m$, en nombre $m$ suffisamment grand, tels qu'il soit possible de passer d'un des points à l'autre en demeurant à la fois à l'intérieur du domaine et sur le système de plans. Si $\Pi$ est un plan passant par les deux points, la surface $P_1 \ldots P_m + \varepsilon \Pi^m = 0$ sera, pour $\varepsilon$ assez petit, indécomposable et jouissant de la même propriété. Un nouveau système de plans convenablement choisis coupe la surface suivant un système de courbes planes sur lequel le passage est possible; il est encore infiniment voisin d'une surface indécomposable, et l'intersection des deux surfaces est une courbe gauche indécomposable jouissant de la propriété requise.

Dès lors il est aisé de conduire la démonstration comme dans le cas de l'hypersphère, car on étend le théorème II au cas des fonctions définies sur une partie d'une surface de Riemann comme on l'a étendu à la fin de la section V au cas de fonctions définies dans un domaine plan à connexion multiple. Le théorème est donc démontré.

Toutes les conséquences obtenues à la fin de la section V s'étendent donc au cas où M dépend de deux variables. En particulier, si $M_0$ appartient à une diagonale, il n'existe pas de système de deux fonctions de deux variables atteignant tous les points du domaine $\Delta(M_0, \rho)$; il en est de même si $M_0$ est suffisamment voisin d'une diagonale et probablement en général. Il y a donc une différence importante avec le cas de la droite à trois points lacunaires pour lequel il existait une fonction, la fonction modulaire, atteignant simultanément tous les points pouvant être atteints séparément.

## VII. — Les systèmes de $n$ fonctions d'une variable.

17. Les théorèmes de la section V s'étendent à un nombre quelconque de fonctions d'une variable. Nous allons exposer le principe de la

démonstration en employant encore la méthode des valeurs moyennes logarithmiques.

Rappelons l'identité

$$||ACD\ldots K||BCD\ldots K|| = |CD\ldots K||ABCD\ldots K|.$$

La fraction $\dfrac{|CD\ldots K||ABCD\ldots K|}{|ACD\ldots K||BCD\ldots K|}$ sera dite, par abréviation, fraction dérivée à un certain nombre de termes A, B, C, D, ..., K.

Voici comment on peut mettre sous forme abrégée [1] le raisonnement fait plus haut pour le problème du plan à quatre droites lacunaires X, Y, Z, T.

*Premier cas.* — Une au moins des fractions dérivées à deux termes pris parmi X, Y, Z est (partout) presque nulle. Alors une quadrature prouve que la courbe est presque une droite (passant par un sommet) et l'on est (du moins si le point correspondant à l'origine est générique) ramené au problème de la droite à trois points lacunaires.

*Deuxième cas.* — L'hypothèse du premier cas étant exclue, toutes les fractions dérivées à trois termes X, Y, Z sont presque partout nulles. Alors, par quadratures, on trouve que la courbe est presque partout presque une droite, et l'on est encore ramené au problème de la droite à trois points lacunaires.

*Troisième cas.* — Les hypothèses des deux premiers cas sont exclues. Alors on considère les expressions de $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$, dont le déterminateur commun $\frac{|XYZ|}{XYZ}$ peut s'écrire par exemple $\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}\,\frac{|XY|}{XY}\,\frac{|XZ|}{XZ}$; ces

---

[1] A vrai dire, ce n'est pas exactement ainsi que nous avons opéré au paragraphe V, et, comme nous l'avons dit en cet endroit, il vaut bien mieux, comme nous l'avons fait en définitive, opérer indépendamment de la théorie de la droite à trois points lacunaires. De même, pour l'espace à cinq plans, il conviendra d'opérer indépendamment de la théorie de la droite à trois points et du plan à quatre droites, ce qu'il sera aisé de faire en se guidant sur les paragraphes V et VII. Mais le raisonnement du texte, dont le développement complet présenterait peut-être quelques légères difficultés et quelques longueurs, se met plus aisément sous forme abrégée et intuitive; c'est pour cela que nous l'avons adopté ici.

trois facteurs étant supposés n'être pas presque partout nuls, la considération de leurs inverses est possible; or on a une borne supérieure pour la croissance des deux derniers, et pour la croissance du premier, on en obtient une en l'écrivant $\frac{|XYZ|}{XYZ} : \left(\frac{|XY|}{XY} \frac{|XZ|}{XZ}\right)$. On trouve ainsi, directement que, dans ce cas, l'écart au point initial est borné à l'intérieur du cercle-unité.

Nous pouvons raisonner de manière analogue pour l'espace à cinq plans lacunaires X, Y, Z, T, U et le raisonnement s'étendre manifestement à un nombre quelconque de dimensions.

*Premier cas.* — Une au moins des fractions dérivées à deux termes pris parmi X, Y, Z, T est presque nulle. Alors une quadrature prouve que la courbe est presque dans un plan (passant par une arête), et l'on est ramené au problème du plan à quatre droites lacunaires.

*Deuxième cas.* — L'hypothèse du premier cas étant exclue, un au moins des quatre systèmes de trois termes pris parmi X, Y, Z, T a ses trois fractions dérivées presque partout nulles. Alors, par quadratures, on trouve que la courbe est presque partout presque dans un plan (passant par un sommet) et l'on est encore ramené au problème du plan à quatre droites lacunaires.

*Troisième cas.* — Les hypothèses des deux premiers cas étant exclues, toutes les fractions dérivées à quatre termes X, Y, Z, T sont presque partout nulles. Alors, par quadratures, on trouve que la courbe est presque partout presque dans un plan, et l'on est encore ramené au problème du plan à quatre droites lacunaires.

*Quatrième cas.* — Les hypothèses des trois premiers cas sont exclues. Alors, puisque $X+Y+Z+T+U=0$, on a des expressions de $\frac{X}{U}$, $\frac{Y}{U}$, $\frac{Z}{U}$, $\frac{T}{U}$, la première étant

$$\frac{X}{U} = -\frac{|UYZT|}{UYZT} : \frac{|XYZT|}{XYZT},$$

et les autres étant analogues; leur denominateur commun $\frac{|XYZT|}{XYZT}$ peut s'écrire par exemple :

$$\frac{\overset{|ZT|}{\cancel{|XY|}}\,|XYZT|}{|XZT|\,|YZT|}\;\frac{X\,|XZT|}{|XZ|\,|XT|}\;\frac{T\,|YZT|}{|TY|\,|TZ|}\;\frac{|XZ|}{XZ}\;\frac{|XT|}{XT}\;\frac{|TY|}{TY}\;\frac{|TZ|}{TZ}\;\frac{XY}{|XY|}.$$

L'inverse du huitième facteur passe au numérateur, et l'on en a une borne supérieure. Quant aux sept premiers, supposés n'être pas presque partout nuls, la considération de leurs inverses est possible ; or, on a directement une borne supérieure pour la croissance des quatrième, cinquième, sixième et septième ; on en a une, comme on l'a vu plus haut, pour la croissance des deuxième et troisième ; pour le premier, on en obtient une en l'écrivant

$$\left(\frac{|XYZT|}{XYZT}\,\frac{|XY|}{XY}\right):\left(\frac{X\,|XZT|}{|XZ|\,|XT|}\,\frac{T\,|YZT|}{|TY|\,|TZ|}\,\frac{|XZ|}{XZ}\,\frac{|XT|}{XT}\,\frac{|TY|}{TY}\,\frac{|TZ|}{TZ}\right).$$

On trouve ainsi, directement que, dans ce cas, l'écart au point initial est borné à l'intérieur du cercle-unité.

Nous sommes conduits en définitive, grâce au raisonnement précédent, à des théorèmes relatifs à l'espace projectif $S_n$, avec $(n+2)\,S_{n-1}$ lacunaires. En particulier, le théorème énoncé dans l'introduction (théorème VIII) se trouve établi comme conséquence du suivant :

THÉORÈME VII. — *Soient dans l'espace projectif* $S_n$, *en position générale*, $(n+2)$ *sous-espaces* $S_{n-1}$ *fixes*, X, Y, ..., V, *les premiers membres de leurs équations satisfaisant à* $X+Y+\ldots+V=0$. *Les coordonnées d'un point* M *de* $S_n$ *sont à l'intérieur du cercle* $|x|<1$ *fonctions méromorphes de la variable* $x$ ; *pour* $|x|<1$, *le point* M *ne vient sur aucun des* $(n+2)S_{n-1}$ ; *il a pour* $x=0$ *une position* $M_0$ *telle que des nombres quelconques en nombre inférieur à* $n+2$, *choisis parmi* $X_0$, $Y_0$, ..., $V_0$, *aient toujours une somme différente de zéro. Alors lorsque* $x$ *demeure intérieur au cercle* $|x|<\rho<1$, *les rapports respectifs de* X, Y, ..., V *admettent des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$ *et* $\rho$.

18. Pour pouvoir énoncer des propositions relatives au cas où $M_0$ est quelconque, il est nécessaire d'entrer dans quelques considérations supplémentaires et d'adopter, provisoirement du moins, une certaine terminologie.

Nous appellerons *point spécial* un point n'appartenant pas à la multiplicité lacunaire des $(n+2)S_{n-1}$ donnés, pour lequel la somme de certains des nombres X, Y, ..., V est nulle (alors la somme des autres l'est aussi en vertu de $X+Y+\ldots+V=0$); *multiplicité spéciale* ou *diagonale* le lieu des points spéciaux; cette multiplicité à $n-1$ dimensions est formée d'un nombre aisé à calculer de $S_{n-1}$ (dits diagonaux).

Une *variété spéciale* est une variété linéaire coupant la multiplicité lacunaire suivant un nombre de variétés distinctes dépassant exactement d'une unité le nombre de ses dimensions; ces variétés distinctes sont alors nécessairement en position générale sur la variété spéciale. Le nombre des dimensions d'une variété spéciale ne peut dépasser la partie entière de $\frac{n}{2}$. Tous ses points sont spéciaux, sauf naturellement les points lacunaires. L'ensemble des variétés spéciales est la multiplicité spéciale ou diagonale définie plus haut. Chaque variété spéciale peut être regardée comme engendrée par le point représentatif d'un système de fonctions méromorphes à un nombre de variables égal au nombre de ses dimensions, admettant la multiplicité lacunaire donnée. Pour un point variable d'une variété spéciale, X, Y, Z, ..., V se divisent en un certain nombre de groupes comprenant chacun au moins deux d'entre elles, et celles de ces coordonnées appartenant à un même groupe ne diffèrent de l'une d'entre elles que par des facteurs constants, la somme de ces facteurs étant nulle.

Étant donnée une variété spéciale, considérons les variétés spéciales qui peuvent s'en déduire par variation continue : elles forment un *système complet de variétés spéciales*, et engendrent une variété diagonale; sur cette dernière variété, la somme des coordonnées X, Y, ..., V de chaque groupe qui ne différaient sur la variété spéciale que par un facteur constant, cette somme est nulle; ce sont là les équations de la variété diagonale considérée; ainsi se trouve définie la variété diagonale la plus vaste contenant la variété spéciale donnée (dans certains cas d'ailleurs, la variété donnée peut appartenir à d'autres variétés diagonales situées sur celle-là). Le nombre des dimensions d'une variété diagonale est au moins égal à la partie entière de $\frac{n+1}{2}$.

Étant donné un point spécial, il existe un nombre fini de variétés spéciales le contenant; certaines peuvent être contenues dans d'autres d'entre elles, supprimons-les ; le nombre des variétés spéciales subsistant après cette suppression sera dit la *spécialité* du point considéré (quel que soit le nombre des dimensions desdites variétés), suivant que la spécialité est 1, 2, ..., le point est *simplement, doublement... spécial*. Le lieu des points simplement, doublement... spéciaux est la multiplicité simplement, doublement... spéciale.

Appliquons sommairement les considérations précédentes aux cas où $n = 2, 3, 4$.

Dans le $S_2$, il n'y a qu'une sorte de variétés spéciales (et diagonales) répondant au symbole 2-2. Ce sont les trois diagonales du quadrilatère complet. Les trois points d'intersection sont doublement spéciaux.

Dans le $S_3$, on a encore à considérer un symbole, le symbole 2-3. Les droites spéciales sont celles en nombre $\infty^1$, qui unissent un sommet du pentaèdre à l'arête opposée; elles sont situées sur 10 plans diagonaux; les intersections de ces plans diagonaux non situées sur les plans lacunaires sont au nombre de 30; ces 30 droites constituent la *multiplicité doublement spéciale*.

Pour le $S_4$, bornons-nous à énumérer les variétés spéciales. On a à considérer trois symboles : 2-4, 3-3, 2-2-2. Au premier correspondent les droites, en nombre $\infty^2$, qui passent par un point commun à quatre des six hyperplans lacunaires, et s'appuient sur le plan commun aux deux autres; au second, les droites, en nombre $\infty^2$ également, qui s'appuient sur deux droites dont chacune est l'intersection de trois hyperplans lacunaires; au troisième les plans, en nombre fini, dont chacun est dans un même hyperplan avec les plans d'intersection de trois couples d'hyperplans lacunaires.

19. Grâce aux considérations précédentes, nous allons pouvoir énoncer un théorème dans le cas où $M_0$ est spécial.

Voici le théorème auquel on aboutit dans le cas le plus général, et qui complète le théorème VII; on l'établit en développant avec toute la précision possible le raisonnement succinctement indiqué plus haut, de manière analogue à celle de la section V :

Théorème IX. — A. *Soient dans l'espace projectif* $S_n$, *en position géné-*

*rale*, $(n+2)$ *sous-espaces* $S_{n-1}$ *fixes*, X, Y, ..., V, *les premiers membres de leurs équations satisfaisant à* $X+Y+\ldots+V=0$. *Les coordonnées d'un point* M *de* $S_n$ *sont à l'intérieur du cercle* $|x|<1$ *fonctions méromorphes de la variable* $x$; *pour* $|x|<1$, *le point* M *ne vient sur aucun des* $(n+2)S_{n-1}$, *il a pour* $x=0$ *une position* $M_0$ *qui est simplement spéciale, ce terme ayant la signification qui lui a été attribuée dans cette section. A la variété spéciale unique passant par* $M_0$ *répond alors de la manière convenue un partage des coordonnées* X, Y, ..., V *en un certain nombre de groupes. Alors, pour* $|x|<\rho<1$ :

*Le rapport de deux coordonnées d'un même groupe admet des bornes supérieure et inférieure dépendant uniquement de* $M_0$ *et* $\rho$.

B. *Si, les autres hypothèses étant les mêmes, le point* $M_0$ *est multiplement spécial, et de spécialité* $q$, *on peut écrire pour chacune des* $q$ *variétés spéciales qui lui correspondent un système d'inégalités exactement pareil à celui donné en* (A), *comme si* $M_0$ *était simplement spécial, la variété correspondante étant celle considérée; mais alors ces* $q$ *systèmes d'inégalités ne sont pas nécessairement tous vérifiés. On peut simplement affirmer que pour un système de fonctions quelconque l'un au moins de ces systèmes est vérifié (pouvant changer avec* $\rho$*).*

On déduit immédiatement de ce théorème un théorème complétant celui donné dans l'Introduction, et concernant les coefficients des développements des fonctions considérées, dans le cas où le point $M_0$ est simplement ou multiplement spécial. Il convient d'observer que lorsque $M_0$ est à spécialité multiple, un raisonnement complémentaire, d'ailleurs aisé, est nécessaire. En effet, dans le cas où $M_0$ est multiplement spécial, il convient pour obtenir les résultats les plus complets d'utiliser sous une forme convenable les inégalités résultant de l'application de la proposition A aux diverses variétés spéciales. C'est ainsi que dans le cas de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ne s'annulant pas, et dont la somme ne devenait pas égale à l'unité (section V), la limitation de $a_1 b_1$ pour $a_0=b_0=1$ ne pouvait se déduire de la limitation du plus petit de $a_1$ et de $b_1$, mais de celle de $\frac{fg}{f+g-1}$.

Nous n'avons pu obtenir jusqu'à présent, pour $n$ quelconque, de résultats plus précis que ceux donnés actuellement dans l'énoncé du théorème IX, notamment en ce qui concerne la forme des domaines couverts au voisinage de la multiplicité lacunaire. Dès le cas du $S_4$, les choses paraissent présenter quelque complication, due à l'existence de plans spéciaux (dans le $S_2$ et le $S_3$ il n'y a que des droites spéciales).

(D'ailleurs, avec des renseignements complémentaires au sujet de cette section, la suite du théorème IX sera donnée ultérieurement, peut-être dans un autre Recueil.)

Énonçons cependant ici par anticipation quelques propriétés intéressantes relatives au cas du $S_3$; il s'agit de la forme du domaine couvert par le point M dans le voisinage de la multiplicité lacunaire, $M_0$ étant spécial (simplement pour fixer les idées; s'il l'est doublement, il n'y aura pas de différence). Tout est naturellement supposé réel (géométriquement et non seulement algébriquement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couples de plans imaginaires conjugués). Nous avons à considérer sur la droite spéciale le voisinage de l'arête et le voisinage du sommet.

Dans le voisinage de l'arête, le domaine est formé, pour $\rho$ assez petit, par deux sortes de lames opposées par l'arête, se confondant presque avec le plan diagonal. Lorsque $\rho$ croît, il se forme vraisemblablement d'autres lames analogues le long des parties de l'arête éloignées de la droite spéciale.

Dans le voisinage du sommet, le plan diagonal coupe le trièdre suivant trois droites déterminant trois couples d'angles opposés par le sommet. Lorsque $\rho$ est voisin de zéro, le domaine est également à l'intérieur de celui des trois couples d'angles qui contient la droite spéciale, à l'exclusion des deux autres; il est formé de deux sortes de spatules opposées par le sommet; le plan diagonal coupe leur ensemble suivant une courbe ayant un point double à tangentes distinctes, un plan sécant arbitraire suivant une courbe ayant un point tacnodal. La surface

$$z^2 = (x^2 + y^2)(x^2 \sin^2\alpha - y^2 \cos^2\alpha)$$

a à peu près à l'origine la forme dont il s'agit.

Lorsque $\rho$, toujours inférieur à l'unité, devient suffisamment grand, il est possible qu'il se forme, outre le précédent, un système de spatules analogue dans chacun des deux autres couples d'angles, mais c'est là un point qu'il faudrait étudier de plus près.

20. Étendons les théorèmes de la présente section aux fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire au cas où le point M dépend de manière méromorphe de $p$ variables au lieu d'une. Observons d'abord que le cas où $p > n$ ne paraît pas présenter d'intérêt, ne donnant probablement lieu à aucun théorème qui ne soit un corollaire de ceux relatifs aux cas où $p \leqq n$. C'est ainsi que personne n'a jamais songé à énoncer des théorèmes relatifs à une fonction de *plusieurs variables* à trois valeurs lacunaires. Nous supposerons donc toujours $p \leqq n$.

Théorème X. — *Les théorèmes VII et IX demeurent vrais lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, les coordonnées du point* M, *au lieu d'être fonctions méromorphes d'une variable $x$ dans le cercle-unité $|x| < 1$, sont fonctions méromorphes de $p (p \leqq n)$ variables $x, y, \ldots, t$ dans l'hypersphère-unité,*

$$x\bar{x} + y\bar{y} + \ldots + t\bar{t} - 1 < 0,$$

*les cercles de rayons $\rho$ et $\rho'$ étant également remplacés dans les énoncés par les hypersphères de rayon $\rho$ et $\rho'$.*

*Ces théorèmes demeurent vrais si l'hypersphère-unité est remplacée par un domaine connexe quelconque de l'espace projectif à $p$ dimensions complexes, les hypersphères de rayons $\rho$ et $\rho'$ étant remplacées de même par des domaines intérieurs au précédent et contenant* $M_0$.

Ce théorème se déduit des théorèmes VII et IX comme le théorème VI a été déduit du théorème II. Signalons seulement un point de détail que nous avions passé sous silence à cet endroit. La courbe algébrique construite pour démontrer la seconde partie de l'énoncé doit, pour que la démonstration s'applique, être sectionnée par la frontière du domaine. Or, tout d'abord, il est clair qu'elle a des points communs avec cette frontière, puisqu'une fonction uniforme méromorphe en tout point d'une surface de Riemann est rationnelle. Reste à supposer qu'il puisse se présenter le cas où elle n'aurait en commun avec la frontière du domaine que des points en nombre fini, au lieu d'une ligne; alors les fonctions, si elles ne sont pas rationnelles, sont à point essentiel isolé, et les quantités entrant en considération sont non seulement bornées, mais constantes.

Signalons enfin deux généralisations possibles, que nous ne ferons pas ici. D'une part, dans le cas d'un nombre de variables supérieur à 1 et inférieur à $n$, on pourra chercher à quelles conditions de limitation satisfont les différents déterminants fonctionnels, lorsque $M_0$ est spécial. D'autre part, les théorèmes relatifs aux déterminants fonctionnels sont certainement susceptibles (déjà dans le cas de $n$ variables étudié au paragraphe VI) d'une forme intégrale qui soit pour eux ce que le théorème de M. Schottky est pour celui de M. Landau.

## VIII. — Observations diverses.

21. Nous allons, dans cette section, faire quelques remarques, d'abord sur trois points touchant de très près au Mémoire actuel, ensuite sur des questions dont ce Mémoire suggère l'étude.

Justifions d'abord ce que nous avons annoncé au paragraphe IV, relativement à la possibilité de se passer des lemmes 5 et 6 dans la démonstration du théorème II (et des théorèmes subséquents dans la démonstration desquels ils intervenaient directement ou indirectement). Ils peuvent être remplacés par le suivant :

Lemme 6 *bis*. — *Soient des nombres $t$, assujettis seulement à être de module inférieur à l'unité. A tout nombre positif $r < 1$ et à tout nombre positif $\gamma$, si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre $h$ dépendant uniquement de $r$ et $\gamma$ (nullement des $t$) tel que, $x$ et $z$ étant inférieurs à $r$ en module, on ait en général*

$$\Sigma \log \left| \frac{1 - \bar{x} t}{x - t} \right| < h \Sigma \log \left| \frac{1 - \bar{z} t}{z - t} \right|,$$

*seules pouvant faire exception à l'inégalité précédente, pour des valeurs déterminées des $t$ et de $z$, des valeurs de $x$ pour lesquelles la variation totale du module $|x|$ et celle de la partie réelle $\mathcal{R}(x)$ soient inférieures à $\gamma$.*

Ce lemme 6 *bis* s'établit sans peine; on en ramène, en effet, la démonstration à celle d'une proposition analogue, mais où tout est réel; et cette dernière résulte de celle, citée au paragraphe IV, des pages 78-79 de l'Ouvrage de M. Valiron, de la même manière quèdans ce paragraphe le lemme 6 a été déduit du lemme 5.

Dans la démonstration du théorème II, l'hypothèse $b$ est alors à remplacer par la suivante :

*b bis.* L'hypothèse $\bar{a}$ est exclue; mais à l'intérieur du cercle $R_2$, chacune des expressions $\frac{X|XYZ|}{|XY|XZ|}$, $\frac{Y|YZX|}{|YZ||YX|}$, $\frac{Z|ZXY|}{|ZX||ZY|}$ est inférieure à $\varepsilon'$, sauf peut-être pour des valeurs de $x$ pour lesquelles la variation totale du module $|x|$ et celle de la partie réelle $\mathcal{R}(x)$ sont inférieures à $\varepsilon''$.

Donc, dans cette hypothèse *b bis*, les cercles exceptionnels correspondent à une variation totale du rayon, entre o et $R_2$, au plus égale à $3\varepsilon''$, et les droites exceptionnelles, perpendiculaires à l'axe réel, à une variation totale de l'abscisse, entre $-R_2$ et $+R_2$, au plus égale au même nombre $3\varepsilon''$. Pour un rayon supérieur à $\frac{3\varepsilon''}{2}$, deux cercles non exceptionnels communiquent toujours par une droite non exceptionnelle. Il résulte visiblement de là que par la considération de ces cercles qui ne peuvent laisser à découvert, entre o et $R_2$, que des couronnes d'épaisseur totale au plus égale à $3\varepsilon'' + \frac{3\varepsilon''}{2} = \frac{9\varepsilon''}{2}$, on peut développer un raisonnement à peu près identique à celui fait dans l'hypothèse $b$.

Enfin, dans l'hypothèse *c bis* (exclusion des hypothèses $\bar{a}$ et *b bis*), le raisonnement à faire ne diffère presque pas de celui fait dans l'hypothèse $c$.

Ainsi, il est parfaitement possible de se passer des lemmes 5 et 6. Mais nous avons préféré ne pas mêler au texte ces considérations un peu lourdes, et ne pas ajouter aux complications tenant à la nature même de la question celles provenant d'un mode d'exposition parfaitement rigoureux sans doute, mais qui n'est ni élégant, ni naturel.

Il est certain, en effet, que le lemme 5 est celui commandé par le sujet traité. Nous avons vainement cherché à en obtenir une démonstration purement algébrique; c'est là une lacune qu'il y aurait intérêt à combler; on prouverait ainsi que les contours de longueur totale inférieure à $\gamma$ à l'extérieur desquels la propriété a lieu peuvent être pris *en nombre au plus égal à n*; la vraisemblance de ce dernier fait apparaît si l'on considère la surface de Riemann correspondant au polynome comme perforée d'un seul coup par un emporte-pièce cylindrique.

22. Occupons-nous maintenant d'une question posée dans l'Introduction : le théorème III de la section V (pour fixer les idées) est-il véritablement la traduction en termes finis du théorème de M. Borel sur l'identité $\sum_1^4 e^{G_i(x)} = 0$, ou contient-il quelque chose de plus?

Observons que la connaissance d'une borne supérieure de $\frac{|XYZ|}{XYZ}$ dans un domaine ne suffit pas pour conclure que X, Y, Z (holomorphes et sans zéros) y sont approximativement liés par une relation linéaire et homogène; il faut y ajouter, par exemple, la connaissance de bornes supérieure et inférieure pour les rapports respectifs de X, Y, Z. Par conséquent, connaissant $(a_0, b_0)$ en position générale, et $a_1 \not\equiv 0$, on ne pourra, semble-t-il, trouver par le raisonnement de la section III un cercle où l'on ait sûrement soit $f = 0$, soit $g = 0$, soit $f + g = 1$ que si l'on connaît des bornes supérieures de $f$ et $g$ dans un certain cercle de rayon dépendant de $a_0$, $b_0$ et $a_1$.

Le théorème III n'en résultait pas moins de celui de M. Borel avec une irrésistible évidence. En effet, il n'était pas douteux que l'on pût trouver pour ce dernier — comme on l'a fait pour celui de M. Picard — une démonstration n'envisageant que les fonctions elles-mêmes, indépendante de l'emploi des dérivées. Et il tombait sous le sens que la traduction en termes finis d'une démonstration de cette nature ne pouvait introduire aucune condition de limitation du module des fonctions considérées.

Nous ne nous arrêterons pas à rechercher si l'on pourrait compléter le raisonnement du paragraphe III, de manière à obtenir une démonstration du théorème III, laquelle ne pourrait d'ailleurs manquer d'être identique dans le fond à celle développée au paragraphe V. Il nous suffit de posséder cette dernière, qui sera probablement susceptible de quelques simplifications ultérieures n'en altérant pas les lignes essentielles. Nous dirons seulement un mot, un peu plus loin, sur la manière dont celle-ci pourrait être présentée en recourant uniquement à la considération du module maximum, point de vue adopté au paragraphe III.

23. Dans la Note des *Comptes rendus*, nous avons rappelé que les résultats les plus complets dans la théorie de la droite à trois points lacunaires sont fournis par la fonction modulaire, laquelle en réalise l'uniformisation la plus naturelle, et considère comme vraisemblables que, dans la théorie actuelle, les résultats les plus complets seraient fournis par certaines fonctions automorphes (peut-être hyperfuchsiennes), réalisant l'uniformisation la plus naturelle du plan à quatre droites totalement lacunaires, de l'espace à cinq plans totalement lacunaires, etc. Si la chose est exacte, la détermination effective de ces fonctions sera un problème très intéressant, et dont la résolution sera fort désirable. Mais il convient d'observer que les faits signalés à la fin de la section V donnent à penser que la détermination de ces fonctions et la manière dont elles s'appliqueront à la théorie actuelle seront plus compliquées que dans le cas particulièrement simple de la droite à trois points lacunaires et de la fonction modulaire.

Si, contre toute attente, l'obtention des résultats les plus complets n'était pas réalisable à l'aide de fonctions analytiques convenables, elle continuerait certainement du moins à l'être par l'intégration de systèmes aux dérivées partielles appropriés, analogues dans une certaine mesure à l'équation $\Delta u = e^u$.

24. Passons maintenant à des questions dont l'objet se rattache moins étroitement au Mémoire actuel.

1° Pour prouver sans avoir recours à la dérivation l'impossibilité de la relation $e^{G_1} + e^{G_2} + e^{G_3} + e^{G_4} = 0$, où les $G_i$ sont des fonctions entières dont deux quelconques ne diffèrent pas par une simple constante, on pourra examiner d'abord le cas où les $G_i$ sont des polynomes; le théorème du minimum du module appliqué aux sommes des $e^{G_i}$ pris deux à deux, pourra conduire à la démonstration dans ce cas particulier.

Pour passer au cas général, il faudra d'abord établir le théorème du minimum du module d'une manière absolument générale sous sa forme la plus précise; on aura alors une démonstration du théorème de M. Borel analogue à celle que nous avons donnée du théorème de M. Picard, dans le Mémoire cité des *Annales de Toulouse*, en observant que la considération de la fonction $f(x)[f(x)-1]$ conduit à une conséquence contradictoire avec une proposition de M. Wiman et de M. Valiron; on aura ainsi résolu la question au point de vue ordinaire du maximum et du minimum du module. Mais il sera plus intéressant peut-être encore de la résoudre au point de vue des valeurs moyennes logarithmiques de MM. Nevanlinna: il faudra tout d'abord, à cet effet, démontrer le théorème de M. Picard, sans dérivation, à l'aide de ces valeurs moyennes, ce qui semble pouvoir se faire par l'établissement préalable d'un lemme relatif à la valeur moyenne correspondant à la somme de deux fonctions.

2° Il serait facile de traduire les théorèmes du présent Mémoire en propositions relatives à des fonctions algébroïdes d'une ou plusieurs variables. L'interprétation du théorème de M. Borel au moyen des fonctions algébroïdes, bien connue par les travaux de MM. Remoundos et Varopoulos repose, on le sait, sur le fait que l'image des systèmes de $n$ points d'une droite à $n+2$ points lacunaires est l'espace à $n$ dimensions, à $n+2$ sous-espaces linéaires lacunaires à $n-1$ dimensions.

3° Nous avons tenté d'appliquer les théorèmes I, II et III à l'établissement de théorèmes analogues à ceux de MM. Landau et Schottky, mais pour un nombre de valeurs lacunaires supérieur à trois, et le cercle-unité étant remplacé par certaines aires multiplement connexes dans lesquelles la fonction est méromorphe; ainsi que de théorèmes analogues à ceux de M. Picard, pour des fonctions n'ayant pas d'autres points essentiels que ceux d'une fonction kleinéenne de la troisième famille (ensemble parfait discontinu). Mais ce travail, œuvre d'un débutant, ne parvint pas, comme s'en sont aperçus MM. Hadamard, Montel, Fatou, à résoudre le problème posé. Certains des énoncés obtenus pouvaient, en effet, être déduits de la théorie de la droite à trois points lacunaires; d'autres étaient insuffisamment démontrés et même en partie inexacts, cette inexactitude tenant au fait que l'ensemble kleinéen susdit peut servir à uniformiser non seulement la courbe qui y est attachée, mais aussi d'autres courbes de genre supérieur, multiples de la précédente sans points de ramification. Le problème en question, pour les ensembles kleinéens dont il s'agit, et *a fortiori* pour les ensembles qui leur sont simplement homéomorphes, paraît présenter des difficultés de nature analytique et arithmétique, si l'on voit assez bien quelles questions peuvent se poser, on aperçoit moins nettement la méthode à employer pour les résoudre et surtout les résultats qui, en définitive, pourront être obtenus.

25. Les lemmes 5 et 6 peuvent être rattachés à diverses questions dignes d'intérêt.

1° Indiquons d'abord comment on pourrait démontrer le lemme 5 d'une manière touchant à la fois à la théorie des ensembles et au calcul des probabilités. Grâce aux considérations du début de la présente section, il suffit, en somme, pour l'établir, de démontrer qu'*un ensemble de points du plan dont la projection sur une droite quelconque a une mesure nulle peut être enfermé dans des contours dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut* (1), c'est-à-dire qu'il est *ponctuel* suivant l'expression de M. Painlevé, ou qu'il a une *mesure linéaire nulle*, suivant celle de M. Valiron (la *mesure linéaire* d'un ensemble plan étant la borne inférieure de longueur totale des systèmes de contours contenant l'ensemble). Il s'agit donc de prouver qu'*un ensemble a une mesure linéaire nulle si la probabilité pour qu'il soit rencontré par une droite prise au hasard est nulle, c'est-à-dire si l'ensemble des projections d'un point fixe, d'ailleurs arbitraire, sur les droites qui le rencontrent, a une mesure superficielle nulle.*

Observons alors que par tout point de l'ensemble des projections passe une ligne appartenant au même ensemble; supposons, pour fixer les idées, l'ensemble donné situé tout entier à distance finie; on recon-

(1) Il est aisé de construire un ensemble de mesure linéaire non nulle, mais dont la projection sur *quatre* droites du plan, de directions différentes a une mesure nulle. Il y aurait intérêt à rechercher s'il existe des ensembles jouissant de la même propriété pour un nombre de droites supérieur à quatre.

naît alors, moyennant une homéomorphie convenable, que le dernier énoncé est équivalent au suivant :

*Soient des cordes d'un cercle donné, de longueur supérieure à un nombre donné, constituant un ensemble de mesure superficielle nulle. L'ensemble des projections de tout point fixe du plan sur ces cordes a une mesure linéaire nulle, et, ce qui revient au même, ces cordes peuvent être enfermées dans un système de couples de droites parallèles tel que la somme des écarts de tous les couples soit aussi petite que l'on veut.*

Telle est donc la proposition qu'il conviendrait d'établir pour prouver qu'un ensemble plan à projections ponctuelles est lui-même ponctuel, ce qui donnera une démonstration du lemme 5.

2° Dans l'énoncé du lemme 6 figure la somme

$$\Sigma \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right|,$$

étendue à des nombres $t$ inférieurs à l'unité; cette somme est une fonction de $x (x < 1)$ dont le lemme 6 énonce une propriété indépendante des $t$. Or on reconnaît sans peine qu'à ce point de vue, la considération de cette somme est absolument équivalente à celle de l'intégrale double

$$\mathrm{I}(x) = \int\int_c \mu(t) \log \left| \frac{1-\bar{x}t}{x-t} \right| d\omega_t,$$

étendue au cercle $|t| < 1$, désigné ici par $c$, d'élément d'aire $d\omega_t$, la fonction $\mu(t)$ étant supposée seulement positive et continue. Soit $x = u + iv$; la fonction I s'annule sur le cercle $u^2 + v^2 = 1$, et son laplacien $\Delta\mathrm{I}$ est égal à l'intérieur de ce cercle à $-2\pi\mu$. Réciproquement, toute fonction s'annulant sur le cercle-unité et dont le laplacien est négatif à l'intérieur peut se mettre sous forme d'une telle intégrale double. Le laplacien est ici défini par l'équation de Poisson, son existence ne suppose pas celle des dérivées secondes.

Le lemme 6 donne donc une propriété générale des *fonctions nulles le long d'un cercle et à laplacien négatif à l'intérieur :* connaissant la valeur de la fonction en un point déterminé, on est assuré que les points d'un cercle intérieur fixe où elle dépasse un nombre M peuvent être enfermés dans des contours (pour lesquels on peut naturellement prendre des cercles) *de longueur totale bornée supérieurement par un nombre tendant vers zéro avec* $1/M$. Cette propriété pourrait s'étendre au cas d'un domaine quelconque, simplement ou multiplement connexe.

Il est connu qu'une fonction à laplacien négatif ne peut avoir de minima; de plus, elle est positive dans le cas actuel, où elle s'annule sur le contour. L'étude approfondie de la surface $z = f(x, y)$ où le laplacien $\Delta z$ est négatif, paraît digne d'intérêt, spécialement en ce qui concerne la configuration des lignes de niveau.

On peut étendre de plusieurs manières les considérations précédentes au cas d'un nombre plus grand de dimensions. Par exemple, pour le cas de trois dimensions, deux extensions sont possibles (et chacune serait probablement, comme dans le cas de deux dimensions, susceptible de divers aspects).

D'une part, on peut considérer l'intégrale triple, étendue à la sphère-unité

$$\iiint_S \mu(P) \log \frac{1}{r}\, dv,$$

$r$ étant la distance à l'origine du point variable P; en transformant conformément la sphère en elle-même de manière à faire passer l'origine en un point intérieur quelconque M, on sera conduit à une intégrale triple fonction de M; et cette fonction jouira probablement d'une propriété analogue à celle obtenue dans le cas de deux dimensions, ayant lieu à l'extérieur de sphères dont la somme des rayons sera aussi petite qu'on le voudra.

D'autre part on peut considérer encore dans le cas de trois dimensions une fonction nulle sur la surface limitant une certaine région, et à laplacien négatif à l'intérieur; il est alors vraisemblable qu'une propriété analogue aura encore lieu, mais que les régions exceptionnelles pourront seulement être enfermées dans des surfaces d'étendue totale aussi petite que l'on veut.

3° Le procédé utilisé ci-dessus pour transformer une question dans les données de laquelle figurent certaines indéterminées discontinues en une question où tout est continu, semble pouvoir être appliqué utilement à la démonstration, sous sa forme la plus précise, du théorème de M. Hadamard sur le module minimum. Il suffira en effet d'établir la proposition suivante :

*Si une fonction continue réelle nulle à l'origine a un laplacien négatif dans le cercle-unité, le maximum des valeurs positives de la fonction sur un cercle de rayon $r$ est en général inférieur au produit par $1+\varepsilon$ du maximum des valeurs négatives changées de signe de la fonction sur le même cercle, la variation totale de $\log r$ dans les couronnes exceptionnelles étant bornée par un nombre dépendant uniquement du nombre positif arbitraire $\varepsilon$.*

Or, d'après un théorème de MM. Wiman et Valiron, la propriété en question est vraie dans le cas ou le laplacien est nul. Pour l'établir directement dans ce cas, il faudra trouver des inégalités auxquelles satisfait sur trois cercles différents une fonction harmonique dans une couronne où elle a sur tout cercle une valeur moyenne nulle, et soumettre ces inégalités à un processus d'intégration généralisant celui de M. Borel. Il n'est pas douteux que la démonstration ainsi construite sera applicable sans modification à la proposition énoncée.

26. Considérons la fonction $\frac{\varepsilon}{x}$, méromorphe dans le cercle-unité; si $\varepsilon$ tend vers zéro, elle ne tend évidemment pas uniformément vers zéro, puisqu'elle a toujours un pôle à l'origine; pourtant elle est nulle pour $\varepsilon = 0$, et l'on conçoit bien qu'à un certain point de vue elle puisse être regardée comme tendant vers zéro lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro; c'est cette notion un peu vague que nous allons tenter de préciser. Mais observons que l'on peut convenir de considérer, pour $\varepsilon = 0$, la fonction non comme nulle à l'origine, mais comme indéterminée; et en effet lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, la racine de l'équation $\frac{\varepsilon}{x} = a$ tend vers zéro quelle que soit la constante finie $a$. Ceci est en bon accord avec la définition de l'expression de M. Nevanlinna (*cf.* § IV) :

$$gm(r, f) = m(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

puisque lorsque $f$ tend vers zéro, sauf en un nombre fini de pôles, $m(r, f)$ devient nul, alors que $\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ est de petitesse limitée.

Nous dirons qu'une suite de fonctions méromorphes $f_n(x)$ converge *presque partout* vers zéro [1] à l'intérieur d'un domaine D *si à tout domaine* D' *intérieur à* D *au sens strict et à tout système de deux nombres positifs* $(\varepsilon, \delta)$ *l'on peut faire correspondre* N *tel que pour* $n > N$ *on ait dans le domaine* D' : $|f_n(x)| < \varepsilon$, *sauf peut-être à l'intérieur de contours de longueur totale inférieure à* $\delta$.

Il est clair que chaque contour exceptionnel doit contenir un pôle de la fonction $f_n(x)$ qui lui correspond, sinon on pourrait le supprimer.

La convergence presque partout vers une fonction holomorphe ou méromorphe $f(x)$ se définit de manière semblable, la condition $|f_n(x)| < \varepsilon$ étant simplement remplacée par la condition

$$\left| \frac{f(x) - f_u(x)}{1 + \overline{f(x)} f_n(x)} \right| < \varepsilon,$$

qui exprime que la distance sphérique des deux points $f(x)$ et $f_n(x)$ tend vers zéro.

On voit que ces définitions diffèrent de celles de la convergence uniforme ordinaire pour les fonctions holomorphes ou méromorphes par la possibilité de contours exceptionnels de longueur aussi petite qu'on veut, et que l'on peut d'ailleurs toujours supposer circulaires.

La fonction limite de la suite pourra dans certains cas être considérée comme ayant des points d'indétermination fictifs, à la fois zéros et pôles.

Soit $F(x) = R[f(x)]$ la fonction $f(x)$ étant méromorphe dans un domaine D, $R[f]$ étant une fraction rationnelle en $f$, à coefficients méromorphes dans D par rapport à $x$; *alors si* $f$ *converge presque partout à l'intérieur de* D *vers une fonction* $\varphi$, *la fonction* F$y$ *converge presque partout vers la fonction* $\Phi = R[\varphi]$.

Avec la définition ordinaire de la convergence, la propriété correspondante n'a nécessairement lieu que si R est à coefficients constants.

*Lorsqu'une fonction est le quotient de deux fonctions holomorphes qui tendent uniformément à l'intérieur d'un domaine vers des limites non*

---

[1] Le mot uniformément est sous-entendu; il n'y a pas lieu de considérer de convergence presque partout qui ne soit pas uniforme.

*toutes deux constamment nulles ou infinies, elle y tend presque partout vers le quotient des limites.*

*Si une fonction $f$ méromorphe à l'intérieur d'un domaine y tend presque partout vers une fonction $\varphi$, qui ne se réduise pas à la constante infinie, la dérivée $f'(x)$ y tend presque partout vers la dérivée $\varphi'(x)$.* C'est ce que l'on peut voir à l'aide de l'intégrale de Cauchy.

*Si $f'(x)$ tend presque partout vers $\varphi'(x)$, la différence $f(x)-f(a)$ tend presque partout vers $\varphi(x)-\varphi(a)$.* C'est ce que prouve une quadrature convenable.

Par analogie avec la notion de famille normale de M. Montel, on peut appeler *famille hyponormale* de fonctions méromorphes dans un domaine une famille telle que *de chacune de ses suites infinies l'on puisse extraire une suite convergeant presque partout à l'intérieur du domaine.* De ce qui précède résultent diverses propositions relatives à ces familles.

*Une famille de fonctions $f$ méromorphes dans un cercle et telle que $gm(r, f)$ y admette une borne supérieure valable pour toute la famille est hyponormale.* Mais une famille $f$ peut être hyponormale sans qu'aucune des deux expressions $gm(r, f)$, $gm\left(r, \frac{1}{f}\right)$ soit bornée; c'est ce que prouve l'exemple $f=\frac{x-\varepsilon}{x}$.

*Si un système de deux fonctions liées par une relation algébrique de genre un engendre une famille hyponormale, cette famille est nécessairement normale.*

Ce sont naturellement les raisonnements des sections V et VII qui ont suggéré les notions exposées dans le présent numéro. Ceci nous ramène à examiner sommairement comment ils pourraient être développés en utilisant seulement le maximum du module. Il faudra d'abord, afin de l'appliquer à $\frac{X|XYZ|}{|XY||XZ|}$, établir un lemme généralisant le lemme 2, s'appliquant au cas du quotient non plus holomorphe, mais méromorphe, de deux fonctions holomorphes quelconques, quotient qui se mettra sous forme d'une fraction ayant un polynome pour dénominateur. Le raisonnement pourra ensuite être développé parallèlement à celui du texte, en utilisant le lemme 6 ou 6 *bis*. Mais il sera plus logique, et théoriquement préférable, de se passer des contours exceptionnels de longueur totale tendant vers zéro, dont la considération est dans l'ordre d'idées de la méthode des valeurs moyennes logarithmiques, non dans celui de la méthode du module maximum. Il y aura donc lieu en somme de trouver une autre définition de la convergence vers zéro presque partout d'une fonction méromorphe dans un cercle; il conviendra pour l'objet actuel de la considérer comme quotient d'une fonction holomorphe par un polynome et de rechercher quelles inégalités doivent avoir lieu entre le module maximum du numérateur et les zéros du dénominateur.

Une troisième définition de la convergence vers zéro sera celle reposant uniquement sur la formule de Poisson-Jensen. Même pour le simple cas d'une fonction holomorphe, elle demeure encore à trouver; il y aurait lieu de commencer par le cas d'une fonction holomorphe sans zéros.

27. Nous demanderons, en terminant, que l'on veuille bien excuser les moyens relativement compliqués par lesquels nous avons obtenu des résultats en somme assez simples, comme le théorème III; les démonstrations actuelles seront sans doute ultérieurement simplifiées, et l'on en pourra trouver d'autres. Mais actuellement, on doit reconnaître que bon nombre des auteurs qui traitent ou croient traiter de la théorie des fonctions analytiques ont beaucoup plus tendance à suivre le caprice de leur fantaisie qu'à examiner les problèmes qui se posent en réalité, et ne produisent par suite que des œuvres dont le caractère violemment inesthétique n'a d'égal que l'absolue stérilité. De tels écrits comptent assurément parmi les plus remarquables specimens de ce que l'on peut appeler la « contre-mathématique ». Pour passer maître en cette science d'un genre nouveau, il suffit, avons-nous dit, de se regarder soi-même au lieu de regarder les choses telles qu'elles sont. Il résulte de là que quiconque veut entreprendre l'étude d'une question tant soit peu sérieuse ne trouve dans la littérature contemporaine qu'un petit nombre d'instruments à sa disposition. On voudrait espérer qu'un changement se produira, que de nouveaux moyens d'investigation seront créés, et enfin quelques problèmes résolus; mais il serait téméraire de l'affirmer.

## ADDENDUM.

$\alpha$. Grâce aux lemmes 1 et 2, il nous a été possible d'écarter de la démonstration des théorèmes de Picard, Landau-Schottky et Borel, les propriétés du minimum du module d'un polynome, que P. Boutroux avait obtenues et appliquées dans la théorie des fonctions. Il est bien curieux (lemmes 5, 6 et 6 *bis*) que ces mêmes résultats de Boutroux soient revenus s'imposer à nous, de manière d'ailleurs toute différente, lorsque nous avons voulu opérer en termes finis pour un système de plusieurs fonctions.

$\beta$. Au n° 11, lorsqu'en substituant l'hypothèse $\bar{a}$ à l'hypothèse $a$, nous conservons les hypothèses $b$ et $c$, nous supposons bien entendu que dans ces dernières hypothèses le triangle XYZ (pour fixer les idées) soit l'un des deux triangles dont l'existence résulte de la négation de l'hypothèse $\bar{a}$. Une remarque analogue s'applique aux hypothèses $b$ *bis* et $c$ *bis* du n° 21.

$\gamma$. Au sujet du n° 25 (alinéas 1°) signalons d'abord que M. Mirimanoff, dans les *Fundamenta Mathematicæ* (t. IV, 1923, p. 76, 118 et 122), a construit un ensemble plan non ponctuel ayant sur une infinité dénombrable de droites une projection ponctuelle. D'autre part, dans des travaux en cours de publication, MM. Mazurkiewicz et Saks établissent l'existence d'ensembles non ponctuels ayant sur toute droite des projections ponctuelles; donc les suggestions des alinéas en question du n° 25 ne pouvaient pas aboutir. C'est par d'autres procédés qu'il faudra démontrer le lemme 5.

$\delta$. En ce qui concerne les considérations de l'alinéa 3° du n° 25, il sera également intéressant de les généraliser en remplaçant, à la manière de M. Maillet, les couronnes exceptionnelles par de petits cercles exceptionnels, la somme des angles sous lesquels ceux-ci sont vus de l'origine figurant peut-être alors dans le résultat.

ε. Au sujet de plusieurs des questions dont il s'est agi dans le présent Mémoire, on pourra se reporter à deux fascicules du *Mémorial des Sciences mathématiques* : G. Valiron, *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable*, 1925, et A. Bloch, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité*, 1926, ainsi qu'à un livre de M. R. Nevanlinna, qui doit paraître dans la Collection Borel en 1927.