V. PUISEUX

De l'équilibre et du mouvement des corps pesants en ayant égard aux variations de direction et d'intensité de la pesanteur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 1 (1872), p. 23-49
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1__23_0>

DE L'ÉQUILIBRE

ET

DU MOUVEMENT DES CORPS PESANTS

EN AYANT ÉGARD

AUX VARIATIONS DE DIRECTION ET D'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR,

PAR M. V. PUISEUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE.

Dans les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps pesants à la surface de la Terre, on raisonne ordinairement comme si cette surface était immobile et que les actions de la pesanteur sur des molécules de masses égales fussent égales et parallèles entre elles : on admet aussi que la direction commune de ces actions reste constante relativement aux objets terrestres réputés immobiles. Les résultats fondés sur ces suppositions, bien que suffisamment approchés dans la plupart des cas, ne sont cependant pas absolnment rigoureux. En effet, à prendre les choses à la rigueur, la pesanteur, à un instant déterminé, varie d'intensité et de direction quand on passe d'un point à un point voisin; en outre, les actions du Soleil et de la Lune sur un point de la surface de la Terre n'étant pas tout à fait égales et parallèles aux actions de ces astres sur le centre de notre globe, il en résulte, dans la grandeur et la direction de la pesanteur en chaque point, des changements continuels qui sont rendus manifestes par le phénomène des marées. On se propose d'examiner ici comment ces diverses circonstances modifient la théorie ordinaire de l'équilibre et du mouvement des corps pesants.

On nomme *poids* d'une molécule matérielle une force égale et contraire à celle qui, appliquée à cette molécule supposée libre, la maintiendrait dans la position qu'elle occupe relativement aux objets terrestres : la direction de cette force est ce qu'on appelle la *verticale*. Comme on vient de le rappeler, la grandeur et la direction du poids dépendent, pour une même molécule, et de la position qu'elle occupe et de l'époque que l'on considère. Ainsi, quand on dit qu'une droite est verticale, il faut entendre qu'elle l'est pour un de ses points; car, en général, elle ne le sera pas pour tout autre point pris sur sa direction. Il faut entendre également qu'elle est verticale pour une certaine époque; car, à une autre époque, la direction de la pesanteur au point considéré ne sera plus la même.

Je cherche dans le présent Mémoire comment doivent être modifiées les formules qui servent à déterminer le mouvement d'un corps pesant lorsqu'on veut tenir compte de ces petites variations de la pesanteur; j'applique ensuite à quelques questions particulières les formules ainsi complétées.

J'en déduis, par exemple, l'angle que la direction d'un fil à plomb fait avec celle de la verticale du point de suspension : ce petit angle, qu'on pourrait chercher à déterminer expérimentalement par des moyens optiques, est lié à l'aplatissement de la Terre, et s'il était possible de le mesurer avec précision, on en conclurait l'aplatissement par une observation faite en un seul lieu.

Je cherche encore, à l'aide des mêmes formules, la figure d'un fil pesant suspendu par une de ses extrémités, les lois de la chute d'un point pesant dans le vide, le mouvement d'un solide pesant assujetti à tourner autour de la verticale de son centre de gravité. Je trouve que, dans ce dernier cas, l'équilibre n'est pas indifférent et n'a lieu que dans deux ou quatre positions déterminées, en sorte que le corps, écarté d'une position d'équilibre stable, tendrait à y revenir par une suite d'oscillations très-lentes.

La plupart de ces conséquences ne sont guère susceptibles d'une vérification expérimentale; mais l'analyse d'où elles sont tirées pourra trouver son application dans quelques recherches délicates, et j'ai pensé qu'il y aurait quelque utilité à la développer.

I. — *Expressions des composantes de l'attraction terrestre.*

Nommons μ la masse de la Terre, $d\mu$ un élément de cette masse, u la distance de l'élément $d\mu$ à un point extérieur M, f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance : on sait que les composantes de l'attraction terrestre sont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées du point M de l'intégrale

$$T = \int \frac{f\,d\mu}{u},$$

étendue à la masse entière du globe.

Nous considérerons la Terre comme formée d'un noyau solide recouvert d'une couche liquide; nous supposerons que le noyau solide est formé de couches à peu près sphériques dans chacune desquelles la densité est constante, et nous regarderons la surface libre de la couche liquide comme étant celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation du globe. Ces hypothèses admises, la théorie de l'attraction des sphéroïdes montre que l'intégrale T reste la même pour tous les points situés sur un même parallèle.

Soient $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ trois axes rectangulaires passant par le centre de gravité C de la Terre, dont l'un $C\zeta$ coïncide avec l'axe de rotation et soit dirigé vers le pôle boréal, tandis que les deux autres tournent avec la Terre; nous supposerons ces derniers dirigés de telle sorte que la rotation se fasse de $C\xi$ vers $C\eta$. Si l'on nomme ξ, η, ζ les coordonnées du point M par rapport à ces axes et qu'on fasse

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \rho,$$

T sera une fonction des seules variables ρ, ζ, et nous pourrons écrire

$$T = \varphi(\rho, \zeta).$$

Pour la suite des calculs, il sera commode d'adopter d'autres axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ayant leur origine près de la surface de la Terre dans le plan méridien $\xi C\zeta$; les axes Ox, Oz seront situés dans ce même plan; l'axe Oz, dirigé vers l'intérieur de la Terre, ira passer près du centre dans une direction que nous préciserons plus tard; l'axe Ox sera dirigé du côté du nord; l'axe Oy sera parallèle à $C\eta$ et de même sens, c'est-à-dire dirigé vers l'est.

Si l'on nomme α et γ les valeurs de ξ et de ζ pour le point O, si de plus on désigne par λ l'angle que Oz, prolongé vers le haut, fait avec $C\xi$, on aura les formules de transformation

$$\xi = \alpha - x\sin\lambda - z\cos\lambda, \quad \eta = y, \quad \zeta = \gamma + x\cos\lambda - z\sin\lambda.$$

Le corps pesant dont nous nous occuperons sera toujours situé à une distance du point O très-petite comparativement aux dimensions de la Terre : x, y, z seront alors des quantités très-petites, que nous regarderons comme du premier ordre, et, en négligeant les termes du troisième ordre, nous aurons

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \sqrt{\xi^2+y^2} = \xi + \frac{y^2}{2\xi} = \alpha - x\sin\lambda - z\cos\lambda + \frac{y^2}{2\alpha}.$$

Il s'en suivra, au même degré d'approximation et en nommant θ la quantité $\varphi(\alpha, \gamma)$,

$$\begin{aligned} T = \theta &- \frac{d\theta}{d\alpha}(x\sin\lambda + z\cos\lambda) + \frac{d\theta}{d\gamma}(x\cos\lambda - z\sin\lambda) + \frac{1}{2\alpha}\frac{d\theta}{d\alpha}y^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}(x\sin\lambda + z\cos\lambda)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\theta}{d\gamma^2}(x\cos\lambda - z\sin\lambda)^2 \\ &- \frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma}(x\sin\lambda + z\cos\lambda)(x\cos\lambda - z\sin\lambda), \end{aligned}$$

ce que nous pouvons écrire

$$T = \theta - ax - by + \tfrac{1}{2}cy^2 + \tfrac{1}{2}\partial x^2 + exz + \tfrac{1}{2}fz^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\theta}{d\alpha}\sin\lambda - \frac{d\theta}{d\gamma}\cos\lambda, & \partial &= \frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\sin^2\lambda + \frac{d^2\theta}{d\gamma^2}\cos^2\lambda - 2\frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma}\sin\lambda\cos\lambda, \\ b &= \frac{d\theta}{d\alpha}\cos\lambda + \frac{d\theta}{d\gamma}\sin\lambda, & e &= \left(\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} - \frac{d^2\theta}{d\gamma^2}\right)\sin\lambda\cos\lambda - \frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma}(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda), \\ c &= \frac{1}{\alpha}\frac{d\theta}{d\alpha}, & f &= \frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\cos^2\lambda + \frac{d^2\theta}{d\gamma^2}\sin^2\lambda + 2\frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma}\sin\lambda\cos\lambda. \end{aligned}$$

Observons à présent que les dérivées de T, prises par rapport aux coordonnées x, y, z du point M, expriment les composantes de l'attraction terrestre sur une masse égale à l'unité et située en M : ces composantes ont donc pour valeurs

$$\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -a + dx + ez, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dy} = cy, \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz} = -b + ex + fz,$$

où les quantités négligées sont très-petites du second ordre.

II. — *Composantes des forces provenant des actions du Soleil et de la Lune.*

Nommons P l'attraction qu'exerce le Soleil à l'époque t sur une unité de masse située au point M, P_0 l'attraction exercée par le même astre sur une unité de masse placée au centre de la Terre, Q la résultante de la force P et d'une force égale et contraire à P_0. On sait que, pour tenir compte de l'action du Soleil dans la recherche du mouvement du point M par rapport aux objets terrestres, on doit considérer ce point comme soumis à la force Q. On aura pareillement égard à l'action de la Lune, en supposant le point M soumis à une force Q′ qui sera la résultante de l'attraction réelle de la Lune sur le point M, et d'une force égale et contraire à l'attraction de cet astre sur le centre de la Terre.

Ajoutons cependant que le Soleil et la Lune exercent, en outre, une action indirecte sur le point M par la déformation qu'ils occasionnent dans la surface des mers, et qui constitue le phénomène des marées. Cette déformation altère à chaque instant l'attraction moyenne de la Terre considérée dans le paragraphe précédent; en sorte que l'attraction réelle peut être considérée comme la résultante de l'attraction moyenne et d'une petite force Q″.

Les trois forces Q, Q′, Q″ peuvent être composées en une seule R, qui sera très-petite en comparaison de la pesanteur, et qui variera avec le temps; mais nous pourrons négliger les variations qu'elle éprouve à une même époque avec la position du point M, toujours supposé voisin de l'origine O. Si donc nous désignons par les lettres H, I, K les composantes de cette force R suivant Ox, Oy, Oz, nous pourrons regarder H, I, K comme indépendantes de x, y, z, et leur attribuer, au point M, les valeurs qu'elles ont au point O [1].

III. — *Composantes de la force effective.*

Pour appliquer le principe de d'Alembert au problème du mouvement d'un corps pesant, nous avons besoin des composantes, parallèles aux axes des coordonnées, de la force effective pour chaque point du corps, c'est-à-dire de la force qui donnerait à ce point supposé libre le mouvement qu'il a réellement. Les axes $C\xi$, $C\eta$ tournant uniformément autour de $C\zeta$, on sait qu'on a pour les composantes de la force effective suivant ces trois directions les expressions

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} - \omega^2\eta, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

où la lettre ω désigne la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe.

En ajoutant les projections de ces composantes sur chacun des axes Ox, Oy, Oz, on aura les composantes parallèles à ces derniers axes de la force effective, savoir :

$$-\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\xi\right)\sin\lambda + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} - \omega^2\eta,$$

$$-\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\xi\right)\cos\lambda - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\sin\lambda,$$

---

[1] Si l'on ne voulait pas regarder la figure moyenne du sphéroïde terrestre comme étant exactement de révolution, il faudrait encore, aux composantes $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dT}{dy}$, $\frac{dT}{dz}$ de l'attraction terrestre calculées dans l'hypothèse du sphéroïde de révolution, ajouter celles d'une très-petite force; on pourrait alors supposer ces petites composantes comprises dans H, I, K.

ou bien, en substituant pour ξ, η, ζ leurs valeurs en x, y, z,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 \sin\lambda . \alpha - \omega^2 \sin^2\lambda . x - \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda . z,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt} - 2\omega \cos\lambda \frac{dz}{dt} - \omega^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} + 2\omega^2 \cos\lambda . \alpha - \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda . x - \omega^2 \cos^2\lambda . z.$$

IV. — *Équations du mouvement d'un corps pesant.*

Considérons un corps soumis aux actions de la Terre, du Soleil et de la Lune, et dont chaque molécule peut être sollicitée en outre par une force donnée Φ, dont les composantes dirigées suivant Ox, Oy, Oz et rapportées à l'unité de masse seront appelées A, B, C. Si à ces composantes on ajoute celles de l'attraction terrestre (paragraphe I), celles de la force R (paragraphe II) et enfin les composantes prises avec des signes contraires de la force effective (paragraphe III), on obtiendra les composantes X, Y, Z de ce qu'on nomme la force perdue pour le point M du corps et pour l'unité de masse.

On trouvera ainsi

$$\begin{aligned} X = A + H - a - \omega^2 \sin\lambda . \alpha + (\partial + \omega^2 \sin^2\lambda) x \\ + (e + \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda) z - 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}, \end{aligned}$$

$$Y = B + I + (c + \omega^2) y + 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt} + 2 \cos\lambda \frac{dz}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\begin{aligned} Z = C + K - b - \omega^2 \cos\lambda . \alpha + (e + \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda) x \\ + (f + \omega^2 \cos^2\lambda) z - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} - \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Si donc on nomme m la masse de la molécule située en M, l'équilibre qui, d'après le principe de d'Alembert, doit avoir lieu à chaque instant entre les forces perdues, pourra être exprimé par l'équation des vitesses virtuelles

$$\sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

et pour déduire de là les équations différentielles du mouvement, il suffira, dans chaque question particulière, d'exprimer les variations δx, δy, δz au moyen de quantités indépendantes.

Nous simplifierons les expressions de X, Y, Z en supposant que la direction de l'axe Oz soit celle de la pesanteur moyenne au point O, c'est-à-dire de la pesanteur qui aurait lieu en ce point, si les forces H, I, K provenant des actions du Soleil et de la Lune cessaient d'exister. En effet, nommons g l'intensité de cette pesanteur moyenne, c'est-à-dire le poids qu'aurait en O l'unité de masse dans l'hypothèse qu'on vient de formuler; les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ devront être vérifiées si l'on y suppose x, y, z constamment nulles et qu'on y fasse en outre

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = -g,\quad H = 0,\quad I = 0,\quad K = 0.$$

Il suit de là

$$a + \omega^2 \sin\lambda . \alpha = 0,\quad g + b + \omega^2 \cos\lambda . \alpha = 0,$$

et, par conséquent, les valeurs de X, Y, Z pour un point quelconque M se réduisent aux suivantes :

$$X = A + H + Dx + Ez - 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y = B + I + Gy + 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt} + 2\omega \cos\lambda \frac{dz}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z = g + C + K + Ex + Fz - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} - \frac{d^2z}{dt^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$d + \omega^2 \sin^2\lambda = D,\quad e + \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda = E,\quad f + \omega^2 \cos^2\lambda = F,\quad c + \omega^2 = G.$$

Nous dirons que l'axe Oz, ainsi défini, est la verticale moyenne du point O, et que l'angle λ est la latitude moyenne ou simplement la latitude du même point.

Nommons Γ la pesanteur vraie au point M, à l'époque t, et U, V, W ses trois composantes. Pour maintenir en équilibre, au point M, une molécule entièrement libre de masse égale à 1, il suffirait de lui appliquer une force égale et contraire à Γ : les équations $X = 0$, $Y = 0$,

$Z = 0$ doivent donc être vérifiées quand on y suppose constantes les coordonnées x, y, z et qu'on y remplace A, B, C par $-U$, $-V$, $-W$. On en conclut

$$U = H + Dx + Ez, \quad V = I + Gy, \quad W = g + K + Ex + Fz.$$

V. — *Calcul numérique des coefficients* D, E, F, G.

Nommons r la distance du centre C de la Terre à un point quelconque M, et v l'angle de la droite CM avec l'axe de rotation $C\zeta$. Désignons en outre par ϖ l'aplatissement de la surface de la mer que nous supposons elliptique et de révolution; l'équation de cette surface pourra, si l'on néglige le carré de ϖ, être écrite

$$r = R[1 + \varpi(\tfrac{1}{3} - \cos^2 v)],$$

R étant une constante. De là et des hypothèses admises dans le paragraphe I sur la constitution du sphéroïde terrestre il suit que l'intégrale $T = \int \frac{f d\mu}{u}$, pour un point extérieur M, est donnée par la formule

$$T = \frac{f\mu}{r} + \left(\varpi - \frac{\varphi}{2}\right) f\mu R^2 \frac{\frac{1}{3} - \cos^2 v}{r^3},$$

où φ désigne le rapport de la force centrifuge à l'attraction à l'équateur. (Voir *Mécanique céleste*, Livre III, n° 35.) Dans la deuxième partie du second membre, on peut, à cause de la petitesse du facteur $\varpi - \frac{\varphi}{2}$, prendre $\omega^2 R$ pour la force centrifuge à l'équateur et $\frac{f\mu}{R^2}$ pour l'attraction au même lieu. Il en résulte

$$\varphi = \frac{\omega^2 R^3}{f\mu}, \quad f\mu R^2 = \frac{\omega^2 R^5}{\varphi},$$

et par conséquent

$$T = \frac{f\mu}{r} + \left(\frac{\varpi}{\varphi} - \frac{1}{2}\right) \omega^2 R^5 \frac{\frac{1}{3} - \cos^2 v}{r^3}.$$

Si donc on observe qu'on a

$$r = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}, \quad \cos v = \frac{\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}},$$

et que l'on fasse

$$\left(\frac{\varpi}{\varphi} - \frac{1}{2}\right)\omega^2 = n^2,$$

on aura

$$T = \frac{f\mu}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} + \frac{n^2 R^5 (\rho^2 - 2\zeta^2)}{3(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

La quantité désignée par θ dans le paragraphe I se déduit de T, en y remplaçant ρ par α et ζ par γ; on trouve ainsi

$$\theta = \frac{f\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + \frac{n^2 R^5 (\alpha^2 - 2\gamma^2)}{3(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

On déduit de là

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{f\mu\alpha}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n^2 R^5 \alpha (4\gamma^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d\theta}{d\gamma} = -\frac{f\mu\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n^2 R^5 \gamma (3\alpha^2 - 2\gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} = \frac{f\mu(2\alpha^2 - \gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{n^2 R^5 (4\alpha^4 - 27\alpha^2\gamma^2 + 8\gamma^4)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{9}{2}}},$$

$$\frac{d^2\theta}{d\gamma^2} = \frac{f\mu(2\gamma^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{n^2 R^5 (3\alpha^4 - 24\alpha^2\gamma^2 + 8\gamma^4)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{9}{2}}},$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{3f\mu\,\alpha\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5n^2 R^5 \alpha\gamma (3\alpha^2 - 4\gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{9}{2}}}.$$

Soient δ la distance du point O au centre C de la Terre et v l'angle que le rayon CO fait avec l'axe Cξ ou avec le plan de l'équateur, de sorte qu'on ait

$$\alpha = \delta \cos v, \quad \eta = \delta \sin v:$$

mettons ces valeurs de α et de γ dans les formules précédentes et observons que dans les termes multipliés par n^2 on peut remplacer le rapport $\frac{R}{\delta}$ par l'unité; il viendra

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{f\mu}{\delta^2}\cos\upsilon - n^2\delta\cos\upsilon(\cos^2\upsilon - 4\sin^2\upsilon),$$

$$\frac{d\theta}{d\gamma} = -\frac{f\mu}{\delta^2}\sin\upsilon - n^2\delta\sin\upsilon(3\cos^2\upsilon - 2\sin^2\upsilon),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} = \frac{f\mu}{\delta^3}(2\cos^2\upsilon - \sin^2\upsilon) + n^2(4\cos^4\upsilon - 27\sin^2\upsilon\cos^2\upsilon + 4\sin^4\upsilon),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\gamma^2} = -\frac{f\mu}{\delta^3}(\cos^2\upsilon - 2\sin^2\upsilon) - n^2(3\cos^4\upsilon - 24\sin^2\upsilon\cos^2\upsilon + 8\sin^4\upsilon),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{3f\mu}{\delta^3}\sin\upsilon\cos\upsilon + 5n^2\sin\upsilon\cos\upsilon(3\cos^2\upsilon - \sin^2\upsilon).$$

Avant de substituer ces dérivées partielles dans les expressions de a, b, c, ∂, e, f, il convient d'y introduire à la place de l'angle υ la latitude λ du point O, dont la différence avec υ est de l'ordre de l'aplatissement de la Terre. Pour évaluer cette différence, nous observerons que la surface de niveau moyen qui passe au point O coupe le plan $C\xi\zeta$ suivant une courbe méridienne dont l'équation est

$$\theta + \frac{1}{2}\omega^2\alpha^2 = \text{const.}$$

Le rapport $\dfrac{\frac{d\theta}{d\gamma}}{\frac{d\theta}{d\alpha} + \omega^2\alpha}$ exprime donc la tangente de l'angle que fait avec l'axe $C\xi$ la normale en O à la surface de niveau, c'est-à-dire la tangente de la latitude du point O, et l'on a l'équation

$$\frac{\frac{d\theta}{d\gamma}}{\frac{d\theta}{d\alpha} + \omega^2\alpha} = \operatorname{tang}\lambda,$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{d\gamma}\cos\lambda - \frac{d\theta}{d\alpha}\sin\lambda - \omega^2\delta\cos\upsilon\sin\lambda = 0.$$

Remplaçons $\frac{d\theta}{d\alpha}$, $\frac{d\theta}{d\gamma}$ par les valeurs trouvées tout à l'heure, et observons que, dans les termes multipliés par ω^2 ou par n^2, il est permis d'écrire λ au lieu de υ ; il viendra

$$\frac{f\mu}{\delta^2}\sin(\lambda-\upsilon)=(2n^2+\omega^2)\delta\sin\lambda\cos\lambda,$$

et comme on peut confondre le petit arc $\lambda-\upsilon$ avec son sinus, on tire de là

$$\frac{f\mu}{\delta^2}(\lambda-\upsilon)=(2n^2+\omega^2)\delta\sin\lambda\cos\lambda,\quad \upsilon=\lambda-\frac{(2n^2+\omega^2)\delta^3}{f\mu}\sin\lambda\cos\lambda.$$

En substituant cette valeur de υ dans les dérivées partielles de θ et négligeant le carré de $\lambda-\upsilon$, nous trouverons

$$\frac{d\theta}{d\alpha}=-\frac{f\mu}{\delta^2}\cos\lambda-(2n^2+\omega^2)\delta\sin^2\lambda\cos\lambda-n^2\delta\cos\lambda(\cos^2\lambda-4\sin^2\lambda),$$

$$\frac{d\theta}{d\gamma}=-\frac{f\mu}{\delta^2}\sin\lambda+(2n^2+\omega^2)\delta\sin\lambda\cos^2\lambda-n^2\delta\sin\lambda(3\cos^2\lambda-2\sin^2\lambda),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}=\frac{f\mu}{\delta^3}(2\cos^2\lambda-\sin^2\lambda)+6(2n^2+\omega^2)\sin^2\lambda\cos^2\lambda+n^2(4\cos^4\lambda-27\sin^2\lambda\cos^2\lambda+4\sin^4\lambda),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\gamma^2}=-\frac{f\mu}{\delta^3}(\cos^2\lambda-2\sin^2\lambda)-6(2n^2+\omega^2)\sin^2\lambda\cos^2\lambda-n^2(3\cos^4\lambda-24\sin^2\lambda\cos^2\lambda+8\sin^4\lambda),$$

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\gamma}=\frac{3f\mu}{\delta^3}\sin\lambda\cos\lambda-3(2n^2+\omega^2)\sin\lambda\cos\lambda(\cos^2\lambda-\sin^2\lambda)+5n^2\sin\lambda\cos\lambda(3\cos^2\lambda-4\sin^2\lambda).$$

A l'aide de ces formules et des expressions de a, b, ∂, e, f, données dans le premier paragraphe, nous formerons les valeurs suivantes de ces quantités :

$$a=-\omega^2\delta\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$b=-\frac{f\mu}{\delta^2}-n^2\delta(\cos^2\lambda-2\sin^2\lambda),$$

$$\partial=-\frac{f\mu}{\delta^3}-n^2(3\cos^2\lambda-4\sin^2\lambda),$$

$$e=(3\omega^2-2n^2)\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$f=\frac{2f\mu}{\delta^3}+4n^2(\cos^2\lambda-2\sin^2\lambda).$$

Reprenant ensuite la valeur de $\frac{d\theta}{d\alpha}$ sous la forme

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{f\mu\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n^2 R^5 \alpha(4\gamma^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{7}{2}}},$$

nous en conclurons

$$c = \frac{1}{\alpha}\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{f\mu}{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n^2 R^5 \alpha(4\gamma^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{7}{2}}},$$

ou bien

$$c = -\frac{f\mu}{\delta^3} - n^2(\cos^2\lambda - 4\sin^2\lambda).$$

Nous avons trouvé ci-dessus

$$b + \omega^2 \cos\lambda . \alpha + g = 0;$$

mettons pour b la valeur que nous venons d'obtenir et observons que dans le terme $\omega^2\cos\lambda.\alpha$ il est permis de remplacer α par $\delta\cos\lambda$, il nous viendra

$$-\frac{f\mu}{\delta^2} - n^2\delta(\cos^2\lambda - 2\sin^2\lambda) + \omega^2\delta\cos^2\lambda + g = 0,$$

d'où

$$\frac{f\mu}{\delta^3} = \frac{g}{\delta} + \omega^2\cos^2\lambda - n^2(\cos^2\lambda - 2\sin^2\lambda).$$

Substituons pour $\frac{f\mu}{\delta^3}$ cette valeur, et les expressions précédentes de c, ∂, e, f deviendront

$$c = -\frac{g}{\delta} - \omega^2\cos^2\lambda + 2n^2\sin^2\lambda,$$

$$\partial = -\frac{g}{\delta} - (\omega^2 + 2n^2)\cos^2\lambda + 2n^2\sin^2\lambda,$$

$$e = (3\omega^2 - 2n^2)\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$f = \frac{2g}{\delta} + 2(\omega^2 + n^2)\cos^2\lambda - 4n^2\sin^2\lambda,$$

formules d'où l'on conclut enfin celles-ci

$$D = -\frac{g}{\delta} - (\omega^2 + 2n^2)(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda),$$

$$E = 2(2\omega^2 - n^2)\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$F = \frac{2g}{\delta} + (3\omega^2 + 2n^2)\cos^2\lambda - 4n^2\sin^2\lambda,$$

$$G = -\frac{g}{\delta} + (\omega^2 + 2n^2)\sin^2\lambda.$$

On se rappellera que, dans ces seconds membres, les nombres n^2 et ω^2 sont petits par rapport à $\frac{g}{\delta}$ et que leurs rapports à cette fraction sont de l'ordre de l'aplatissement de la Terre : quant aux quantités négligées, leurs rapports à $\frac{g}{\delta}$ sont de l'ordre du carré de l'aplatissement.

Lorsqu'on voudra réduire ces formules en nombres, on devra y substituer les valeurs de $\frac{g}{\delta}$ et de λ qui se rapportent au point particulier O pris dans le voisinage du corps dont on s'occupe : quant aux nombres ω^2 et n^2, nous pouvons les calculer une fois pour toutes. D'abord, ω exprimant la vitesse de rotation de la rotation de la Terre, si nous prenons la seconde pour unité de temps, nous aurons $\omega = \frac{2\pi}{86164}$, et par suite

$$\omega^2 = 0,000\,000\,005\,318.$$

Pour calculer n^2, dans la formule

$$n^2 = \omega^2\left(\frac{\varpi}{\varphi} - \frac{1}{2}\right)$$

nous remplacerons ω^2 par la valeur qu'on vient de trouver, φ par le nombre $\frac{1}{289,44}$ et ϖ par le nombre $\frac{1}{299}$, qui paraît être la valeur la plus probable de l'aplatissement; nous obtiendrons ainsi

$$n^2 = 0,000\,000\,002\,489.$$

Quant au calcul numérique des quantités H, I, K, nous ne le développerons pas ici; il serait inutile pour ce qui va suivre. On s'assurera aisément que les rapports à la pesanteur g des parties de H, I, K qui proviennent des actions du Soleil et de la Lune sont toujours inférieurs à la fraction 0,000 000 2.

Je vais maintenant appliquer l'analyse précédente à quelques questions particulières.

VI. — *De l'angle que fait un fil à plomb avec la verticale du point de suspension.*

J'entends ici par fil à plomb un fil dont la masse soit négligeable par rapport à celle du poids qu'il supporte; il est clair qu'il se dirige suivant la verticale de son extrémité inférieure, et non pas suivant celle de son extrémité supérieure. Nous nous proposons de trouver l'angle de ces deux verticales.

Plaçons l'origine O de nos axes au point de suspension, et appelons x, y, z les coordonnées de l'extrémité inférieure du fil. Les composantes de la pesanteur vraie en ce dernier point seront (§ IV)

$$U = H + Dx + Ez, \quad V = I + Gy, \quad W = g + K + Ex + Fz;$$

mais la direction de cette force doit se confondre avec celle du fil; il faut donc que les composantes U, V, W soient proportionnelles à x, y, z, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{H + Dx + Ez}{x} = \frac{I + Gy}{y} = \frac{g + K + Ex + Fz}{z},$$

ou encore

$$(H + Dx + Ez)\,z = (g + K + Ex + Fz)\,x, \quad (I + Gy)\,z = (g + K + Ex + Fz)\,y.$$

Les quantités x et y peuvent être regardées, ainsi que H, I, K, D, E, F, G, comme très-petites du premier ordre : négligeons dans les deux équations précédentes les termes d'un ordre supérieur au premier, elles deviendront

$$Hz + Ez^2 = gx, \quad Iz = gy,$$

d'où

$$x = \frac{Hz + Ez^2}{g}, \quad y = \frac{Iz}{g}.$$

Mais z ne diffère pas sensiblement de la longueur l du fil; on peut donc écrire

$$x = \frac{\mathrm{H}l + \mathrm{E}l^2}{g}, \quad y = \frac{\mathrm{I}l}{g}.$$

Prenons, à la même époque, une longueur égale à l sur la verticale vraie du point O, et nommons x', y', z' les coordonnées de l'extrémité : les composantes de la pesanteur vraie en O étant H, I, $g + \mathrm{K}$, on aura sensiblement

$$x' = \frac{\mathrm{H}z'}{g}, \quad y' = \frac{\mathrm{I}z'}{g},$$

ou, si l'on veut,

$$x' = \frac{\mathrm{H}l}{g}, \quad y' = \frac{\mathrm{I}l}{g}.$$

Il en résulte

$$x - x' = \frac{\mathrm{E}l^2}{g} = 2(2\omega^2 - n^2)\frac{l^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda = (2\omega^2 - n^2)\frac{l^2}{g}\sin 2\lambda,$$

$$y - y' = 0 :$$

on voit par là que le fil à plomb s'écarte de la verticale vraie du point de suspension du côté du nord si la latitude est positive, et du côté du sud si elle est négative, c'est-à-dire toujours du côté opposé à l'équateur. L'angle de ces deux lignes est à peu près $\frac{x - x'}{l}$ ou $(2\omega^2 - n^2)\frac{l}{g}\sin 2\lambda$; il est indépendant du temps; ainsi, bien que la direction du fil à plomb et celle de la verticale vraie du point de suspension varient sans cesse avec le temps, l'angle de ces deux droites ne change pas. L'équation $y - y' = 0$ montre de plus que leur plan ne cesse point de passer par la méridienne du point de suspension.

Concevons qu'une lunette munie d'un réticule soit pointée sur un bain de mercure situé au-dessous d'elle, de manière que les images des fils du réticule vus par réflexion sur le métal coïncident avec les fils vus directement, la direction de la lunette sera celle de la verticale vraie au point de la surface du bain où s'opère la réflexion des rayons lumineux. Si donc on pointe successivement la lunette sur deux bains de mercure situés, l'un tout près de la lunette, et l'autre à une distance l au-dessous du premier, l'angle dont la lunette aura tourné en passant d'une position à l'autre sera celui dont nous venons d'obtenir l'expression.

Si cet angle pouvait être mesuré avec précision, on aurait là un moyen de déterminer l'aplatissement de la Terre par une observation faite en un seul lieu. En effet, soit β l'angle mesuré; de l'équation

$$(2\omega^2 - n^2)\frac{l}{g}\sin 2\lambda = \beta,$$

on tirerait

$$\frac{n^2}{\omega^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi}{\varphi} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{g\beta}{\omega^2 l \sin 2\lambda},$$

et par conséquent

$$\varpi = \left(\frac{5}{2} - \frac{g\beta}{\omega^2 l \sin 2\lambda}\right)\varphi,$$

formule où tout serait connu dans le second membre. Mais la petitesse de l'angle β (à Paris, pour $l = 100^{\text{m}}$, il s'élèverait à peine à $0'',017$) ne permettrait sans doute pas de le mesurer avec une exactitude suffisante pour cet objet.

VII. — *De la forme d'un fil pesant homogène suspendu par une de ses extrémités.*

Si les actions de la pesanteur sur les différents points d'un fil étaient rigoureusement parallèles à une direction constante, et que le poids de l'unité de masse eût partout la même valeur g, ce fil, suspendu par une de ses extrémités, prendrait la forme d'une ligne droite, et se placerait dans la direction même de la pesanteur : de plus, la tension en chaque point serait égale au produit de la constante g par la masse de la portion de fil située au-dessous de ce point. A la rigueur, il n'en est pas ainsi, et les expressions trouvées ci-dessus pour les composantes U, V, W de la pesanteur permettent de déterminer la forme d'équilibre du fil à un instant quelconque ainsi que la tension en chacun de ses points; c'est ce que nous allons faire, en supposant, pour simplifier, le fil homogène.

Plaçons l'origine O au point de suspension, et nommons T la tension au point (x, y, z), s l'arc qui se termine au même point, ε la masse de l'unité de longueur du fil : nous aurons pour l'équilibre les équations connues

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \varepsilon \mathrm{U}\, ds = 0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \varepsilon \mathrm{V}\, ds = 0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) + \varepsilon \mathrm{W}\, ds = 0,$$

ou bien, en mettant pour U, V, W leurs valeurs,

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \varepsilon(\mathrm{H} + \mathrm{D}x + \mathrm{E}z)\, ds = 0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \varepsilon(\mathrm{I} + \mathrm{G}y)\, ds = 0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) + \varepsilon(g + \mathrm{K} + \mathrm{E}x + \mathrm{F}z)\, ds = 0.$$

Observons à présent que si l'on négligeait les termes multipliés par H, I, K, D, E, F, G, on retomberait sur les équations qui conviennent au cas d'une pesanteur constante et parallèle à Oz : dans ce cas, le fil se dirigerait suivant Oz, et l'on aurait

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \mathrm{T} = \varepsilon g(l - z),$$

l désignant la longueur du fil. Si donc on a égard aux variations de la pesanteur, et qu'on fasse

$$\mathrm{T} = \varepsilon g(l - z) + \theta,$$

les fonctions de z désignées par x, y et θ seront, ainsi que leurs dérivées, très-petites et de l'ordre de H, I, K, D, E, F, G : en négligeant les carrés de ces quantités, on aura d'abord

$$ds = dz, \quad s = z;$$

ensuite, dans la première équation d'équilibre, on pourra négliger Dx et remplacer T par $\varepsilon g(l - z)$; elle deviendra

$$g\, d\left[(l - z)\frac{dx}{dz}\right] + (\mathrm{H} + \mathrm{E}z)\, dz = 0.$$

On trouve, en intégrant,

$$2g(l-z)\frac{dx}{dz}+2Hz+Ez^2=k,$$

k désignant une constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante, observons qu'à l'extrémité inférieure du fil, on a $z=l$, et que $\frac{dx}{dz}$ n'est pas infini : faisant $z=l$ dans l'équation intégrée, il viendra

$$k=2Hl+El^2;$$

substituons cette valeur de k et divisons par $l-z$; nous retrouverons

$$2g\frac{dx}{dz}=2H+E(l+z),$$

d'où, en intégrant de nouveau et observant que x et z s'annulent en même temps,

$$x=\frac{2H+El}{2g}z+\frac{E}{4g}z^2.$$

Dans la deuxième équation d'équilibre, nous négligerons pareillement Gy, et nous remplacerons encore T par $\varepsilon g(l-z)$; elle nous donnera

$$gd\left[(l-z)\frac{dy}{dz}\right]+I\,dz=0,$$

d'où, en intégrant,

$$g(l-z)\frac{dy}{dz}+Iz=k'.$$

Faisant, comme tout à l'heure, $z=l$, nous trouverons $k'=I'l$, et, par suite,

$$g\frac{dy}{dz}=I:$$

une nouvelle intégration nous conduira à l'équation

$$y=\frac{I}{g}z.$$

Cette dernière équation nous montre que le fil, pour être en équilibre, doit être situé dans un plan passant par la méridienne Ox du point O et faisant l'angle très-petit $\frac{I}{g}$ avec le plan méridien Oxz de ce point; cet angle est d'ailleurs variable avec le temps pour un même point O, mais indépendant de la nature et de la longueur du fil. A cause de la petitesse de l'angle $\frac{I}{g}$, la forme du fil ne diffère pas sensiblement de celle de sa projection sur le plan méridien Oxz, projection qui est représentée par l'équation trouvée ci-dessus

$$x = \frac{2H + El}{2g} z + \frac{E}{4g} z^2.$$

Nous voyons par là que le fil affecte la forme d'un arc de parabole : les diamètres de cette parabole sont parallèles à la méridienne Ox du point de suspension, la convexité de la courbe est tournée vers l'équateur, et le paramètre $\frac{4g}{E}$ est indépendant du temps et aussi de la longueur et de la nature du fil. Ainsi, en un même lieu, les courbes formées par des fils homogènes de diverses longueurs, suspendus librement, sont autant d'arcs d'une même parabole.

C'est à une latitude d'environ 45 degrés que le paramètre $\frac{4g}{E}$ a sa valeur minimum, environ 750 rayons de l'équateur terrestre; à l'équateur et au pôle, il devient infini, c'est-à-dire que le fil se tend en ligne droite.

Pour avoir la tension en chaque point, nous aurons recours à la troisième équation d'équilibre, où nous négligerons Ex, et où nous remplacerons ds par dz, T par $\varepsilon g(l - z) + \theta$; elle deviendra

$$d\theta + \varepsilon(K + Fz)dz = 0,$$

d'où, en observant que θ doit se réduire à zéro pour $z = l$,

$$\theta = \varepsilon[K + \tfrac{1}{2}F(l + z)](l - z),$$

et par suite

$$T = \varepsilon[g + K + \tfrac{1}{2}F(l + z)](l + z).$$

VIII. — *De la chute dans le vide d'un point pesant abandonné à lui-même sans vitesse initiale.*

Pour obtenir les équations du mouvement de ce point, il faut égaler à zéro les valeurs de X, Y, Z données dans le paragraphe IV, après y avoir supprimé les termes A, B, C. On trouve ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} - Dx - Ez - H = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - Gy - I = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} - Ex - Fz - g - K = 0,$$

et si l'on suppose que le point de départ du mobile ait été pris pour origine, il faudra intégrer ces équations de façon que, pour $t=0$, on ait

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\qquad \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=0,\quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Nous y considérerons ω comme une petite quantité du premier ordre, et D, E, F, G, H, I, K comme de petites quantités du second ordre, qu'il nous sera permis de regarder comme contenant le facteur ω^2. Nous négligerons d'ailleurs les changements qu'éprouvent H, I, K pendant la durée de la chute, et nous les traiterons comme des constantes.

D'après ce qui vient d'être dit, nous pouvons supposer les valeurs de x, y, z développées suivant les puissances de ω et faire

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots,$$

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots,$$

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots,$$

x_0, y_0, z_0 étant indépendantes de ω, tandis que x_1, y_1, z_1 contiendront le facteur ω, x_2, y_2, z_2 le facteur ω^2, etc. Les équations du mouvement se décomposent alors dans les suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2y_0}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2z_0}{dt^2} - g = 0; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 2\omega \sin\lambda \dfrac{dy_0}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \dfrac{dx_0}{dt} - 2\omega \cos\lambda \dfrac{dz_0}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2z_1}{dt} + 2\omega \cos\lambda \dfrac{dy_0}{dt} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + 2\omega \sin\lambda \dfrac{dy_1}{dt} - \mathrm{D}x_0 - \mathrm{E}z_0 - \mathrm{H} = 0, \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \dfrac{dx_1}{dt} - 2\omega \cos\lambda \dfrac{dz_1}{dt} - \mathrm{G}y_0 - \mathrm{I} = 0, \\ \dfrac{d^2z_2}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \dfrac{dy_1}{dt} - \mathrm{E}x_0 - \mathrm{F}z_0 - \mathrm{K} = 0. \end{cases}$$

Des équations (1) on conclut, en ayant égard aux conditions initiales,

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Les équations (2) deviennent par suite

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} - 2\omega \cos\lambda . gt = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0,$$

et nous donnent

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \tfrac{1}{3}\omega \cos\lambda . gt^3, \quad z_1 = 0.$$

Alors les équations (3) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - (\tfrac{1}{2}\mathrm{E} - \omega^2 \sin 2\lambda) gt^2 - \mathrm{H} = 0,$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - \mathrm{I} = 0,$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} - (\tfrac{1}{2}\mathrm{F} - 2\omega^2 \cos^2\lambda) gt^2 - \mathrm{K} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x_2 = (\tfrac{1}{24}\mathrm{E} - \tfrac{1}{12}\omega^2 \sin 2\lambda) g t^4 + \tfrac{1}{2}\mathrm{H}\, t^2,$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{I}\, t^2,$$
$$z_2 = (\tfrac{1}{24}\mathrm{F} - \tfrac{1}{6}\omega^2 \cos^2\lambda) g t^4 + \tfrac{1}{2}\mathrm{K}\, t^2.$$

On a donc

$$x = (\tfrac{1}{24}\mathrm{E} - \tfrac{1}{12}\omega^2 \sin 2\lambda) g t^4 + \tfrac{1}{2}\mathrm{H}\, t^2,$$
$$y = \tfrac{1}{3}\omega \cos\lambda . g t^3 + \tfrac{1}{2}\mathrm{I}\, t^2,$$
$$z = \tfrac{1}{2}(g + \mathrm{K})\, t^2 + (\tfrac{1}{24}\mathrm{F} - \tfrac{1}{6}\omega^2 \cos^2\lambda) g t^4.$$

D'après cela, les valeurs de x et de y en fonction de z sont, aux quantités près du troisième ordre,

$$x = (\tfrac{1}{6}\mathrm{E} - \tfrac{1}{3}\omega^2 \sin 2\lambda)\frac{z^2}{g} + \frac{\mathrm{H}z}{g}, \quad y = \frac{2\omega\cos\lambda}{3}\sqrt{\frac{2}{g}}\, z^{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{I}z}{g}.$$

Mais, pour l'extrémité d'un fil à plomb de longueur z suspendu au point de départ O, on aurait (paragraphe VI)

$$x' = \frac{\mathrm{H}z + \mathrm{E}z^2}{g}, \quad y' = \frac{\mathrm{I}z}{g};$$

la déviation du point pesant par rapport au fil à plomb est donc, dans la direction Ox,

$$x - x' = -(\tfrac{5}{6}\mathrm{E} + \tfrac{1}{3}\omega^2 \sin 2\lambda)\frac{z^2}{g} = -(2\omega^2 - \tfrac{5}{6}n^2)\sin 2\lambda,$$

et, dans la direction Oy,

$$y - y' = \frac{2\omega\cos\lambda}{3}\sqrt{\frac{2}{g}}\, z^{\frac{3}{2}}.$$

La valeur de $x - x'$, négative dans l'hémisphère boréal et positive dans l'hémisphère austral, indique une déviation dans le sens du méridien et du côté de l'équateur; mais elle est à peine sensible, même pour les plus grandes hauteurs de chute qu'on puisse chercher à réaliser. Quant à la valeur de $y - y'$, elle reproduit l'expression connue de la déviation vers l'est, laquelle croît comme la racine carrée du cube de la hauteur de la chute.

Si l'on voulait avoir égard à la résistance de l'air, il faudrait introduire dans les trois équations du mouvement les composantes de la résistance de ce fluide; l'intégration pourrait se faire par la méthode qui vient d'être expliquée; mais nous ne développerons pas la solution qu'il serait peut-être difficile de traduire en nombres, faute de données assez précises sur la résistance des fluides au mouvement des corps solides.

IX. — *Du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité et coïncidant avec la verticale moyenne de ce point.*

Quand on regarde la pesanteur comme constante en grandeur et en direction dans toute l'étendue d'un corps solide, il est évident que, si ce corps ne peut que tourner autour d'un axe passant par son centre de gravité, il sera en équilibre dans toutes les positions. Mais cette proposition cesse d'être rigoureuse quand on a égard, comme nous le faisons ici, aux petites variations qu'éprouve la pesanteur lorsqu'on passe d'un point à un point voisin. Les formules établies ci-dessus permettent de trouver, dans ce cas, le mouvement du corps et ses positions d'équilibre. C'est ce que nous allons faire en supposant que l'axe fixe coïncide avec la verticale du centre de gravité.

Prenons pour l'origine O le centre de gravité du solide; l'axe Oz se confondra avec l'axe fixe, et la condition de l'équilibre des forces perdues sera exprimée par l'équation

$$\Sigma m(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) = 0.$$

On a, d'après le paragraphe IV,

$$\mathrm{X} = \mathrm{H} + \mathrm{D}x + \mathrm{E}z - 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{I} + \mathrm{G}y + 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}:$$

il en résulte

$$\begin{aligned}\Sigma m(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}) = {} & \mathrm{I}\Sigma mx - \mathrm{H}\Sigma my + (\mathrm{G}-\mathrm{D})\Sigma mxy - \mathrm{E}\Sigma myz \\ & + 2\omega\sin\lambda.\Sigma m\frac{x\,dx+y\,dy}{dt} + 2\omega\cos\lambda.\Sigma mx\frac{dz}{dt} - \Sigma m\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}.\end{aligned}$$

Mais, par les propriétés du centre de gravité, les sommes Σmx, Σmy sont nulles; de plus, pour chaque point du corps, z et x^2+y^2 sont des constantes, et les différentielles dz, $x dx + y dy$ sont nulles. L'équation $\Sigma m(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) = 0$ se réduit donc à celle-ci

$$\Sigma m \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} - (\mathrm{G}-\mathrm{D})\Sigma mxy + \mathrm{E}\Sigma myz = 0.$$

Imaginons, dans le plan des xy, deux axes rectangulaires $\mathrm{O}x'$, $\mathrm{O}y'$ emportés avec le corps dans son mouvement, et soient x', y' les coordonnées rapportées à ces axes de la projection du point M sur le plan des xy; on aura

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi, \quad y = x'\sin\psi + y'\cos\psi,$$

en désignant par ψ l'angle variable $x'\mathrm{O}x$. Les quantités x', y' étant indépendantes du temps, l'équation précédente deviendra, par cette substitution,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}\Sigma m(x'^2+y'^2) - (\mathrm{G}-\mathrm{D})[\sin\psi\cos\psi.\Sigma m(x'^2-y'^2) + \cos 2\psi.\Sigma mx'y']$$
$$+ \mathrm{E}(\sin\psi.\Sigma mx'z + \cos\psi.\Sigma my'z) = 0.$$

On peut choisir les axes $\mathrm{O}x'$, $\mathrm{O}y'$ dans le corps, de manière à rendre nulle la somme $\Sigma mx'y'$, et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{(\mathrm{G}-\mathrm{D})\Sigma m(x'^2-y'^2)}{\Sigma m(x'^2+y'^2)} = \alpha, \quad \frac{\mathrm{E}\Sigma mx'z}{\Sigma m(x'^2+y'^2)} = \beta, \quad \frac{\mathrm{E}\Sigma my'z}{\Sigma m(x'^2+y'^2)} = \gamma,$$

on aura pour l'équation du mouvement

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \alpha\sin\psi\cos\psi + \beta\sin\psi + \gamma\cos\psi = 0.$$

On en conclut d'abord que le corps ne sera en équilibre que dans les positions correspondantes aux valeurs de ψ déterminées par l'équation

$$\alpha\sin\psi\cos\psi - \beta\sin\psi - \gamma\cos\psi = 0.$$

Les rapports des nombres α, β, γ dépendent de la constitution du solide et peuvent être quelconques : on reconnaîtra sans peine que, suivant les cas, il y aura, entre les limites o et 2π, soit deux, soit quatre valeurs de ψ satisfaisant à la condition précédente. Le solide aura donc ou deux ou quatre positions d'équilibre, et il est aisé de voir que, si les valeurs de ψ sont rangées par ordre de grandeur, les positions d'équilibre correspondantes seront alternativement stables et instables.

Par exemple, si l'on suppose nulles les sommes $\Sigma m x' z$, $\Sigma m y' z$, ce qui arrive lorsque le plan Oxy est un plan de symétrie du corps, l'équation du mouvement se réduit à

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \alpha \sin\psi \cos\psi = 0,$$

et l'on voit qu'il y a quatre positions d'équilibre répondant aux valeurs o, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ de l'angle ψ. Le signe de α est celui de $\Sigma m(x'^2 - y'^2)$; car le facteur $G - D = (\omega^2 + 2n^2)\cos^2\lambda$ est essentiellement positif : admettons que ce signe soit le signe $+$. L'intégration de l'équation précédente nous donne

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \alpha \sin^2\psi + \text{const.};$$

on voit que la force vive du solide est un minimum pour $\psi = 0$ et pour $\psi = \pi$, tandis qu'elle est un maximum pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ et pour $\psi = \frac{3\pi}{3}$; ces deux dernières valeurs répondent donc aux positions d'équilibre stable. Le corps étant supposé infiniment peu écarté de l'une de ces positions, il tendrait à y revenir en exécutant des oscillations dont la durée serait

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi}{\cos\lambda}\sqrt{\frac{\Sigma m(x'^2 + y'^2)}{\Sigma m(x'^2 - y'^2)}\,\frac{1}{\omega^2 + 2n^2}};$$

cette durée serait, comme on voit, au moins égale à $\frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + 2n^2}}$ et par conséquent surpasserait 8 heures.

Je ne m'arrêterai pas davantage à poursuivre ces conséquences de nos formules; la résistance de l'air, les frottements et le défaut de rigidité des corps n'en permettraient pas la vérification expérimentale.

Rappelons, en terminant ce Mémoire, que toute notre analyse est fondée sur l'expression de l'intégrale $T = \int \frac{f\,d\mu}{u}$ pour un point extérieur au sphéroïde terrestre (paragraphe V); nos formules se rapportent donc à l'équilibre ou au mouvement d'un corps placé au-dessus de la surface de la Terre, et il ne faudrait pas les appliquer sans modifications au cas où le corps se trouverait à une certaine profondeur au-dessous du sol.