

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

N. LUSIN

J. PRIWALOFF

Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 42 (1925), p. 143-191

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__143_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'UNICITÉ ET LA MULTIPLICITÉ
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR MM. N. LUSIN ET J. PRIWALOFF

(à Moscou)



Introduction.

On sait que le problème d'*unicité* des fonctions analytiques est très important dans la théorie des fonctions et dans ses applications nombreuses. Ce problème, étudié déjà au XIX^e siècle, n'a pas eu de résolution complète jusqu'à présent.

Les cas classiques de ce problème étaient résolus à l'époque de Weierstrass. C'étaient les cas où *deux fonctions analytiques* $f_1(z)$ et $f_2(z)$ *coïncidaient ou bien dans un domaine commun ou bien en un ensemble infini de points appartenant à leur domaine d'existence commun y compris le point limite*. Ces deux problèmes indiqués ci-dessus sont les problèmes *intérieurs*. C'est M. Painlevé qui a résolu pour la première fois le problème d'*unicité* dans le cas où *deux fonctions analytiques* $f_1(z)$ et $f_2(z)$ *holomorphes d'un côté d'un continu linéaire sont égales sur ce continu*. Tous ces résultats sont les seuls que nous avons jusqu'ici. M. Fatou, dans son remarquable travail : *Série trigonométrique et série de Taylor* ⁽¹⁾, a posé le problème suivant :

Existe-t-il une fonction analytique $f(z)$ *holomorphe à l'intérieur du cercle* $|z| < 1$ *et tendant vers zéro en un ensemble de points de* E , $\text{mes } E > 0$, *situé sur la circonférence* $|z| = 1$, z *tendant vers ces points le long d'un chemin quelconque non tangent à la périphérie?*

⁽¹⁾ *Acta mat.*, t. XXX, 1906.

Le but de ce travail est de résoudre ce problème ainsi que les autres qui s'y rattachent (1).

En analysant ces problèmes nous sommes conduits naturellement à la question plus générale : *Étant donné un ensemble E de points de la circonférence $|z| = 1$. Quelle est la structure de cet ensemble, pour que la fonction analytique $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro en des points de E, z tendant vers ces points par des rayons, soit identiquement nulle ?*

En suivant les questions étudiées dans ce travail, nous le divisons en quatre Parties :

Dans la première nous discuterons les questions d'*unicité* et de *multiplicité* en supposant que la variable z tend uniformément vers des points de la frontière; dans la seconde, étant résolu en sens positif le problème de M. Fatou ci-dessus mentionné, nous discuterons les problèmes analogues; la troisième Partie est consacrée à l'étude du problème généralisé, dont nous avons parlé plus haut; enfin dans la quatrième Partie, nous discuterons les problèmes peut-être distincts de ceux dont nous nous sommes occupé jusqu'ici, mais intimement liés entre eux. La question fondamentale de ce Chapitre est la suivante : *Existe-t-il une fonction analytique $f(z)$ uniforme et continue dans le cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro en tous points de la circonférence $|z| = 1$?*

Certains résultats de ce Mémoire ont été publiés par nous dans des travaux antérieurs (2).

CHAPITRE I.

UNICITÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES. CAS CLASSIQUE.

1. Dans l'étude des fonctions analytiques au voisinage d'une ligne

(1) Cf. J. PRIWALOFF, *Intégrale de Cauchy* (en russe) (*Bull. de l'Université de Saratow*, 1918).

(2) J. PRIWALOFF, *Intégrale de Cauchy* (en russe) (*Bull. de l'Univers. à Saratow*, 1918). — N. LUSIN, *Sur la représentation conforme* (*Bull. de l'Inst. Pol. à Ivanovo-Vosn.*, 1919). — N. LUSIN, *Sur l'existence des fonctions analytiques qui sont uniformément infinies au voisinage de coupure* (en russe) (*Ibid.*, 1922, Moscou, Juli, 1923).

singulière, il est essentiel d'envisager la structure de l'ensemble des points de cette ligne, définissant complètement la fonction analytique par ses valeurs limites. Considérons d'abord le cas le plus simple, celui de la fonction analytique, régulière à l'intérieur du cercle et tendant uniformément vers des valeurs finies et bien déterminées sur un certain arc σ de la périphérie. Il est aisé de voir que ces valeurs déterminent d'une manière unique ladite fonction. En effet, il suffit de démontrer que toute fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle et tendant uniformément vers zéro aux points de σ , est égale à zéro identiquement. D'après le principe de Schwarz, la fonction $f(z)$ est prolongeable au delà de l'arc σ ; par suite, étant holomorphe et égale à zéro en chaque point de σ , elle est nulle partout. Le problème d'unicité a donc la résolution banale dans ce cas. En utilisant la représentation conforme des domaines jordanien, nous pouvons réduire les cas les plus compliqués de notre problème à celui que nous avons exposé.

Soit $f(z)$ une fonction régulière d'un seul côté d'une ligne jordanienne I et tendant uniformément vers zéro aux points de I . En adjoignant à cette courbe I une autre de telle manière qu'à l'intérieur du domaine D ainsi construit, la fonction $f(z)$ soit partout holomorphe, nous faisons la transformation conforme du domaine D sur l'intérieur du cercle. Il est évident que la fonction $f(z)$ holomorphe dans D le sera aussi après la représentation conforme dans l'intérieur du cercle et égale à zéro en chaque point de l'arc σ de sa périphérie, correspondant à la courbe I . (Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de M. Carathéodory.)

Or, la fonction transformée est nulle d'après le théorème déjà mentionné, donc la fonction $f(z)$ l'est aussi.

En utilisant des considérations analogues, on peut démontrer que toute fonction holomorphe au voisinage d'une ligne jordanienne I et tendant uniformément vers l'infini aux points de cette ligne est égale à l'infini partout. En effet, supposons que le théorème n'est pas vrai; alors la fonction $f(z)$, vérifiant les conditions de ce théorème, ne peut avoir qu'un nombre limité de zéros au voisinage de I , car, dans le cas contraire, l'ensemble de ces zéros aurait certainement au moins un point limite sur I et, par suite, $f(z)$ ne pourrait tendre uniformément vers

l'infini au voisinage de la ligne I; donc au voisinage de I la fonction $f(z)$ étant holomorphe n'est jamais nulle.

En appliquant alors à la fonction $\frac{1}{f(z)}$ les considérations que nous avons utilisées plus haut, nous allons voir que $\frac{1}{f(z)}$ est égale à zéro identiquement, et par suite $f(z) \equiv \infty$, contrairement à l'hypothèse.

Les cas d'*unicité* que nous avons exposés sont classiques, nous allons démontrer qu'on peut réduire à ces cas des problèmes où les fonctions analytiques vérifient des conditions semblables, mais moins restrictives.

2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et telle que, si l'on retranche de $|z| < 1$ les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ sans points communs, elle tend uniformément vers zéro dans l'ensemble connexe R restant, quand le point z tend vers un point quelconque de la périphérie C du cercle (tout en restant dans R).

Nous allons démontrer que *dans ce cas $f(z)$ est identiquement nulle*. A cet effet, il suffit de démontrer que $f(z)$ tend uniformément vers zéro en chaque point de C, quand z tend vers ce point par un chemin quelconque tout agrégé au cercle $|z| < 1$. Supposons que cela n'est pas vrai. Alors il existe une suite

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

tendant vers un point z_0 de C et un nombre $\alpha, \alpha > 0$, tel que $|f(z_i)| > \alpha$.

Ces points z_i , si i est suffisamment grand, sont agrégés nécessairement aux cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$. Or, si $|f(z_i)| > \alpha$, z_i étant dans le cercle γ_k , il existe certainement un point de R, aussi voisin de γ_k que l'on veut, auquel $|f(z)| > \alpha$.

Pour fixer les idées, nous désignerons par $z^{(i)}$ ce point. Donc il existe une suite de points

$$[z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(i)}, \dots (z^{(i)} < R) \lim z^{(i)} = z_0]$$

et telle que $|f(z^{(i)})| > \alpha$. D'où la contradiction.

Il est aisé de voir que la démonstration sera valable, si nous suppo-

sons que la fonction $f(z)$ tend uniformément vers zéro, quand z tend vers des points d'un arc σ de la circonférence tout en restant dans R .

Il est évident aussi que le théorème sera valable si l'on utilise, au lieu des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$, des domaines jordanien quelconques.

Le théorème démontré peut être généralisé de la manière suivante :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du domaine jordanien D , limité par la courbe I . Nous supposons que cette fonction tend uniformément vers zéro quand le point z tend vers un certain arc σ de I , tout en restant dans R .

(Nous obtenons l'ensemble R en retranchant de D les points appartenant aux domaines fermés $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$). *Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est identiquement nulle.*

Nous omettrons la démonstration de ce théorème en remarquant que le cas considéré se réduit au précédent par la représentation conforme du domaine D sur l'intérieur du cercle.

Dans les considérations précédentes nous avons toujours supposé que les chemins le long desquels varie la variable z sont absolument quelconques à la seule condition d'être agrégés au domaine ou de vérifier les conditions supplémentaires. Par suite, l'analyse des problèmes qui s'y rattachent était tout à fait classique. En terminant ce Chapitre, nous allons fixer notre attention sur quelques exemples des fonctions analytiques pour lesquels le problème d'unicité a une résolution négative. Ces exemples sont intimement liés à la question qui nous occupe.

3. *Il existe une fonction analytique $f(z)$ régulière à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et dont le module tend uniformément vers l'infini, quand la variable z tend vers la périphérie par des circonférences concentriques $|z| = \rho_n, \rho_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ ⁽¹⁾.*

⁽¹⁾ Cf. N. LUSIN, *Sur l'existence des fonctions analytiques qui sont uniformément infinies au voisinage de coupure* (en russe) (*Bull. de l'Inst. Pol. à Ivanovo-Vosnesense*, 1922).

Considérons la série

$$(1) \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^{\lambda_n \mu_n},$$

où les $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2, \dots, \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ sont des nombres entiers positifs.

En posant

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k z^{\lambda_k \mu_k},$$

nous avons

$$\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(z) + \lambda_n z^{\lambda_n \mu_n}.$$

Il est évident que dans le cercle $|z| \leq 1$,

$$|\varphi_n(z)| \leq \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \text{pour} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Il en résulte que

$$(2) \quad |\varphi_n(z)| \geq \lambda_n |z|^{\lambda_n \mu_n} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}).$$

Dans tout ce qui suit, nous appellerons *couronne* la partie plane qui est située entre les deux circonférences concentriques $|z| = \rho'$ et $|z| = \rho''$ et nous désignerons cette couronne par le symbole $[\rho', \rho'']$.

Il est évident, d'après l'inégalité (2), que dans la couronne

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n \mu_n} \right), 1 \right]$$

se trouve vérifiée l'inégalité

$$(3) \quad |\varphi_n(z)| \geq \lambda_n \left(1 - \frac{1}{\lambda_n \mu_n} \right)^{\lambda_n \mu_n} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}).$$

D'autre part, on sait que $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m$ tend en croissant toujours vers sa limite $\frac{1}{e}$, donc

$$(4) \quad \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m < \frac{1}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(5) \quad \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m > \frac{1}{3} \quad (m = 6, 7, \dots).$$

En appliquant l'inégalité (5) à (3), on voit sans peine que

$$(6) \quad |\varphi_n(z)| \geq \frac{\lambda_n}{3} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \quad (n = 6, 7, \dots)$$

est vérifiée dans la couronne $\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 \mu_n} \right), 1 \right]$.

En désignant par C_n la circonférence $|z| = 1 - \frac{1}{2\lambda_n^2 \mu_n}$, nous voyons tout de suite que dans l'intérieur de ce cercle C_n

$$\begin{aligned} |\lambda_{n+1} z^{\lambda_{n+1}^2 \mu_{n+1}}| &\leq \lambda_{n+1} \left(1 - \frac{1}{2\lambda_n^2 \mu_n} \right)^{\lambda_{n+1}^2 \mu_{n+1}} \\ &= \lambda_{n+1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2\lambda_n^2 \mu_n} \right)^{2\lambda_n^2 \mu_n} \right\}^{\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right)^2} < \lambda_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right)^2 \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Donc dans l'intérieur de C_n

$$|\lambda_{n+1} z^{\lambda_{n+1}^2 \mu_{n+1}}| < \lambda_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right)^2 \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dans tout ce qui précède, les nombres λ_i et μ_k , étant arbitraires, vérifiaient seulement les conditions déjà citées plus haut. C'est maintenant que nous définirons leurs valeurs plus précises.

Nous posons $\lambda_n = a^n$, où a est un nombre entier $a \geq 5$ et $\mu_n = n!$

D'après cela, les inégalités (6) et (7) se transforment en les suivantes :

$$\begin{aligned} (6^*) \quad |\varphi_n(z)| &\geq \frac{a^n}{3} - (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) \\ &= \frac{a^n}{3} - \frac{a^n - 1}{a - 1} > a^n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{a - 1} \right) > \frac{a^n}{12} \quad (n = 6, 7, \dots) \end{aligned}$$

qui sont vérifiées dans la couronne $\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 \mu_n} \right), 1 \right]$.

Or, d'après (7) nous avons à l'intérieur de C_n

$$(7^*) \quad |\lambda_{n+1} z^{\lambda_{n+1}^2 \mu_{n+1}}| < a^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{a^2(n+1)} = \left(\frac{a}{2^{\frac{a^2}{2}}} \right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ces opérations préliminaires étant achevées, attaquons la partie

fondamentale de notre exemple. Nous allons démontrer que la série (1)

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^{\lambda_n^2 \mu_n}$$

est une série convergente dans le cercle $|z| < 1$.

En effet, quel que soit le cercle $|z| \leq \rho$, $\rho < 1$, il existe certainement un nombre n assez grand et tel que ce cercle est agrégé à l'intérieur des cercles C_n, C_{n+1}, \dots . Mais dans ce cas, d'après les inégalités (6*) et (7*), tous les membres de la série (1), dont l'indice n est suffisamment grand, sont moindres en valeur absolue que les termes d'une série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

Donc la série (1) est convergente et représente une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$.

Il nous reste à démontrer que cette fonction vérifie les conditions cherchées.

En appliquant les inégalités (6*) et (7*) à la couronne

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 \mu_n} \right), \left(1 - \frac{1}{2\lambda_n^2 \mu_n} \right) \right],$$

nous aurons

$$(8) \quad |\varphi(z)| = \left| \varphi_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k z^{\lambda_k^2 \mu_k} \right| \geq |\varphi_n(z)| - \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k z^{\lambda_k^2 \mu_k}| > \frac{\alpha^n}{12} - \frac{1}{2^n}$$

et *a fortiori*

$$|\varphi(z)| > \frac{5^n}{12} - 1 \quad (\text{parce que } \alpha \geq 5).$$

La fonction $\varphi(z)$, ainsi construite, vérifie toutes les conditions mentionnées plus haut.

Son module tend uniformément vers l'infini quand la variable z tend vers la circonférence tout en restant dans les couronnes

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 \mu_n} \right), \left(1 - \frac{1}{2\lambda_n^2 \mu_n} \right) \right].$$

4. On peut démontrer de plus que *le module* $|\varphi(z)|$ *tend aussi vers l'infini, quand la variable* z *tend vers la circonférence* $|z| = 1$ *le long d'un rayon, dont l'angle* θ *avec la direction positive de l'axe* Ox *est égal à* $k \frac{2\pi}{\lambda_n^2 \mu_n}$ *où* k *et* n *sont des nombres naturels arbitraires.* (L'ensemble de ces rayons étant partout dense dans $|z| \leq 1$.) En effet,

$$\varphi(z) = \varphi_{n-1}(z) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu}}$$

et

$$(9) \quad |\varphi(z)| \geq \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu}} \right| - |\varphi_{n-1}(z)| \geq \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu}} \right| - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}).$$

D'après notre hypothèse, z tend vers la périphérie $|z| = 1$ le long d'un rayon dont l'angle $\theta = k \frac{2\pi}{\lambda_n^2 \mu_n}$ et $\lambda_n = a^n$, $\mu_n = n!$ Donc le quotient $\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu} : \lambda_n^2 \mu_n$ est un nombre entier si $\nu > n$.

Il s'ensuit que tous les membres de la série

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu}}$$

sont des nombres positifs (z tendant toujours vers la périphérie le long d'un rayon ci-dessus mentionné). Donc le long de ce rayon l'inégalité (9) s'exprime ainsi

$$|\varphi(z)| \geq \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\lambda_{\nu}^2 \mu_{\nu}} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$$

et *a fortiori*

$$|\varphi(z)| > \lambda_n z^{\lambda_n^2 \mu_n} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$$

ou

$$(10) \quad |\varphi(z)| > \lambda_n |z|^{\lambda_n^2 \mu_n} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$$

le long du rayon considéré.

La seconde partie de l'inégalité (10) est égale à celle de (2), d'où il résulte immédiatement que pour tous les points z de notre rayon,

qui appartiennent à la couronne $\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 \mu_n} \right), 1 \right]$, nous avons

$$(11) \quad |\varphi(z)| > \frac{a^n}{12}.$$

Il s'ensuit que $|\varphi(z)| \rightarrow +\infty$, quand $|z| \rightarrow 1$ le long du rayon considéré.

5. La fonction cherchée étant ainsi construite, nous allons maintenant répéter les conditions plus précises auxquelles elle satisfait. Désignons par S une famille de *domaines fermés* D_i de propriétés :

- 1° D_i est situé à l'intérieur du cercle $|z| < 1$;
- 2° La frontière de D_i est un polygone ;
- 3° Deux domaines $D_i, D_j, i \neq j$, de S n'ont jamais de points communs entre eux ;
- 4° Le diamètre de D_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Retranchons maintenant du cercle $|z| < 1$ cette famille S et soit R l'ensemble restant. Il est évident que la fonction construite $\varphi(z)$ ou en particulier

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot z^{25^n n!}$$

tend uniformément vers l'infini, z tendant vers la périphérie du cercle $|z| < 1$, tout en restant dans R (1). L'ensemble R est un ensemble connexe. On peut construire un domaine R' , $R' \supset R$, tel que $|\varphi(z)|$ tend uniformément vers l'infini, z tendant vers $|z| = 1$, tout en restant dans R' .

Pour le voir il suffit seulement de retrancher de $|z| < 1$ les domaines D'_i de la famille S, $\{D'_i\} \subset \{D_i\}$, qui renferment les zéros de $\varphi(z)$, l'ensemble restant R' sera un domaine et la fonction $\varphi(z)$ y vérifie les conditions ci-dessus nommées.

En effet, la fonction

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

(1) Cf. N. LUSIN, *loc. cit.*

est holomorphe dans R' , exception faite peut-être pour un nombre fini de points, dans lesquels $\varphi(z) = 0$. Il nous reste à démontrer que $\varphi_1(z)$ tend uniformément vers zéro quand z tend vers la périphérie du cercle $|z| < 1$, tout en restant dans R' . Supposons que cela n'est pas vrai. Alors il existe dans R' une suite $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ tendant vers un point z_0 de $|z| = 1$ et un nombre $\alpha, \alpha > 0$, tel que $|\varphi_1(z_n)| > \alpha$.

Ces points z_n , si n est suffisamment grand, sont agrégés aux domaines retranchés $\{D'_k\}$. Or, si $|\varphi_1(z_n)| > \alpha$, z_n étant dans le domaine D'_k , il existe certainement un point de R' , aussi voisin de D'_k que l'on veut, auquel $|\varphi_1(z)| > \alpha$. Pour fixer les idées, nous désignerons par $z^{(n)}$ ce point. Donc il existe une suite de points

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}, \dots \quad [z^{(n)} \in R'] \quad \lim z^{(n)} = z_0,$$

et telle que $|\varphi_1[z^{(n)}]| > \alpha$. D'où la contradiction.

6. En posant

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varphi(z)},$$

nous aurons une fonction méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro, z tendant vers $|z| = 1$ tout en restant dans R' .

7. Il est évident que toute fonction analytique $f(z)$, méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro (ou vers l'infini), z tendant vers un certain arc σ de la périphérie $|z| = 1$ le long d'un chemin quelconque ne traversant pas des pôles, est identiquement nulle (ou infinie).

Il suffit de démontrer le premier cas de notre théorème, car le second se réduit à celui-ci, si l'on considère la fonction $\frac{1}{f(z)}$. Supposons que le théorème n'est pas vrai. La fonction $f(z)$, différente de zéro, étant holomorphe au voisinage de σ , tend vers zéro en chaque point de σ , d'où la contradiction (§ 1 de ce Chapitre).

8. Toutes les fonctions considérées plus haut étant holomorphes ou méromorphes à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, la question se pose natu-

rellement, *s'il existe une fonction analytique $f(z)$ uniforme et continue dans le cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro, $|z|$ tendant vers l'unité?* Nous discuterons ce problème et des problèmes analogues dans le Chapitre III.

CHAPITRE II.

UNICITÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES. CAS DES CHEMINS NON TANGENTS.

9. Le problème d'*unicité* des fonctions analytiques, étudié dans ce Chapitre, se pose ainsi :

Soit donné un cercle C , de centre $z=0$ et de rayon 1, et un ensemble M de points situés sur la périphérie de C . Supposons que la fonction analytique donnée $f(z)$, holomorphe à l'intérieur de C , tend vers des valeurs déterminées en chaque point z_0 de M , z tendant vers z_0 suivant les chemins non tangents à la périphérie de C .

Quelle est la structure de M , pour que la fonction $f(z)$ soit uniquement déterminée par ses valeurs limites sur cet ensemble?

Les propriétés caractéristiques de ce genre sont la *puissance*, la *catégorie* et la *mesure* de M . Ce sont ces trois points de vue essentiels que nous suivrons dans cette étude.

10. Au point de vue de la puissance, la question fut étudiée par M. Fatou ⁽¹⁾ qui nous donne un exemple de fonction $f(z)$ de propriétés :

- 1° $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et réel $f(z) > 0$;
- 2° $f(z)$ tend uniformément vers l'infini, z tendant vers des points d'un certain ensemble P de la périphérie du cercle $|z|=1$, cet ensemble P est partout dense et a en chaque portion la puissance du continu.

En posant $f_1(z) = e^{-f(z)}$ nous obtenons un exemple d'une fonction de propriétés :

- 1° $f_1(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et continue sur sa périphérie;

⁽¹⁾ FATOU, *loc. cit.*

2° $f_1(z)$ tend uniformément vers zéro, z tendant vers des points de l'ensemble P ci-dessus mentionné.

Dans les exemples indiqués l'ensemble P est de la première catégorie et de mesure nulle.

11. P étant de la première catégorie, la question se pose naturellement, *s'il existe des fonctions analytiques, dont l'ensemble des zéros est de deuxième catégorie*, ou, inversement, si le théorème d'unicité est toujours exact dans ce cas.

Nous allons résoudre cette question dans ce paragraphe, en construisant un exemple d'une fonction vérifiant les propriétés suivantes (') :

1° $f(z)$ est holomorphe et bornée dans le cercle $|z| < 1$;

2° $f(z)$ tend uniformément vers zéro, z tendant vers les points d'un certain ensemble E de la circonférence $|z| = 1$, cet ensemble E étant de deuxième catégorie.

A cet effet nous utiliserons l'exemple dû à M. Vitali : soit $G(\alpha)$ une fonction continue et croissante dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, ayant en chaque point une dérivée positive $g(\alpha)$, égale à $+\infty$ sur un ensemble E_1 , de deuxième catégorie et de mesure nulle. Il est évident que la fonction $g(\alpha)$, la dérivée d'une fonction croissante, est sommable dans $(0, 2\pi)$. Cela posé, formons l'intégrale de Poisson.

$$P(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \alpha)} d\alpha,$$

représentant une fonction harmonique régulière à l'intérieur du cercle $\rho < 1$, et positive. Il est facile de voir de plus que $P(\rho, \theta)$ tend uniformément vers l'infini, le point (ρ, θ) se rapprochant du point d'un certain ensemble E de la périphérie, qui est de deuxième catégorie.

En effet, cela a lieu en chaque point de E_1 , dans lequel la fonction $\frac{1}{g(\alpha)}$, égale à zéro, est continue. Comme $\frac{1}{g(\alpha)}$ est une fonction de

(1) J. PRIWALOFF, *loc. cit.*

la première classe, dans la classification de M. Baire, l'ensemble de ses points de continuité E_2 est de deuxième catégorie partout. Le produit de deux ensembles E_1 et E_2 en est de même, et c'est là l'ensemble E cherché. Désignons par $Q(\rho, \theta)$ la fonction harmonique conjuguée à $P(\rho, \theta)$ et posons

$$\omega(z) = P(\rho, \theta) + iQ(\rho, \theta), \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

Ainsi nous avons obtenu un exemple d'une fonction $\omega(z)$ jouissant des propriétés suivantes :

- 1° $\omega(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et $\text{Reel } \omega(z) > 0$;
- 2° $\omega(z)$ tend uniformément vers l'infini, z se rapprochant des points de la circonférence, appartenant à un ensemble E de deuxième catégorie.

La fonction analytique $f(z) = e^{-\omega(z)}$ vérifie évidemment les conditions 1° et 2°.

L'ensemble E de cet exemple est de mesure nulle.

12. Afin d'étudier le problème posé, au point de vue métrique, l'ensemble M supposé de mesure positive, nous sommes conduits à la nécessité de démontrer une propriété essentielle des ensembles, qui reste invariante dans la représentation conforme d'un cercle sur un domaine dont la frontière est une courbe rectifiable. Cette propriété peut s'exprimer géométriquement de la manière suivante : *La représentation conforme d'un cercle sur un domaine dont la frontière est une courbe rectifiable fait correspondre chaque ensemble de mesure nulle sur la périphérie du cercle à un certain ensemble de mesure nulle situé sur cette courbe* (1).

En effet, supposons, par impossible, que la représentation conforme d'un domaine D limité par une courbe simple rectifiable R sur un cercle C fait correspondre à un ensemble de points E de mesure non nulle du contour R un ensemble de points E de la circonférence de C dont la mesure est nulle. Admettons l'existence d'une fonction $f(z)$,

(1) N. LUSIN, *Sur la représentation conforme* (Bull. de l'Inst. Pol. à Ivanovo-Vosn., 1919). — Voir aussi J. PRIWALOFF, *loc. cit.*

holomorphe et bornée à l'intérieur de C , et telle que certainement elle ne tend vers aucune limite pour tout chemin *jordanien* à l'intérieur du cercle C aboutissant à chaque point choisi z_0 de E , quand on s'approche de ce point.

Soit $z = \varphi(Z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle C sur le domaine D . La fonction $f[\varphi(Z)]$ est une fonction holomorphe et bornée à l'intérieur de D et telle qu'elle est indéterminée en chaque point de Z_0 de E , quel que soit le chemin aboutissant à Z_0 . Or, on a $\text{mes } E > 0$, ce qui est en contradiction avec le théorème de M. Fatou, généralisé par M. Goloubeff⁽¹⁾.

Nous sommes donc amenés à démontrer l'existence de la fonction $f(z)$ pour *tout* ensemble donné E de mesure nulle. Passons à la construction de cette fonction.

13. α . *Fonction correspondant au point.* — Nous supposons que la circonférence C ait l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Soit a un point de C , $a = e^{i\theta}$. A ce point a correspond la fonction

$$\varphi(z|a) = \frac{1}{1 - ze^{-i\theta}}$$

ayant les propriétés suivantes :

- 1° $\varphi(z|a)$ est holomorphe partout, sauf au pôle a ;
- 2° On a à l'intérieur de C $\text{Reel } \varphi(z|a) > 0$;
- 3° Si γ est une circonférence quelconque, intérieure à C et tangente en a au C , on a, le long de γ , l'égalité $\text{Reel } \varphi(z|a) = \frac{r}{d}$, où d est le diamètre de γ .

β . *Fonction correspondant à l'ensemble parfait.* — Soit p un ensemble parfait sur la circonférence C définie par les arcs contigus (a_n, b_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$; soit σ_n la longueur de l'arc (a_n, b_n) . A cet ensemble p

⁽¹⁾ GOLOUBEFF, *Les fonctions analytiques uniformes dont l'ensemble des points singuliers est un ensemble parfait partout discontinu* (en russe) (*Bull. de l'Université de Moscou*, 1917).

correspond la fonction

$$\psi(z|p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n [\varphi(z|a_n) + \varphi(z|b_n)]$$

ayant, d'après α , les propriétés suivantes :

1° $\psi(z|p)$ est holomorphe partout, sauf aux points de p ;

2° On a, à l'intérieur de C , $\text{Reel } \psi(z|p) > 0$;

3° Soient γ'_n et γ''_n les deux circonférences intérieures à C , tangentes en a_n et b_n à C et ayant le contact mutuel; leur diamètre est, évidemment, plus petit que σ_n ; désignons par T_p la réunion des points intérieurs aux cercles γ , quand $n = 1, 2, \dots$; d'après 3° α , nous avons dans T_p : $\text{Reel } \psi(z|p) > 1$.

D'autre part, menons les cercles décrits sur les rayons (o, a_n) et (o, b_n) , $n = 1, 2, \dots$, comme diamètres; désignons par D_p la réunion des points intérieurs à ces cercles; d'après 3° α , nous avons :

$\text{Reel } \psi(z|p) < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ pour tous les points z intérieurs à C , qui

n'appartiennent pas à D_p ;

4° Soit Δ un domaine dont la distance à l'ensemble parfait p est δ , $\delta > 0$; nous avons dans Δ l'inégalité évidente

$$|\psi(z|p)| < \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n.$$

γ . *Ensemble parfait déduit.* — Soit ε un nombre positif donné; soit p un ensemble parfait sur C qui ne contient aucun point de E . Déduisons de p un autre ensemble parfait p_1 . A cet effet, mettons dans tout arc (a_n, b_n) , contigu à p , un ensemble parfait q_n contenant les deux points a_n et b_n et qui ne contient aucun point de E .

La réunion $Q = p + q_1 + q_2 + \dots$ est un ensemble parfait; soient s_1, s_2, \dots les arcs contigus à Q .

Il est clair que la distance de l'arc s_m à D_p est non nulle; nous la désignons par $d_m, d_m > 0$.

Puisque $\text{mes } E = 0$, nous pouvons enfermer (au sens étroit) tous les points de E situés sur s_m dans un système d'arcs n'empiétant pas

(et même sans extrémités communes) dont la somme des longueurs est $< \varepsilon \frac{d_m}{4^m}$. Considérons un ensemble parfait p_1 , qui s'obtient en supprimant de C tous ces systèmes d'arcs; nous dirons que cet ensemble p_1 est un ensemble déduit de p par le nombre ε . Il est clair que les ensembles Γ_{p_1} et D_{p_1} n'ont aucun point commun; on voit bien qu'on a $|\psi(z|p)| < \varepsilon$ pour tout point z dans D_{p_1} .

δ. *Existence de la fonction cherchée.* — Soit

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots < \frac{1}{2}, \text{ où } \varepsilon_n > 0.$$

Prenons un ensemble parfait qui ne contient aucun point de E , et désignons-le par p_0 .

Soit p_1 un ensemble parfait déduit de p_0 par ε_1 ; soit, en général, p_n un ensemble déduit de p_{n-1} par ε_n . Il est évident que la fonction

$$\Omega(z|E) = \psi(z|p_0) + \psi(z|p_1) + \dots + \psi(z|p_n) + \dots$$

est telle que $\text{Reel } \Omega > 0$ à l'intérieur de C et $\text{Reel } \Omega$ devient une *infinité* de fois égale à $\frac{1}{2}$ et à 1 sur toute ligne jordanienne à l'intérieur de C et aboutissant à chaque point choisi z_0 de E . Donc la fonction

$$e^{-\Omega(z|E)}$$

est une fonction cherchée.

14. Supposons que la fonction analytique $f(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ tende vers des valeurs *finies et bien déterminées*, quand z tend vers des points d'un ensemble M , $\text{mes } M > 0$, suivant les chemins *non tangents*.

Nous démontrerons, dans ces conditions, que la fonction $f(z)$ est *uniquement* déterminée par ses valeurs sur M ⁽¹⁾. Il suffit, évidemment, de démontrer, que *la fonction $f(z)$ prenant la valeur zéro en chaque point de M , suivant les chemins non tangents, est identiquement nulle.*

Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, différente de zéro et s'annulant aux points de M

⁽¹⁾ J. PRIWALOFF (*loc. cit.*).

dans le sens défini plus haut. Cette hypothèse nous conduira à une contradiction. Simplifions notre problème. Du point z_0 appartenant à M traçons à l'intérieur du cercle deux droites faisant chacune des angles de 45° avec la tangente en z_0 , et traçons de plus un arc de cercle de centre z_0 et de rayon $\frac{1}{n}$.

Ainsi nous avons construit un secteur du sommet z_0 . Désignons par $f_n(z_0) = \max |f(z)|$ le maximum du module de valeurs de $f(z)$ dans ce même secteur. En égalant n à 1, 2, 3, ... nous obtenons une suite de fonctions

$$f_1(z_0), f_2(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots$$

définies en chaque point de M . Conformément à la définition, les fonctions de cette suite, finies et mesurables sur M , convergent vers zéro en chaque point de M . Il existe, d'après le théorème de M. Egoroff ⁽¹⁾, un ensemble parfait P , $\text{mes } P > 0$, de convergence uniforme vers zéro de la suite $f_n(z_0)$. Cet ensemble P fixé, traçons une courbe rectifiable de la manière suivante : elle contient P tout entier et une infinité de couples de segments de droites menées de deux extrémités de chaque arc contigu à P à l'intérieur du cercle, et faisant des angles de 45° avec les tangentes correspondantes. Désignons par K le domaine, dont la frontière est cette courbe rectifiable. Réalisons la représentation conforme du domaine K sur le cercle $|x| < 1$. Soit P_1 le correspondant de P sur la circonférence $|x| = 1$. P_1 est parfait et de mesure positive (*cf.* § 12). Moyennant cette représentation conforme, la fonction $f(z)$ se transforme en une fonction $\psi(x)$ de propriétés :

- 1° $\psi(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|x| < 1$;
- 2° $\psi(x)$ est continue dans le domaine fermé $|x| \leq 1$;
- 3° $\psi(x)$ est égale à zéro sur un ensemble parfait P_1 de la circonférence $|x| = 1$, $\text{mes } P_1 > 0$. D'après la condition 2° on peut prendre $|\psi(x)| < 1$ dans le cercle $|x| \leq 1$, car, dans le cas contraire, on multiplie $\psi(x)$ par une constante, ce qui ne change pas les conditions 1° et 3°.

⁽¹⁾ EGOROFF, *C. R. Acad. Sc.*, 1911.

Étude de la fonction $\psi(x)$. — On peut faire *a priori* seulement deux hypothèses sur la nature de $\psi(x)$: 1° ou bien $\psi(x)$ n'est jamais nulle à l'intérieur du cercle $|x| < 1$; 2° ou bien il y existe des zéros de cette fonction.

Envisageons la première hypothèse. La partie réelle de la fonction $\text{Ln } \psi(x)$ est une fonction harmonique dans le cercle $|x| < 1$ prenant la valeur $-\infty$ sur l'ensemble P_1 de la circonférence $|x| = 1$. Cette fonction harmonique est *négative* dans le cercle $|x| < 1$, parce que le module de $\psi(x)$ est inférieur à 1. Soit U cette fonction. Traçons un cercle auxiliaire, concentrique au cercle $|x| \leq 1$ et de rayon ρ , $\rho < 1$. La valeur U_0 de la fonction harmonique en question, en un point (r_0, θ_0) de ce cercle, est donnée par l'intégrale de Poisson U_ρ :

$$(I) \quad U_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(\alpha - \theta_0)} d\alpha,$$

(1) $U_0 = U_\rho.$

Faisons tendre ρ vers l'unité. $U(\rho, \alpha)$ tend uniformément vers $-\infty$ sur un ensemble P_1 , $\text{mes } P_1 > 0$, tout en restant *négative*.

Le facteur $\frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(\alpha - \theta_0)}$ de l'intégrale de Poisson reste positif et plus grand qu'un nombre fixe, différent de zéro.

Nous pouvons en conclure que U_ρ tend vers $-\infty$, ce qui nous donne une contradiction avec l'égalité (1). Analysons, de la même manière, la seconde hypothèse. Remarquons, d'abord, que les zéros de la fonction $\psi(x)$ sont isolés dans le cercle $|x| < 1$. En effet, s'ils avaient un point limite à l'intérieur du cercle, la fonction $\psi(x)$ serait identiquement nulle. Par conséquent, dans le cas considéré, la fonction harmonique U , étant *négative*, devient infinie sur un ensemble de points isolés situés à l'intérieur du cercle $|x| < 1$ et sur l'ensemble P_1 de la circonférence.

Traçons un cercle auxiliaire ne contenant pas sur sa périphérie de zéros de la fonction $\psi(x)$. C'est toujours possible, ρ étant aussi voisin de l'unité que l'on veut, car l'ensemble des zéros de $\psi(x)$ est isolé. La fonction harmonique U est *négative* sur cette circonférence. Formons l'intégrale de Poisson U_ρ (I) et posons

$$(1') \quad U_0 = U_\rho + D_\rho.$$

Il est évident que la fonction D_ρ est une fonction harmonique à l'intérieur du cercle de rayon ρ , égale à zéro sur sa périphérie et à $-\infty$ dans un nombre fini de points, situés à l'intérieur de ce cercle. On a, par suite, $D_\rho < 0$. Comme U_ρ tend vers $-\infty$ quand ρ tend vers l'unité, la formule (1') nous donne la contradiction cherchée.

15. Les considérations précédentes ne sont pas applicables dans le cas où la fonction analytique $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, tend vers une limite déterminée, égale à l'infini sur un ensemble de points M , $\text{mes} M > 0$, de la circonférence.

Il est facile, cependant, à l'aide de quelques considérations auxiliaires, à réduire ce cas au précédent, et de résoudre dans le sens positif le problème qui nous occupe (1).

Supposons, donc, qu'il existe une fonction $f(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et tendant vers l'infini sur un ensemble de points M , $\text{mes} M > 0$, de sa périphérie, suivant les chemins non tangents. Il faut démontrer que dans ces conditions nous aurons une contradiction. Répétons la construction du paragraphe 14, c'est-à-dire traçons du point z_0 appartenant à M deux segments faisant chacun des angles 45° avec la tangente en z_0 et traçons de plus un arc de cercle de centre z_0 et de rayon $\frac{1}{n}$. Désignons par $f_n(z_0) = \min |f(z)|$ dans le secteur construit. La suite des fonctions

$$f_1(z_0), f_2(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots,$$

finies et mesurables sur M , converge vers (2) l'infini en chaque point de M . Il est évident de plus que toutes ces fonctions sont non négatives et vérifient la condition

$$f_1(z_0) \leq f_2(z_0) \leq \dots \leq f_n(z_0) \leq \dots$$

Considérons une autre suite auxiliaire des fonctions

$$\varphi_1(z_0) = \frac{1}{f_1(z_0) + 1}, \quad \varphi_2(z_0) = \frac{1}{f_2(z_0) + 1}, \quad \dots, \quad \varphi_n(z_0) = \frac{1}{f_n(z_0) + 1}.$$

Les fonctions $\varphi_n(z_0)$ sont évidemment finies et mesurables sur M .

(1) J. PRIWALOFF, *loc. cit.*

(2) La convergence au sens de M. Baire.

Elles convergent vers zéro en chacun de ces points. Il existe, par suite, d'après le théorème de M. Egoroff, déjà cité, un ensemble parfait P , mes $P > 0$, de convergence uniforme de la suite $\varphi_n(z_0)$.

La suite $f(z_0)$ converge donc vers l'infini uniformément sur P . Cela veut dire que, quel que soit un nombre positif C , on peut trouver un nombre m , tel que, pour tout $n > m$, $|f_n(z_0)| > C$, z_0 étant arbitrairement choisi sur P . L'ensemble P étant déterminé, répétons la construction du paragraphe 14 de la courbe rectifiable, et désignons de nouveau par K le domaine, dont la frontière est cette courbe. De la définition même de ce domaine résultent les propriétés suivantes de $f(z)$:

1° $f(z)$ est holomorphe dans K .

2° $f(z)$ tend vers des valeurs bien déterminées en chaque point de sa frontière, z tendant vers ces points suivant tous les chemins agrégés à K .

3° Les valeurs de $f(z)$ en chaque point de P sont égales à $+\infty$.

Montrons que $f(z)$ peut avoir seulement un nombre fini de zéros à l'intérieur de K .

En effet, il existerait, dans le cas contraire, au moins un point limite des zéros. Ce point se trouverait ou à l'intérieur de K ou sur sa frontière. La première supposition est impossible, car la fonction $f(z)$ étant holomorphe serait identiquement nulle. Reste la deuxième supposition. Les points de la frontière se divisent en deux classes : les points de P et les points intérieurs au cercle. Le point limite ne peut appartenir à la seconde classe, parce que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle.

Il nous reste à considérer le cas, où ce point appartient à l'ensemble P . Or, cela est impossible, d'après la condition 3°. Ainsi nous avons obtenu la condition.

4° L'ensemble des zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur de K est fini.

Faisons maintenant la représentation conforme de K sur un cercle dans le plan x . Le correspondant de P est un ensemble parfait P_1 , mes $P_1 > 0$ (§ 12).

La fonction $f(z)$ se transforme en une fonction $\psi(x)$ ayant les propriétés suivantes :

1'. $\psi(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle :

2'. $\psi(x)$ tend vers une limite déterminée en chaque point de la circonférence, x tendant vers ces points le long des chemins quelconques tracés à l'intérieur du cercle;

3'. En chaque point de P_1 : $\psi(x) = +\infty$;

4'. $\psi(x)$ a un nombre fini de zéros à l'intérieur du cercle.

Désignons par $\pi(x)$ un polynôme, ayant les mêmes zéros que $\psi(x)$ et formons la fonction

$$\Psi(x) = \frac{\pi(x)}{\psi(x)}.$$

Il est évident que $\Psi(x)$ vérifie les conditions 1', 2'. Quant aux conditions 3', 4', elles se transforment de la manière suivante :

3". Les valeurs de $\Psi(x)$ en chaque point de P_1 sont égales à zéro;

4". $\Psi(x)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cercle.

D'après le paragraphe 14, $\Psi(x)$ est identiquement nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

16. Nous résumons les paragraphes 14 et 15 ainsi (1) : *Si la fonction analytique $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle, tend vers des valeurs déterminées (finies ou infinies) sur un ensemble M , mes $M > 0$, de la circonférence, suivant les chemins non tangents, cette fonction $f(z)$ est unique.*

CHAPITRE III.

CERTAINS EXEMPLES DE MULTIPLICITÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

17. Avant d'étudier les problèmes posés à la fin du Chapitre I, on a besoin de construire une courbe Z et de discuter ses propriétés.

Divisons la circonférence $|z| = 1$ en 60 parties égales et par chaque point de division traçons une partie de rayon de longueur $\frac{1}{2}$. Divisons ensuite chacune de ces 60 parties en 60 parties égales et par chaque point de division traçons une partie de rayon de longueur $\frac{1}{3}$, et ainsi de suite.

(1) I. PRIWALOFF, *loc. cit.*

Désignons par Z la courbe *jordanienne* formée par $|z| = 1$ et par toutes les parties des rayons définies plus haut. Soit G le domaine limité par cette courbe. En remarquant que la partie de rayon utilisée dans la « $n - 1$ » division, étant $\frac{1}{n}$, soit un infiniment petit d'ordre inférieur à la division correspondante de la circonférence, dont la longueur est $\frac{2\pi}{60^{n-1}}$, nous avons la propriété :

Quel que soit un point M agrégé à $|z| = 1$ et ne coïncidant avec aucune division de la circonférence, tout chemin L , aboutissant à ce point et situé à l'intérieur de G , est nécessairement tangent au rayon OM .

Il en résulte que, si L_1 et L_2 sont deux chemins quelconques, situés à l'intérieur du $|z| < 1$ aboutissant à M et faisant en ce point entre eux un angle supérieur à zéro, alors l'un au moins de ces chemins traverse nécessairement une infinité de parties de Z , situées à l'intérieur du $|z| < 1$.

18. Soit $z = \varphi(u)$ la fonction donnant la représentation conforme du domaine étoilé G sur le cercle $|u| < 1$.

Considérons les propriétés de $\varphi(u)$. Il est évident que $\varphi(u)$ est continue, si $|u| \leq 1$. En utilisant les coordonnées polaires, nous avons

$$z = R e^{i\Phi}, \quad u = \rho e^{i\theta},$$

donc

$$R e^{i\Phi} = \varphi(\rho e^{i\theta}), \quad \text{Ln } \varphi(u) = \text{Ln } R + i\Phi$$

et

$$-i \text{Ln } \varphi(u) = \Phi - i \text{Ln } R.$$

Il est facile de voir que la fonction

$$A(\rho, \theta) = \Phi(\rho, \theta) - \theta$$

est une fonction harmonique, régulière à l'intérieur du cercle $|u| < 1$. Cette fonction est une fonction continue et à *variation bornée* sur $|u| = 1$, parce que Φ est toujours croissante avec θ . La fonction $A(\rho, \theta)$ peut être déterminée par une intégrale de Poisson, dont les valeurs limites ont une dérivée finie presque partout. Par suite, d'après le théorème

de M. Fatou ⁽¹⁾, $\frac{\partial A(\rho, \theta)}{\partial \theta}$ tend vers une limite finie et déterminée presque en chaque point de la périphérie du cercle, (ρ, θ) tendant vers ces points le long des chemins quelconques, non tangents à la périphérie.

Soit $B(\rho, \theta)$ une fonction harmonique conjuguée à $A(\rho, \theta)$. D'après le théorème démontré dans le travail ⁽²⁾, la fonction $\frac{\partial B}{\partial \theta}$, étant conjuguée à $\frac{\partial A}{\partial \theta}$, tend aussi vers une limite finie et déterminée presque en chaque point de la circonférence $|u| = 1$, (ρ, θ) tendant vers ces points le long des chemins quelconques, non tangents à la périphérie.

Il en résulte que la dérivée $\Omega'(u)$ d'une fonction analytique

$$\Omega(u) = A(\rho, \theta) + iB(\rho, \theta)$$

tend vers une limite finie et déterminée presque en chaque point de $|u| = 1$, u tendant vers ces points le long des chemins quelconques non tangents à la périphérie. Or

$$\Omega(u) = -i \operatorname{Ln} \varphi(u) + i \operatorname{Ln} u$$

ou, si l'on veut,

$$\Omega(u) = -i \operatorname{Ln} \frac{\varphi(u)}{u}$$

et par suite

$$\varphi(u) = u e^{i\Omega(u)}.$$

En dérivant cette fonction, nous avons

$$\varphi'(u) = e^{i\Omega(u)} + u i e^{i\Omega(u)} \cdot \Omega'(u);$$

d'où le théorème :

La dérivée $\varphi'(u)$ tend vers une limite finie et déterminée $\varphi'(u_0)$ presque en chaque point de $|u| = 1$, u tendant vers ces points u_0 le long des chemins quelconques non tangents à la périphérie.

Il est évident, d'après tout ce qui précède, que le *théorème* ci-dessus démontré est applicable à toute fonction $\varphi(u)$ donnant la représentation conforme d'un cercle $|u| < 1$ sur un domaine étoilé.

⁽¹⁾ FATOU, *loc. cit.*

⁽²⁾ J. PRIWALOFF, *loc. cit.*

Il est facile de voir que le nombre $\varphi'(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0} \varphi'(u)$ s'exprime ainsi

$$\varphi'(u_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + \Delta u) - \varphi(u_0)}{\Delta u},$$

le point $u_0 + \Delta u$ tendant vers u_0 le long d'un chemin quelconque tout agrégé à $|u| < 1$ et non tangent à $|u| = 1$.

19. Quel que soit un ensemble de points E, $\text{mes} E > 0$, situé sur $|u| = 1$, il existe certainement, d'après le théorème d'unicité (§ 14), un point u_0 de E tel que

$$\varphi'(u_0) \neq 0.$$

Soient λ et λ_1 deux chemins quelconques situés à l'intérieur du $|u| < 1$, aboutissant en u_0 et non tangents à $|u| = 1$. Ces chemins, d'après la fonction $z = \varphi(u)$, se transforment en L et L₁ appartenant à G et aboutissant au point $z_0 = \varphi(u_0)$ de sa frontière. Il est aisé de voir que *l'angle formé par λ et λ_1 sera égal à l'angle entre les L et L₁, c'est-à-dire si l'on fait la représentation conforme du $|u| < 1$ sur le domaine étoilé, il y a un conservatisme des angles sur les frontières, quand on néglige un ensemble de points de $|u| = 1$ de mesure nulle.*

20. La circonférence $|z| = 1$, étant une partie de Z, correspond à un ensemble parfait P, $\text{mes} P = 0$, situé sur $|u| = 1$, si l'on fait la représentation conforme du domaine G sur $|u| < 1$.

En effet, si cela n'était pas vrai, il existerait au moins un point M₀ de $|z| = 1$ et tel, que l'on pourrait tracer deux chemins tout agrégés à G, ne traversant aucun point de Z et dont l'angle au point M₀ d'intersection de ces chemins surpasserait zéro, ce qui est impossible (§ 17).

21. Soient $u = \Psi(z)$ la fonction donnant la représentation conforme du domaine étoilé G, construit au paragraphe 17, sur l'intérieur du cercle $\gamma(|u| \leq 1)$, et P un ensemble parfait, $\text{mes} P = 0$, situé sur la périphérie du cercle γ , correspondant à la circonférence $|z| = 1$. Il s'agit de construire une fonction $f(z)$, méromorphe à l'intérieur du cercle C ($|z| \leq 1$) et telle qu'après l'élimination de tous ses pôles intérieurs

à C à l'aide de courbes analytiques fermées $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; n'ayant entre elles et avec la périphérie de C de points communs, dans le domaine restant R , $|f(z)|$ tende uniformément vers l'infini, (z) tendant vers l'unité.

Prenons la fonction de M. Fatou (1) $F(u)$ holomorphe à l'intérieur de γ ; $\text{Reel } F(u)$ étant positif, tend uniformément vers l'infini, quand u tend vers un point quelconque de P , $F(u)$ est holomorphe en d'autres points de la périphérie de γ . La fonction $\Phi(z) = F[\psi(z)]$ est holomorphe dans le domaine G ; $\text{Reel } \Phi(z)$, étant positif, tend uniformément vers l'infini, z restant dans le domaine G et son module tendant vers l'unité.

Le long d'un segment du rayon, si on le considère comme double, la fonction $\Phi(z)$ prend une suite continue de valeurs, exception faite pour les extrémités de ce segment. En outre, les valeurs de $\Phi(z)$ à droite et à gauche de cette partie du rayon forment deux suites de valeurs holomorphes et différentes entre elles. Au bout du segment le plus rapproché de $z = 0$, ces deux suites holomorphes de valeurs se confondent. Quant à la valeur de $\Phi(z)$ au bout du segment de rayon se trouvant sur la périphérie de C , elle est égale à l'infini. Transformons cette fonction $\Phi(z)$.

Appelons les segments de rayons par « *aiguilles* ». Nous avons un ensemble dénombrable d'aiguilles. Mettons sur chaque aiguille un ensemble dénombrable de segments, que nous appellerons les « δ -coupures ». Toutes les δ -coupures forment un ensemble dénombrable et vérifient sur *chaque* aiguille les quatre conditions suivantes :

- 1° Elles sont sans points communs.
- 2° Leur point limite unique est l'extrémité de l'aiguille qui est placée sur la périphérie de C .
- 3° En désignant par $\delta_v^{(k)}$ la $v^{\text{ième}}$ coupure sur la $k^{\text{ième}}$ aiguille et par $M_v^{(k)}$ le maximum du module de $\Phi(z)$ sur les deux côtés de $\delta_v^{(k)}$, on a

$$\text{longueur } \delta_v^{(k)} < \frac{1}{(M_v^{(k)} + 1)(K!)^2(v!)^2}$$

Or cela est toujours exact, si l'on diminue convenablement la $\delta_v^{(k)}$, son centre étant fixé *a priori*.

(1) FATOU, *loc. cit.*

4° La première δ -coupure sur la $k^{\text{ième}}$ aiguille, $\delta_1^{(k)}$, ne contient pas l'extrémité de cette aiguille.

Considérons la série

$$(1) \quad \sum_{k, \nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\nu^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x},$$

où l'intégrale est prise le long de la δ -coupure dans le sens positif relativement au domaine G.

Cette intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\nu^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x}$, prise le long des deux côtés de la δ -coupure, est une fonction holomorphe partout, excepté la coupure elle-même.

Si la variable x se trouve à une distance plus grande que $\frac{1}{k! \nu!}$ de la $\delta_\nu^{(k)}$ -coupure, on a

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\nu^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} \right| < 2 \frac{M_\nu^{(k)}}{2\pi} \frac{1}{k! \nu!} \frac{1}{M_\nu^{(k)} + 1} < \frac{1}{k! \nu!}.$$

Il s'en suit que, si le point x se trouve dans le domaine G_1 , entièrement agrégé à G, ainsi que sa frontière, la série (1) converge uniformément et absolument. Par suite, la somme de la série (1), désignons-la par $S(x)$, est une fonction holomorphe dans le domaine G. Étudions la structure de la différence $\Phi(x) - S(x)$ sur la δ -coupure, cette différence étant holomorphe dans G. Envisageons pour cela une δ -coupure quelconque, $\delta_\nu^{(k)}$ par exemple. Soient x_1 et x_2 deux points variables assez voisins d'un point ξ de notre coupure $\delta_\nu^{(k)}$, situés l'un à droite et l'autre à gauche et tendant vers ξ . Comme nous avons déjà remarqué plus haut, $\Phi(x_1)$ et $\Phi(x_2)$ forment deux suites holomorphes de valeurs de deux côtés de $\delta_\nu^{(k)}$ -coupure. D'autre part, on a

$$S(x) = \sum_{k, \nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\nu^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\nu^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} + \Sigma'(x).$$

Il est évident que $\Sigma'(x)$, qui est une fonction holomorphe dans G, reste holomorphe sur $\delta_\nu^{(k)}$ -coupure et prend, par conséquent, les mêmes

valeurs de deux de ses côtés $\Sigma'(x_1) = \Sigma'(x_2)$. Ainsi on a

$$S(x_1) - S(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} \right) = \int_{x_2}^{x_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Phi_1(z) - \Phi_2(z)}{z-x} dz \right),$$

où par $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ nous désignons respectivement les valeurs de $\Phi(z)$ sur les côtés de x_1 et de x_2 , par α et β , les extrémités de $\delta_v^{(k)}$. Nous trouvons facilement de là

$$S(x_1) - S(x_2) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i [\Phi_1(\xi) - \Phi_2(\xi)] = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

De cette manière, la fonction $\Phi(x) - S(x)$ prend sur $\delta_v^{(k)}$ -coupure les mêmes valeurs de deux côtés, c'est-à-dire cette différence est une fonction holomorphe et uniforme sur $\delta_v^{(k)}$, et, comme $\delta_v^{(k)}$ était choisi arbitrairement sur toutes les δ -coupures, ajoutons aux quatre conditions mentionnées encore une condition.

5° En désignant par $\rho_v^{(k)}$ la distance du centre de la coupure $\delta_v^{(k)}$ et de la périphérie du cercle C, nous avons

$$\text{longueur } \delta_v^{(k)} < \frac{\rho_v^{(k)}}{(M_v^{(k)} + 1)k!},$$

ce qui se réalise toujours en diminuant $\delta_v^{(k)}$, son centre étant toujours fixe.

En utilisant cette condition, nous trouvons pour l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x}$$

sur la périphérie de C l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} \right| < 2 \frac{1}{2\pi} \frac{M_v^{(k)} \cdot \rho_v^{(k)}}{(M_v^{(k)} + 1)k! \nu! \rho_{v\pm}^{(k)}} < \frac{1}{k! \nu!}$$

Ainsi nous avons sur la périphérie de C

$$|S(x)| < \sum_{k, \nu}^{\infty} \frac{1}{k! \nu!}.$$

Ainsi la différence $\Phi(x) - S(x)$ est égale à l'infini, quand la variable x

se trouve sur la périphérie de C. Mais on ne peut pas en conclure de suite à la convergence uniforme de cette différence vers l'infini, si x tend vers la périphérie de C, même s'il reste à l'intérieur de G. On doit prolonger l'analyse. On doit imposer, pour cela, une nouvelle restriction sur les δ -coupures.

6° Désignant par $\zeta_v^{(k)}$ le centre de la coupure $\delta_v^{(k)}$ et par $d_v^{(k)}$ la distance du point $\zeta_v^{(k)}$ du centre le plus voisin de δ -coupures, on a l'inégalité

$$\text{longueur } \delta_v^{(k)} < \frac{\rho_v^{(k)}}{(M_v^{(k)} + 1)k!v!} \frac{d_v^{(k)}}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

ce qui se réalise d'une manière analogue aux conditions 3° et 5°.

Traçant du point $\zeta_v^{(k)}$, comme centre, un cercle du rayon $\frac{d_v^{(k)}}{3}$, on voit que la $\delta_v^{(k)}$ -coupure est placée tout entière à l'intérieur de ce cercle. Le point x étant placé en dehors de l'intérieur du cercle construit, on a alors

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2M_v^{(k)} \frac{3}{d_v^{(k)}} \cdot \frac{\rho_v^{(k)}}{(M_v^{(k)} + 1)v!k!} \frac{d_v^{(k)}}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{k!v!}.$$

De cette manière, si le point x est situé en dehors de tous les cercles construits ou sur leurs périphéries, on a l'inégalité

$$|S(x)| < \sum_{k,v}^1, \infty \frac{1}{k!v!} < e^2 < 9,$$

Si, au contraire, le point x est situé à l'intérieur du cercle construit pour la coupure $\delta_v^{(k)}$,

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} + \Sigma'(x),$$

où

$$|\Sigma'(x)| < 9.$$

La variable x restant à l'intérieur de ce cercle, étudions l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x}$. On a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Phi_1(z) - \Phi_2(z)}{z-x} dz.$$

Désignons, pour abrégier l'écriture, par $\bar{\Phi}(z)$ la différence

$$\Phi_1(z) - \Phi_2(z) : \bar{\Phi}(z) = \Phi_1(z) - \Phi_2(z),$$

et en appliquant l'intégration par parties, nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \bar{\Phi}(z) \text{Ln}(z-x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Ln}(z-x) \cdot \bar{\Phi}'(z) dz,$$

où la fonction $\bar{\Phi}(z)$ est une fonction holomorphe le long de $\delta_v^{(k)}$ -coupure. Quant à la dernière intégrale, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Ln}(z-x) \bar{\Phi}'(z) dz \right| &< \frac{1}{2\pi} \cdot \max. |\bar{\Phi}'(z)| \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |\text{Ln}(z-x)| |dz| \\ &< \frac{1}{2\pi} \max. |\bar{\Phi}'(z)| \cdot 2 \int_0^{\frac{\delta_v^{(k)}}{2}} \text{Ln} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\pi} \max. |\bar{\Phi}'(z)| \cdot \frac{\delta_v^{(k)}}{2} \left(1 + \text{Ln} \frac{2}{\delta_v^{(k)}} \right). \end{aligned}$$

Cette inégalité nous montre que le module de cette intégrale est aussi petit que l'on veut, si la longueur de $\delta_v^{(k)}$ -coupure l'est aussi. D'autre part la partie tout intégrée

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \bar{\Phi}(z) \text{Ln}(z-x) = \frac{1}{2\pi i} \bar{\Phi}(\alpha) \text{Ln} \frac{\beta-x}{\alpha-x} + \frac{1}{2\pi i} [\bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha)] \text{Ln}(\beta-x).$$

Soit x un point d'une perpendiculaire à $\delta_v^{(k)}$ -coupure passant par le point $\zeta_v^{(k)}$, situé à l'intérieur du cercle. Nous avons

$$\left| \frac{1}{2\pi i} [\bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha)] \right| |\text{Ln}(\beta-x)| < \frac{1}{\pi} |\bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha)| \left| \text{Ln} \left| \frac{\beta-x}{2} \right| \right|.$$

Or, cette expression tend vers zéro, avec la distance entre α et β . D'autre part, l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \bar{\Phi}(\alpha) \text{Ln} \frac{\beta-x}{\alpha-x}$$

est égale à $\frac{\theta}{2\pi} \bar{\Phi}(\alpha)$, où θ est l'angle $\alpha x \beta$.

$\bar{\Phi}(\alpha)$ est, par définition, la différence de deux valeurs de la fonction $\Phi(z)$ au point α . La fonction $\Phi(z)$ étant égale à $F[\psi(z)]$, il en résulte que $\bar{\Phi}(\alpha)$ est la différence de deux valeurs de la fonction $F(u)$

de M. Fatou en deux points de la circonférence $|u| = 1$, correspondant au point double α . Cette valeur $\overline{\Phi}(\alpha)$ est un nombre imaginaire Ni , parce que nous pouvons toujours supposer que la partie réelle de $F(u)$ a les mêmes valeurs aux points correspondants. Résumons maintenant tout ce que nous avons démontré à l'égard de la fonction $S(x)$, Cette fonction étant égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x} + \Sigma'(x)$$

vérifie la condition $|S(x)| < g$, si x n'est pas situé à l'intérieur des cercles construits pour $\delta_v^{(k)}$ -coupures. Si x est à l'intérieur du cercle construit pour $\delta_v^{(k)}$ -coupures, $|\Sigma'(x)|$ est nécessairement $< g$. Enfin, à l'intérieur du cercle construit pour $\delta_v^{(k)}$ -coupure et au voisinage d'une perpendiculaire passant par le centre de $\delta_v^{(k)}$ -coupure, la partie réelle de $\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_v^{(k)}} \frac{\Phi(z) dz}{z-x}$ est arbitrairement petite, si la longueur de $\delta_v^{(k)}$ l'est aussi.

Donc la fonction

$$\Omega(x) = \Phi(x) - S(x)$$

est holomorphe à l'intérieur de G , en dehors des cercles construits pour les $\delta_v^{(k)}$ -coupures, tend uniformément vers l'infini, quand $|x| \rightarrow 1$.

$\Omega(x)$ est de plus holomorphe et uniforme sur les δ -coupures. Nous arrivons ainsi à la construction dans le cercle $|x| < 1$ d'un système dénombrable de contours analytiques et fermés $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$, tels qu'en dehors de ces contours la fonction $\Omega(x)$ est holomorphe et tend uniformément vers l'infini, quand $|x| \rightarrow 1$.

Nous pouvons supposer $|\Omega(x)| > 0$, quand x se trouve en dehors de ces contours, parce que la fonction $\Omega(x)$ reste holomorphe sur les contours eux-mêmes. Envisageons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x}$$

prise le long de γ_m dans le sens positif relativement au domaine Q , qui nous reste après l'élimination de domaines fermés limités par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$. Cette intégrale est une fonction holomorphe en dehors de γ_m , égale à zéro pour x à l'infini.

La différence $\Omega(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x}$ est évidemment une fonction holomorphe dans Q. Montrons que cette différence reste holomorphe sur γ_m et à son intérieur. En effet, prenons un contour γ'_m , contenant à son intérieur le contour γ_m plus grand que lui et tel qu'il se trouve en dehors de tous les contours γ_n , $n \neq m$.

On a l'égalité

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x},$$

où x se trouve entre γ_m et γ'_m .

Cette égalité montre l'holomorphisme de la différence considérée, égale à $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x}$, à l'intérieur du γ_m et sur le contour.

Prenons un contour γ''_m , moindre que γ_m et tel que la couronne $\gamma_m \gamma''_m$ et sa frontière ne contiennent pas de points singuliers de $\Omega(x)$.

Alors on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x}.$$

Choisissons, par la méthode de M. Rungé, une fraction rationnelle $R_m(x)$, de manière qu'on ait sur γ_m et en dehors de γ_m ($|x| < 1$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x} - R_m(x) \right| < \frac{1}{m!}.$$

Désignons la différence $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_m} \frac{\Omega(z) dz}{z-x} - R_m(x)$ par $\theta_m(x)$ et posons

$$f(x) = \Omega(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(x).$$

C'est une fonction holomorphe dans le domaine Q et sur tous les contours γ_m . Nous avons de plus

$$|f(x)| \geq |\Omega(x)| - \sum_1^{\infty} |\theta_m(x)| > |\Omega(x)| - \sum_1^{\infty} \frac{1}{m!} > |\Omega(x)| - 3,$$

c'est-à-dire $|f(x)|$ tend uniformément vers l'infini, quand $|x|$ tend

vers l'unité, tout en restant dans le domaine Q. D'autre part, nous avons

$$f(x) = \Omega(x) - \theta_m(x) - \Sigma' \theta_k(x)$$

ou

$$f(x) = \Omega(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z - x} + R_m(x) - \Sigma'(x),$$

où $\Sigma'(x)$ est holomorphe à l'intérieur et sur γ_m . Comme, d'après les démonstrations précédentes, la différence

$$\Omega(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\Omega(z) dz}{z - x}$$

est une fonction holomorphe à l'intérieur et sur γ_m , et $R_m(x)$ a un nombre limité de pôles simples à l'intérieur de γ_m , la fonction $f(x)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|x| < 1$, ayant des pôles simples à l'intérieur des γ_m .

22. Le problème posé dans le paragraphe précédent est donc résolu. On peut prendre les contours $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$, entourant les restes des aiguilles, aussi voisins des aiguilles que l'on veut. Pour cela il faut prendre les δ -coupures suffisamment petites. D'où il résulte que l'on peut construire deux courbes Z et Z', n'ayant aucune aiguille commune, et deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$, pour lesquelles les domaines fermés limités par des contours $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$ n'ont pas de points communs.

23. En posant $f_1(z) = \frac{1}{f(z)}$ nous aurons une fonction $f_1(z)$, méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro, quand z tend vers $|z| = 1$, tout en restant dans le domaine Q.

24. Le but de ce paragraphe est de résoudre le problème, posé à la fin du Chapitre I, c'est-à-dire de construire une fonction analytique $\omega(z)$, continue et uniforme dans le cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro, z tendant vers la périphérie $|z| = 1$.

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions, méromorphes à l'intérieur

du cercle $|z| < 1$, déjà construites dans le paragraphe 22, ayant les propriétés :

1° Tous les pôles de la fonction $f(z)$ sont situés à l'intérieur des contours $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$

2° $f_1(z)$ tend uniformément vers l'infini, z tendant vers la périphérie tout en restant en dehors de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ [c'est-à-dire z est toujours dans Q (1)].

Les propriétés de la fonction $f_2(z)$ sont analogues à celles de $f_1(z)$, c'est-à-dire tous ses pôles sont situés à l'intérieur des contours $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$ et $f_2(z)$ tend uniformément vers l'infini, quand z tend vers la périphérie $|z| = 1$ tout en restant dans Q' . Q' étant un ensemble connexe, extérieur à tous les domaines fermés limités par des contours $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$. Quels que soient n et m , les contours γ_n et γ'_m n'ont jamais de points communs et sont deux à deux extérieurs.

Considérons dans le plan w un ensemble parfait E , partout discontinu, $\text{mes} E > 0$ et une fonction de M. Denjoy

$$D(w) = \int \int_E \frac{d\sigma}{u - w}.$$

On sait que cette fonction est une fonction analytique, holomorphe en dehors de E et continue sur tout le plan, égale à zéro à l'infini. Pour fixer les idées nous supposons que l'ensemble E est situé à l'intérieur du domaine, limité par le contour K . Soit maintenant

$$\omega(z) = D[f_1(z)] D[f_2(z)].$$

Il est évident qu'en tout point z , $|z| < 1$, la fonction $\omega(z)$ est déterminée et $|\omega(z)| < M^2$ quand $|z| < 1$ si $|D(w)| < M$. Nous pouvons toujours supposer, que pour tout point de Q : $|f_1(z)| > m$, et pour tout point de Q' : $|f_2(z)| > m$, où $m, m > 0$, est une constante, parce que nous pouvons enfermer tous les zéros de ces fonctions à l'intérieur de contours correspondants. Si K est situé à l'intérieur du cercle de rayon m , la fonction $\omega(z)$ est holomorphe en tout

(1) Q étant un ensemble connexe, extérieur à tous les domaines fermés, limités par des contours $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$

point z , $|z| < 1$, extérieur à la fois à γ_i et γ'_k , donc tous ses points singuliers sont situés à l'intérieur de ces contours et forment un ensemble parfait partout discontinu. Nous allons démontrer que $|\omega(z)|$ tend uniformément vers zéro, quand $|z|$ tend vers l'unité. En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite de points

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, |z_n| \rightarrow 1,$$

telle que

$$|\omega(z_n)| \rightarrow A, \quad A > 0.$$

Or, cela est impossible, parce que les contours γ et γ' sont deux à deux extérieurs et, par suite, si l'un des facteurs $D[f_1(z)]$ ou $D[f_2(z)]$ est moindre que M en son module, l'autre tend nécessairement vers zéro.

Il est évident, de plus, que $\omega(z)$ est une fonction continue, si $|z| < 1$.

25. Nous allons démontrer, dans tout ce qui suit, que l'on peut changer la fonction $\omega(z)$, construite dans le paragraphe précédent, de telle manière, que sa *partie réelle* soit *positive* quand $|z| < 1$ (en supposant toujours que toutes les autres propriétés sont conservées). A cet effet, considérons les propriétés des fonctions de M. Denjoy.

26. Soit

$$u = D(\zeta) = \int \int_E \frac{d\sigma}{\zeta' - \zeta},$$

où E est un ensemble parfait, partout discontinu, $\text{mes} E > 0$, situé à l'intérieur du domaine limité par K .

Quand la variable ζ varie dans tout le plan, la variable u reste toujours à l'intérieur d'un certain cercle, dont le centre est au point $u = 0$, parce que la fonction $D(\zeta)$ est bornée. La fonction $D(\zeta)$ étant partout continue, l'ensemble de ses valeurs est un continu, borné dans le plan de la variable u . La frontière extérieure de ce continu est une courbe *jordanienne* fermée J sans points multiples. Le point $u = 0$ est situé à l'intérieur du domaine, limité par J . Soit $v = \varphi(u)$ une fonction donnant la représentation conforme du domaine limité par J sur l'intérieur du cercle $|v| < 1$. On sait que, dans ce

cas, il existe une correspondance biunivoque entre les points de J et $|\varphi| = 1$. Nous pouvons toujours supposer que $\varphi(0) = 0$. La fonction $D(\zeta)$ étant continue, donc quel que soit un point de J il existe certainement au moins une valeur de ζ telle que $D(\zeta)$ est l'affixe de ce point. Il est évident que ce point ζ appartient nécessairement à E . Cela étant, considérons la fonction

$$\omega = \varphi[D(\zeta)] = \Phi(\zeta).$$

Il est aisé de voir, que la fonction analytique, uniforme $\Phi(\zeta)$ est partout continue et holomorphe en chaque point ζ , n'appartenant pas à E . L'ensemble de toutes ses valeurs est un continu sur le plan de ω , dont la frontière extérieure est une circonférence de centre $\omega = 0$ et de rayon 1. Il est à remarquer que, ω est à l'intérieur du cercle $|\omega| < 1$ chaque fois, quand ζ est en dehors de E , et que ω est ou bien à l'intérieur du cercle $|\omega| < 1$, ou bien sur la circonférence $|\omega| = 1$ dans le cas contraire, et qu'à tout point de $|\omega| = 1$ correspond certainement un point de E . Il en résulte que l'équation

$$\Phi(\zeta) = -1$$

a nécessairement des racines, et que ces racines forment un ensemble fermé \mathcal{E} , $\mathcal{E} \subset E$. Soit \mathcal{L} un cercle, contenant tous les points de \mathcal{E} , dont la circonférence a nécessairement au moins un point ξ de \mathcal{E} . Soit \mathcal{L}_1 un autre cercle symétrique à \mathcal{L} par rapport à la tangente au point ξ . Il est évident que, pour construire ce cercle \mathcal{L}_1 , il suffit de tourner le plan de ζ de 180° autour du point ξ , c'est-à-dire faire le changement

$$\zeta_1 = 2\xi - \zeta.$$

Soit \mathcal{E}_1 le transformé de \mathcal{E} . La fonction

$$\Phi_1(\zeta) = \Phi(2\xi - \zeta)$$

est partout continue et holomorphe en dehors de l'ensemble E_1 (E_1 est le transformé de E par la rotation considérée).

En chaque point de l'ensemble \mathcal{E}_1 : $\Phi_1(\zeta) = -1$.

Les ensembles \mathcal{E} et \mathcal{E}_1 ont seulement un point commun ξ . Considérons maintenant la fonction

$$S(\zeta) = \Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta).$$

Il est évident que $|S(\zeta)| \leq 2$ et l'équation $S(\zeta) = -2$ a seulement une racine $\zeta = \xi$.

Donc $S(\xi) = -2$, $\text{Reel}S(\zeta) > -2$, si $\zeta \neq \xi$.

La fonction $S(\zeta)$ est partout continue, holomorphe en dehors de l'ensemble $E + E$, et égale à zéro à l'infini.

Considérons enfin la fonction

$$T(\zeta) = S(\zeta) + 2.$$

Les propriétés de $T(\zeta)$:

- 1° $T(\zeta)$ est une fonction analytique uniforme et partout continue ;
- 2° $T(\zeta)$ est holomorphe en chaque point, n'appartenant pas à l'ensemble parfait, partout discontinu ;
- 3° $\text{Reel}T(\zeta) \geq 0$;
- 4° $\text{Reel}T(\zeta) = 0$ est vérifié seulement dans le cas où $\zeta = \xi$. Dans ce cas, $T(\zeta) = 0$.

27. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ (construite dans le paragraphe 21) dont tous les pôles sont situés à l'intérieur des contours fermés $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ et tendant uniformément vers l'infini, z tendant vers la périphérie du cercle $|z| = 1$ tout en restant en dehors de $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Considérons la fonction

$$U(z) = T\left(\xi + \frac{1}{f(z)}\right) \quad \text{où } |z| < 1.$$

Si z n'est pas un pôle pour $f(z)$, la fonction $U(z)$ a une valeur déterminée différente de zéro. Si z est un pôle pour $f(z)$, la fonction $U(z)$ est égale à zéro. Donc il existe à l'intérieur de $|z| < 1$ seulement un ensemble dénombrable de points de z , dans lesquels $U(z) = 0$, et tous les points limites de cet ensemble appartiennent nécessairement à $|z| = 1$.

Ces zéros sont les points singuliers pour la fonction $U(z)$. Il est aisé de voir que la fonction $U(z)$ est continue et uniformément bornée à l'intérieur du cercle $|z| < 1$; l'ensemble de ses points singuliers est un ensemble parfait situé dans le cercle $|z| \leq 1$ et ayant la circonférence $|z| = 1$ comme ensemble limite. De plus, si z est à l'intérieur du

domaine Q (en dehors des γ_i) et $|z| \rightarrow 1$, le module $U(z)$ tend uniformément vers zéro. Enfin $\operatorname{Re} U(z) \geq 0$.

28. Soient maintenant $f_2(z)$ une fonction méromorphe tout analogue à $f(z)$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$ une suite de contours correspondants. Nous supposons seulement que les contours γ'_i et γ_j sont deux à deux extérieurs.

Désignons respectivement par Q et Q' les ensembles connexes formés par les points de $|z| < 1$ extérieurs aux contours $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ ou aux contours $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$. Soient

$$U_1(z) = T\left(\xi + \frac{1}{f_1(z)}\right) \quad \text{et} \quad U_2(z) = T\left(\xi + \frac{1}{f_2(z)}\right).$$

Nous avons démontré que ces fonctions sont continues et uniformément bornées à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendent uniformément vers zéro, z tendant vers la périphérie $|z| = 1$ tout en restant dans Q pour la première fonction, et dans Q' pour la seconde. La première de ces fonctions a un ensemble dénombrable de zéros singuliers à l'intérieur des contours $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ et la seconde à l'intérieur des $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$. Le produit

$$\pi(z) = U_1(z) U_2(z)$$

est une fonction analytique uniforme, continue dans le cercle $|z| < 1$ et tendant uniformément vers zéro, z tendant vers la périphérie $|z| = 1$. Tous les zéros de cette fonction forment un ensemble dénombrable et sont situés à l'intérieur des contours γ et γ' .

La fonction

$$R(z) = \frac{1}{\pi(z)}$$

est égale à l'infini dans un ensemble dénombrable de points z_i , $|z_i| < 1$. Cet ensemble n'a aucun point limite à l'intérieur du cercle, mais chaque point de la circonférence $|z| = 1$ est son point limite. L'ensemble des points singuliers de la fonction $R(z)$ est un ensemble parfait, partout discontinu à l'intérieur du cercle, dont la ligne limite est la circonférence $|z| = 1$. Il est essentiel à remarquer que $R(z)$ n'est jamais nulle,

si $|\varepsilon| < 1$. Enfin, $R(\varepsilon)$ tend uniformément vers l'infini quand $|\varepsilon|$ tend vers l'unité.

29. Cela étant, considérons la fonction

$$V(\varepsilon) = T\left(\xi + \frac{1}{R(\varepsilon)}\right);$$

$V(\varepsilon)$ est une fonction analytique uniforme, continue dans le cercle $|\varepsilon| < 1$ et telle que $|V(\varepsilon)|$ tend uniformément vers zéro quand $|\varepsilon|$ tend vers l'unité. L'équation $V(\varepsilon) = 0$ a, à l'intérieur du cercle $|\varepsilon| < 1$, une infinité dénombrable de racines ε_i , n'ayant aucun point limite à l'intérieur de $|\varepsilon| < 1$. Chacun de ces points est un point singulier pour la fonction $V(\varepsilon)$. En chaque point ε n'appartenant pas à cet ensemble dénombrable ε_i , on a : $\text{Re} V(\varepsilon) > 0$, où $|\varepsilon| < 1$.

Considérons la rotation du cercle $|\varepsilon| < 1$ autour du centre $\varepsilon = 0$ par un angle θ , de la manière qu'aucun des points transformés

$$\varepsilon_1 e^{i\theta}, \quad \varepsilon_2 e^{i\theta}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n e^{i\theta}, \quad \dots$$

ne coïncide jamais avec des points

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_n, \quad \dots$$

Il faut remarquer, que nous supposons dans cette transformation le point $\varepsilon = 0$ n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable ε_i ; dans le cas contraire, nous faisons d'abord la représentation conforme du cercle $|\varepsilon| < 1$ en lui-même, de telle manière que le centre $\varepsilon = 0$ se transforme en un point, où $V(\varepsilon)$ est différente de zéro. D'après les transformations déjà indiquées, considérons la fonction

$$V_1(\varepsilon) = V(\varepsilon e^{-i\theta}).$$

Cette fonction est continue dans le cercle $|\varepsilon| < 1$, tend uniformément vers zéro, $|\varepsilon|$ tendant vers l'unité, et la partie réelle de $V_1(\varepsilon)$ est positive pour tout point ε , $|\varepsilon| < 1$, n'appartenant pas à l'ensemble $\varepsilon_n e^{i\theta}$, dans lequel $V_1(\varepsilon) = 0$.

La somme

$$\bar{\omega}(\varepsilon) = V(\varepsilon) + V_1(\varepsilon)$$

est une fonction analytique uniforme, continue dans le cercle $|\varepsilon| < 1$,

avec un ensemble parfait des points singuliers, et tendant uniformément vers zéro, $|z|$ tendant vers l'unité. De plus, pour tout point z , $|z| < 1$, Reel $\bar{\omega}(z) > 0$.

30. En posant

$$\bar{\Omega}(z) = \frac{1}{\bar{\omega}(z)},$$

nous aurons un exemple d'une fonction analytique continue à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et telle que $|\bar{\Omega}(z)|$ tend uniformément vers l'infini, $|z|$ tendant vers l'unité. De plus, pour tout point z , $|z| < 1$, Reel $\bar{\Omega}(z) > 0$. L'ensemble de ses points singuliers est un ensemble parfait, situé dans le cercle $|z| \leq 1$, et discontinu partout dans $|z| < 1$.

31. On peut transformer la fonction $\bar{\omega}(z)$, construite dans le paragraphe 29, de manière que le rapport de la partie imaginaire à la réelle de la fonction transformée $\bar{\omega}(z)$ tende uniformément vers zéro, $|z|$ tendant vers l'unité (bien entendu, que les autres propriétés de la fonction $\bar{\omega}(z)$ restent les mêmes après la transformation adoptée).

En effet, soit $u(x, y)$ la partie réelle de $\bar{\omega}(z)$. Il est évident, d'après la construction de $\bar{\omega}(z)$, que la fonction harmonique $u(x, y)$, $u(x, y) > 0$, est continue dans le cercle $|z| < 1$ et tend uniformément vers zéro, $|z|$ tendant vers l'unité. L'ensemble parfait de ses points singuliers, étant situé dans le cercle $|z| \leq 1$, est partout discontinu à l'intérieur de ce cercle. Soit $\omega' = \varphi(\omega)$ une fonction donnant la représentation conforme du domaine simple, formé par les points $\omega = \bar{\omega}(z)$, sur un domaine quelconque de ω' situé à droite de l'axe imaginaire symétrique par rapport à l'axe réel et limité par une courbe, admettant le contact d'ordre infini au point $\omega' = 0$ avec l'axe réel. On peut prendre comme exemple de la fonction cherchée la fonction

$$\bar{\omega}(z) = \varphi[\omega(z)].$$

32. En posant

$$\bar{\Omega}(z) = \frac{1}{\bar{\omega}(z)} = \frac{1}{P+iQ} = \frac{P-iQ}{P^2+Q^2},$$

considérons la partie réelle de $\bar{\Omega}(z)$:

$$U(x, y) = \frac{P(x, y)}{P^2 + Q^2} = \frac{1}{P + \frac{Q^2}{P}}.$$

Il est évident que $U(x, y)$ a les propriétés :

- 1° U est uniforme, harmonique et continue à l'intérieur du cercle $|z| < 1$;
- 2° U est positive, si $|z| < 1$;
- 3° U tend uniformément vers l'infini, $|z|$ tendant vers l'unité ;
- 4° L'ensemble parfait de ses points singuliers est situé dans le cercle $|z| \leq 1$, partout discontinu à l'intérieur de ce cercle.

CHAPITRE IV.

UNICITÉ DE FONCTIONS ANALYTIQUES. CAS DES CHEMINS RADIAUX.

33. Nous allons démontrer, dans ce paragraphe, qu'il existe une fonction analytique $\omega(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers l'infini en chaque point d'un ensemble E , mes $E = 2\pi$ de la circonférence $|z| = 1$, quand z tend vers des points de E le long des rayons.

Soit Z une courbe, construite dans le paragraphe 17, et

$$U = \varphi(z)$$

une fonction donnant la représentation conforme du domaine G , limité par la courbe Z , sur l'intérieur du cercle $|u| < 1$. D'après cette transformation, les points $|z| = 1$ correspondent aux points $|u| = 1$, appartenant à un certain ensemble parfait P , mes $P = 0$ (§ 20).

Considérons maintenant une fonction de M. Fatou $F(u)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|u| < 1$, dont la partie réelle, étant positive, tend uniformément vers l'infini, u tendant vers des points de P par des chemins quelconques. La fonction transformée

$$\Phi(z) = F[\varphi(z)]$$

est holomorphe à l'intérieur de G et sa partie réelle, restant positive, tend uniformément vers l'infini, z tendant vers la périphérie $|z| = 1$ par des

chemins quelconques, traversant peut-être les aiguilles de la courbe Z . Ces aiguilles sont les coupures pour la fonction $\Phi(z)$. Soit $|z| = R_m$

$$R_1 < R_2 < \dots \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 1 \right)$$

l'ensemble des circonférences tout agrégées au cercle $|z| < 1$. Nous supposons que $R_1 > \frac{1}{2}$ et que les extrémités des aiguilles n'appartiennent pas à ces circonférences. Il est évident que toutes les aiguilles sont partagées par des circonférences en une infinité dénombrable de parties. Soit

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$$

l'ensemble de ces parties. Chacune de ces parties δ_n a deux extrémités : nous désignerons par a_n celle dont la distance de la périphérie $|z| = 1$ est la plus grande. Soient C'_n le cercle de rayon ρ'_n dont le centre est a_n , et C''_n le cercle de rayon ρ''_n dont le centre est au point d'intersection de cette aiguille avec la circonférence $|z| = 1$. Soit λ_n le contour convexe formé : 1° par la partie de C'_n ; 2° par les deux tangentes communes à C'_n et à C''_n prolongées jusqu'aux points d'intersection avec $|z| = 1$; et 3° par la partie de la circonférence $|z| = 1$ tout agrégée au cercle C''_n . Les nombres ρ'_n et ρ''_n étant jusqu'ici arbitraires, nous les choisissons de telle manière, que chaque contour λ_n soit tout agrégé aux domaines limités par les contours précédents et contienne tous les suivants. Nous supposons, en outre, que les séries $\sum_1^{\infty} \rho'_n$ et $\sum_1^{\infty} \rho''_n$ sont convergentes. Considérons la fonction

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

en supposant que δ_n a deux côtés. Cette fonction est holomorphe en dehors de δ_n et égale à zéro à l'infini. Soit $p_n(z)$ un polynôme tel, que pour tout point z , agrégé à $|z| < 1$ et extérieur au domaine, limité par λ_n ,

$$|K_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{n!}.$$

D'après la construction faite, la différence

$$\Phi(z) - K_n(z)$$

est une fonction holomorphe à l'intérieur de G et sur le segment δ_n . Or, la fonction

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n(z) - p_n(z)\}$$

est holomorphe dans G , donc la fonction

$$\omega(z) = \Phi(z) - L(z)$$

l'est aussi. Cette fonction $\omega(z)$, étant holomorphe dans G , l'est aussi sur toutes les aiguilles de Z et, par suite, elle est holomorphe en chaque point z , $|z| < 1$. Il nous reste à démontrer que $\omega(z)$ vérifie les conditions cherchées. En effet, les séries $\Sigma \rho'_n$ et $\Sigma \rho''_n$ étant convergentes, il existe sur la circonférence $|z| = 1$ un ensemble E de la première catégorie, $\text{mes} E = 2\pi$, et tel que, pour tout point a de cet ensemble, le rayon Oa traverse seulement un nombre fini des contours λ_n . Donc, si z est sur Oa , les modules de tous les termes de la série $L(z)$, à partir d'un certain terme, sont moindres que $\frac{1}{n!}$. Par conséquent, la fonction $L(z)$ est bornée sur Oa , d'où il résulte que $\text{Re} \omega(z)$ tend vers l'infini, quand z tend vers a le long du rayon Oa .

34. En posant

$$\Omega(z) = e^{-\omega(z)},$$

nous aurons *une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro, z tendant vers un point quelconque de E le long du rayon. Cet ensemble E de la circonférence $|z| = 1$ est de la première catégorie et de mesure 2π .*

35. Dans ce dernier exemple l'ensemble E était un ensemble de la première catégorie et de mesure 2π . La question se pose naturellement, *s'il existe une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro en chaque point de E (1) de la seconde catégorie, $\text{mes} E > 0$, z tendant vers ces points le long des rayons.*

La réponse est affirmative et voici l'exemple d'une telle fonction.

(1) Il est bien entendu que E est sur la circonférence $|z| = 1$.

Dans le paragraphe 34 nous avons construit une fonction analytique $\Omega(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro presque en chaque point de $|z| = 1$, z tendant vers la périphérie le long des rayons. Il est évident que l'on peut construire, par la même méthode, une fonction $\Omega_1(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ ainsi que sur la demi-circonférence, située au-dessous de l'axe Ox , qui tend vers zéro en chaque point de l'ensemble E_1 , situé sur la circonférence $|z| = 1$ au-dessus de l'axe Ox , $\text{mes} E_1 = \pi$ ⁽¹⁾.

D'autre part, soit $\Omega_2(z)$ une fonction holomorphe et bornée à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers zéro en chaque point d'un ensemble E_2 , de la seconde catégorie, $\text{mes} E_2 = 0$, situé sur la demi-circonférence au-dessous de l'axe Ox , z tendant vers ces points par des chemins quelconques (§ 11).

Il est aisé de voir que la fonction

$$\pi(z) = \Omega_1(z) \cdot \Omega_2(z),$$

est une fonction cherchée.

En effet, elle est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tend vers zéro aux points d'ensemble $\mathcal{E} = E_1 + E_2$ de la seconde catégorie, situé sur la circonférence $|z| = 1$, z tendant vers ces points le long des rayons.

La mesure de \mathcal{E} est égale à π .

36. Soit $\omega_1(z)$ une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers l'infini presque en chaque point de la demi-circonférence, située au-dessus de l'axe Ox , z tendant vers ces points le long des rayons (§ 33). Nous supposons que notre fonction $\omega_1(z)$ est holomorphe en chaque point de $|z| = 1$, situé au-dessous de Ox . D'autre part, soit $\omega_2(z)$ une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, la réelle partie de $\omega_2(z)$ étant plus grande que l'unité, et tendant uniformément vers l'infini en chaque point d'un ensemble E_1 , de la seconde catégorie, $\text{mes} E_1 = 0$, situé sur la demi-circonférence au-dessous de l'axe Ox , z tendant vers ces

⁽¹⁾ z tendant vers ces points toujours le long des rayons.

points par des chemins quelconques (§ 11). Considérons le produit

$$\sigma(z) = \omega_1(z), \omega_2(z).$$

Il est évident que $\sigma(z)$ est une *fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, et tendant vers l'infini en chaque point d'un certain ensemble, situé sur la périphérie $|z| = 1$, qui est de la seconde catégorie et dont la mesure est π (z tendant, bien entendu, suivant les rayons).*

37. Les ensembles E et \mathcal{E} , définis dans les exemples construits (§ 34 et 35), étaient ou bien réduits ⁽¹⁾ et de la première catégorie, ou bien de la seconde catégorie, mais alors il n'existait aucun arc de la circonférence, sur lequel cet ensemble était à la fois réduit et de la seconde catégorie. Nous allons démontrer que, *si l'ensemble E est à la fois réduit et de la seconde catégorie sur un certain arc de la circonférence, toute fonction analytique égale sur cet ensemble à zéro, ou à l'infini (dans le sens mentionné plus haut), est identiquement ou bien nulle, ou bien infinie.*

38. Nous allons démontrer, dans ce paragraphe, le théorème suivant :

Si E est un ensemble réduit de points de la seconde catégorie, situé sur un arc σ de la périphérie $|z| = 1$, et $f(z)$ une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, et tendant vers zéro en chaque point de E, z tendant vers ces points le long des rayons, alors cette fonction est identiquement nulle.

Supposons que le théorème n'est pas vrai et soit $f(z)$ une fonction vérifiant toutes les conditions du théorème. Posons

$$f_n(z) = f\left(\frac{n-1}{n}z\right).$$

La suite des fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

⁽¹⁾ Nous dirons que l'ensemble E est réduit sur l'intervalle, si toute sa portion a une mesure positive.

holomorphe dans le cercle $|z| \leq 1$ converge vers zéro en chaque point ζ de l'ensemble E .

Donc, si

$$n > n(\zeta), \quad |f_n(\zeta)| < \varepsilon,$$

[$n(\zeta)$ est un nombre naturel aussi petit que possible et tel que, pour tous les n surpassant ce nombre $|f_n(\zeta)| < \varepsilon$].

Désignons par E_k l'ensemble des points ζ , pour lesquels $n(\zeta) = k$. Nous aurons

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_k + \dots$$

Il est évident que $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots$

L'ensemble E étant de la seconde catégorie sur σ , il existe par suite un certain ensemble E_i , qui est de la seconde catégorie sur σ .

Donc, il existe un arc σ' , $\sigma' \subset \sigma$, sur lequel l'ensemble E_i est dense partout. D'après notre construction, les ensembles E_{i+1} , E_{i+2} , ... sont aussi denses partout sur σ' . Si $\text{mes}(\sigma' \cdot E_i) = 0$, il existe certainement un ensemble E_j ($j > i$) tel que, $\text{mes}(\sigma' \cdot E_j) > 0$ (dans le cas contraire, l'ensemble $\sigma' \cdot E$ serait de mesure nulle). Donc, il existe toujours un ensemble E_k partout dense sur σ' et dont la mesure sur cet arc est positive. Nous désignerons par M_k l'ensemble $\sigma' \cdot E_k$. D'après tout ce qui précède, l'ensemble M_k est partout dense et $\text{mes } M_k > 0$.

Si ζ appartient à M_k ,

$$|f_n(\zeta)| < \varepsilon \quad \text{pour } n > k.$$

Soit ε_1 un nombre positif plus grand que

$$|f_1(\zeta)|, |f_2(\zeta)|, \dots, |f_k(\zeta)|,$$

où $\zeta \in M_k$.

Désignons par c le plus grand des deux nombres ε_1 et ε . Il est évident que

$$|f_n(\zeta)| < c$$

pour tous les n et pour tous les $\zeta \in M_k$.

La fonction $f_n(z)$ étant continue sur δ' et l'ensemble de points M_k partout dense sur cet arc, on a

$$|f_n(x)| < c$$

pour tous les n et $x \in \sigma'$.

En utilisant le changement de variable $z = \frac{n-1}{n}x$, nous transformons l'arc σ' en un arc σ'_n , dont le rayon est $1 - \frac{1}{n}$. D'après cette transformation, nous avons

$$f(z) \equiv f_n(x).$$

Il en résulte que $|f(z)| < c$ pour tous les $z, z \subset \sigma'_n$.

Soient a et b les extrémités de σ' . Nous pouvons toujours supposer, sans aucune restriction, que ces points appartiennent à l'ensemble M_n . La fonction $f(z)$ est bornée sur les rayons Oa et Ob , parce que le long de ces rayons elle tend vers zéro. Donc, quel que soit n , la fonction $f(z)$ étant bornée sur le contour $Oa'_nb'_nO$ (où a'_n et b'_n sont les extrémités de l'arc σ'_n) le sera aussi dans le secteur $OabO$. D'après le théorème de M. Fatou ⁽¹⁾, la fonction $f(z)$ tend vers une limite déterminée presque en chaque point de la périphérie de ce secteur, z tendant vers ces points le long des chemins quelconques, non tangents à la périphérie. Soit K l'ensemble de ces points : $\text{mes} K = \sigma'$. Il est évident, d'après tout ce qui précède, que dans chaque point de l'ensemble (M_n, K) cette limite est égale à zéro. Or, $\text{mes}(M_n, K)$ étant positive, d'après le théorème déjà démontré (§ 14), $f(z)$ est égale à zéro identiquement, ce qui est impossible.

Remarque. — Il est évident que *le théorème est vrai*, si l'on suppose que *la fonction $f(z)$ est holomorphe seulement au voisinage d'un certain arc σ de la circonférence $|z| = 1$.*

39. Nous allons démontrer, dans ce paragraphe, que *toute fonction analytique $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et tendant vers l'infini en chaque point d'un ensemble E , réduit et de la seconde catégorie sur un certain arc σ de la circonférence $|z| = 1$, z tendant vers ces points le long des rayons, est égale à l'infini identiquement.* Supposons que le théorème n'est pas vrai. Soit $f(z)$ une fonction vérifiant les conditions du théorème. Désignons par E_i une portion de E , partout de la seconde catégorie, située sur σ' , $\sigma' \subset \sigma$. Il est évident que

(1) FATOU, *loc. cit.*

tout point de σ' est nécessairement un point limite pour les zéros de la fonction $f(z)$; sinon, il existerait au moins un arc σ_1 , $\sigma_1 \subset \sigma'$, et tel qu'au voisinage de σ_1 la fonction $f(z)$ n'aurait pas de zéros.

Donc la fonction

$$f_1(z) = \frac{1}{f(z)}$$

serait holomorphe au voisinage de cet arc. La fonction $f_1(z)$ tend vers zéro en chaque point de l'ensemble $\sigma_1 \cdot E_1$, z tendant vers ces points le long des rayons, donc elle est égale identiquement à zéro, d'après le théorème du paragraphe 38, parce que l'ensemble $\sigma_1 \cdot E_1$ est réduit et de la seconde catégorie sur σ_1 . Cela est impossible.

Soient $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ les modules des zéros de la fonction $f(z)$, $|z| = r_n$ les circonférences concentriques et $f_n(z)$ la suite des fonctions

$$f_n(z) = f(r_n z).$$

Cette suite de fonctions $f_n(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| \leq 1$, converge vers l'infini en chaque point ζ de l'ensemble E_1 , donc pour

$$n > n(\zeta), \quad |f_n(\zeta)| > C, \quad \text{où } C > 0$$

$[n(\zeta)$ est un nombre naturel, aussi petit que possible, et tel que pour tous les n surpassant ce nombre $|f_n(\zeta)| > C]$.

Soit E_1^k l'ensemble des points ζ , pour lesquels $n(\zeta) = k$; il est évident que

$$E_1 = E_1^1 + E_1^2 + \dots + E_1^k + \dots,$$

où $E_1^1 \subset E_1^2 \subset \dots$.

L'ensemble E_1 étant de la seconde catégorie sur σ' , il existe, par suite, un ensemble E_1^i qui l'est aussi. Donc, il existe un arc σ'' , $\sigma'' \subset \sigma'$, sur lequel l'ensemble E_1^i est partout dense.

(Les ensembles E_1^j , où $j > i$, sont aussi partout denses sur σ'' .) Si maintenant $\text{mes}(\sigma'' \cdot E_1^i) = 0$, il existe nécessairement un ensemble E_1^j ($j > i$) tel, que $\text{mes}(\sigma'' \cdot E_1^j) > 0$, parce que, dans le cas contraire, la mesure de l'ensemble E_1 serait nulle sur σ'' . Donc il existe toujours un ensemble E_1^k partout dense sur σ'' et dont la mesure sur cet arc est positive. Nous désignerons par M_k l'ensemble $\sigma'' \cdot E_1^k$ [$\text{mes} M_k > 0$, M_k est partout dense].

Si ζ appartient à M_k ,

$$|f_n(\zeta)| > C \quad \text{pour } n > k.$$

La fonction $f_n(z)$ étant continue sur σ'' et l'ensemble de points M_k partout dense sur cet arc, on a $|f_n(x)| > C$ pour $n > k$ et $x \in \sigma''$.

En utilisant le changement de variable $z = r_n x$, nous transformons l'arc σ'' en un arc σ_n'' , dont le rayon est r_n . D'après cette transformation, nous avons $f(z) \equiv f_n(x)$. Il en résulte que $|f(z)| > C$ pour tous les z , $z \in \sigma_n''$, si $n > k$.

L'arc σ'' étant un arc limite pour les zéros de la fonction $f(z)$, si n est suffisamment grand, σ_n'' doit renfermer au moins un zéro de la fonction $f(z)$, d'où la contradiction.

Remarque. — Il est évident que le théorème serait vrai, si l'on supposait que la fonction $f(z)$ est holomorphe seulement au voisinage d'un certain arc de la circonférence $|z| = 1$.