ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

Mémoire sur les fonctions uniformes de deux variables indépendantes définies l'intégration d'un système aux différentielles totales du 4e ordre attaché à une surface algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 41 (1924), p. 265-400

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__265_0>

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS UNIFORMES DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

DÉFINIES

PAR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES DU 4e ORDRE

ATTACHÉ A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR M. RENÉ GARNIER

Introduction.

1. Dans son *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* ([1]), dont les résultats ont été si féconds pour le développement de la théorie des fonctions algébriques et des équations différentielles, M. Émile Picard posait la question suivante :

« Concevons une surface $f(x, y, z) = 0$, possédant deux expressions u de première espèce ([2])

$$u = \int^{(x,y,z)} e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R_1 Q}{P_1 R}\,dy\right),$$
$$v = \int^{(x,y,z)} e^{\int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{R'(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R'_1 Q'}{P'_1 R'}\,dy\right).$$

Pouvons-nous imaginer que x, y, z *soient des fonctions uniformes de u et v* ? »

Cette même question, M. Picard la renouvelait en 1906, dans sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (t. II, p. 484).

([1]) *Journ. de Math. pures et appl.*, 4e série, t. 5, 1889, p. 309.

([2]) C'est-à-dire restant finies en tout point de f dans les mêmes conditions qu'une intégrale de Picard de première espèce. — Tous les coefficients P, ..., R'_1 sont rationnels en (x, y, z).

Plus généralement, on peut se poser le problème suivant :

Déterminer toutes les surfaces algébriques $F(x, y, z) = 0$ sur lesquelles on peut construire deux expressious

$$(s) \qquad \begin{cases} u = \int e^{I}(H\,dx + K\,dy), \\ v = \int e^{J}(L\,dx + M\,dy), \end{cases}$$

$$I = \int P\,dx + Q\,dy, \qquad J = \int R\,dx + S\,dy,$$

et cela de telle sorte que les fonctions x, y, z définies par l'inversion du système (s) soient uniformes en u et v ; H, K, L, M, P, Q, R et S sont rationnels en (x, y, z) et les conditions d'intégrabilité sont supposées identiquement vérifiées.

Or, immédiatement, se présente une distinction d'importance capitale. Si P, Q, R et S ne possèdent aucune ligne polaire d'ordre supérieur à 1, du et dv n'auront pas de singularité essentielle sur la surface ; pour abréger le langage, nous dirons que le système (s) est *normal*, et, dans le cas contraire, *singulier* (¹). Le Mémoire actuel a précisément pour objet :

1° *La résolution du problème précédent pour le cas normal;*

2° *La résolution du même problème pour le cas singulier, sous réserve que* F *n'est pas une surface de genre géométrique nul.*

En particulier, le problème de M. Picard rentrant nécessairement dans le cas normal, sa résolution se trouvera contenue dans le présent travail (²).

2. Précisons d'abord les raisons qui amènent à se poser le problème actuel. Le système (s) est un système *automorphe* ; si $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ est une solution particulière de (s), on obtiendra la solution

---

(¹) Par analogie avec la théorie des équations différentielles linéaires, où la même distinction se présente, il semblait tout indiqué de qualifier les deux cas de *régulier* et d'*irrégulier ;* mais ici une telle dénomination eût été inadmissible, car les deux termes précédents devaient déjà figurer dans le Mémoire avec un tout autre sens : celui qu'ils possèdent dans la théorie des surfaces algébriques.

(²) *Voir* p. 275.

la plus générale de (S) en remplaçant dans cette solution u et v par $Au+B$ et $Cv+D$ (A, B, C, D, constantes arbitraires) (¹). On prévoit donc que *le problème se présentera lui-même dans la recherche des fonctions uniformes de deux variables admettant des groupes de transformations hyperabéliens :* sur ce point, il nous suffira de renvoyer aux travaux déjà cités de M. Émile Picard.

Le même problème se rencontre encore dans *la recherche des fonctions de deux variables, uniformes ou à lignes critiques fixes, définies par des systèmes différentiels algébriques*. En effet, lorsqu'on se propose de déterminer les fonctions d'une variable, uniforme ou à points critiques fixes, définies par des équations différentielles d'un ordre donné on doit d'abord intégrer des équations qui ne contiennent pas la variable indépendante (²). Ce sont, pour les deux premiers ordres (³), les équations suivantes :

$$(A_1)\qquad \frac{dx}{du}=f(x,y)\qquad\left[\text{ou}\quad u=\int\frac{dx}{f(x,y)}\right],$$

$$(B_1)\qquad \frac{d^2x}{du^2}=f(x,y)\left(\frac{dx}{du}\right)^2\qquad\left[\text{ou}\quad u=\int e^{-\int f(x,y)\,dx}\,dx\right],$$

où $f(x,y)$ est une fonction rationnelle du point (x,y) de la courbe algébrique $F(x,y)=0$. Lorsqu'elles sont uniformes les intégrales de ces équations se ramènent aux fonctions classiques (elliptiques, exponentielles, rationnelles); et, dans ce cas, le genre de la courbe F ne peut dépasser l'unité.

Or, posé dans le champ de deux variables indépendantes, le premier des deux problèmes précédents s'énonce ainsi :

Déterminer toutes les surfaces algébriques $F(x,y,z)=0$ telles que les fonctions x, y, z définies par l'inversion d'un système aux

(¹) Cette remarque nous permettra d'abréger l'écriture : fréquemment il nous arrivera de définir un système (S) au moyen de l'une quelconque de ses intégrales (où ne figurera aucune constante arbitraire).

(²) Effectivement, à chacun des types possibles pour (B_1), M. Painlevé a fait correspondre une classe spéciale d'équations du second ordre à points critiques fixes.

(³) Et, pour le troisième ordre différentiel, les équations appelées « simplifiées » par M. Painlevé, et dont les intégrales se réduisent aux fonctions automorphes de H. Poincaré, ou à des combinaisons de fonctions élémentaires.

différentielles totales

$$(A_2) \quad \begin{cases} du = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy, \\ dv = R(x, y, z)\,dx + S(x, y, z)\,dy, \end{cases}$$

où P, Q, R, S sont rationnels en x, y, z, soient uniformes en u et v. Ce problème a fait l'objet des recherches de M. Picard [1], puis de celles de M. Painlevé [2]. Les surfaces répondant à la question sont : 1° les surfaces hyperelliptiques de Picard ; 2° les surfaces elliptiques de genre o ; 3° les surfaces réglées elliptiques ; 4° les surfaces rationnelles ; et les fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ se ramènent aux fonctions hyperelliptiques ou à des combinaisons de dégénérescences de ces fonctions.

Quant au problème (B_2), analogue à (B_1), c'est précisément celui qui fait l'objet du Mémoire actuel.

Enfin, notre problème se rattache encore d'une autre façon à *la théorie des équations différentielles ordinaires :* Si l'on fait, par exemple, $v=$ const., la fonction uniforme $x(Au + B, v_0)$ vérifiera une équation différentielle algébrique du troisième ordre : les résultats que nous avons obtenus dans ce problème trouveront donc une application dans la théorie des équations différentielles [3].

3. Tout ce que l'on sait actuellement sur l'extension à deux variables d'une théorie déjà établie dans le cas d'une variable (et, en particulier, la comparaison des problèmes A_1 et A_2), tout permettait de

---

(1) *Mémoire couronné (loc. cit.)*, p. 223 à 250.

(2) *Leçons ... professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 288-351. *Acta math.*, t. 27, 1903, p. 1. M. Painlevé a énoncé ses résultats dans le cas plus général où l'intégrale de (A_2) est une fonction à un nombre fini de branches (*Acta*, p. 49). Dans le cas où l'intégrale doit être uniforme, les résultats de M. Painlevé conduisent à un énoncé précis qu'on trouvera au n° 46 du Mémoire actuel (p. 356).— M. Painlevé n'a publié la démonstration de ses résultats que dans le cas où l'intégrale générale est une fonction algébrique des constantes d'intégration ; mais depuis que ce Mémoire a été rédigé je suis parvenu à rétablir la démonstration des résultats de M. Painlevé (*Comptes rendus*, t. 179, p. 737).

(3) Inversement, si l'état de cette dernière théorie avait été plus avancé, on aurait pu l'utiliser pour la solution du problème actuel : à ce point de vue, si F est un cylindre elliptique, il paraît tout indiqué d'appliquer un théorème formulé par M. Painlevé pour les équations du 3e ordre (*Acta math*, t. 25, p. 73-74) ; mais cette proposition appelle de nouvelles recherches.

prévoir que la question actuelle est singulièrement moins simple que l'intégration uniforme de (B_1) Bornons-nous ([1]) à cette seule remarque : On sait que pour le problème (B_1) les résidus de la fonction $f(x, y)$ doivent être rationnels; au contraire, dans $(\mathfrak{S})$, $d\mathrm{I}$ et $d\mathrm{J}$ *peuvent posséder des courbes polaires affectées de résidus irrationnels ou complexes sans que l'inversion de $(\mathfrak{S})$ cesse, pour cela, d'être uniforme :* pour s'en convaincre, il suffit de considérer le système

$$u = x^\alpha e^{\int f(y,z)\,dy}, \qquad v = x^\beta e^{\int g(y,z)\,dy}$$

$[\mathrm{F}(y,z)=0$, courbe de genre 1$]$. Observons, de plus, que l'intégrale générale du système précédent possède à distance finie des lignes essentielles mobiles ([2]).

Pour toutes ces raisons, on conçoit donc que les difficultés qui se présentaient déjà dans le cas d'une variable à propos des singularités des intégrales doivent se retrouver, aggravées, dans le problème actuel. Aussi, les propositions établies jusqu'ici sur les fonctions analytiques des deux variables (étude du continuum des singularités, inversion, ...) ne pouvaient être d'aucune utilité. En fait, s'il était permis d'aborder le problème, c'était d'une part, grâce aux méthodes de recherche données par M. Painlevé pour les équations différentielles ; — il faut observer d'ailleurs que lorsqu'on opère sur un système à deux inconnues une transformation dégénérescente de M. Painlevé, le système-limite doit rester résoluble par rapport aux inconnues ; et cette condition évidente rend l'application de la méthode moins immédiate qu'on ne pourrait croire à première vue — ; et c'était, d'autre part grâce aux importants résultats obtenus par les géomètres italiens dans la théorie des surfaces algébriques. Effectivement, toute transformation birationnelle qui change la surface F en une variété ∞^2 F' change le système $(\mathfrak{S})$ en un second système qui répond également à la question (et cela, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace auquel appartient F') : en d'autres termes, ce qui intervient dans le problème, ce ne sont pas les propriétés projectives de F, mais celles

(1) *Voir* aussi n° 7, p. 275.

(2) *Voir* n° 9, p. 279.

de l'*ente algebrico* dont F est un modèle; or, tel est précisément le point de vue de l'École italienne.

Nous pouvons résumer maintenant la disposition du Mémoire ainsi que les résultats généraux que nous avons établis.

4. Le Mémoire est divisé en sept parties. La première a pour objet de délimiter les catégories de surfaces auxquelles peut appartenir F. Appelons *lignes singulières* de l'expression u les lignes le long desquelles $\operatorname{Log} \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\operatorname{Log} \frac{\partial u}{\partial y}$ deviennent infinis simultanément. Nous établissons successivement les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le genre d'une ligne singulière ne peut dépasser l'unité.*

THÉORÈME II. — *Si* $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ *s'annule le long d'une courbe* C, C *est nécessairement une ligne singulière.*

THÉORÈME III. — *Le genre géométrique de* F *ne peut dépasser l'unité.*

Précédemment, M. Émile Picard avait établi [1] que si les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface algébrique « s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, restant invariables pour un groupe de substitutions de la forme

$$(u, v; au + b, cv + d)$$

et que le domaine fondamental de ce groupe soit tout entier à distance finie, sans singularité essentielle des fonctions sur sa surface, le genre de la surface ne pourra dépasser l'unité ». Mais nous avons déjà observé que dans le problème du n° 1 les solutions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ peuvent présenter des singularités essentielles à distance finie; pour pouvoir être appliquée à notre problème, la démonstration de M. Picard exigeait donc un complément nouveau.

THÉORÈME IV. — *Si la surface* F *possède une courbe canonique effective le genre de cette courbe* (ou de chacune de ses composantes, si elle est réductible) *ne peut dépasser l'unité.*

---

[1] *Mémoire couronné* (*loc. cit*), p. 316-318.

Théorème V. — *Si le genre géométrique p_g de* F *est égal à* 1, *ou bien u et v doivent être des expressions de première espèce, ou bien pour une valeur déterminée de la constante h l'une des combinaisons uv^h, ou* $\operatorname{Log} u + hv$, *ou $u + hv$, est une expression de première espèce.*

5. Ayant ainsi limité les hypothèses admissibles pour les genres de la surface F, on peut attaquer le problème en adoptant successivement l'une ou l'autre de ces hypothèses. Or, à deux reprises différentes, pour $p_g = 1$ et pour $p_g = 0$, on est amené à supposer que F est une *surface elliptique;* afin de ne pas interrompre l'exposition, nous avons consacré spécialement la seconde partie du Mémoire à l'étude de ces surfaces. Les surfaces elliptiques ont été rencontrées d'abord par M. Émile Picard (1); puis M. Painlevé en a caractérisé complètement la représentation (2); enfin M. Enriques (3) les a construites en insistant particulièrement sur le cas où le déterminant de la surface est un nombre premier. Nous avons obtenu, dans le cas d'un déterminant composé, une représentation plus simple (4), et ceci nous a permis d'établir directement l'existence et de donner la construction effective des sept surfaces elliptiques F′, de genre géométrique zéro, possédant un faisceau elliptique de courbes elliptiques : nous avons obtenu ainsi, et de la manière la plus naturelle, les modèles que nous croyons les plus simples possible des surfaces F′.

La troisième partie se rapporte au cas où F est une surface irrégulière de genre $p_g = 1$. La discussion repose sur le théorème V; on prévoit donc que dans les trois cas possibles ($p_a = 0$; $p_a = -1$, surfaces hyperelliptiques ou elliptiques) un même problème préliminaire se posera : la construction des expressions de Picard de première espèce sur la surface. Dans le cas où F est une surface de Picard, la construction repose sur l'étude de ces expressions le long des courbes du système de dimension, de genre et d'ordre 2 (et d'indice 25) que possède alors la surface.

---

(1) *Mémoire couronné (loc. cit)*, p. 205-212 du Mémoire.

(2) *Leçons ... professées à Stockholm*, p. 282-285.

(3) *Rendic. del Circolo mat. di Palermo*, t. 20, 1905, p. 17.

(4) Au moment de corriger les épreuves de ce Mémoire, nous ajouterons que, lors de son récent passage à Paris, l'illustre géomètre a bien voulu nous signaler que la même question a fait l'objet d'une étude analogue de M. Chisini.

La quatrième partie, plus analytique, est consacrée au cylindre elliptique. Dans le cas général où I et J ne sont pas du type algébrico-logarithmique, la méthode s'appuie sur une réduction préalable de I et J, réduction qui augmente d'entiers positifs les résidus de I et J et qui généralise celle des différentielles de Picard. Si I (ou J) est du type algébrico-logarithmique, la solution du problème se déduit (mais par une discussion longue et complexe) de la solution du problème A_2.

La cinquième partie traite des surfaces elliptiques de genre zéro. La formation des expressions u et v exige la construction des intégrales de troisième espèce de la surface F, problème où intervient la nature arithmétique de F. La fin de la discussion utilise les résultats de la quatrième partie.

Enfin la sixième partie est relative aux surfaces régulières; grâce au théorème de Severi-Picard le problème se ramène encore à un problème A_2.

6. Voici maintenant le résultat général auquel ont abouti nos recherches sur les systèmes normaux. La surface F peut appartenir à six catégories différentes, et pour chaque catégorie le système (s) doit être l'un des suivants (¹) :

I. F est une *surface hyperelliptique de Picard*. On doit avoir (²)

$$(S_1)\quad \begin{cases} u = e^{\alpha U+\beta V}, \\ v = e^{\gamma U+\delta V}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = e^{\alpha U+\beta V}, \\ v = \gamma U+\delta V, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = \alpha U + \beta V \\ v = \gamma U + \delta V \end{cases}.$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = \text{const. numériques};\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

[U et V paramètres de la représentation hyperelliptique normale de F].

II. F est une *surface hyperelliptique de Picard du type elliptique*. F possède alors (au moins) deux faisceaux elliptiques, auxquels sont

(¹) *Cf.* note (¹) du n° 2, p. 267. Les constantes numériques figurant dans les systèmes doivent satisfaire à des conditions d'uniformité [en général transcendantes par rapport aux coefficients de (s)] qu'on trouvera dans le cours du Mémoire.

(²) Les deux derniers systèmes sont des dégénérescences du premier (*cf.* n° 54, passage de VI à II).

attachées deux intégrales de Picard de première espèce, w_1 et w_2. Soient $\varphi(x,y,z)=\lambda$ et $\psi(x,y,z)=\mu$ les équations du premier faisceau, et $r(\lambda,\mu)\equiv f(w_1)$ une fonction rationnelle de λ et μ [telle que (s) soit normal]; posons

$$\mathrm{U}_1=\alpha w_1+\beta\left[w_2+\int f(w_1)\,dw_1\right] \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta=\text{const. numériques}),$$
$$\mathrm{V}_1=\gamma w_1+\delta\left[w_2+\int f(w_1)\,dw_1\right] \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0);$$

on aura

$$(S_2) \qquad \begin{cases} u=e^{\mathrm{U}_1}, \\ v=e^{\mathrm{V}_1}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u=e^{\mathrm{U}_1}, \\ v=\mathrm{V}_1, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u=\mathrm{U}_1, \\ v=\mathrm{V}_1. \end{cases}$$

III. F est un *cylindre elliptique* $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ (ou $x=pw$, $y=p'w$).

Posons

$$\mathrm{A}=w+\int r(z)\,dz, \qquad \mathrm{B}=\mathrm{Log}\,z+\int\varphi(w)\,dw$$

[$r(z)$, fonction rationnelle, et $\varphi(w)$, fonction rationnelle de x et y, sont choisies de manière que (s) soit normal]. (s) coïncide, soit avec l'un des systèmes

$$(S_3) \qquad \begin{cases} u=e^{\alpha\mathrm{A}}, \\ v=\displaystyle\int\frac{dz}{\psi(z)} \end{cases}$$

[α désigne une constante arbitraire; $\dfrac{dz}{dv}=\psi(z)$ est une équation de Briot et Bouquet, à intégrale générale uniforme];

$$(S_4) \qquad \begin{cases} u=e^{\alpha w+\gamma\mathrm{B}} & (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \text{const. numériques}), \\ v=e^{\beta w+\delta\mathrm{B}} & (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0); \end{cases}$$

$$(S_5) \qquad \begin{cases} u=e^{\alpha\mathrm{A}+\gamma\,\mathrm{Log}\,z} & (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \text{const. numériques}), \\ v=e^{\beta\mathrm{A}+\delta\,\mathrm{Log}\,z} & (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0); \end{cases}$$

soit avec une dégénérescence de ces systèmes (*cf.* n° 54).

IV. F est une *surface elliptique de genre zéro*. Soient $z=$ const. l'équation du faisceau [K], U l'intégrale de Picard de première espèce de F.

a. Les courbes C *sont de genre* $\varpi \geqq 1$; on doit avoir

$$(S_6) \qquad \begin{cases} u = e^{\alpha U} Z^{\alpha} z^{\gamma} & (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ const. numériques}), \\ v = e^{\beta U} Z^{\beta} z^{\delta} & (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \end{cases}$$

avec

$$Z = \prod_l (z - c_l)^{k_l} \prod_j (z - e_j)^{\frac{\Omega_j}{\pi i}};$$

les c_l sont des constantes numériques, choisies arbitrairement ; les e_j sont les points critiques de la fonction algébrique $\zeta(z)$ liée à z par l'équation abélienne de degré n, $\varphi(\zeta, z) = 0$ attachée à F ; les $2\,\Omega_j$ sont des périodes convenablement choisies de U.

b. Les courbes C *sont de genre* 1. Soit V le second argument de la représentation elliptique de F'; on doit avoir

$$(S_7) \qquad \begin{cases} u = e^{U} \\ v = V \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = U, \\ v = V. \end{cases}$$

V. F est une *surface hyperelliptique régulière* (au sens généralisé de MM. Enriques et Severi). Les seuls cas possibles sont les suivants :

a. F est *l'une des trois surfaces de genre* 0 *et de bigenre* 1 obtenues par MM. Bagnera et de Franchis [1] (Surfaces VIII, IX et X de ces auteurs).

b. F est *une surface à plurigenres tous égaux à* 1, *possédant une involution cyclique d'ordre* 3, 4 *ou* 6 (Surfaces XII, XIII, XIV de MM. Bagnera et de Franchis). Soient U et V les arguments de la représentation elliptique (a) ou hyperelliptique (b) de F ; on doit avoir

$$(S_8) \qquad u = U, \qquad v = V.$$

c. F est une *surface de Kummer*, à diviseur $\delta = 1$, ou une de ses généralisations ($\delta > 1$) dues à L. Remy et à M. Traynard. On doit avoir

$$(S_9) \qquad \begin{cases} u = \alpha U + \beta V, \\ v = \gamma U + \delta V \end{cases}$$

---

[1] *Memorie della Soc. it. delle Sc.* (*dei XL*), série 3, t. 15, 1908, p. 340.

[U, V, arguments de la représentation hyperelliptique canonique : α, β, γ, δ, constantes numériques telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$].

VI. F est une *surface rationnelle*. Le problème se ramène à un problème (A_2) [n° 2] : car une transformation rationnelle change F soit en une surface hyperelliptique de Picard, soit en une surface elliptique, soit en un cylindre elliptique, soit en surface rationnelle, et la même transformation change $(\mathfrak{s})$ soit $(\mathfrak{s}_{10})$ en l'un des systèmes obtenus par M. Picard et par M. Painlevé pour la surface transformée.

Du tableau précédent, il résulte que *les systèmes différentiels* $(\mathfrak{s})$ *résolvant le problème de M. Picard appartiennent aux catégories* $(\mathfrak{s}_1)$, $(\mathfrak{s}_3)$ [avec $r(z) \equiv 0$; $z' = \psi(z)$ relation algébrique de genre *un*] et sa dégénérescence

$$u = w, \qquad v = \int \frac{dz}{\psi(z)},$$

$(\mathfrak{s}_7)$, $(\mathfrak{s}_8)$, $(\mathfrak{s}_9)$ et $(\mathfrak{s}_{10})$. *Les surfaces* F *rentrent toutes alors dans le type hyperelliptique* (dégénéré ou non) ; *et les solutions* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *rentrent dans le type des solutions de* $(\mathfrak{s}_1)$ (dégénéré ou non).

7. La méthode que nous avons employée pour les systèmes nouveaux *s'applique d'elle-même aux systèmes singuliers* et nous a fourni à leur sujet des résultats étendus. Ces systèmes font l'objet de la dernière partie du Mémoire. *A priori*, on pouvait se demander si l'existence d'une ligne de singularités essentielles pour e^I ou e^J (n° 1) est compatible avec l'uniformité des intégrales : dans le cas d'une variable indépendante (problème B_1), M. Painlevé a démontré que l'intégrale générale de l'équation

$$du = e^{\int \lambda(x)\, dx}\, dx$$

[$\lambda(x)$ algébrique en x] ne saurait être uniforme si $e^{\int \lambda dx}$ possède un point essentiel. C'est ici qu'apparaît une fois de plus une différence profonde entre le cas d'une et celui de deux variables indépendantes ; pour le voir, il suffit de se reporter à une transformation biuniforme citée dans un tout autre but par M. Picard. Le système (S) défini par

$$u = y e^{\frac{1}{x}}, \qquad v = \frac{y}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

est intégré par les fonctions uniformes $x = \frac{u}{v}$, $y = u e^{-\frac{u}{v}}$, et *il présente effectivement une ligne essentielle*, $x = 0$.

Or, dans la septième partie, nous établissons que *tous les théorèmes démontrés dans la première partie pour les systèmes normaux s'appliquent encore au cas singulier*. Pour $p_g = 1$, il n'existe donc aucun système singulier, exception faite de (S_2) [aucune restriction n'étant imposée alors à la fonction $r(\lambda, \mu)$]. Pour achever l'étude des systèmes singuliers il reste à traiter encore le cas de $p_g = 0$; que le problème réclame un nouvel effort, cela ne doit pas surprendre : au contraire, on vérifie ici, une fois de plus, que les systèmes différentiels à intégrales uniformes dont les caractères algébriques sont les plus simples sont souvent aussi ceux dont l'étude est la plus longue [1].

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

8. Théorème I. — *Forme du système* (S) *dans le voisinage d'une ligne singulière* Γ. — Appelons *lignes singulières* de u les courbes de F le long desquelles $\operatorname{Log} \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\operatorname{Log} \frac{\partial u}{\partial y}$ deviennent infinis simultanément. Le système (S) étant supposé normal, nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Le genre d'une ligne singulière* Γ *ne peut dépasser l'unité.*

Tout d'abord, moyennant une transformation birationnelle préalable on peut toujours supposer [2] que Γ appartient au plan $x = 0$;

(1) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été exposés aux *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1363, 1528 et 1689. Les deux dernières Notes complètent le résumé du n° 5 (p. 271).

(2) *Cf.* Painlevé, *Acta math.*, t. 27, 1903, p. 12.

Γ sera donc définie dans ce plan par l'équation

$$(1) \qquad F_1(y, z) = 0,$$

F_1 représentant un facteur irréductible de $F(0, y, z)$. Γ pourra être, d'ailleurs, une courbe multiple de F (¹); mais d'après un résultat classique de G. H. Halphen (²), on pourra décomposer le voisinage de Γ en un nombre fini de nappes telles que sur chacune d'elles on ait, pour une valeur entière positive de ν :

$$P = \frac{\alpha - 1}{X^\nu} + \sum_{-\nu+1}^{+\infty} A_j(y) X^j, \qquad Q = \sum_{-\nu}^{+\infty} B_j(y) X^j, \qquad x = X^\nu,$$

les A_j et les B_j étant rationnels en y et z liés par (1); de plus, H et K sont supposés holomorphes en X et non nuls pour $X = 0$. Or la condition d'intégrabilité pour $P\,dx + Q\,dy$ donne aussitôt

$$B_{-\nu} = B_{-(\nu-1)} = \ldots = B_{-1} = 0, \qquad \nu A'_{-(\nu-1)} = B_1, \ \ldots,$$

d'où l'on tire (³)

$$\int P\,dx + Q\,dy = \nu(\alpha - 1)\operatorname{Log} X + \int B_0(y)\,dy + \nu X A_{-(\nu-1)}(y) + \ldots$$

et dans le voisinage de Γ on pourra écrire

$$\begin{aligned} du = {} & X^{(\alpha-1)\nu} e^{\int B_0(y)\,dy} [1 + X\overline{A}_1(y) + \ldots + X^j \overline{A}_j(y) + \ldots] X^{\nu-1} dX \\ & + X^{(\bar{\alpha}-1)\nu} e^{\int \overline{B}_0(y)\,dy} [1 + X\overline{\overline{A}}_1(y) + \ldots + X^j \overline{\overline{A}}_j(y) + \ldots]\,dy. \end{aligned}$$

Formons la condition d'intégrabilité de du ; en supposant $\bar{\alpha} \neq 1$

(¹) On pourrait éviter cette complication en remplaçant F par une transformée birationnelle convenablement choisie dans S_5.

(²) *Œuvres*, t. 2, Paris 1918, p. 159.

(³) Dans la formule (17) du Mémoire de M. Painlevé (*loc. cit.*, p. 13) et dans les formules suivantes, le terme $A_m(y)$ représente l'intégrale d'une fonction algébrique (et non pas une fonction algébrique). Mais ceci ne change rien aux conclusions de l'illustre géomètre.

et $B_0(y) \not\equiv 0$ on trouvera $\alpha = \bar{\alpha} - 1$, avec

$$B_0 e^{\int B_0 dy} = (\bar{\alpha} - 1)\nu e^{\int \bar{B}_0 dy};$$

multipliant du par $\alpha\nu$ on pourra donc écrire

$$\begin{aligned} du = {} & \alpha\nu X^{\alpha\nu-1} e^{\int B_0(y)dy}[1 + \ldots + X^j \bar{A}_j(y) + \ldots] dX \\ & + B_0(y) X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y)dy}[1 + \ldots + X^j \bar{\bar{A}}_j(y) + \ldots] dy. \end{aligned}$$

La nouvelle condition d'intégrabilité donnera

$$\alpha\nu(B_0 \bar{A}_j + A'_j) = (\alpha\nu + j) B_0 \bar{\bar{A}}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

et, si $\alpha\nu$ n'est pas un entier négatif, on en déduit aussitôt

$$(2) \qquad u = X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y) dy}[1 + X \mathcal{A}_1(y) + \ldots + X^j \mathcal{A}_j(y) + \ldots],$$

les $\mathcal{A}_j(y)$ étant rationnels en y et z liés par (1) : nous dirons que u est alors du *type général*.

Si l'on a $\alpha\nu = n$ (n entier négatif) il faudra envisager à part le cas de $j = -n$ et, suivant que $\bar{A}_{-n} e^{\int B_0 dy}$ sera constant ou non, on aura

$$(3) \qquad u = X^n [\mathcal{A}_0(y) + X \mathcal{A}_1(y) + \ldots] + c \operatorname{Log} X + \int \mathcal{B}(y)\, dy$$

ou

$$(4) \qquad u = X^n e^{\int B_0(y) dy}[1 + X \mathcal{A}_1(y) + \ldots] + \int e^{\int B_0(y) dy} \mathcal{B}(y)\, dy$$

[c, constante ; les A_j et B, fonctions rationnelles de (y, z)]. Nous dirons alors que u est du *type exceptionnel*.

Pour $\bar{\alpha} = 1$, $\alpha\nu$ devra être entier [1] et u sera encore du type exceptionnel (avec n positif ou négatif). Enfin pour $B_0(y) \equiv 0$, l'expression qu'on obtiendrait pour u rentrerait encore comme cas particulier dans les formes (2) ou (3).

---

[1] Dans ce cas, il se peut que Γ ne soit plus une ligne singulière, mais une ligne de niveau pour u. Les développements suivants restent cependant valables, et la conclusion subsiste : si la courbe algébrique Γ est une ligne de niveau pour u et v, son genre est ≤ 1.

En définitive, dans le voisinage de la ligne singulière, le système différentiel aura l'une des formes suivantes [1] :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} u = X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y)\,dy}[1 + X\mathcal{A}_1(y) + \ldots], \\ v = X^{\beta\nu} e^{\int D_0(y)\,dy}[1 + X\mathcal{C}_1(y) + \ldots]; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} u = c \operatorname{Log} X + \int \mathcal{B}(y)\,dy + X\mathcal{A}_1(y) + \ldots, \\ v = X^{\beta\nu} e^{\int D_0(y)\,dy}[1 + X\mathcal{C}_1(y) + \ldots]; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} u = \int e^{\int B_0(y)\,dy}\mathcal{B}(y)\,dy + e^{\int B_0\,dy}[X\mathcal{A}_1(y) + \ldots], \\ v = X^{\beta\nu} e^{\int B_0(y)\,dy}[1 + X\mathcal{C}_1(y) + \ldots]; \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} u = c \operatorname{Log} X + \int \mathcal{B}(y)\,dy + X\mathcal{A}_1(y) + \ldots, \\ v = k \operatorname{Log} X + \int \mathcal{D}(y)\,dy + X\mathcal{C}_1(y) + \ldots; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} u = c \operatorname{Log} X + \int \mathcal{B}(y)\,dy + X\mathcal{A}_1(y) + \ldots, \\ v = \int e^{\int D_0\,dy}\mathcal{D}(y)\,dy + e^{\int D_0\,dy}[X\mathcal{C}_1(y) + \ldots]; \end{cases}$$

c et k désignent des constantes ; les fonctions de y sont rationnelles en (y, z) ; enfin pour $\alpha\nu$ (ou $\beta\nu$) entier, u (ou v) peut, soit contenir un terme en Log X [et l'exponentielle $e^{\int B_0 dy}$ (ou $e^{\int D_0 dy}$) est alors rationnelle en (y, z)], soit admettre un coefficient $\mathcal{A}(y)$ non algébrique en y.

9. *Le cas général; Γ est de genre* 1. — Cela étant, considérons d'abord le cas où ($\mathfrak{s}$) est du type (I) et admettons que l'on ait

$$(5)\qquad H(y, z) \equiv \beta B_0(y) - \alpha D_0(y) \not\equiv 0.$$

Dans (I) remplaçons X par εX, u par $\varepsilon^{\alpha\nu} u$ et v par $\varepsilon^{\beta\nu} v$; puis faisons

[1] On a exclu le cas où u et v seraient tous deux du type exceptionnel non logarithmique avec des exposants $n \geq 0$: Γ ne serait alors une ligne singulière ni pour u, ni pour v.

tendre ε vers o ; (I) tendra vers le système

$$(\mathrm{I}') \qquad u = x^\alpha e^{\int \mathrm{B}_0(y)dy}, \qquad v = x^\beta e^{\int \mathrm{D}_0(y)dy},$$

qui, en vertu de (5), est résoluble en x et (y, z) et qui, de plus, doit définir des fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Mais on déduit de (I′)

$$\int \mathrm{H}(y, z)\, dy = \beta \operatorname{Log} u - \alpha \operatorname{Log} v,$$

relation qui *ne peut donner pour y et z des fonctions uniformes de u et v que si le genre de* Γ *ne dépasse pas l'unité.*

Supposons d'abord que Γ soit de genre 1 ; moyennant une transformation birationnelle sur F on pourra ramener Γ à la cubique

$$x = 0, \qquad y = p(w \mid \omega, \omega'), \qquad z = p'(w \mid \omega, \omega').$$

On devra avoir $\mathrm{H} \equiv \frac{h}{z}$, h étant une constante $(\neq 0)$ et l'on pourra écrire

$$\mathrm{B}_0 = \alpha \mathrm{R}(y, z) + \frac{\gamma}{z}, \qquad \mathrm{D}_0 = \beta \mathrm{R}(y, z) + \frac{\delta}{z}$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (1) ; la fonction $\mathrm{R}(y, z)$ n'est d'ailleurs définie qu'à un terme additif près en $\frac{1}{z}$. Ainsi le système (I′) se réduit à

$$(\mathrm{I}'') \qquad u = x^\alpha \mathrm{Y}^\alpha e^{\gamma w}, \qquad v = x^\beta \mathrm{Y}^\beta e^{\delta w}$$

$\left(\text{avec } y = e^{\int \mathrm{R} dy}\right)$. Or $\int \mathrm{R}\, dy$ est une intégrale de troisième espèce relative à Γ ; puisqu'on peut en retrancher un terme de la forme kw, on peut écrire

$$\int \mathrm{R}(y, z)\, dy = \sum_{j=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{A}_j \operatorname{Log} \frac{\sigma(w + a_j)}{\sigma w}$$

---

(1) Il en résulte que les intégrales $\int \mathrm{B}_0(y)dy$ et $\int \mathrm{D}_0(y)dy$ ne pourront pas se réduire toutes deux à des logarithmes de fonctions rationnelles.

et la solution de (I′) sera donnée par les formules (¹)

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} w = -\beta' \operatorname{Log} u + \alpha' \operatorname{Log} v, \\ y = \wp w, \qquad z = \wp' w, \qquad x = u^{\delta'} v^{-\gamma'} \displaystyle\prod_{j=1}^{M} \left[\frac{\sigma(w + a_j)}{\sigma w}\right]^{-A_j} \end{array}\right.$$

avec

$$(7)\qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Posons alors $\sum_{j=1}^{M} A_j a_j = a$; l'expression $\prod_{j=1}^{M} \left[\frac{\sigma(w+a_j)}{\sigma w}\right]^{-A_j} \frac{\sigma w}{\sigma(w-a)}$, fonction elliptique de w, est rationnelle en y et z; par une transformation birationnelle $x_1 = x r(y, z)$, on pourra ramener les relations (6) à la forme

$$x = u^{\delta'} v^{-\gamma'} \frac{\sigma(w-a)}{\sigma w}, \qquad y = \wp w, \qquad z = \wp' w$$

et, pour que x, y, z soient uniformes, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\begin{aligned} 2\pi i\alpha' &= 2m\omega + 2n\omega', \\ 2\pi i\beta' &= 2p\omega + 2q\omega', \\ 2\pi i\gamma' &= -(2m\eta + 2n\eta')a + 2r\pi i, \\ 2\pi i\delta' &= -(2p\eta + 2q\eta')a + 2s\pi i, \end{aligned}$$

m, n, p, q, r, s étant des entiers. En particulier, si a est nul on aura $x = u^{\delta'} v^{\gamma'}$; γ' et δ' sont entiers; et si l'on a, de plus, $\delta = 0$ (d'où $\delta' = 0$, $\gamma' = -\frac{1}{\beta}$), l'exposant β est sûrement rationnel.

10. *Le cas général;* Γ *est de genre* 0. — Supposons maintenant que Γ soit de genre zéro; par une transformation birationnelle sur F on pourra ramener son équation à $z = 0$, et si l'on fait

$$v = v_0, \qquad u = e^{\frac{t + \alpha \operatorname{Log} v_0}{\beta}}$$

(¹) *Voir* la note (¹) du n° 2, p. 267.

(en supposant, par exemple, $\beta \neq 0$) l'équation

$$\int [\alpha D_0(y) - \beta B_0(y)]\, dy = t$$

devra donner pour y une fonction uniforme de t. On en déduit aisément ([1])

$$B_0(y) = \alpha R(y) + \frac{\gamma}{y}, \qquad D_0(y) = \beta R(y) + \frac{\delta}{y}$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et

$$R(y) = \sum_{j=1}^{M} \frac{A_j}{y - a_j} \qquad (a_j \neq 0).$$

Ainsi le système (I') se réduira à

$$u = x^\alpha Y^\alpha y^\gamma, \qquad v = x^\beta Y^\beta y^\delta$$

avec $Y = \prod_{j=1}^{M} (y - a_j)^{A_j}$; on en tire [avec les notations (7)] :

$$xY = u^{\delta'} v^{-\gamma'}, \qquad y = u^{-\beta'} v^{\alpha'}.$$

Ainsi α', β', γ', δ' doivent être rationnels et les A_j, entiers, de sorte que moyennant une transformation birationnelle $xY = x_1$, le système (I') s'écrit :

$$u = x^\alpha y^\gamma, \qquad v = x^\beta y^\delta.$$

De la condition d'uniformité qu'on vient d'énoncer il résulte, en particulier que *lorsque la ligne singulière* Γ *est de genre* 0, *ses résidus* α *et* β *doivent être rationnels*.

11. *Examen des cas d'exception.* — Supposons maintenant que la condition (5) ne soit plus remplie; dans ce cas le système peut s'écrire

---

([1]) C'est une conséquence du théorème classique de Briot et Bouquet. On peut encore l'établir directement de la manière suivante. La fonction rationnelle $\alpha D_0 - \beta B_0$ ne pouvant avoir de zéro se réduit à $P^{-1}(y)$, $P(y)$ étant un polynome dont le degré ne peut dépasser 2 (comme le montre l'application d'une substitution $y \mid y^{-1}$). Moyennant une substitution linéaire sur y on peut supposer que $\alpha D_0 - \beta B_0$ se réduit à $A : y$, les autres formes ($A : y^2$ ou A) ne pouvant donner pour y des fonctions uniformes de u et v.

(pour $\alpha \neq 0$)

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y)\,dy}[1 + X\,\mathfrak{b}_1(y) + \ldots], \\ v - k u^{\frac{\beta}{\alpha}} &= X^{\beta\nu} e^{\int D_0(y)\,dy}[X^n \mathfrak{S}_n(y) + \ldots], \end{aligned}\right.$$

k désignant une constante et $\mathfrak{S}_n(y)$ étant rationnelle en (y, z). Admettons d'abord que l'on ait

$$(9)\qquad \alpha\nu\mathfrak{S}'_n(y) - nB_0(y)\mathfrak{S}_n(y) \neq 0.$$

On remplacera u par $\varepsilon^{\alpha\nu} u_0$, v par $k\varepsilon^{\beta\nu} u_0^{\frac{\beta}{\alpha}} + \varepsilon^{\beta\nu+n} v$, X par εX, et l'on fera tendre ε vers o. A la limite les fonctions $x(u_0, v)$, $y(u_0, v)$, $z(u_0, v)$ définies par le système

$$\begin{aligned} u_0 &= X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y)\,dy}, \\ v &= X^{\beta\nu+n} e^{\int D_0(y)\,dy} \mathfrak{S}_n(y) \end{aligned}$$

[résoluble d'après (9)] ne peuvent être uniformes en v que si le genre de la courbe Γ est au plus égal à 1 ; d'ailleurs, dans le cas actuel, $x = 0$, est pour $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$ un zéro d'ordre $\alpha + \beta - 1 + \dfrac{n}{\nu}$.

Supposons maintenant que la condition (9) ne soit pas réalisée (avec $\alpha \neq 0$); on procédera sur (8) comme sur (I), et ainsi de suite. Je dis qu'*au bout d'un nombre fini d'opérations on aboutira à un système*

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= X^{\alpha\nu} e^{\int B_0(y)\,dy}[1 + \ldots], \\ v - k_1 u^{\lambda_1} - \ldots - k_q u^{\lambda_q} &= X^{\alpha\nu\lambda_q + n_q} e^{\int D_0(y)\,dy}[\mathfrak{L}(y) + \ldots] \qquad (n_q > 0) \end{aligned}\right.$$

dont le système-limite sera résoluble en x, y. En effet, dans le cas contraire, la suite dont le terme général est $|\alpha\lambda_q|$ croîtrait indéfiniment ; or, d'après (10), le déterminant $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$ contient x en facteur à une puissance au moins égale à $\alpha - 1 + \alpha\lambda_q + \dfrac{n_q}{\nu} = \alpha(\lambda_{q+1} + 1) - 1$; cette puissance étant nécessairement finie, la suite $|\alpha\lambda_q|$ est bornée, contrairement à notre hypothèse.

On traiterait de même les systèmes (II) à (V) du n° 8. Si u, par exemple, est du type exceptionnel logarithmique, on remplacera X par εX, u par $u + c \operatorname{Log} \varepsilon$ et l'on fera tendre ε vers zéro ; à la limite, les systèmes (II), (III), (IV), (V) tendront vers les systèmes

$$(\mathrm{II}') \qquad u = c_1 \operatorname{Log} x + \int \mathcal{B}(y)\, dy, \qquad v = x^\beta e^{\int D_0(y)\, dy},$$

$$(\mathrm{III}') \qquad u = \int e^{\int B_0(y)\, dy} \mathcal{B}(y)\, dy, \qquad v = x^\beta e^{\int D_0(y)\, dy},$$

$$(\mathrm{IV}') \qquad u = c_1 \operatorname{Log} x + \int \mathcal{B}(y)\, dy, \qquad v = k_1 \operatorname{Log} x + \int \mathcal{D}(y)\, dy,$$

$$(\mathrm{V}') \qquad u = c_1 \operatorname{Log} x + \int \mathcal{B}(y)\, dy, \qquad v = \int e^{\int D_0(y)\, dy} \mathcal{D}(y)\, dy.$$

Les systèmes (II′) et (IV′) s'étudient comme (I′) [et s'en déduisent d'ailleurs par la substitution de e^u (ou e^v) à l'ancienne variable u (ou v)]. De même, le système (V′) se traitera comme (III′) qu'il nous reste à envisager.

Or, $B_0(y)$ et $\mathcal{B}(y)$ étant des fonctions rationnelles du point (y, z) de Γ, et y, z devant être uniformes en u et v, il résulte de la solution du problème (B_1) que la courbe Γ est de genre 1 au plus.

Si Γ est de genre 1, on doit avoir

$$du = A\, e^{hw}\, dw \qquad \text{ou} \qquad du = A\, dw$$

(A, constante d'intégration ; w, intégrale de première espèce de Γ). On retombe alors, soit sur les formules du n° 9 (où l'on ferait $\alpha = 0$), soit (pour $h = 0$) sur une dégénérescence de ces formules.

Si Γ est de genre 0, on doit avoir $du = e^{-\int d \operatorname{Log} g(y)} dy$, $\dfrac{dy}{du} = g(y)$ étant une équation de Briot et Bouquet à intégrale uniforme. On pourra supposer que Γ a pour équation $z = 0$; par une transformation algébrique $x_1 = x a(y)$ et une substitution linéaire sur y, on pourra ramener l'intégrale du système différentiel à l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}
x &= v^m e^{au} \frac{\sigma(u-b)}{\sigma u}, & y &= \varphi(u); \\
x &= v^m \lambda(u), & y &= \cos u; \\
x &= v^m e^{au} & y &= e^u; \\
x &= v^m, & y &= u^n
\end{aligned}$$

[$\beta^{-1} = m$, entier ; a et b constantes numériques ; $\varphi(u)$, fonction elliptique, $\lambda(u) = \cos \frac{u}{2}$, ou $\sin \frac{u}{2}$, ou $\sin u$ ou 1].

Le théorème I se trouve ainsi complètement établi [1].

12. Théorème II. — Démontrons maintenant le théorème suivant :

Théorème II. — *Si le déterminant fonctionnel* $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ *s'annule le long d'une courbe* Γ *de la surface, cette courbe est nécessairement une ligne singulière de* u *ou* v.

En effet, supposons que du et dv soient holomorphes le long de Γ ; en procédant comme au début du n° 8 on pourra toujours admettre que Γ appartient au plan $x = 0$, et que, dans le voisinage de Γ, u et v sont développables suivant les puissances entières positives d'une nouvelle variable $X\left(= x^{\frac{1}{\nu}}\right)$; on sait de plus [2] que X est une fonction uniforme (donc rationnelle) de x, y, z ; X devra donc être uniforme en u et v et notre théorème sera établi si nous réussissons à démontrer la proposition suivante [3] :

Soient $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ *deux fonctions de* x *et* y, *holomorphes et nulles pour* $x = 0 = y$. *Si les fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *définies par l'inversion des relations*

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{11}$$

sont uniformes et nulles pour $u = 0 = v$, *et si le déterminant fonctionnel* $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ *s'annule identiquement pour* $x = 0$, *on a identiquement*

$$\varphi(0, y) \equiv 0, \qquad \psi(0, y) \equiv 0.$$

Or supposons que l'une au moins des deux fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, soit $\varphi(x, y)$, ne s'annule pas identiquement pour $x = 0$, et soit $b^n y$ $(b \neq 0)$ le terme indépendant de x, de degré minimum en y, qui figure dans le développement de $\varphi(x, y)$ au voisinage de l'origine.

---

(1) On remarquera que les résidus α, β, de la ligne singulière Γ ne peuvent cesser d'être rationnels que si la décomposition des intégrales $\int B_0 dy$, $\int D_0 dy$ contient des intégrales de première espèce attachées à Γ.

(2) G.-H. Halphen, *loc. cit.*, p. 180.

(3) Nous avons substitué la lettre x à X dans cette proposition.

Appelons encore $ax^m y^p$ $(a \neq 0)$ le terme de $\varphi(x, y)$ qui contient la plus petite puissance de x (d'exposant non nul); ce terme existe sûrement : sinon u ne dépendrait que de y; pour que l'inversion soit uniforme on devrait avoir $\frac{dv(0, y)}{dx} \neq 0$); le déterminant $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ ne pourrait donc s'annuler identiquement pour $x = 0$. Or, en changeant au besoin y en $y + f$, u en $u + \varphi(0, f)$, et v en $v + \psi(0, f)$ (f, constante arbitrairement choisie), on peut toujours supposer que l'on a $n = 1, p = 0$ et que v s'annule pour $x = 0$. Ceci posé, faisons la transformation $u | \varepsilon^m u$, $x | \varepsilon x$, $y | \varepsilon^m y$; la première relation (11) s'écrira

$$u = ax^m + by + \varepsilon(\ldots), \tag{12}$$

les termes entre parenthèses représentant ici, comme plus loin, une fonction holomorphe dans le voisinage de $\varepsilon = 0 = x = y$.

Si l'on applique la transformation précédente à $\psi(x, y)$, la fonction transformée contiendra en facteur une puissance de ε d'ordre $j + m(h + k)$, cette puissance provenant d'un groupement tel que $x^j y^k P_h(y, x^m)$ où P_h est un polynome homogène et de degré $h \geq 0$ en y et x^m; changeons alors v en $\varepsilon^{j+m(h+k)} v$, la seconde équation (11) deviendra

$$v = x^j y^k P_h(y, x^m) + \varepsilon(\ldots). \tag{13}$$

Faisons tendre ε vers 0; (12) et (13) deviendront à la limite

$$\left\{ \begin{array}{l} u = ax^m + by \\ v = x^j y^k P_h(y, x^m) \end{array} \right. \qquad (m > 0,\ ab \neq 0, P_h \neq 0), \tag{14}$$

et, si le système (14) est résoluble en x et y, il devra définir deux fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$; de plus, $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ calculé sur (14) devra s'annuler identiquement pour $x = 0$.

Or faisons $u = 0$; b n'étant pas nul, on tire de (14) $y = -\frac{a}{b} x^m$; transportée dans $(14)_2$, cette valeur doit donner pour x une fonction uniforme de v, ce qui entraîne

$$j + (h + k)m = 1, \tag{15}$$

dans l'hypothèse où P_h n'est pas divisible par $ax^m + by$. Mais, puisqu'on a $m > 0$ et $j > 0$, (15) exige soit $h = 0 = k$, $j = 1$ (et m quelconque) ; soit $h = 1$, $k = 0$, $m = 1$, $j = 0$; soit enfin $h = 0$, $k = 1$, $m = 1$, $j = 0$.

Dans le premier cas, le système (14) se présente sous la forme

$$u = a x^m + b y, \qquad v = c x,$$

et la condition relative au déterminant fonctionnel ne peut être réalisée. Dans le second cas, le système s'écrit :

$$u = a x + b y, \qquad v = c x + d y;$$

il est résoluble en x, y puisque $P_h \equiv cx + dy$ ne contient pas $ax + by$ en facteur ; mais il ne vérifie pas non plus la condition au déterminant fonctionnel ; et l'on aboutirait à la même conclusion dans le dernier cas.

Supposons maintenant que P_h contienne en facteur $(ax^m + by)^g$; il suffira de substituer à (14) le système

$$u = a x^m + b y, \qquad v_1 = \frac{v}{u^g} = x^j y^k \frac{P_h}{(a x^m + b y)^g}$$

pour être ramené au cas précédent ; on a d'ailleurs $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = u^g \frac{D(u, v_1)}{D(x, y)}$ et comme, pour $b \neq 0$, u^g ne s'annule pas identiquement avec x, la condition requise ne peut être réalisée.

13. *Examen du cas d'exception.* — Il nous reste à lever une restriction : nous avons admis expressément que le système (14) est résoluble en x, y. Or supposons qu'il en soit autrement ; posons $ax^m + by = \xi$; l'expression homogène

$$\left(\frac{\xi - b y}{a}\right)^{\frac{j}{m}} y^k P_h\left(y, \frac{\xi - b y}{a}\right),$$

ne devant dépendre que de ξ, est [1] de la forme $c\xi^h$; le système (14)

---

[1] On peut d'ailleurs vérifier ce résultat en intégrant le système formé par l'équation $\frac{D}{D(x, y)}[ax^m + by, x^j y^k P_h(y, x^m)] = 0$ et l'équation d'Euler satisfaite par le polynome homogène P_h.

s'écrira alors

$$u = ax^m + by, \qquad v = c(ax^m + by)^h.$$

Procédons comme au n° 11 et posons $v = cu^h + v_1$; x et y devront être uniformes en u et v_1 ; le raisonnement et la conclusion qui s'appliquaient aux systèmes (14) résolubles seront encore valables, en général, pour u et v_1 ; on ne sera arrêté que si après l'introduction de ε et le passage à la limite, on obtient $v_1 = c_1(ax^m + by)^{h_1}$; on aurait alors $h_1 > h$ et l'on poserait $v - cu^h - c_1 u^{h_1} = v_2$, et ainsi de suite.

Je dis qu'*au bout d'un nombre fini de transformations on ne sera plus arrêté :* en effet, dans le cas contraire, la suite des entiers h, h_1, ..., h_i, ... croîtrait indéfiniment; or, si l'on a été obligé d'introduire v_{i+1}, c'est qu'après la transformation en ε le premier terme du développement de $\frac{D(u, v_i)}{D(x, y)}$ en ε est au moins d'ordre h_i par rapport à x^m et y. Comme on a $\frac{D(u, v_i)}{D(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$, h_i est fini, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi donc l'hypothèse $b \neq 0$ est inadmissible ; en d'autres termes, $x = 0$ est un infini de $\operatorname{Log} u'_y$, et après une transformation birationnelle générale sur F, Γ sera une ligne d'infini de $\operatorname{Log} u'_x$ et $\operatorname{Log} u'_y$, c'est-à-dire une ligne singulière de l'une au moins, u, des expressions u et v.

Remarque. — Une ligne singulière de u (ou v) peut fort bien être une ligne de zéros du déterminant $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ en même temps qu'une ligne d'infinis pour u (ou v) : pour qu'il en soit ainsi, il faut précisément que la condition (5) cesse d'être réalisée. Avec les notations du n° 11, lorsque $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ contiendra x à l'exposant $\alpha(\lambda_{q+1} + 1) - 1$ [au lieu de $\alpha + \beta - 1$ qui est la valeur générale de l'exposant], $x = 0$ doit être compté comme un zéro d'ordre $\frac{n_1 + \ldots + n_q}{\nu}$ du déterminant fonctionnel.

14. Théorème III. — Appliquons les résultats précédents à la démonstration d'un théorème fondamental.

Théorème III. — *Le genre géométrique p_g de la surface* F *ne peut dépasser l'unité.*

Supposons en effet que la surface possède une intégrale double de première espèce (ne se réduisant pas à une constante), soit

$$\mathfrak{I} = \int\int \frac{Q(x, y, z)}{F'_z} dx\, dy,$$

où $Q = 0$ est l'équation d'une surface adjointe à F, de degré $m - 4$ (m étant le degré de F). Dans l'intégrale double précédente exprimons x, y, z en fonction de u et v; il viendra

$$\mathfrak{I} = \int\int G(u, v)\, du\, dv$$

avec

$$G(u, v) = \frac{Q}{F'_z} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{Q}{F'_z} \frac{e^{-I-J}}{\Delta}, \tag{16}$$

le second membre étant exprimé en u et v, et Δ désignant le déterminant $HM - KL$ (n° 1); on aura ainsi

$$d \operatorname{Log} G(u, v) = d \operatorname{Log} \frac{Q}{F'_z \Delta} - dI - dJ; \tag{17}$$

$d \operatorname{Log} G$ est donc une différentielle de Picard attachée à F (¹), soit

$$d \operatorname{Log} G(u, v) = p\, dx + q\, dy \equiv dj(x, y, z),$$

et

$$G(u, v) = e^{\int p dx + q dy};$$

de plus, puisque (S) est normal, il résulte immédiatement de (17) que dj ne possède aucune courbe polaire d'ordre supérieur à 1. On peut aller plus loin et établir le lemme suivant :

Lemme. — L'intégrale $j(x, y, z) = \int p\, dx + q\, dy$ est une intégrale de Picard de première espèce attachée à F.

En effet, d'après (16), toute courbe polaire C de dj est : 1° soit une

(¹) Ce fait a déjà été constaté par M. Émile Picard [*Mémoire couronné* (*loc. cit.*), p. 317].

(²) On peut le montrer par le calcul, en faisant les changements de variables sur u, v et j. Mais *a priori* il est évident, d'après (17), que $F'_z . \Delta$ doit avoir sur F une valeur indépendante du couple de coordonnées adopté.

ligne singulière de du ou dv; 2° soit une ligne de zéros pour Δ (ce qui revient au même d'après le théorème II); 3° soit une courbe canonique de F. D'ailleurs, si l'on permute le couple de variables indépendantes (x, y) avec (z, x) ou (y, z), on voit aussitôt que les points de F situés sur $F'_z = 0$, hors de la ligne double de F, ne peuvent pas constituer une courbe polaire de dj.

Si nous parvenons à prouver que *dj ne peut admettre aucune courbe polaire des deux premières catégories*, notre lemme sera établi, car toutes les courbes polaires de dj devraient appartenir à la troisième catégorie, et, par conséquent, être affectées, toutes, de résidus positifs, ce qui est absurde.

Or, comme au n° 8, effectuons sur F une transformation birationnelle qui ramène C à être située dans le plan $x = 0$, et faisons sur $\mathfrak{J}$ la substitution $(x \mid \varepsilon x)$; il viendra, avec les notations déjà adoptées :

$$(18) \qquad \varepsilon^{-1}\mathfrak{J} = \iint \frac{Q(\varepsilon x, y, z)}{F'_z(\varepsilon x, y, z)}\,dx\,dy = \varepsilon^{\alpha+\beta-1}\iint G(\varepsilon^{\alpha} u, \varepsilon^{\beta} v)\,du\,dv$$

et l'on pourra écrire

$$\varepsilon^{-1}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \varepsilon\mathfrak{J}_1 + \ldots + \varepsilon^k\mathfrak{J}_k + \ldots$$

avec, par exemple,

$$(19) \qquad \mathfrak{J}_0 = \iint \frac{Q(0, y, z)}{F'_z(0, y, z)}\,dx\,dy.$$

15. *La courbe C est rationnelle; cas général.* — Supposons d'abord que C soit rationnelle et que, dans le voisinage de C, (S) rentre dans le type général du n° 8. Moyennant une transformation birationnelle convenable on peut ramener C à coïncider avec la droite $z = 0 : x, y, z$ seront développables suivant les puissances de ε et, pour $\varepsilon = 0$, se réduiront respectivement ([1]) à $u^{\delta'}v^{-\gamma'}$, $u^{-\beta'}v^{\alpha'}$ et 0; d'ailleurs, à tout nombre positif ρ, arbitrairement petit, on pourra faire correspondre un nombre positif η tel que pour $|u^{-\delta'}v^{\gamma'}| > \rho$ et $|\varepsilon| < \eta$ on ait $|x| < 2\rho^{-1}$ et que le développement du premier membre de (18) suivant les puissances de ε soit uniformément convergent, quels que soient y et z ([2]).

([1]) On suppose réalisée la condition (5); le cas où il n'en serait pas ainsi n'introduirait que des complications d'écriture. — La même remarque reste valable lorsque C est de genre 1.

([2]) Cela résulte du fait que $\mathfrak{J}$ est une intégrale double de première espèce.

Il en sera donc de même du second membre : et la limite $\overline{\mathfrak{z}_0}(u, v)$ de ce second membre se réduira à l'intégrale double (19) dans laquelle on aurait remplacé y par $u^{-\beta'}v^{\alpha'}$ et z par o ; $\overline{\mathfrak{z}_0}(u, v)$ est donc une intégrale double de fonction rationnelle de u et v qui ne peut admettre d'autre continuum polaire que $u^{-\delta'}v^{\gamma'} = 0$, et la même remarque s'applique à tous les coefficients du développement : $\overline{\mathfrak{z}_1}(u, v)$, ..., $\overline{\mathfrak{z}_k}(u, v)$, ...

Or ceci exige d'abord que $\dfrac{Q(0, y, 0)}{F'_z(0, y, 0)} \equiv f(y)$ ne possède aucun pôle distinct de o ou ∞ ; si l'on écrit alors $f(y) = \Sigma a_m y^m$, et si l'on intègre dans un rectangle $(u_0, u; v_0, v)$ $\overline{\mathfrak{z}_0}(u, v)$ sera formé d'une somme de termes égaux (à des facteurs numériques près) à

$$a_m[u^{-(m+1)\beta'+\delta'} - u_0^{-(m+1)\beta'+\delta'}][v^{(m+1)\alpha'-\gamma'} - v_0^{(m+1)\alpha'-\gamma'}].$$

Posons $v = hu^{\frac{\delta'}{\gamma'}}$ (avec $|h^{\gamma'}| > \rho$), et faisons tendre u vers o ou ∞ ; si l'on a $a_m \neq 0$, il résulte de l'inégalité $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0$ que dans l'un au moins des cas le terme précédent tendra vers l'infini.

Ainsi donc, $Q(0, y, 0)$ *doit être identiquement nul ;* autrement dit, C doit faire partie d'une courbe canonique.

Procédons de même pour $\overline{\mathfrak{z}_1}(u, v)$; l'expression

$$\frac{Q'_x(0, y, 0)}{F'_z(0, y, 0)} - \frac{Q(0, y, 0)}{[F'_z(0, y, 0)]^2} F''_{xz}(0, y, 0)$$

devra, elle aussi, être identiquement nulle : il devra donc en être de même de $Q'_x(0, y, 0)$ — et, d'une manière générale, de $\dfrac{d^k}{dx^k}Q(0, y, 0)$. Comme on a supposé que $Q(x, y, z)$ n'est pas identiquement nul, la présence de la ligne singulière C est inadmissible [1].

---

[1] L'exposant de x dans $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ (c'est-à-dire le résidu de C pour dj) est égal à $1 - \alpha - \beta$; toute la question revenait à établir que $1 - \alpha - \beta$ est nul ; or, en fait, la combinaison précédente ne joue aucun rôle dans la démonstration, contrairement à ce qu'on pouvait croire *a priori*. L'explication de ce paradoxe est aisée si l'on observe qu'actuellement $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ se réduit pour $\varepsilon = 0$ à $x^{1-\alpha-\beta}\, y^{1-\gamma-\delta}$. Le terme en x ne peut donc figurer dans le déterminant sans être multiplié par un terme en y qui masque précisément l'effet de l'exposant $1 - \alpha - \beta$ du terme en x.

16. *La courbe* C *est rationnelle; cas exceptionnel.* — Supposons [1] maintenant que ($\mathcal{S}$) rentre dans la forme (III) du n° 8 au voisinage de C; x, y, z seront encore développables suivant les puissances de ε, mais, pour $\varepsilon = 0$, ils se réduiront respectivement à $v^m \psi(u)$, $\varphi(u)$ et o [$m > 0$, par exemple; $\varphi(u)$, fonction elliptique; $\psi(u)$, fonction à multiplicateur constant]. Les considérations précédentes montrent encore que $\bar{\mathfrak{z}}_0(u, v), \bar{\mathfrak{z}}_1(u, v), \ldots$ ne peuvent avoir d'autre ligne d'infinis que $v = \infty$; à un facteur constant près, on a donc

$$\bar{\mathfrak{z}}_0 = \int\int v^{m-1}\, du\, dv,$$

et l'intégrale

$$\int \frac{Q(0, y, z)}{F'_z(0, y, z)}\, dy \tag{20}$$

se réduit actuellement à $\int \frac{du}{\psi(u)}$; actuellement, *on ne peut donc plus affirmer immédiatement que l'intégrale précédente est de première espèce pour* C [et, par suite, que Q $(0, y, z)$ est identiquement nul].

On se rend compte qu'il en est bien ainsi par le procédé suivant, qui, d'ailleurs, s'applique aussi au cas général [2]. Supposons que le modèle projectif de F sur lequel on étudie le problème d'inversion soit une surface $\bar{F}$ sans singularité dans un espace S_5 et que, sur $\bar{F}$, il existe une courbe $\bar{C}$, de genre o, qui soit ligne singulière pour *du* ou *dv* et ligne polaire pour *dy*; l'intégrale (20) sera nécessairement de première espèce pour C [3]. Ainsi donc Q $(0, y, 0)$ devra être identiquement nul, et la même conclusion s'appliquera aux dérivées

$$\frac{d^k}{dx^k} Q(0, y, 0).$$

17. *La courbe* C *est elliptique.* — Considérons maintenant le cas où la courbe C est de genre 1; on pourra supposer que x, y, z sont déve-

(1) On n'envisage que les cas qui introduisent une difficulté nouvelle.
(2) On pourrait encore appliquer au cas actuel la méthode du numéro suivant.
(3) *Cf.* Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Paris 1897, p. 186.

loppables suivant les puissances de ε et se réduisent pour $\varepsilon = 0$ à

$$u^{\delta'} v^{-\gamma'} \frac{\sigma(w-a)}{\sigma w}, \quad pw, \quad p'w \qquad [w = -\beta' \operatorname{Log} u + \alpha' \operatorname{Log} v];$$

d'ailleurs, si $|\varepsilon|$ est assez petit, les développements seront uniformément convergents pour toutes les valeurs de u et v telles que l'on ait

$$(21) \qquad |\operatorname{Log}(u^{-\beta'} v^{\alpha'})| < \mathrm{M}, \qquad \left| u^{\delta'} v^{-\gamma'} \frac{\sigma(w-a)}{\sigma w} \right| < \mathrm{M},$$

M étant un nombre positif fixe (arbitrairement grand). Enfin, comme pour $\varepsilon = 0$ on a

$$\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x, y)} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{uv}{xz},$$

on en déduira

$$\overline{\mathfrak{I}}_0(u, v) = \int\int u^{\delta'-1} v^{-\gamma'-1} \frac{\sigma(w-a)}{\sigma w} p'w\, \Phi(v)\, du\, dv$$

avec

$$\Phi(w) = \frac{\mathrm{Q}(0, pw, p'w)}{\mathrm{F}'_z(0, pw, p'w)},$$

et $\overline{\mathfrak{I}}_0$ ne pourra admettre comme ligne d'infinis que les ensembles E sur lesquels les conditions (21) ne sont jamais réalisées quel que soit M : à savoir

$$(u^{-\beta'} v^{\alpha'})^{\pm 1} = 0, \qquad u^{-\delta'} v^{\gamma'} \frac{\sigma w}{\sigma(w-a)} = 0.$$

Cela étant, supposons d'abord $a = 0$; d'après les conditions précédentes l'expression $p'w\,\Phi(w)$ ne peut avoir aucun pôle; elle se réduit donc à une constante et (20) est une intégrale de première espèce pour C. Je dis que la constante est identiquement nulle.

En effet $\mathfrak{I}_0$ se réduit à

$$(22) \qquad \int\int u^{\delta'-1} v^{-\gamma'-1}\, du\, dv;$$

or, faisons le changement de variables

$$(23) \qquad u = \mathrm{U}^{\lambda} \mathrm{V}^{\mu}, \qquad v = \mathrm{U}^{\rho} \mathrm{V}^{\sigma}$$

avec

$$(24) \qquad \lambda\sigma - \mu\rho = 1;$$

l'intégrale double (22) devient

$$\iint U^{\lambda\delta'-\rho\gamma'-1} V^{\mu\delta'-\sigma\gamma'-1}\, dU\, dV;$$

étendons-la au rectangle $(U_0, U; V_0, V)$; pour qu'elle reste finie, il faut que $U^{\lambda\delta'-\rho\gamma'}$ et $V^{\mu\delta'-\sigma\gamma'}$ restent finis *séparément*. Or prenons

$$U = t^{-\frac{\mu\beta'}{\alpha'}+\sigma}, \qquad V = t^{\frac{\lambda\beta'}{\alpha'}-\rho};$$

la condition $(21)_1$ sera sûrement remplie ; la seconde le sera aussi si $t^{\delta'-\frac{\beta'\gamma}{\alpha'}}$ tend vers zéro. Supposons alors, par exemple, $\mathcal{R}\left(\delta'-\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'}\right)>0$ et faisons tendre t vers zéro suivant un argument déterminé; d'après ce qui précède, on devra avoir simultanément

$$(25)\quad \mathcal{R}\left[\left(\frac{\lambda\beta'}{\alpha'}-\rho\right)(\mu\delta'-\sigma\gamma')\right]>0, \qquad \mathcal{R}\left[\left(-\frac{\mu\beta'}{\alpha'}+\sigma\right)(\lambda\delta'-\rho\gamma')\right]>0.$$

Or il est toujours possible [1] de trouver des nombres $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ satisfaisant à (24) sans vérifier à la fois les relations (25).

Ainsi donc $Q(0, y, z)$ doit être identiquement nul; et, procédant de la même façon pour $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k, \ldots$, on montrera de même que $Q(x, y, z)$ doit être identiquement nul, contrairement à notre hypothèse initiale : l'existence de la courbe polaire C est donc inadmissible.

Supposons maintenant $a \neq 0$ et soit $\lambda \equiv \mathcal{R}\left(\delta'-\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'}\right)>0$ [c'est-à-dire $\mathcal{R}(\alpha)>0$]. Faisons tendre u vers zéro [2] suivant un argument

---

(1) On prendra, par exemple, $\lambda=\alpha'+\varepsilon_1$, $\mu=0$, $\rho=\beta'+\varepsilon_2$, $\sigma=\frac{1}{\alpha'}+\varepsilon_3$, les $|\varepsilon_i|$ étant arbitrairement petits; le premier membre de $(25)_2$ différera très peu de $\mathcal{R}\left(\delta'-\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'}\right)$; il sera donc positif; mais le premier membre de $(25)_1$ sera égal à $\mathcal{R}\left[-\frac{\gamma'}{\alpha'}\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)\right]$ (avec une erreur relative très faible). Son signe dépendra donc de celui de ε_1 et ε_2. — Le raisonnement s'étend à $\mathcal{R}\left(\delta'-\frac{\beta'\gamma}{\alpha'}\right)=0$, à condition de faire tendre t vers 0 suivant une spirale convenable.

(2) Ou vers ∞, si $\lambda<0$.

bien déterminé et prenons [1]

$$v = u^{\frac{\beta'}{\alpha'}}(1 + t u^{\lambda}), \tag{26}$$

la variable t devant tendre vers une limite finie non nulle; pour M assez grand, les conditions (21) seront sûrement réalisées. Or, comme tout à l'heure, on voit d'abord que la fonction $\wp' w \Phi(w)$ ne peut admettre dans un parallélogramme des périodes que deux pôles distincts au plus : l'un, d'ordre k, équivalent à $w = 0$, l'autre, d'ordre k', équivalent à $w = a$. Mais, si l'on fait le changement de variables (26) on aura

$$\bar{\mathfrak{Z}}_0 = \int\int u^{\delta' - \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'} - \lambda - (k-1)\lambda - 1} \Psi(t, u)\, dt\, du,$$

$\Psi(t, u)$ restant bornée quand t et u varient comme il a été dit; pour $k > 1$, $\bar{\mathfrak{Z}}_0$ posséderait $u = 0$ comme ligne d'infinis, ce qui est inadmissible.

Posons de même $v = e^{\frac{a}{\alpha'}} u^{\frac{\beta'}{\alpha'}}\left(1 + t u^{-\lambda}\right)$, u croissant indéfiniment (suivant un argument déterminé) et t tendant vers une limite finie. On montrera encore, au moyen de ce nouveau changement de variable, que $w = a$ ne peut être qu'un pôle du premier ordre au plus pour $\wp' w \Phi w$; on peut donc écrire

$$\wp' w\, \Phi(w) = \mathrm{A} \frac{\sigma(w - b)\, \sigma(w + b - a)}{\sigma w\, \sigma(w - a)}.$$

Mais on aurait alors

$$\bar{\mathfrak{Z}}_0(u, v) = \mathrm{A} \int\int u^{\delta' - 1} v^{-\gamma' - 1} \frac{\sigma(w - b)\, \sigma(w + b - a)}{\sigma^2 w}\, du\, dv,$$

expression qui est développable suivant les puissances entières et positives de a et b (le développement étant uniformément convergent pour a et b intérieurs à des régions bornées quelconques de leurs plans complexes). Chacun des termes ne peut admettre d'autre ligne d'infinis que les ensembles E; mais le premier terme se réduit à (22); ainsi, on a $\mathrm{A} = 0$, et l'on retombe sur la même conclusion que plus haut.

---

(1) Ou $v = u^{\frac{\beta'}{\alpha'}}\left(1 + \frac{t}{\operatorname{Log} u}\right)$ pour $\lambda = 0$

18. *Application du théorème de Nœther. La démonstration de M. Picard.* — Supposons qu'on ait établi que (20) doit être une intégrale de première espèce de la courbe elliptique C; pour $p_g > 1$ on pourra encore démontrer de la façon suivante l'impossibilité de l'existence de la courbe polaire C.

Tout d'abord, la courbe C *ne peut constituer l'intersection totale de* F *par le plan* $x=0$: car l'intégrale (20) où Q $(0, y, z)$ est un polynome de degré $\leqq m-4$, non identiquement nul, ne peut être une intégrale de première espèce pour la courbe elliptique C, d'ordre m. Or, si la courbe C n'est pas l'intersection complète de F par une seconde surface, on peut toujours supposer (pour simplifier l'écriture) que la transformation birationnelle qui a ramené C dans le plan $x=0$ a été choisie de telle sorte que ce plan coupe F suivant deux courbes seulement, d'équations $\varphi=0$ et $\psi=0$, de degrés respectifs p et q (avec $p+q=m$). Comme tout point d'ordre r pour φ et d'ordre s pour ψ est d'ordre $r+s-1$ au moins pour Q $(0, y, z)$, on peut écrire d'après le théorème de Nœther :

$$Q(0, y, z) = A\varphi + B\psi,$$

A et B étant deux polynomes de degrés $q-4$ et $p-4$; il résulte d'ailleurs du même théorème que B sera adjoint à la courbe elliptique C, d'ordre p, ce qui est absurde.

Ainsi, que C soit ou non l'intersection complète de F par le plan $x=0$, le polynome Q $(0, y, z)$ doit être identiquement nul. Procédant alors comme au n° 15, on montrera que $\int \frac{Q'_x(0, y, z)}{F'_z(0, y, z)} dy$ doit être une intégrale de première espèce pour C; mais Q'_x est au plus de degré $m-5$; comme tout à l'heure, on a donc $Q'_x(0, y, z) \equiv 0$ et d'une façon générale $\frac{d^k}{dx^k} Q(0, y, z) = 0$. $Q(x, y, z)$ doit donc être identiquement nul, contrairement à notre hypothèse.

Notre lemme établi, la démonstration s'achève comme dans le Mémoire de M. Picard. Nous la rappellerons rapidement.

Supposons que l'on ait $p_g \geqq 2$; F possédera deux intégrales doubles distinctes de première espèce : ainsi le rapport $G_2 : G_1$ des deux fonctions G (u, v) correspondantes ne se réduira pas à une constante, et, par suite, la différence

$$\text{Log}\, G_2(u,v) - \text{Log}\, G_1(u,v) = j_2(x,y,z) - j_1(x,y,z)$$

des intégrales de différentielles totales ne se réduira pas à une constante. Cela étant, faisons décrire au point (x,y,z) un cycle linéaire *quelconque* de F; u et v se transformeront en $au+b$ et $cv+d$; G_1 et G_2 deviendront $G_1 : ac$ et $G_2 : ac$; par suite, *sur tout cycle* de F l'intégrale de première espèce $j_2 - j_1$ (non constante) devrait admettre comme période un multiple de $2\pi i$, ce qui est absurde.

19. *Théorème IV.* — Le mode de démonstration employé plus haut pour établir que $j(x,y,z)$ est une intégrale simple de première espèce entraine l'importante conséquence que voici :

Théorème IV. — *Si la surface* F *est de genre géométrique* 1, *et si elle possède une courbe effectivement canonique, le genre de cette courbe* (ou de chacune de ses composantes irréductibles) *ne peut dépasser l'unité* (1).

En effet, l'intégrale $j(x,y,z)$ ne pouvant posséder aucune courbe logarithmique, la courbe $Q=0$ (ou chacune de ses composantes) doit se retrouver parmi les courbes polaires de $I+J+\text{Log}\Delta F'_z$; cette courbe (ou chacune de ses composantes) est donc de genre 1 au plus.

Dès maintenant, nous pouvons donc affirmer que si, pour $p_g = 1$, la surface F possède une courbe canonique propre *irréductible, le genre linéaire* $p^{(1)}$ *de* F *est égal à* 1.

20. *Théorème V; cas général.* — Rappelons maintenant une notion introduite encore par M. Émile Picard. Une expression

$$u = \int e^{\int P\,dx + Q\,dy}(H\,dx + K\,dy)$$

[P, Q, H, K, fonctions rationnelles du point analytique (x,y,z) de F] sera dite *de première espèce* si elle est une fonction partout régulière

(1) Pour donner au théorème toute sa signification, on pourra toujours supposer la surface F dépourvue de courbes exceptionnelles.

de sa limite supérieure; une telle expression restera donc finie dans les mêmes conditions qu'une intégrale de Picard de première espèce; elle ne peut cesser d'être bornée que lorsqu'on fait décrire à (x, y, z) un nombre indéfiniment croissant de cycles linéaires sur F. Cela étant, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème V. — *Pour* $p_g = 1$, *ou bien* u *et* v *doivent être des expressions de première espèce, ou bien, pour une valeur déterminée de la constante* h, *l'une des combinaisons* uv^h *ou* $\operatorname{Log} u + hv$ *ou* $u + hv$ *est une expression de première espèce.*

[Dans le premier cas, on doit avoir $u = e^{w_1}$, $v = e^{w_2}$; dans le second, $u = e^{w_1}$, $v = w_2$, w_1 et w_2 étant deux intégrales de Picard de F. Dans le troisième cas, on doit avoir $\mathrm{I} = \mathrm{J}$ dans (8).]

Reprenons la formule

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \, dx \, dy = \iint G(u, v) \, du \, dv,$$

les notations restant les mêmes qu'au n° 14; on en déduit aussitôt :

$$\iint e^{-J(x,y,z)} \frac{Q(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \, dx \, dy = \iint du \, dv. \tag{27}$$

Or, en vertu de sa construction même, l'intégrale qui figure au premier membre conserve une valeur finie, quel que soit le continuum ∞^2 de la variété riemannienne ∞^4, F, auquel on l'étend (¹). Il en sera évidemment ainsi lorsque u et v seront deux expressions de première espèce. Écartons cette solution immédiate, et voyons si le problème en comporte d'autres.

Or, admettons que u, par exemple, ne soit pas de première espèce, mais *possède une ligne d'infinis* C (nécessairement algébrique) et supposons que v ne soit pas constant sur C. En deux points distincts de C faisons passer deux courbes $v = v_0$, $v = v_1$ $(\neq v_0)$; ces deux courbes seront distinctes de C et délimiteront avec C et $u = u_0$ (fini) une région de F sur laquelle le second membre de (27) ne pourra rester fini, ce

(¹) Il est loisible de supposer que ce continuum ne comprend pas une infinité de cycles superficiels de F.

qui est inadmissible. Il faut donc que *le long de* C v *garde une valeur constante* qui peut être infinie ou non; mais dans tous les cas ([1]) u et v peuvent être développés autour de C comme il a été dit au n° 8.

Supposons que relativement à C (s) soit du type général; moyennant une transformation birationnelle préalable on peut admettre que C est située dans le plan $x = 0$; on écrira alors les équations (2) pour u et v, et (en supposant $v = 1$ pour simplifier l'écriture) on aura

$$(28) \qquad u = v^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{\int \left(B_0 - \frac{\alpha}{\beta} D_0\right) dy} [1 + x C_1(y) + \ldots];$$

d'après les résultats du n° 9 ([2]), $uv^h \left(\equiv uv^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ devra rester fini et régulier sur C.

Soit alors C′ une autre ligne d'infinis de u qui rencontre C en M; il y aura ([3]) une autre expression $uv^{h'}$ qui restera finie et régulière le long de C′. Or, la comparaison de ces résultats au point M montre que l'on a nécessairement $h' = h$, de sorte que uv^h reste fini et régulier le long de C et C′; et l'on verra ainsi, de proche en proche, que uv^h reste fini et régulier sur toute la surface F.

Ce résultat suppose toutefois que s'il existe plus d'une ligne d'infinis, *deux lignes d'infinis quelconques peuvent être reliées par une chaîne de lignes d'infinis telles que deux lignes consécutives soient sécantes.* Or, supposons qu'il existe deux lignes d'infinis C, C′ sans point commun. Moyennant une transformation birationnelle possédant deux points fondamentaux sur C et C′ on pourra toujours admettre que sur la surface transformée les homologues de C et C′ sont coupées par deux exceptionnelles; mais ces exceptionnelles font partie de l'intersection de Q avec F; elles peuvent donc être reliées par une chaîne de lignes d'infinis ([4]) de u mutuellement sécantes; et, de proche en proche, on est assuré que uv^h restera fini sur C et C′.

([1]) *Voir* la note de la page 278.

([2]) C'est immédiat si C est elliptique. Lorsque C est rationnelle, on observera que u ne peut rester fini le long d'une courbe $v = \text{const.}$ [comme cela doit être d'après (27)] que si l'exponentielle de (28) se réduit à l'unité. On est alors dans le cas d'exception du n° 11.

([3]) On verra aisément que dans l'hypothèse actuelle u ne peut être du type général sur C et du type exceptionnel sur C′.

([4]) *A priori* ces valeurs peuvent être finies : on sait seulement que toute composante

Montrons maintenant que *si u et v ne sont pas des expressions de première espèce, on a $uv^h = e^{w}$, $w(x, y, z)$ étant une intégrale de Picard de première espèce de* F.

En effet, faisons décrire à (x, y, z) un cycle linéaire *quelconque* de F; si u et v sont remplacés par $A(u+a)$ et $B(v+b)$ (a ou $b \neq 0$), le développement de $A(u+a)B^h(v+b)^h$ relativement à a et b montre aussitôt que u et v doivent, séparément, rester finis sur F; puisqu'on a supposé qu'il n'en est pas ainsi, c'est que *toutes* les déterminations de u et v sont de la forme Au et Bv; $\frac{d \operatorname{Log} u}{dx}$ et $\frac{d \operatorname{Log} u}{dy}$ étant uniformes sur F et sans singularités essentielles, sont rationnelles en x, y, z et l'on a (avec la signification de l'énoncé) $u = e^{w_1}$, $v = e^{w_2}$.

21. *Cas exceptionnels.* — On étendra aisément les considérations précédentes au cas où l'une seule (soit u) des expressions u et v est du type général dans le domaine de C. Le seul cas nouveau à envisager sera celui où v est du type logarithmique. On montrera encore qu'il doit exister une combinaison $\operatorname{Log} u + hv$ qui reste finie et régulière sur C, et en procédant comme à la fin du n° 20, on verra que si u et v ne sont pas de première espèce, ils sont de la forme annoncée $u = e^{w_1}, v = w_2$.

Supposons enfin que, dans le domaine de C, u et v soient tous deux du type exceptionnel logarithmique; on pourra écrire, dans le domaine de C :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\alpha_m(y)}{x^m} + \ldots + \frac{\alpha_1(y)}{x} + c \operatorname{Log} x + \int \alpha(y)\, dy + \ldots, \\ v &= \frac{\beta_n(y)}{x^n} + \ldots + \frac{\beta_1(y)}{x} + k \operatorname{Log} x + \int \beta(y)\, dy + \ldots, \end{aligned} \right.$$

les coefficients α_i, β_i étant des fonctions rationnelles du point analytique de C. Je dis qu'*il existe une combinaison linéaire à coefficients constants $au + bv$ qui reste finie et régulière le long de* C.

Tout d'abord, moyennant une substitution linéaire à coefficients

de Q est une ligne *singulière* de (S); mais, de proche en proche, on voit aussitôt que les valeurs constantes de u prises sur ces lignes singulières sont infinies.

constants sur u et v [1], on peut supposer $n = m$; tirons alors x de $(29)_2$ et portons-le dans $(29)_1$; comme u doit rester fini le long d'une courbe $v = \text{const.}$, le coefficient $\alpha\beta^{-1}$ de v devra être une constante (qu'on peut supposer égale à 1). De même, exprimons que le second terme du développement de u suivant les puissances décroissantes de $v^{\frac{1}{m}}$ reste fini quel que soit y (donc constant), ou, ce qui revient au même, annulons le terme en x^{-2m} du déterminant $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$; il viendra

$$(30) \qquad m\alpha_m(\alpha'_{m-1} - \beta'_{m-1}) - (m-1)\alpha'_m(\alpha_{m-1} - \beta_{m-1}) = 0.$$

Cela étant, supposons d'abord que l'on ait $\alpha_m(y) \equiv [\gamma(y)]^m$, *$\gamma$ étant rationnelle en y, z*; la transformation $x \mid \gamma x$ permettra de supposer $\gamma \equiv 1$ pour l'équation transformée; et l'on devra avoir $\alpha_{m-1} - \beta_{m-1} = \text{const.}$ Mais moyennant une transformation $x \mid x(1 + \lambda x)$ on pourra prendre $\beta_{m-1} \equiv 0$, d'où

$$\alpha_{m-1}(y) \equiv c_{m-1} (= \text{const.});$$

et un procédé analogue permettra de supposer

$$\alpha_{m-2}(y) \equiv c_{m-2}, \qquad \beta_{m-2}(y) \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_1(y) \equiv c_1,$$
$$\beta_1(y) \equiv 0, \qquad \alpha(y) \equiv \beta(y).$$

Si $\int \alpha\, dy$ est une fonction rationnelle de y et z on pourra continuer encore, et, en exprimant toujours que $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ ne devient pas infini sur C on mettra u et v sous la forme

$$(31) \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x^m} + \dfrac{c_1}{x^{m-1}} + \ldots + \dfrac{c_{m-1}}{x} + c \operatorname{Log} x + c_{m+1} x + \ldots + c_{2m} x^m + a(y) x^{m+1} + \ldots \\ v = \dfrac{1}{x^m} \qquad\qquad\qquad\qquad + k \operatorname{Log} x \qquad\qquad\qquad\qquad + b(y) x^{m+1} + \ldots \end{cases}$$

---

[1] Cette opération est légitime : car, d'une part, elle laisse $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ invariant (à un facteur constant près); d'autre part, si u devient infini sur C et v, constant, toute combinaison $au + bv$ deviendra infinie sur C_1 en général

Or, supposons, par exemple, $c_1 \neq 0$ (¹); on tirera de (31) :

$$\frac{u}{v} - 1 = c_1 x + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + (c-k) x^m \operatorname{Log} x + \ldots;$$

résolue par rapport à x, puis introduite dans $(31)_1$, cette formule donne

$$(32) \qquad u - r\left[\frac{u}{v} - 1, \operatorname{Log}\left(\frac{u}{v} - 1\right)\right] = f(y) x^{2m+1} + \ldots,$$

r étant une fonction rationnelle de ses deux arguments, et les termes négligés étant, pour x infiniment petit, d'ordre supérieur à x^{2m+1}. Posons $u - r = w$; le système (²)

$$w = f(y) x^{2m+1} + \ldots, \qquad v = x^{-m} + \ldots$$

doit avoir sa solution uniforme lorsque v tourne autour de l'origine : car on peut toujours faire tourner u en même temps autour de o de manière que $\operatorname{Log}\left(\frac{u}{v} - 1\right)$ et, par suite, w reviennent à leurs valeurs initiales. Or remplaçons x par εx, w par $\varepsilon^{2m+1} w$, v par $\varepsilon^{-m} v$ et faisons tendre ε vers o; à la limite, le système précédent ne pourra avoir sa solution uniforme autour de $v = 0$ que si $m = 1$: montrons qu'on aura alors $c = k$, et notre théorème sera établi (sous les hypothèses faites plus haut).

En effet, pour $c \neq k$, on pourrait remplacer u et v par des combinaisons linéaires de la forme

$$u = \frac{1}{x} + c_1 x + x^2 \bar{\alpha}(y) + \ldots, \qquad v = \operatorname{Log} x + x^2 \bar{\beta}(y) + \ldots,$$

(¹) Si l'on avait $c_1 = 0$, le procédé s'appliquerait encore moyennant des modifications faciles. Soient par exemple $c_1 = 0 = c_2 = \ldots = c_{i-1} \neq c_i$, et soit δ le p. g. c. d. de m et i; on développera x^δ suivant les puissances de $\frac{u}{v} - 1$ et d'un logarithme; le seul cas nouveau serait celui où u contiendrait des termes d'exposant ($< m+1$) non divisible par δ. Soient x^j un tel terme et δ' le p.g.c.d. de j et δ; on pourra développer $x^{\delta'}$ suivant les puissances positives croissantes d'une fonction rationnelle de u et v (et d'un logarithme); et en opérant ainsi de proche en proche, on établira une égalité de la forme (32).

(²) Dans ce qui suit, on suppose $f'(y) \not\equiv 0$, ce qui n'entraîne aucune restriction essentielle.

d'où l'on tire

$$v + \operatorname{Log} u = x^2 \gamma(y) + \ldots.$$

Changeons x en εx, u en $\varepsilon^{-1} u$, v en $\varepsilon^2 v + \operatorname{Log}\varepsilon$ et faisons tendre ε vers o; à la limite nous obtenons un système dont la solution n'est pas uniforme.

Il nous reste à discuter les hypothèses précédemment écartées. Supposons d'abord que $\int \alpha dy$ *ne soit pas rationnelle en* (y, z); on aura :

$$u = \frac{1}{x^m} + \frac{c_1}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{x} + c \operatorname{Log} x + \int \alpha(y)\, dy + x a_1(y) + \ldots,$$

$$v = \frac{1}{x^m} + \qquad\qquad k \operatorname{Log} x + \int \alpha(y)\, dy + x b_1(y) + \ldots;$$

le déterminant $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$ aura $x = 0$ comme ligne polaire d'ordre positif, à moins que l'on n'ait

$$\begin{array}{l}
(m-1) c_1 \alpha(y) - m(a'_1 - b'_1) = 0, \\
(m-2) c_2 \alpha(y) + (m-1) c_1 b'_1 - m(a'_2 - b'_2) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(c-k) \alpha(y) + \ldots\ldots\ldots\ldots + m(a'_m - b'_m) = 0.
\end{array}$$

En vertu de l'hypothèse faite sur $\alpha(y)$ on aura

$$c_1 = 0, \qquad \text{puis} \qquad c_2 = 0 = \ldots = c_{m-1} = c - k$$

et $u - v$ sera fini et régulier le long de C.

Supposons enfin que $\sqrt[m]{\alpha_m(y)}$ *ne soit pas rationnelle en* (y, z). La relation (30) donnera $\alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$, et l'on aurait de même

$$\alpha_{m-2} = \beta_{m-2}. \qquad \alpha_1 = \beta_1,$$

puis

$$m \alpha_m (\alpha - \beta) = -(c - k) \alpha'_m.$$

Je dis que l'on doit avoir $c = k$: en effet, dans le cas contraire, substi-

---

(1) Le cas où certaines puissances $\alpha_m^{\frac{p}{m}}$ seraient rationnelles se traiterait par un procédé analogue.

tuons $-\dfrac{m(v-u)}{k-c}$ à v comme nouvelle variable; notre système s'écrira

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_m(y)}{x^m}+\ldots+\frac{\alpha_1(y)}{x}+c\,\mathrm{Log}\,x+\int\alpha\,dy+x\overline{\alpha_1}(y)+\ldots,\\ v &= \mathrm{Log}\left[\frac{\alpha_m(y)}{x^m}\right]+x\overline{\beta_1}(y)+\ldots,\end{aligned}$$

et la condition au déterminant fonctionnel montre encore que $v-\mathrm{Log}\,u$ est de la forme $x^{m+1}f(y)+x^{m+2}g(y)+\ldots$. Faisons encore la transformation dégénérescente $x|\varepsilon x$, $u|\varepsilon^{-m}u$, $v|\varepsilon^{m+1}v-m\,\mathrm{Log}\,\varepsilon$; à la limite nous obtiendrons le système

$$u=\frac{\alpha_m(y)}{x^m},\qquad v-\mathrm{Log}\,u=x^{m+1}f(y),$$

dont la solution ne peut être uniforme en u et v [1]. On doit donc avoir $c=k$ et la différence $u-v$ reste finie et régulière dans le voisinage de C.

Procédant alors comme au n° 20, on verra qu'il existe une combinaison à coefficients constants (soit $u+hv$) qui reste finie et régulière sur toute ligne d'infinis de u ou v, donc sur F. Et, en raisonnant comme à la fin du n° 20, on montrera que si u et v ne sont pas de première espèce, du et dv admettent même multiplicateur relativement à tout cycle linéaire de F. Nous pourrons donc écrire, avec les notations du n° 1,

$$u=\int e^{\mathrm{I}}(\mathrm{H}\,dx+\mathrm{K}\,dy),\qquad v=\int e^{\mathrm{I}}(\mathrm{L}\,dx+\mathrm{M}\,dy).$$

22. *Résolution du problème* (B_2) *dans le cas où les courbes* $u=$ const. *sont algébriques*. — Pour ne pas interrompre l'exposition, nous allons résoudre directement le problème actuel, (B_2), dans le cas où les courbes $u=$ const. sont algébriques. La famille précédente dépend algébriquement de la constante arbitraire et constitue nécessaire-

---

[1] Car, si l'on étudie le système dans le voisinage d'un pôle $\dfrac{\alpha'_m}{\alpha_m}$ (soit $y=0$), on obtiendra le système réduit $u=x^{-m}y^i$, $v-\mathrm{Log}\,u=x^{m+1}y^j$.

ment un faisceau (1). Moyennant une transformation birationnelle préalable, on peut donc supposer que la famille est découpée par les plans $v = \text{const.}$, de sorte que le système ($\mathcal{S}$) s'écrit

$$(33) \qquad du = e^{\int P\,dx}\,dx, \qquad dv = e^{\int R\,dx + S\,dy}(L\,dx + dy).$$

Nous allons déterminer dans quels cas l'intégrale générale de (33) est uniforme.

A priori, $P(x, y, z)$ peut dépendre de x, y, z (considérés un instant comme variables indépendantes); mais, en vertu de l'équation de la surface, P et x sont liés par une équation algébrique à coefficients *numériques*, $\mathcal{F}(P, x) = 0$; et P, rationnelle en x, y, z doit être uniforme en u. Dès lors, la détermination de la fonction uniforme $x(u)$ par la première équation (33) n'est autre qu'un problème (B_2) relatif à $\mathcal{F}$. On peut donc écrire, soit

$$du = e^{kw}\,dw$$

(k, constante numérique; w, intégrale de première espèce de la courbe elliptique $\mathcal{F} = 0$); soit l'équation de Briot et Bouquet

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^m = A_1 P(x)$$

[m, entier positif; A_1, constante d'intégration; $P(x)$, polynome à coefficients numériques]; et l'on aura $x = \varphi\left[\frac{1}{k}\operatorname{Log}(Au + B)\right]$ ou $x = \varphi(Au + B)$, φ étant, soit une fonction elliptique, soit une dégénérescence (exponentielle ou rationnelle).

Passons à $(33)_2$ et faisons-y $u = \text{const.}$, d'où $x = \bar{x}(= \text{const.})$; y ne dépendra que de v et devra être uniforme. Or d'une manière générale supposons que l'intersection de F par le plan $x = \bar{x}$ se compose de plusieurs courbes γ, d'équations

$$x = \lambda, \qquad g(x, y, z) = \mu \qquad (g, \text{ fonction rationnelle}),$$

et qui varient dans un même faisceau, $h(\lambda, \mu) = 0$. Le genre de h ne

(1) Car, par un point (x, y, z) de la surface F, il ne passe qu'une seule courbe intégrale de l'équation $H\,dx + K\,dy = 0$.

pourra d'ailleurs dépasser l'unité : car λ est une fonction elliptique de u (dégénérée ou non); μ est une fonction algébrique de λ, uniforme en u : c'est donc aussi une fonction elliptique de u (dégénérée on non).

Ceci posé, sur une courbe γ, $(33)_2$ ne peut donner pour y et z des fonctions uniformes de v que si γ est de genre 0 ou 1. Supposons d'abord que γ soit de genre 1; on devra avoir alors :

$$S(\overline{x}, y, z) \equiv \frac{1}{r}\frac{dr}{dy} + \varepsilon r \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

$r(\overline{x}, y, z)$ désignant la différentielle de première espèce attachée à γ. *A priori* r est algébrique en $\overline{x}$; montrons qu'on peut supposer aussi r *rationnelle en* (λ, μ). En effet, faisons décrire à (λ, μ) sur la surface de Riemann (λ, μ) un chemin fermé *quelconque;* la différentielle $r\,dy$ doit se reproduire à un facteur près, qui, *a priori*, peut dépendre de x; les rapports des coefficients de la fonction $r(\overline{x}, y, z)$ — rationnelle en y et z — sont donc rationnels en (λ, μ) et l'on a $r = r_1(x)\, r_2(\lambda, \mu; y, z)$, r_2 étant rationnelle en λ, μ, y, z et r_1, algébrique en x. Or pour $\varepsilon = 0$, on peut prendre $r_1 \equiv 1$ sans changer S, et, pour $\varepsilon = 1$, l'expression $S - \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{dy}$ étant rationnelle en (λ, μ), r_1 doit l'être aussi, et l'on peut encore supposer $r_1 \equiv 1$.

Cela étant, nous considérerons d'abord le cas $\varepsilon = 1$. *Les périodes de* $\int r\,dy$ *sont alors indépendantes de* x : car, si l'on fait décrire à (y, z) un cycle quelconque de γ, $\frac{dv}{dy}$ se reproduira multiplié par e^{Ω}, Ω étant la période correspondante de $\int r\,dy$; or ce multiplicateur doit être constant. Géométriquement, on peut dire que F *possède un faisceau de courbes elliptiques de module constant.*

Faisons alors varier x; nous aurons [1]

$$\int R(x, y, z)\,dx + S(x, y, z)\,dy = \operatorname{Log} r(\lambda, \mu, y, z) + \int r(\lambda, \mu, y, z)\,dy + s(x),$$

s ne dépendant que de x; d'où

$$R(x, y, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \int \frac{\partial r}{\partial x}\,dy + s'(x);$$

---

[1] Dans l'intégrale du second membre, x est regardé comme une constante.

mais les périodes de $\int r dy$ étant indépendantes de x, celles de $\int \frac{\partial r}{\partial y} dy$ sont nulles; cette dernière intégrale est donc rationnelle ([1]) en λ, μ, y, z et $s'(x)$ est rationnelle en (λ, μ), soit $s'(x) = X(\lambda, \mu)$; on a alors

$$dv = e^{\int X dx + \int r dy}(r dy + L_1 dx),$$

d'où

$$v = e^{\int X dx + \int r dy} + s_1(x)$$

avec

$$s'_1(x) = e^{\int X dx + \int r dy}\left(L_1 - X - \int \frac{\partial r}{\partial x} dy\right).$$

Or quand y a décrit un cycle de γ, $s'_1(x)$ doit rester invariable; mais les périodes de $\int r dy$ ne peuvent se réduire toutes à des multiples de $2\pi i$; il faut donc que la parenthèse, et, par suite, que $s'_1(x)$ soit identiquement nulle : on en déduit que l'intégrale générale de (33) est alors de la forme

$$x = \varphi(Au + B), \qquad y = \chi\left[\operatorname{Log}(Cv + D) - \int X(\lambda, \mu)\, d\lambda\right]$$

ou

$$x = \varphi[k' \operatorname{Log}(Au + B)], \qquad z = \chi\left[\operatorname{Log}(Cv + D) - \int X(\lambda, \mu)\, d\lambda\right],$$

χ étant la fonction elliptique définie par l'inversion de $\int r dy$ et ψ étant une fonction aux mêmes périodes. Les conditions d'uniformité du système précédent sont d'ailleurs faciles à écrire.

Déterminons dans ce cas *la nature de la surface algébrique* F. On a déjà vu que F possède un faisceau (elliptique ou rationnel) de courbes elliptiques γ, de module constant. Supposons d'abord le faisceau elliptique; moyennant une transformation birationnelle sur λ et μ on pourra écrire

$$x = l(\lambda_1, \mu_1), \qquad g(x, y, z) = k(\lambda_1, \mu_1)$$

avec

$$\mu_1^2 = 4\lambda_1^3 - g_2\lambda_1 - g_3,$$

([1]) La rationalité relativement à (λ, μ) est une conséquence de la méthode de décomposition en éléments simples. Il résulte d'ailleurs des considérations développées plus loin qu'on peut supposer r indépendant de x.

l et k étant rationnelles en λ_1 et μ_1, et λ_1, μ_1 s'exprimant rationnellement en x, y, z. Soit $p(u_1 | \omega, \omega')$ la fonction de Weierstrass aux invariants g_2 et g_3 $[u_1 = Au + B$ ou $k' \operatorname{Log}(Au + B)]$ et soit

$$(34) \qquad \eta^2 = 4\xi^3 - g_2^\star \xi - g_3^\star$$

l'équation d'une cubique correspondant birationnellement aux courbes γ. On aura

$$x = l(\lambda_1, \mu_1), \qquad y = m(\xi, \eta; \lambda_1, \mu_1), \qquad z = n(\xi, \eta; \lambda_1, \mu_1),$$

m et n étant rationnelles en ξ, η et algébriques en λ_1 et μ_1. Mais λ_1 et μ_1 sont des fonctions uniformes de u_1 ; il en résulte que, si y et z ne sont pas rationnelles en λ_1 et μ_1, on pourra trouver deux entiers M et N tels que y et z admettent les périodes $2M\omega$ et $2N\omega'$ relativement à u_1, et, par suite, soient rationnelles en $\lambda' \equiv p(u_1 | M\omega, N\omega')$ et $\mu' \equiv (u_1 | M\omega, N\omega')$. Soit

$$(35) \qquad \mu'^2 = 4\lambda'^3 - g_2' \lambda' - g_3'$$

la relation entre λ' et μ'; appelons $F^\star$ la surface hyperelliptique (elliptique) dont les points correspondent biunivoquement aux couples de points des cubiques (34) et (35). Entre les surfaces F et $F^\star$ on vient d'établir une correspondance $[1, \nu]$: la surface F, image d'une involution sur la surface $F^\star$, est donc une surface de Picard (elliptique), ou un cylindre elliptique, ou un plan.

De même, si le faisceau des courbes γ est linéaire, on montrera (¹) que F se réduit à un cylindre elliptique ou à un plan.

Prenons maintenant $\varepsilon = 0$; on trouvera

$$dv = e^{\int X\,dx}(r\,dy + L_1\,dx),$$

d'où (²)

$$v = e^{\int X\,dx} \int r\,dy + s_2(x).$$

(¹) En vertu du théorème de MM. Castelnuovo et Enriques sur les involutions appartenant à une surface réglée [*Ann. di Mat.*, 3ᵉ série, t. 6, 1901, p. 213, (nº 17)].

(²) *Voir* la note de la page 34.

Faisons décrire à y, successivement, deux cycles de γ; v va devenir

$$S_i v = e^{\int X\,dx}\left(\int r\,dy + \Omega_i\right) + s_2(x) \qquad (i = 1 \text{ ou } 2);$$

écrivons que $S_i v = C_i v + D_i$; on trouvera $C_i = 1$ et le rapport des périodes de $\int r\,dy$ devra être indépendant de x. Ainsi *les courbes γ sont encore de module constant et la surface* F *est l'une de celles qui viennent d'être énumérées*. On peut donc supposer que r est indépendant de x; mais alors on doit avoir

$$X\,e^{\int X\,dx}\int r\,dy + s_2'(x) = e^{\int X\,dx}\,L_1,$$

ce qui entraîne $X = 0$, $s_2'(x) = X_1(x)$, X_1 étant rationnelle.

Dans les deux cas précédents ($\varepsilon = 0$ ou 1), on peut donc résumer les résultats obtenus en disant que l'intégrale générale de (33) est donnée par les formules

$$x = \varphi[h\,\mathrm{Log}(Au + B)] \qquad \text{ou} \qquad x = \varphi(Au + B),$$

$$y = \chi\left[V + \int X(\lambda, \mu)\,d\lambda\right], \qquad z = \psi\left[V + \int X(\lambda, \mu)\,d\lambda\right]$$

$$[V \text{ ou } e^V = Cv + D;\ x = \lambda;\ h(\lambda, \mu) = 0, \text{ relation de genre } 1].$$

Nous laisserons de côté le cas où les courbes γ sont rationnelles (1); la surface F ne peut être alors de genre géométrique un et les résultats que nous établirions ne nous seraient d'aucune utilité.

23. *Généralisation.* — Les conclusions que l'on vient d'obtenir s'étendent immédiatement au cas où l'une des familles

$$uv^h = \text{const.}, \qquad \mathrm{Log}\,u + hv = \text{const.}, \qquad u + hv = \text{const.}$$

est algébrique, le premier membre correspondant satisfaisant aux conditions du théorème V : ce premier membre s'exprime donc en (x, y, z) de la même manière que u (n° 1). On montrera dans tous les

(1) Les formules qu'on obtiendrait rentrent d'ailleurs comme cas particuliers de celles que nous établirons plus loin. (F est alors un cylindre elliptique ou un plan.)

cas que si la surface F a un genre $p_g = 1$, elle est nécessairement une surface de Picard (elliptique), possédant deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques. Soient dW_1 et dW_2 les différentielles de Picard de première espèce correspondant à ces faisceaux ; le système (s) aura l'une ou l'autre des formes suivantes (qui comprennent celles qu'on a données pour $p_g = 1$ au n° 22) :

$$u = e^{\alpha W_1 + \beta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right]}, \qquad v = e^{\gamma W_1 + \delta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right]},$$

$$u = e^{\alpha W_1 + \beta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right]}, \qquad v = \gamma W_1 + \delta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right],$$

$$u = \alpha W_1 + \beta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right], \qquad v = \gamma W_1 + \delta \left[W_2 + \int f(W_1)\, dW_1\right],$$

α, β, γ, δ étant des constantes numériques telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, et $f(W_1)$ coïncidant avec une fonction rationnelle $r(\lambda, \mu)$ des paramètres qui individualisent une courbe $\varphi(x, y, z) = \lambda$, $\psi(x, y, z) = \mu$ du faisceau $W_1 = \text{const.}$

DEUXIÈME PARTIE.

REPRÉSENTATION DES SURFACES ELLIPTIQUES.

24. *Premières conséquences de la définition. Fixation du signe d'un radical.* — On appelle *surfaces elliptiques* les surfaces algébriques $F(x, y, z)$ possédant :

1° Un faisceau, linéaire ou non, de courbes elliptiques K ayant toutes le même module ;

2° Un faisceau elliptique de courbes algébriques C (distinct du faisceau précédent). Nous allons construire ces surfaces.

Les équations d'une courbe K peuvent s'écrire :

$$f(x, y, z) = S, \qquad g(x, y, z) = T, \tag{36}$$

f et g étant rationnelles en x, y, z et S, T vérifiant une relation algébrique

$$(37)\qquad \vartheta(S, T) = 0.$$

De même, les équations d'une courbe C sont de la forme

$$(38)\qquad h(x, y, z) = \lambda, \qquad k(x, y, z) = \mu,$$

h et k étant rationnelles et λ, μ satisfaisant à la relation

$$(39)\qquad \mu^2 = 4\lambda^3 - \gamma_2\lambda - \gamma_3 \qquad (\gamma_2, \gamma_3, \text{ const. numériques}).$$

Puisque les faisceaux $\{C\}$ et $\{K\}$ sont distincts, deux courbes quelconques C et K se coupent toujours en $n\,(\geqq 1)$ points. Attribuons une fois pour toutes à (λ, μ) un couple de valeurs numériques (λ_0, μ_0) satisfaisant à (39); soient C_0 la courbe correspondante et $m_0\,(x_0, y_0, z_0)$ l'un quelconque des points d'intersection de C_0 et K. Posons

$$W = a x_0 + b y_0 + c z_0 + \alpha S + \beta T,$$

a, b, c, α, β étant cinq constantes arbitrairement choisies et résolvons par rapport à x_0, y_0, z_0, W le système (compatible) formé par l'équation précédente jointe à (36), (37), (38), (39) (écrites pour m_0); W sera lié à T par une résolvante

$$(40)\qquad \varphi(T, W) = 0$$

et l'on pourra écrire

$$(41)\qquad \begin{gathered} x_0 = x_0(T, W), \qquad y_0 = y_0(T, W), \qquad z_0 = z_0(T, W), \\ S = S(T, W), \end{gathered}$$

toutes les fonctions précédentes étant rationnelles en T, W.

Cela étant, puisque les courbes K ont même module, elles peuvent être transformées birationnellement en la cubique fixe

$$(42)\qquad Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 \qquad (g_2, g_3, \text{ const. numériques}).$$

Pour définir la transformation, nous choisirons arbitrairement sur (42) un point (X_0, Y_0) auquel nous ferons correspondre l'un (T, W) des points m_0; *les formules comporteront d'ailleurs une ambiguïté de signes* que nous lèverons arbitrairement; elles s'écriront

$$(43)\quad x = x(X, Y; T, W), \qquad y = y(X, Y; T, W), \qquad z = z(X, Y; T, W),$$

les fonctions précédentes étant rationnelles en X, Y, T, W [1], et nous appellerons (43′) les formules que l'on aurait obtenues au lieu de (43) en choisissant la seconde application de K sur (42). Inversement, on aura

$$(44)\qquad X = X(x, y, z; T, W), \qquad Y = Y(x, y, z; T, W),$$

les fonctions X et Y étant rationnelles en x, y, z, T, W [1]. Enfin, on peut tirer de (43) et (44)

$$(45)\qquad W = W(x, y, z; X, Y),$$

W *étant rationnelle en* x, y, z, X, Y [1]. En effet, supposons la correspondance entre K et (42) définie seulement par un couple (x, y, z), (X, Y) de points homologues; au point (X_0, Y_0) correspondent deux points (x_0, y_0, z_0) et (x'_0, y'_0, z'_0) dont un seul appartient à C_0 (si, comme on peut le supposer, le couple donné n'a pas été choisi d'une façon particulière).

Jusqu'ici les formules (43), (44), (45) n'ont été établies que sur *une courbe* K particulière, soit $\overline{K}$; bien entendu, si l'on fait varier K (c'est-à-dire le point m_0 de C_0), les formules précédentes continueront à s'appliquer par continuité aux courbes K voisines de $\overline{K}$; mais, jusqu'à nouvel ordre, *rien ne prouve que lorsqu'on aura fait décrire à* m_0 *un cycle quelconque* $\mathcal{C}$ *sur* C_0, *les formules* (43) (*par exemple*) *coïncideront à la fin avec les formules initiales* [et non pas avec les formules (43′)].

Or, exprimons que le faisceau $\{C\}$ est de genre 1; à ce faisceau est attachée l'intégrale de différentielle totale de première espèce

$$U = \int_{(\lambda_0, \mu_0)}^{(\lambda, \mu)} \frac{d\lambda}{\mu} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy$$

n'ayant que deux périodes distinctes, soit 2ω et $2\omega'$; et l'on pourra

---

[1] Ainsi qu'en X_0, Y_0.

satisfaire à (39) en posant

$$(46) \qquad \lambda = \wp(U \mid \omega, \omega'), \qquad \mu = \wp'(U \mid \omega, \omega').$$

Cela étant, si l'on tient compte de (43), on peut écrire dans le voisinage de $\overline{K}$

$$U = \int P_1(X, Y; T, W)\, dX + Q_1(X, Y; T, W)\, dT,$$

P_1 et Q_1 étant rationnelles en X, Y, T, W. Mais sur une courbe K (T = constante), U se réduit à l'intégrale de première espèce, I, de cette courbe ; on doit donc avoir

$$P_1(X, Y; T, W) \equiv \frac{A}{Y},$$

A [déjà indépendant de (X, Y)] étant indépendant de (T, W) (puisque les périodes de U en sont indépendantes) et ne pouvant être nul (puisque les courbes C sont distinctes des K).

Or ce résultat montre déjà que l'*échange des formules* (43) *et* (43') à la suite du lacet $\mathfrak{S}$ décrit par m_0 *est impossible :* car dU, primitivement égal à $A\frac{dX}{Y}$ sur $\overline{K}$ (A, constante absolue) ne peut se permuter avec $-A\frac{dX}{Y}$: ainsi donc, *les formules* (43), (44), (45) *sont uniformément valables, sans ambiguïté de signe, sur toute la surface* F.

25. *Propriétés des couples paramétriques répondant à un point donné de* F. — Mais il y a plus : moyennant une transformation d'homogénéité sur λ et μ on pourra supposer A = 1 et l'on aura ainsi

$$U = \int_{(X_0, Y_0)}^{(X, Y)} \frac{dX}{Y} + \int_{(T_0, W_0)}^{(T, W)} Q(T, W)\, dT.$$

Or déplaçons m sur C_0 en faisant varier (T, W) par continuité ; nous aurons U = 0, et (m coïncidant avec m_0) $X = X_0$, $Y = Y_0$; on doit donc avoir $Q(T, W) \equiv 0$ et par suite

$$(47) \qquad U = \int_{(X_0, Y_0)}^{(X, Y)} \frac{dX}{Y}.$$

Soit alors 2Ω, $2\Omega'$ un couple de périodes fondamentales de l'intégrale de première espèce I de (42); on pourra prendre (1)

$$(48) \qquad X = \wp(U + C \mid \Omega, \Omega'), \qquad Y = \wp'(U + C \mid \Omega, \Omega'),$$

et en vertu de (38), (46), (47) et (48) les équations (43) entraîneront la relation

$$(49) \qquad \wp(U \mid \omega, \omega') = R[\wp(U \mid \Omega, \Omega'); T, W]$$

où R est rationnelle en $\wp$, T, W. On aura donc

$$(50) \qquad \begin{cases} \Omega = a\omega + b\omega' \\ \Omega' = c\omega + d\omega' \end{cases} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

a, b, c, d étant quatre entiers : ainsi, *on passe de* $\wp(U \mid \Omega, \Omega')$ *à* $\wp(U \mid \omega, \omega')$ *par une transformation d'ordre* $|ad - bc|$; de plus, (T, W) étant donné, et U étant déterminé (mod 2ω, $2\omega'$) l'équation (49) est vérifiée par $|ad - bc|$ valeurs de U, de la forme

$$U = U_0 + 2\lambda\omega + 2\mu\omega',$$

congrues mod 2ω, $2\omega'$, mais incongrues mod 2Ω, $2\Omega'$: en d'autres termes, *l'ordre* $|ad - bc|$ *de la transformation est précisément égal au nombre* n *des points d'intersection d'une courbe* C *et d'une courbe* K (2), et l'on peut ajouter que ces n points sont toujours distincts.

Ainsi, la surface F est représentée paramétriquement par les équations

$$(51) \qquad \begin{cases} x = \bar{x}[\wp(U \mid \Omega, \Omega'), \wp'(U \mid \Omega, \Omega'); T, W], \\ y = \bar{y}[\wp(U \mid \Omega, \Omega'), \wp'(U \mid \Omega, \Omega'); T, W], \\ z = \bar{z}[\wp(U \mid \Omega, \Omega'), \wp'(U \mid \Omega, \Omega'); T, W], \end{cases}$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$ étant des fonctions rationnelles de leurs quatre arguments. Inversement, à tout point (x, y, z) de F correspondent : 1° n valeurs de W définies par (36) et (41), et 2° n arguments U_j, incongrus

(1) Avec $C = \int_\infty^{(X_0, Y_0)} \frac{dX}{Y}$.

(2) Appelé *déterminant* de la surface par M. Enriques.

mod 2Ω, $2\Omega'$. D'après (44) et (45), *chaque argument*

$$(G) \qquad U_j \equiv U_1 + 2\lambda_j \omega + 2\mu_j \omega' \qquad (\text{mod } 2\Omega,\ 2\Omega')$$

($j = 1, \ldots, n$; λ_j et μ_j entiers) *est associé biunivoquement* [1] *à une racine* W_j *de* (41) par les équations

$$p(U_j + C \mid \Omega, \Omega') = X(x, y, z; T, W_j), \qquad p'(U_j + C \mid \Omega, \Omega') = Y(x, y, z; T, W_j)$$

et

$$(52) \qquad W_j = W[x, y, z; p(U_j \mid \Omega, \Omega'), p'(U_j \mid \Omega, \Omega')].$$

Il résulte de là que *l'équation* (41) *en* W *ne saurait être arbitraire; son groupe de monodromie* $\mathcal{G}$ [(S, T) étant considéré comme le paramètre variable] *est* holoédriquement isomorphe au groupe G des permutations $U_j | U_k$, et par suite, *abélien*.

26. *Le groupe* ∞^1 *de transformations de la surface* F. *Les intégrales simples de première espèce de* F. — Ce fait, indiqué par M. Enriques, comporte d'importantes conséquences que nous développerons tout à l'heure; actuellement nous utiliserons les formules (51) pour établir que F possède un groupe continu ∞^1 de transformations birationnelles en elle-même. Effectivement faisons la transformation

$$(53) \qquad U' = U + a, \qquad T' = T, \qquad W' = W;$$

au point (x, y, z) correspondent n systèmes de coordonnées (U_j; T, W_j); les transformées par (53) de ces différents systèmes seront ($U_j + a$; T, W_j). Or, donnons à j une valeur fixe (quelconque) quand a variera d'une manière continue, les entiers λ_j, μ_j qui caractérisent la détermination de $U_j + a$ associée comme il a été dit à (T, W_j) ne

(1) On passe d'un couple coordonné (U_j; T, W_j) du point $\overline{m}$ à un autre couple en faisant décrire d'abord à m un arc de la courbe C passant par $\overline{m}$; l'arc aura son origine en $\overline{m}$ et son extrémité en l'un, $\overline{m}'$ des $n-1$ autres points d'intersection de C avec la courbe K qui passe par $\overline{m}$; puis on déplacera m de $\overline{m}'$ à $\overline{m}$ le long de K. Dans le premier parcours, U n'aura pas varié et (V, W_j) sera devenu (V, W_k); pendant la fin du parcours, (V, W_k) ne change pas, tandis que U variera d'un $n^{\text{ième}}$ de période de $p(U \mid \Omega, \Omega')$.

peuvent que rester constants le long de K; $U_j + a$ est donc associé à (T, W_j) *et tous les systèmes* ($U_j + a$; T, W_j) définissent un point unique : la transformation (53), qui était évidemment algébrique, est donc bien birationnelle; elle engendre sur F un groupe intransitif ∞^1 dont les courbes K sont les trajectoires.

Montrons encore que *la surface ne peut posséder d'intégrale de Picard de première espèce distincte de* U *et des intégrales attachées à* $\{K\}$ (lorsque ce faisceau est de genre $\geqq 1$). En effet, le procédé employé tout à l'heure pour exprimer dU en fonction de dX et dT prouve que l'intégrale de première espèce la plus générale de F est de la forme

$$\varkappa U + \int r(T, W)\, dT,$$

(r, rationnelle en T, W). Par soustraction de $\varkappa U$ on obtient donc une relation de la forme

$$\mathfrak{P}(x, y, z)\, dx + \mathfrak{Q}(x, y, z)\, dy = r(T, W)\, dT$$

($\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ rationnels en x, y, z). Or, en vertu de (36) dT est de la forme $\mathfrak{P}'\, dx + \mathfrak{Q}'\, dy$ ($\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ rationnels en x, y, z); $r(T, W)$ *doit donc être uniforme sur* F; mais, d'après (41), on peut écrire

$$r(T, W) = \rho(S, T) + W\rho_1(S, T) + \ldots + W^{n-1}\rho_{n-1}(S, T),$$

les ρ étant rationnels en S, T; et la condition précédente exige que l'on ait $\rho_1 \equiv 0 \equiv \ldots \equiv \rho_{n-1}$: ainsi $r(T, W)$ *est une fonction rationnelle de* S *et de* T, comme nous l'avions annoncé.

27. *Représentation des surfaces elliptiques de déterminant quelconque.* — Revenons maintenant au groupe abélien G. Il est facile d'en déterminer une *base*. Tout d'abord, on peut [1] effectuer sur le couple de périodes (2ω, $2\omega'$) et sur le couple (2Ω, $2\Omega'$) deux transformations modulaires telles que les formules (50) s'écrivent

$$\Omega = p\,\delta\omega, \qquad \Omega' = q\,\delta\omega',$$

[1] *Voir* n° 56.

p et q étant deux entiers premiers entre eux, et δ étant le p. g. c. d. des coefficients a, b, c, d de (50) (on aura, de plus, $pq\delta^2 = n$). Il résulte aussitôt de là que l'ordre d'une substitution quelconque de G ne peut dépasser $pq\delta$; or la substitution [1]

$$S_1 U \equiv U + 2\omega + 2\omega' \qquad (\text{mod } 2\Omega,\ 2\Omega')$$

engendre un groupe Γ d'ordre $pq\delta$; on pourra donc la prendre pour première substitution génératrice de G; d'ailleurs si $\delta = 1$, Γ se réduira à G qui sera cyclique et dérivera de la seule substitution S_1. Supposons alors $\delta > 1$ et soient h et k deux entiers tels que $hp - kq = 1$; la substitution

$$S_2 U \equiv U + 2hp\omega + 2kq\omega' \qquad (\text{mod } 2\Omega,\ 2\Omega')$$

sera étrangère à Γ si $\delta > 1$; elle sera d'ordre δ et constituera la seconde substitution génératrice de G. Ainsi la base de G sera formée par S_1 et S_2; ses invariants seront $pq\delta$ et δ (ou $\frac{n}{\delta}$ et δ).

Pour plus de généralité, supposons que G *ne soit pas cyclique* [2]; le groupe de monodromie $\mathcal{G}$ de l'équation (41) est donc, lui aussi, engendré par deux substitutions fondamentales s_1 et s_2, de périodes $pq\delta$ et δ; soient $[W_1, W_2^{(1)}, \ldots, W_{pq\delta}^{(1)}]$ et $[W_1, W_2^{(2)}, \ldots, W_\delta^{(2)}]$ deux cycles de racines de (41) s'échangeant les unes les autres par les substitutions s_1 et s_2; pour réduire $\mathcal{G}$ à la substitution unité, il sera nécessaire et suffisant d'adjoindre au champ (S, T) les expressions

$$Z_1 = W_1 + \varepsilon_1 W_2^{(1)} + \ldots + \varepsilon_1^{pq\delta - 1} W_{pq\delta}^{(1)},$$
$$Z_2 = W_1 + \varepsilon_2 W_2^{(2)} + \ldots + \varepsilon_2^{\delta - 1} W_\delta^{(2)},$$

ε_1 et ε_2 (puissance de ε_1) étant deux racines primitives de l'unité, d'ordres $pq\delta$ et δ. On aura ainsi

$$(54) \qquad Z_1^{pq\delta} = \varphi_1(S, T), \qquad Z_2^\delta = \varphi_2(S, T),$$

les seconds membres étant rationnels en S et T, et l'on pourra écrire

$$(55) \qquad Z_1 = \psi_1(W;\ S,\ T;\ \varepsilon_1), \qquad Z_2 = \psi_2(W;\ S,\ T;\ \varepsilon_2),$$

(1) Pour ne pas compliquer l'écriture, on n'a pas modifié les notations précédentes.

(2) Si G était cyclique, on pourrait encore appliquer les développements ci-dessous, à condition de supprimer partout les symboles affectés de l'indice 2.

W désignant, par exemple, la racine W_1 de (41), et ψ_1, ψ_2 étant rationnelles en W, S, T, ε_1, ε_2; inversement, on aura

$$W = \chi(Z_1, Z_2; S, T; \varepsilon_1), \tag{56}$$

χ étant rationnelle en Z_1, Z_2, S, T, ε_1.

Posons alors

$$\begin{aligned} A_1 &= p(U \mid \Omega, \Omega') + \varepsilon_1 p(U + 2\omega + 2\omega' \mid \Omega, \Omega') + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_1^{pq\delta-1} p[U + 2(pq\delta - 1)(\omega + \omega') \mid \Omega, \Omega'], \\ A_2 &= p(U \mid \Omega, \Omega') + \varepsilon_2 p(U + 2h\omega + 2k\omega' \mid \Omega, \Omega') + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_2^{\delta-1} p[U + 2(\delta - 1)(h\omega + k\omega') \mid \Omega, \Omega'], \end{aligned}$$

et considérons la surface $F^\star$ lieu du point

$$x^\star = \alpha_1 A_1 Z_1 + \alpha_2 A_2 Z_2 + \alpha S, \qquad y^\star = p'(U \mid \omega, \omega'), \qquad z^\star = T, \tag{57}$$

S et T étant liés par (37); en faisant correspondre les points de F et $F^\star$ qui répondent aux mêmes valeurs de U et de (S, T) on définira une correspondance birationnelle entre ces deux surfaces [1].

28. *Les surfaces elliptiques* F′ *de genre* $p_g = 0$, *possédant un faisceau*

---

[1] Car, à tout système de valeurs $y^\star$, $z^\star$ correspondent trois valeurs de U (incongrues mod 2ω, $2\omega'$) et un nombre fini de valeurs de S; si l'on se donne encore $x^\star$, une seule des valeurs de U est admissible (mod 2ω, $2\omega'$), ainsi qu'une seule valeur de S : $p(U \mid \omega, \omega')$, $p'(U \mid \omega, \omega')$, S et T sont donc rationnels en $x^\star$, $y^\star$ et $z^\star$. Donnons-nous alors $p(U \mid \Omega, \Omega')$; A_1 et A_2, puis Z_1 et Z_2 seront déterminés sans ambiguïté; ainsi Z_1, Z_2, et, d'après (56), W seront rationnels en $p(U \mid \Omega, \Omega')$, $x^\star$, $y^\star$, $z^\star$, soit

$$W = W[p(U \mid \Omega, \Omega'); x^\star, y^\star, z^\star]. \tag{e}$$

Mais, par suite de l'isomorphisme de G et $\mathcal{G}$ les différentes valeurs de W correspondant à un point x, y, z de F s'obtiendront en remplaçant dans (e) U par n valeurs congrues (mod 2ω, $2\omega'$), et incongrues (mod 2Ω, $2\Omega'$). Or, si l'on porte $T = x^\star$, $S(x^\star, y^\star, z^\star)$, et la fonction W définie par (e) dans les équations (51), on voit que x, y, z seront rationnels en $p(U \mid \Omega, \Omega')$, $x^\star$, $y^\star$, $z^\star$. Mais x, y, z ne doivent pas changer quand on remplace le couple (U, W) par l'un de ses $n-1$ conjugués; il suit de là que les fonctions rationnelles précédentes ne doivent pas changer quand on y remplace U par ses $n-1$ associés : c'est dire que x, y, z sont rationnels en $x^\star$, $y^\star$, $z^\star$ et $p(U \mid \omega, \omega')$ (ou en $x^\star$, $y^\star$, $z^\star$).

Inversement, d'après (36), (38) et (46), $y^\star$ et $z^\star$ sont rationnelles en x, y, z; de plus, à tout point x, y, z correspondent n valeurs de U (incongrues mod 2Ω, $2\Omega'$); l'une d'elles étant fixée, d'après (52) W sera connue rationnellement, et par suite Z_1 et Z_2 d'après (55); AZ_1 et BZ_2 s'exprimeront donc rationnellement en $p(U \mid \Omega, \Omega')$, x, y, z et l'on conclut comme tout à l'heure que $x^\star$ est rationnel en x, y, z, $p(U \mid \omega, \omega')$, c'est-à-dire en x, y, z.

elliptique de courbes elliptiques. — On sait (¹) que ces surfaces se répartissent en sept types distincts; nous allons les retrouver en nous appuyant uniquement sur les considérations qui viennent d'être développées.

Tout d'abord puisque $p_g = 0$, la relation (37) est de genre 0 (²); ainsi, moyennant un choix convenable de l'expression T, la relation (37) peut être réduite à $S = 0$ et l'équation (40) ou l'équation $S(T, W) = 0$ sera de degré n en W. Son groupe de monodromie devant être abélien, *toutes ses racines* W_j *s'exprimeront par des fonctions rationnelles de l'une d'elles* (à coefficients rationnels en T), soit

$$W_j = R_j(T, W_1) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{58}$$

Mais puisque C est de genre 1, on peut exprimer (³) T et W en fonctions rationnelles de $p(V|\varpi, \varpi')$ et $p'(V|\varpi, \varpi')$ [d'après (36) et (52)]. Aux n points (T, W_j) correspondront n arguments V_j et puisque les équations (58) définissent n transformations birationnelles de (40) en elle-même, on aura

$$V_j \equiv \alpha_j V_1 + \beta_j \qquad (\text{mod } 2\varpi, 2\varpi') \tag{59}$$

avec

$\alpha_j^2 = 1$, si C est de module quelconque,
$\alpha_j^4 = 1$, » harmonique,
$\alpha_j^6 = 1$, » équianharmonique.

Je dis qu'*il est impossible que pour toutes les valeurs de* j *on ait* $\alpha_j = 1$: en effet, les points (T, W_j) se meuvent dans une série linéaire; si l'on avait, quel que soit j, $dV_j = dV_1$, l'expression $\sum_{j=1}^{n} dV_j$ ne pourrait être nulle, comme l'exige le théorème d'Abel. Par une transformation

---

(¹) *Voir* l'Introduction (n° 5).

(²) En procédant comme au n° 26, on montrera aisément que toute intégrale double de Picard de première espèce de la forme $\int\int [\Sigma c_i Q_i(S, T)]\, dU\, dT$, les $Q_i\, dT$ étant les intégrales abéliennes de première espèce attachées à (37). Le genre de (37) est donc égal à p_g. La surface ayant $p_g + 1$ intégrales de Picard de première espèce, son genre arithmétique p_a est -1.

(³) Les courbes C seront de même module : cela résulte de la formule de Castelnuovo-Enriques, rappelée au n° 31, dans laquelle on a $\rho = 1$, $p_a = -1$ (et $p^{(1)} = 1$, d'après les propriétés du faisceau $|K|$).

$V | V+h$ on pourra donc ramener l'une des substitutions génératrices du groupe abélien (59) à la forme

$$(60) \qquad \mathcal{S}_1 V \equiv \alpha V \qquad (\text{mod } 2\varpi,\ 2\varpi'),$$

où α est une racine primitive de 1, d'ordre 2, 3, 4 ou 6 et la construction du groupe (59) se trouve ainsi achevée lorsque ce groupe est cyclique.

Supposons alors que le groupe dérive de la substitution (60) et de la substitution

$$\mathcal{S}_2 V \equiv \alpha' V + \beta' \qquad (\text{mod } 2\varpi,\ 2\varpi')$$

et exprimons que $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1$. Si la courbe C est de module quelconque, on trouve

$$\mathcal{S}_1 V \equiv -V, \qquad \mathcal{S}_2 V \equiv -V + \varpi \qquad (\text{mod } 2\varpi,\ 2\varpi').$$

Si C est équianharmonique, prenons d'abord

$$\alpha = \varepsilon = \alpha' \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

on trouvera

$$\mathcal{S}_1 V \equiv \varepsilon V, \qquad \mathcal{S}_2 V \equiv \varepsilon V + (1-\varepsilon)\frac{2\varpi}{3} \qquad (\text{mod } 2\varpi,\ 2\varpi').$$

Si α et α' ne sont pas tous deux égaux à ε, on pourra supposer $\alpha = -\varepsilon$; mais alors on trouve que β doit être une période (donc nul) et le groupe est nécessairement cyclique. Enfin si C est harmonique, on obtient de la même façon :

$$\mathcal{S}_1 \equiv iV, \qquad \mathcal{S}_2 \equiv -V + \frac{1+i}{2} 2\varpi \qquad (\text{mod } 2\varpi,\ 2\varpi').$$

On a donc en tout sept hypothèses [1] :

$\mathcal{S}_1$.	$\mathcal{S}_2$.	p.	q.	δ.	$pq\delta$.	n.
$-V$	–	2	1	1	2	2
εV	–	3	1	1	3	3
iV	–	4	1	1	4	4
$-\varepsilon V$	–	6	1	1	6	6
$-V$	$-V+\varpi$	1	1	2	2	4
εV	$\varepsilon V + (1+\varepsilon)\frac{2\varpi}{3}$	1	1	3	3	9
iV	$-V+(1+i)\varpi$	2	1	2	4	8

(1) On dresse le tableau en calculant d'abord $pq\delta$, δ, n (ordres de $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{G}$) puis p et q.

Dans les quatre premiers cas, où $\mathcal{G}$ est cyclique, une analyse classique fournit immédiatement la fonction $\varphi_1(S, T)$ de $(54)_1$; on trouve ainsi, en écrivant x, y, z au lieu de x^*, y^*, z^* :

$n=2$: $$x = A_2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)(z-e_4)},$$

$n=3$: $$x = A_3\sqrt[3]{(z-e_1)^2(z-e_2)^2(z-e_3)^2},$$

$n=4$: $$x = A_4\sqrt[4]{(z-e_1)^2(z-e_3)^3(z-e_4)^3},$$

$n=6$: $$x = A_6\sqrt[6]{(z-e_1)^3(z-e_2)^4(z-e_3)^5}$$

avec (¹)

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} \wp(U + 2k\omega \mid n\omega, \omega')$$

et, dans tous les cas,

$$y = \wp'(U \mid \omega, \omega').$$

29. *Construction des surfaces* F′ *à groupes* $\mathcal{G}$ *non cycliques*. — Pour obtenir les trois autres surfaces, il faut encore exprimer que *les trois relations*

$$x = A\sqrt{P(z)} + B\sqrt{Q(z)},$$
$$x = A\sqrt[3]{P(z)} + B\sqrt[3]{Q(z)},$$
$$x = A\sqrt[4]{P(z)} + B\sqrt{Q(z)},$$

construites à partir de (57), (54) et du tableau des valeurs de p, q, δ, *sont, chacune, de genre* 1. Or supposons que chaque zéro de P et Q soit un point de ramification effectif pour x, et que $z=\infty$ ne soit pas un point de ramification des radicaux (ce qui est toujours possible); supposons encore que P et Q possèdent en commun r zéros distincts (²) et soient $\overline{p}$ et $\overline{q}$ le nombre des autres zéros de P et Q; on trouvera pour

(¹) D'ailleurs, dans A_n, on pourra substituer à $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ une autre racine primitive, d'ordre n, de l'unité, et à $\wp(U \mid n\omega, \omega')$ une autre transformée $\wp(U \mid \omega, -\nu\omega + n\omega')$.

(²) Chacun d'eux pouvant être simple ou multiple.

les trois cas précédents les trois équations (¹)

$$\begin{aligned}\bar{p}+\bar{q}+r&=4,\\ \bar{p}+\bar{q}+r&=3,\\ 3\bar{p}+2\bar{q}+3r&=8.\end{aligned}$$

Dans le premier cas ($n=4$), en rejetant maintenant à l'infini l'un des zéros de P et Q, on obtient les deux surfaces

$$\left.\begin{aligned}x'&=\mathrm{A}\sqrt{z-e_1}+\mathrm{B}\sqrt{(z-e_2)(z-e_3)}\\ x''&=\mathrm{A}\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}+\mathrm{B}\sqrt{(z-e_2)(z-e_3)}\end{aligned}\right\}\ y=p'(\mathrm{U}\mid\omega,\omega')$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=p(\mathrm{U}\mid 2\omega,\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega\mid 2\omega,\omega'),\\ \mathrm{B}&=p(\mathrm{U}\mid\omega,2\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega'\mid\omega,2\omega').\end{aligned}$$

Moyennant un changement d'écriture, on peut encore représenter ces surfaces par les équations (²)

$$\begin{aligned}x'&=[p(\mathrm{U}\mid 2\omega,\omega+\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega\mid 2\omega,\omega+\omega')]\frac{\sigma_1\mathrm{V}}{\sigma\mathrm{V}}\\ &\quad+[p(\mathrm{U}\mid\omega,2\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega'\mid\omega,2\omega')]\frac{\sigma_2\mathrm{V}\,\sigma_3\mathrm{V}}{\sigma^2\mathrm{V}},\\ x''&=[p(\mathrm{U}\mid 2\omega,\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega\mid 2\omega,\omega')]p'\mathrm{V}\\ &\quad+[p(\mathrm{U}\mid\omega,2\omega')-p(\mathrm{U}+2\omega'\mid\omega,2\omega')]\frac{\sigma_2\mathrm{V}\,\sigma_3\mathrm{V}}{\sigma^2\mathrm{V}},\\ y&=p'(\mathrm{U}\mid\omega,\omega'),\qquad z=p(\mathrm{V}\mid\varpi,\varpi').\end{aligned}$$

On vérifie aisément qu'elles admettent le même tableau de périodes

$$\begin{Vmatrix}4\omega & 0 & 2\omega' & 4\omega\\ 0 & 4\varpi' & 2\varpi' & 2\varpi\end{Vmatrix}=\begin{pmatrix}8\omega\\ 4\varpi'\end{pmatrix}\times\begin{Vmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{\omega'}{4\omega} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\varpi}{2\varpi'}\end{Vmatrix}$$

(¹) Dans le troisième cas, la formule suppose que P n'a aucun zéro *double* ; si P possédait $m'+p'$ zéros doubles, dont m' étrangers à Q, on devrait remplacer ladite formule par $3\bar{p}+2\bar{q}+3r+2m'+2p'=8$ qui ne donne aucune surface.

(²) Pour la première surface, A et B ont été formés de même manière que pour la seconde, mais à partir du couple $2\omega_1=2\omega$, $2\omega'_1=2\omega'+2\omega$, *équivalent* à 2ω, $2\omega'$.

et la même transformation en elle-même : $U_2 = U_1 + 2\omega$, $V_2 = -V$. Elles sont donc birationnellement équivalentes.

Tableau des substitutions :

1	U	V
S_1	$U + 2\omega$	$-V$
S_2	$U + 2\omega'$	$V + 2\varpi'$
$S_1 S_2$	$U + 2\omega + 2\omega'$	$-V + 2\varpi$

Dans le second cas, on prendra $m = n = p = 1$ et (¹)

$$(61) \qquad x = A\sqrt[3]{z^2(z-1)} + B\sqrt[3]{z^2(z-2)}, \qquad y = p'(U \mid \omega, \omega')$$

avec

$$A = p(U \mid 3\omega, \ \omega') + \varepsilon p(U + 2\omega \mid 3\omega, \ \omega') + \varepsilon^2 p(U + 4\omega \mid 3\omega, \ \omega'),$$
$$B = p(U \mid \ \omega, 3\omega') + \varepsilon p(U + 2\omega' \mid \ \omega, 3\omega') + \varepsilon^2 p(U + 4\omega' \mid \ \omega, 3\omega').$$

Or considérons l'équation $(61)_1$ comme représentant une courbe du plan (x, z); elle sera vérifiée si l'on pose

$$x = \frac{-2A\sqrt[3]{4}X - 2BZ}{1 + Z^3}, \qquad z = \frac{2}{1 + Z^3},$$

avec

$$X = \sqrt{3}\,\frac{p V}{p' V - \sqrt{3}}, \qquad Z = \frac{p' V + \sqrt{3}}{p' V - \sqrt{3}},$$

et

$$p'^2 V = 4 p^3 V - 1.$$

La fonction pV admet les deux périodes imaginaires conjuguées $2\omega_1$ et $2\omega_3 = 2\varepsilon\omega_1$, la période $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$ étant réelle. On trouve aisément

$$\frac{6 p V}{p' V - \sqrt{3}} = \zeta\left(V - \frac{4\omega_2}{3}\right) + \varepsilon\zeta\left(V + \frac{4\omega_3}{3}\right) + \varepsilon^2\zeta\left(V + \frac{4\omega_1}{3}\right) \equiv \varphi(V),$$
$$\sqrt{3}\,\frac{p' V + \sqrt{3}}{p' V - \sqrt{3}} = \zeta\left(V - \frac{4\omega_2}{3}\right) + \varepsilon\zeta\left(V - \frac{2\omega_1}{3}\right) + \varepsilon^2\zeta\left(V - \frac{2\omega_3}{3}\right) \equiv \psi(V),$$

et, en se servant des relations

$$\eta_2 + \varepsilon\eta_1 = 0 = \eta_3 - \varepsilon^2\eta_1$$

(¹) On vérifiera que la solution $x = A\sqrt[3]{z^2(z-1)} + B\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)^2}$, qui, *a priori*, paraît distincte de (61), conduit à une surface identique.

vérifiées par les pseudo-périodes de la fonction ζV, on établira les formules

$$\varphi\left(V + \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}\right) = \varepsilon^2 \varphi(V), \qquad \psi\left(V + \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}\right) = \varepsilon \psi(V).$$

A l'aide de ces formules, on démontrera que la surface admet le tableau de périodes

$$\begin{pmatrix} 18\omega \\ 2\omega_1 + 2\omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\omega + \omega'}{9\omega} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} \end{Vmatrix}.$$

Tableau des substitutions :

1	U	V	X	Z
S_1	$U + 2\omega$	εV	εX	Z
S_1^2	$U + 4\omega$	$\varepsilon^2 V$	$\varepsilon^2 X$	Z
S_2	$U + 4\omega + 2\omega'$	$V + \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}$	$\varepsilon^2 X$	εZ
$S_1 S_2$	$U + 2\omega'$	$\varepsilon V + \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}$	X	εZ
$S_1^2 S_2$	$U + 2\omega + 2\omega'$	$\varepsilon^2 V + \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}$	εX	εZ
S_2^2	$U + 2\omega + 4\omega'$	$V + \frac{2\omega_2 + 2\omega_3}{3}$	εX	$\varepsilon^2 Z$
$S_1 S_2^2$	$U + 4\omega + 4\omega'$	$\varepsilon^2 V + \frac{2\omega_2 + 2\omega_3}{3}$	$\varepsilon^2 X$	$\varepsilon^2 Z$
$S_1^2 S_2^2$	$U + 4\omega'$	$\varepsilon^2 V + \frac{2\omega_2 + 2\omega_3}{3}$	X	$\varepsilon^2 Z$

Dans le troisième cas, on prendra de même [1]

$$x = A\sqrt[4]{z^3(z-2)} + B\sqrt{z(z-1)}, \qquad y = p'(U \mid \omega, \omega')$$

avec

$$\begin{aligned} A = {} & p(U \mid 4\omega, \omega') + i p(U + 2\omega \mid 4\omega, \omega') \\ & - p(U + 4\omega \mid 4\omega, \omega') - i p(U + 6\omega \mid 4\omega, \omega'), \\ B = {} & p(U \mid \omega, 2\omega') - p(U + 2\omega' \mid \omega, 2\omega'); \end{aligned}$$

[1] On vérifiera que la solution $x = A\sqrt[4]{z(z-2)^3} + B\sqrt{z(z-1)}$ conduit à une surface identique à celle du texte.

on posera

$$x = \frac{2A\sqrt[4]{-1}\,Z + B\sqrt{2}\,X}{1+Z^4}, \qquad z = \frac{2}{1+Z^4},$$

avec

$$X = \operatorname{cn} V \operatorname{dn} V, \qquad Z = \operatorname{sn} V,$$

la fonction $z = \operatorname{sn} V$ vérifiant l'équation $Z'^2 = 1 - Z^4$, de sorte que $\operatorname{sn} V$ admet les deux périodes primitives $4K$ et $2(1+i)K$. Comme on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(iV \mid K, K+iK) &= i \operatorname{sn} V, \\ \operatorname{cn}(iV \mid K, K+iK) &= \operatorname{dn} V, \\ \operatorname{dn}(iV \mid K, K+iK) &= \operatorname{cn} V, \end{aligned}$$

on formera aisément le tableau de périodes de F :

$$\begin{pmatrix} 8\omega' \\ 4iK \end{pmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{2\omega+\omega'}{4\omega'} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} \end{Vmatrix}$$

et le tableau des substitutions :

1	U	V	X	Z
S_1	$U+2\omega$	iV	X	iZ
S_1^2	$U+4\omega$	$-V$	X	$-Z$
S_1^3	$U+6\omega$	$-iV$	X	$-iZ$
S_2	$U+2\omega'$	$-V+2K$	$-X$	Z
$S_1^2 S_2$	$U+2\omega+2\omega'$	$-iV+2K$	$-X$	$-iZ$
$S_1^2 S_2$	$U+4\omega+2\omega'$	$V+2K$	$-X$	$-Z$
$S_1^3 S_2$	$U+6\omega+2\omega'$	$-iV+2K$	$-X$	$-iZ$

TROISIÈME PARTIE

LES SURFACES IRRÉGULIÈRES DE GENRE GÉOMÉTRIQUE UN

I. — Les surfaces de genre arithmétique zéro.

30. *Le genre linéaire* $p^{(1)}$ *est égal à* 1. — *A priori*, pour $p_g = 1$, on peut faire sur la surface F du problème (B_2) l'une des trois hypothèses suivantes : $p_a = 1$, $p_a = 0$, $p_a = -1$. Réservant pour la sixième Partie

l'étude du premier cas, nous allons montrer que *l'hypothèse* $p_g = 1$, $p_a = 0$ *est inadmissible;* et, pour cela, nous établirons d'abord que *l'hypothèse précédente entraîne* $p^{(1)} = 1$.

Lorsque la courbe canonique K de F est irréductible [1] l'assertion précédente se réduit au théorème IV; elle est alors immédiatement justifiée [2], Nous allons donc supposer que *la courbe canonique* K *est réductible.*

Or, dans le cas actuel ($p_g = 1$, $p_a = 0$), il résulte d'une importante proposition de M. Enriques [3] que la courbe canonique K est contenue totalement dans un système algébrique ∞^1 $\{\overline{K}\}$ de courbes *paracanoniques. A priori,* $\{\overline{K}\}$ peut être une série d'indice $\nu > 1$. La surface F pourra donc être représentée biunivoquement sur une courbe algébrique plane Γ, de telle sorte qu'à une courbe $\overline{K}$ corresponde un point de Γ, et qu'aux ν courbes de $\{\overline{K}\}$ passant par un point de F corresponde un groupe de ν points $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ sur Γ.

Ceci posé, soit C une ligne de niveau de l'intégrale de Picard de première espèce attachée à F; considérons les ν courbes de $\{\overline{K}\}$ qui passent par un point m variable sur C et supposons qu'elles forment un système *simple.* D'après une remarque féconde de M. G. Humbert, si $I(\mu)$ est l'une (*quelconque*) des intégrales abéliennes de première espèce de Γ, la somme $\sigma \equiv I(\mu_1) + \ldots + I(\mu_\nu)$ sera égale à la valeur en m d'une intégrale de Picard de première espèce attachée à F. Mais F *ne possède qu'une seule intégrale de Picard de première espèce* (non constante sur F) et celle-ci est précisément constante sur C : donc, quand m décrira C, σ restera constant, et cela, quelle que soit l'intégrale abélienne de première espèce I. D'après la réciproque du théorème d'Abel, *les points* μ *appartiennent donc à une série linéaire*, et, par suite, quand m variera sur C, les courbes $\overline{K}$ devront se mouvoir à l'intérieur d'un système linéaire; il en est de même de la série ∞^1 $\{\overline{K}\}$,

---

[1] Nous admettrons, comme il est permis, que F est dépourvue de courbe exceptionnelle.

[2] On sait qu'alors la surface possède nécessairement un faisceau de courbes de genre 1.

[3] Enriques, *Rend. Acc. Bologna*, t. IX, 1904, p. 5.

et, comme $p_g = 1$, ceci n'est possible que si *les courbes* $\overline{K}$ *restent fixes quand* m *décrit* C.

Les courbes $\overline{K}$ (ou leurs composantes irréductibles) doivent donc coïncider avec les courbes C, qui, dès lors, sont algébriques et forment nécessairement (¹) un faisceau $\{C\}$. Mais alors le système $\{K\}$ est formé de courbes variables dans $\{C\}$; or $\{C\}$, étant un faisceau irrationnel, n'a pas de point-base; une courbe C ne peut donc avoir aucun point commun avec une composante K_i de la courbe canonique K sans qu'elle la contienne. Cela étant, puisque les courbes C (générales) ne peuvent ni se couper, ni couper K, il résulte de l'absence d'exceptionnelles et de la relation classique $|C' - C| = |K|$ que sur toute courbe générale C la série canonique sera d'ordre 0 : les courbes C sont donc elliptiques, et F *possède* ainsi *un faisceau de courbes de genre* 1.

Il est facile maintenant d'établir la relation $p^{(1)} = 1$. Observons, en effet, que *les composantes* K_i *de* K *ne peuvent avoir aucun point commun :* car, ou bien les K_i coïncideraient avec des courbes C qui seraient donc mutuellement sécantes; ou bien l'ensemble de deux ou plusieurs courbes K_i constituerait une courbe C (réductible) dont le genre virtuel serait nécessairement supérieur à 1. Les K_i ne pouvant se rencontrer, le genre virtuel $p^{(1)}$ de la courbe R est égal à 1.

Toutefois, nous avons dû supposer que la série $\{K\}$ était simple; examinons maintenant l'hypothèse opposée : les ν courbes passant par un point m_1 de F auront en commun $n-1$ autres points $m_2, \ldots, m_n$. A la surface F on pourra faire correspondre une surface $\mathfrak{F}$ telle que chaque point M de $\mathfrak{F}$ corresponde (rationnellement) au groupe $m_1, \ldots, m_n$; quand m_1, par exemple, décrira une courbe $\overline{K}$, ses associés $m_2, \ldots, m_n$ décriront la même courbe, et le point M décrira une courbe $\overline{\mathfrak{X}}$; à la la série $\{\overline{K}\}$ correspondra sur $\mathfrak{F}$ une série $\{\overline{\mathfrak{X}}\}$ d'indice ν et simple.

Ceci posé, quand m parcourra une courbe C du faisceau $\{C\}$, son correspondant M décrira une courbe $\mathfrak{C}$; la somme $\sum_{j=1}^{\nu} I(\mu_j)$ sera une intégrale de Picard de première espèce sur $\mathfrak{F}$; et comme $\mathfrak{F}$ *ne peut posséder au plus qu'une intégrale simple de première espèce*, le raisonnement

---

(¹) *Voir* la note 1 de la page 305.

de tout à l'heure continuera à s'appliquer sur $\mathcal{F}$: quand M décrira $\mathcal{C}$, les courbes $\overline{\mathcal{K}}$ devront se mouvoir dans un système linéaire. Or à chacune d'elles correspond une seule courbe $\overline{K}$: celles-ci devront donc également appartenir sur F à un système linéaire, ce qui exige que dans l'opération précédente elles restent fixes; dès lors nos conclusions intérieures conservent toute leur validité.

31. *Formation des expressions u de première espèce.* — On vient de montrer que, dans les hypothèses actuelles, la surface F possède nécessairement un faisceau de courbes elliptiques C. Comme on a ici $p_g = 1$, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 1$, *le genre de ce faisceau est égal à* un [1]; quant aux courbes C, *elles ne peuvent avoir leur module constant :* car, la surface F étant supposée dépourvue de courbes exceptionnelles, la formule classique de MM. Enriques et Castelnuovo

$$\Delta + 4(\pi - 1)(\rho - 1) = 13 + 12 p_a - p^{(1)}$$

(Δ, nombre de courbes C possédant un point double; ρ genre du faisceau; π, genre des courbes C) donne aussitôt $\Delta = 12$ (> 0).

Or les équations d'une courbe C peuvent s'écrire

$$f(x, y, z) = \lambda, \qquad g(x, y, z) = \mu,$$

λ et μ satisfaisant à l'équation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \tag{62}$$

de genre 1; de plus, C sera la transformée birationnelle d'une courbe

$$\psi(\rho, \sigma; \lambda, \mu) = 0 \tag{63}$$

du plan (ρ, σ) (les coefficients de ψ seront d'ailleurs des fonctions de λ et μ qui, d'après ce qui précède, ne pourront se réduire à des constantes); sur F, x, y, z seront donc des fonctions rationnelles des variables λ, μ, ρ, σ liées par (62) et (63). Enfin, si l'on désigne par

$$w = \int \mathfrak{P}(x, y, z)\, dx + \mathfrak{Q}(x, y, z)\, dy$$

(1) ENRIQUES, *Rendic. della R. Acc. delle Sc. del Ist. di Bologna,* nouvelle série, t. XI, 1906-1907, p. 11.

l'intégrale de Picard de première espèce attachée à F, et admettant 2ω et $2\omega'$ pour périodes primitives, λ et μ s'exprimeront rationnellement en fonction de $p(w|\omega, \omega')$ et $p'(w|\omega, \omega')$ et l'on pourra écrire :

$$(64) \qquad du = e^{\int A(w;\rho,\sigma)\,dw + B(w;\rho,\sigma)\,d\rho}\,[C(w;\rho,\sigma)\,dw + D(w;\rho,\sigma)\,d\rho],$$

A, B, C, D étant rationnelles en pw, $p'w$, ρ, σ. Cherchons à déterminer ces fonctions de manière que u soit une expression de première espèce.

A cet effet, exprimons d'abord que u reste fini quand on se déplace sur une courbe C (d'équation $w = w_0$). L'intégrale

$$(65) \qquad \int e^{\int B(w_0;\rho,\sigma)\,d\rho}\,D(w_0;\rho,\sigma)\,d\rho$$

devra être une expression de première espèce pour C. Or, C étant de genre 1, il résulte d'une proposition de M. Émile Picard (¹) que l'expression (65) est alors nécessairement de la forme W ou $\frac{1}{a}e^{a\mathrm{W}}$, $d\mathrm{W}(\rho, \sigma)$ désignant une différentielle abélienne de première espèce de C (et à coefficients algébriques en λ_0) et a étant une fonction algébrique de λ_0. *Nous allons montrer qu'on a* $d\mathrm{W} = 0$.

Effectivement, faisons décrire successivement à (x, y, z) deux cycles fondamentaux de C, et soient Ω_j $(j = 1, 2)$ les périodes correspondantes de W ; u, qui doit subir une substitution linéaire à coefficients constants sera transformé en $u + \Omega_j$ ou en $ue^{a\Omega_j}$ const. Dans les deux cas, le rapport $\Omega_2 : \Omega_1$ serait constant, ce qui est impossible, puisque les C ne sont pas de module constant.

Ainsi donc $D(w_0;\rho,\sigma)\,e^{\int B(w_0;\rho,\sigma)\,d\rho}$ doit être nul quel que soit w_0 et (64) se réduit à

$$du = e^{\int A(w)\,dw}\,C(w)\,dw,$$

c'est-à-dire à

$$du = c\,dw \qquad \text{ou} \qquad e^{cw}\,dw \qquad (c, \text{ constante numérique}),$$

puisque u doit être de première espèce.

(¹) Mémoire couronné (*loc. cit*), p. 305. *Voir* aussi la note du n° 33, p. 331.

32. *Rejet de l'hypothèse* $p_g = 1$ $p_a = 0$. — Il est aisé de montrer maintenant qu'aucune surface de la catégorie actuelle ne peut fournir une solution de notre problème. Tout d'abord, *u et v ne peuvent être simultanément de première espèce*, car, d'après la forme qu'on vient de trouver pour ces expressions, ils seraient fonctions l'un de l'autre. Mais alors, d'après le théorème V, il existe une expression [égale soit à uv^h, soit à $\text{Log}(u+hv)$, soit à $u+hv$] qui est de première espèce. Or *les lignes de niveau d'une expression de première espèce sont algébriques dans le cas actuel*, et la solution directe que nous avons obtenue aux n^{os} 22 et 23 pour une telle hypothèse ne nous a donné aucune surface de la catégorie présente.

II. — Les surfaces hyperelliptiques.

33. *Forme des expressions de première espèce pour une courbe de genre* 2. — Considérons maintenant l'hypothèse $p_g = 1$, $p_a = -1$; dans ce cas F est une surface hyperelliptique de Picard ou une surface elliptique. Nous étudierons d'abord le premier cas.

Pour obtenir les expressions de première espèce appartenant à une surface de Picard, nous aurons besoin de connaître la forme des expressions de première espèce appartenant à une courbe de genre 2. Or il est aisé de construire ces dernières expressions.

Moyennant une transformation birationnelle convenablement choisie une courbe de genre 2 peut être ramenée à la forme

$$\eta^2 = \prod_{j=1}^{6} (\xi - a_j), \tag{66}$$

et une expression de première espèce pour (66) peut s'écrire

$$U = \int e^{\int r(\xi, \eta) d\xi} d\xi, \tag{67}$$

la fonction rationnelle $r(\xi, \eta)$ n'ayant que des pôles du premier ordre (ξ, η). Parmi ces pôles, soient (b_k, c_k) $(k = 1, \ldots, M)$ ceux qui sont à distance finie, et distincts des points de ramification; soient m_k le résidu de $r(\xi, \eta)$ relatif à (b_k, c_k), n_j celui de a_j et p, q ceux des points à l'infini. On a nécessairement

$$\sum_{k=1}^{M} m_k + \sum_{j=1}^{6} n_j + p + q = 0,$$

équation qu'on peut écrire encore

$$\sum_{k=1}^{M} m_k + \sum_{j=1}^{6} (n_j + 1) + (p-2) + (q-2) = 2. \tag{68}$$

Mais u étant de première espèce, les m_k, n_j, p et q sont entiers et satisfont aux inégalités

$$m_k \geqq 1, \qquad n_j \geqq 1, \qquad p \geqq 2, \qquad q \geqq 2. \tag{69}$$

On tire aussitôt de (68) et (69) la conséquence $M \leqq 2$, d'où l'on déduit sans peine que $r(\xi, \eta)$ est égal, soit à

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{\xi - a_j} + \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\eta + c_1}{\xi - b_1} + \frac{\eta + c_2}{\xi - b_2}\right) + \frac{\alpha\xi + \beta}{\eta}, \tag{70}$$

soit à l'une des huit expressions analogues que l'on en déduit en faisant coïncider les points (b_1, c_1), (b_2, c_2) entre eux, ou avec un ou deux des points de ramification, ou avec un ou deux des points à l'infini. Par suite, si U est de première espèce, $\int r(\xi, \eta)\, d\xi$ est une intégrale abélienne de troisième espèce n'ayant que deux pôles au plus [à une combinaison logarithmique près du type $\Sigma h_i \operatorname{Log} r'_i(\xi, \eta)$], et l'on a, soit

$$U = \int e^{V + \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\eta} \frac{d\xi}{\eta}} \qquad \left[V = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\eta + c_1}{\xi - b_1} + \frac{\eta + c_2}{\xi - b_2}\right)\frac{d\xi}{\eta}\right],$$

soit un cas limite de la formule précédente.

Réciproquement, on constate aussitôt que l'expression précédente est de première espèce pour la courbe (66)[1].

---

(1) On verrait de même qu'une expression U de première espèce attachée à une courbe elliptique est nécessairement du type $\int e^{\alpha I} dI$ (I, intégrale de première espèce; *cf.* Picard, *Mémoire couronné*, p. 305).

34. *Pour une expression de première espèce de* F, *les lignes singulières sont algébrico-logarithmiques.* — Revenons maintenant aux expressions de première espèce pour F; une telle expression peut s'écrire

$$u = \int e^{J + \Sigma\alpha_j \operatorname{Log} R_j}(A\,dx + B\,dy),$$

les R_j, A et B étant des fonctions rationnelles de (x, y, z) et J étant une intégrale de Picard de troisième espèce dont on ne peut diminuer le nombre des courbes polaires par la soustraction d'aucune combinaison logarithmique (telle que $\Sigma\alpha'_j \operatorname{Log} R'_j$). Nous allons montrer que J *se réduit à une intégrale de première espèce*, et, pour cela, nous établirons d'abord que J *ne peut posséder au plus que deux courbes polaires.*

Or, soit δ le diviseur de la surface de Picard F; on sait que F possède un système algébrique ∞^2, Σ, de courbes C, de genre 2, de degré 2 et d'indice 2δ; *nous allons exprimer que, considéré comme fonction d'un point variable de* C, *u est une expression de première espèce pour cette courbe.*

Prenons dans Σ un système algébrique ∞^1, Σ', qui ne contienne aucune courbe polaire de J (¹), et faisons varier C dans Σ'; les équations de C seront de la forme $f(x, y, z; \lambda, \mu) = 0 = g(x, y, z; \lambda, \mu)$, f et g étant rationnelles en x, y, z ainsi qu'en λ et μ liées par une relation $\varphi(\lambda, \mu) = 0$; inversement, sur F, λ et μ seront algébriques en x, y, z. Puisque sur C, u doit être une expression de première espèce, on pourra écrire, *sur* C, d'après le nº 33 :

$$dJ = d\bar{J}(x, y, z; \lambda, \mu) + d\sum_\nu \beta_\nu \operatorname{Log} s_\nu(x, y, z; \lambda, \mu),$$

$d\bar{J}$ étant une différentielle abélienne de troisième espèce pour C, à coefficients algébriques en λ, μ, n'ayant que deux pôles au plus α_1 et α_2, et irréductible à nne combinaison logarithmique; de plus, les s_ν sont rationnels en x, y, z et algébriques en λ, μ. Or, dans la relation précédente, remplaçons λ et μ par leurs expressions algébriques en x, y, z;

(¹) Les courbes polaires de J étant en nombre fini, le choix de Σ' est toujours possible.

nous aurons sur *toute* courbe de Σ', et par suite sur F :

$$dJ(x, y, z) = dJ(x, y, z) + d\sum_\nu \beta_\nu \operatorname{Log} A_\nu(x, y, z),$$

les A_ν étant algébriques en x, y, z; $d\mathfrak{z}\left[= dJ - d\sum_\nu \beta_\nu \operatorname{Log} A_\nu\right]$ étant de la forme $\mathcal{A}dx + \mathcal{B}dy$ ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ algébriques en x, y, z) et ne pouvant devenir infini que sur les deux courbes Γ_1, Γ_2 lieux des points α_1 et α_2 (¹).

Soient alors $d\mathfrak{z}^{(1)}$, $A_\nu^{(1)}$, ..., $d\mathfrak{z}^{(N)}$, $A_\nu^{(N)}$ les diverses déterminations de $d\mathfrak{z}$, A_ν au point x, y, z; on pourra écrire

$$dJ = d\mathfrak{z}^{(w)} + d\sum_w \beta_\nu \operatorname{Log} A_\nu(x, y, z) = \frac{1}{N} d\left[\sum_w \mathfrak{z}^w + \sum_\nu \sum_w \beta_\nu \operatorname{Log} A_\nu^{(w)}\right]$$

et, par suite :

$$J = \bar{J}(x, y, z) + \sum_\nu \beta_\nu \operatorname{Log} \overline{A_\nu}(x, y, z),$$

les $\bar{A}_\nu$ étant rationnelles en x, y, z et $d\bar{J}$ étant dès lors une différentielle de Picard ne possédant au plus que deux courbes polaires Γ_1, Γ_2; d'après notre hypothèse sur J, J se réduit à $\bar{J}$ et n'a ainsi, au plus, que deux courbes polaires, Γ_1 et Γ_2. Nous allons montrer maintenant que l'existence de ces courbes est inadmissible.

Tout d'abord Γ_1 *et* Γ_2 *ont le même genre*. En effet, puisqu'il existe une intégrale de Picard de troisième espèce ayant Γ_1 et Γ_2 pour courbes polaires, on a l'équivalence algébrique $\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 \equiv 0$ (λ_1 et λ_2 entiers); mais, comme les nombres des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 avec une même courbe C sont égaux à 1, on déduit de l'équivalence précédente $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, et par suite

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_2 \tag{71}$$

(puisque sur F la division d'une courbe algébrique est univoque).

Limitons maintenant le genre de Γ_1 *et* Γ_2. Soient A un point fixe

(¹) Ou, *a priori*, sur certaines courbes de Σ'; mais ceci est impossible d'après notre choix de ce système.

de F, $\overline{C}$ une courbe fixe de Σ issue de A, et M un point variable sur Γ_1. Par A et M passent 2δ courbes de Σ qui coupent chacune $\overline{C}$ en A et en un second point. On fait ainsi correspondre à un point de Γ_1 un groupe G de 2δ points sur $\overline{C}$; or G *décrit une involution sur* $\overline{C}$: car les courbes C ne peuvent couper Γ_1 qu'en un seul point (n° 33); par un point arbitraire de $\overline{C}$ il ne peut donc passer qu'un seul groupe G. Mais alors, étant l'image d'une involution sur $\overline{C}$, Γ_1 *est au plus de genre* 2.

Or je dis que Γ_1 *et* Γ_2 *ne peuvent être de genre* 2. Car, d'après (71), Γ_1 et Γ_2 font partie d'un même système algébrique de courbes de genre 2. Mais une courbe de ce système ne peut être coupée par Γ_1 (ou Γ_2) qu'en un point au plus (n° 33); et ceci est absurde, puisque le degré du système est égal à $2\pi - 2 = 2$.

Comme on peut toujours supposer que Γ_1 et Γ_2 ne sont pas rationnelles [1] il ne nous reste plus qu'à envisager le cas où Γ_1 et Γ_2 seraient *elliptiques*. Mais alors F posséderait deux faisceaux de courbes elliptiqnes, et, de plus, Γ_1 et Γ_2 appartiendraient au même faisceau [2]. Or, comme il a été dit au n° 31, sur toute courbe du faisceau elliptique $\{C\}$ qui ne contient pas Γ_1 et Γ_2, u devra être de la forme $\int e^{\alpha I}\, dI$, I désignant l'intégrale de première espèce attachée à C; ainsi, sur C on devrait avoir $J = \alpha I$. On procédera alors pour $\{C\}$ comme au début de ce numéro pour Σ; aucune expression algébrique et non rationnelle en x, y, z ne pourra d'ailleurs s'introduire, puisque $\{C\}$ est un faisceau; sur la surface F on aura donc $J(x, y, z) = \alpha\mathfrak{J}(x, y, z)$, $\mathfrak{J}$ étant une intégrale de Picard de première espèce pour F : l'existence de Γ_1 et Γ_2 est donc inadmissible.

35. *Formation des expressions u de première espèce.* — Ce point acquis, nous pouvons écrire u sous la forme

$$u = \int e^{\alpha I + \beta J + \Sigma \alpha_j \operatorname{Log} R_j}(A\, dx + B\, dy), \tag{72}$$

(1) Car toute courbe rationnelle de F est une exceptionnelle de la surface.

(2) En effet une courbe quelconque Γ du faisceau $\{\Gamma_1\}$ est coupée par les courbes Γ_1 et Γ_2, équivalentes d'après (71), suivant le même nombre de points; Γ ne peut donc couper Γ_2, ce qui est absurde si Γ_2 n'appartient pas à $\{\Gamma_1\}$.

I et J étant deux intégrales distinctes de Picard de première espèce attachées à F. Or considérons u comme une fonction du point analytique de l'une des courbes C du système Σ (du n° 34), et soit

$$u(\xi, \eta) = \int e^{\int \bar{r}(\xi,\eta) d\xi} d\xi$$

ce que devient cette fonction quand on substitue au point (x, y, z) de C son image (ξ, η) de la transformée birationnelle (66) de C. D'après la forme obtenue pour $r(\xi, \eta)$ tous les α_j devront être entiers; on peut donc supprimer de (72) le terme $\Sigma\alpha_j \operatorname{Log} R_j$; d'autre part l'examen de (70) et de ses formes limites montre que les seuls cas dans lesquels $\int \bar{r} d\xi$ sera du type algébrico-logarithmique (à des expressions de première espèce près) sont les suivants :

$$\bar{r}(\xi, \eta) = -\frac{d}{d\xi}\operatorname{Log}\eta + \frac{a}{a\xi + b} + \frac{c\xi + d}{\eta},$$

$$\bar{r}(\xi, \eta) = -\frac{d}{d\xi}\operatorname{Log}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - a_1} + \frac{1}{\xi - a_2}\right) + \frac{c\xi + d}{\eta},$$

$$\bar{r}(\xi, \eta) = -\frac{d}{d\xi}\operatorname{Log}\eta + \frac{1}{\xi - a_1} + \frac{c\xi + d}{\eta}.$$

Or les deux dernières formes doivent être écartées : car les lignes singulières de u couperaient C en l'un des points de coïncidence m de la série g_2^1 appartenant à C; mais, par un point μ commun à une ligne singulière et à C on peut toujours faire passer une autre courbe de Σ sur laquelle μ n'est pas un point de coïncidence m. On aura donc :

$$u(\xi, \eta) = \int e^{\int \frac{c\xi + d}{\eta} d\xi} \frac{a\xi + b}{\eta} d\xi;$$

en d'autres termes, sur toute courbe C, $A\,dx + B\,dy$ devra se réduire à une différentielle abélienne de première espèce. Mais, dans la représentation hyperelliptique de F à l'aide des variables indépendantes I et J $A\,dx + B\,dy$ devient $\lambda(I, J)\,dI + \mu(I, J)\,dJ$, et, d'après ce qui précède, les fonctions (hyperelliptiques) λ et μ sont constantes le long de C;

elles le sont donc sur F (¹) et l'on peut écrire :

$$u = \int e^{\alpha I + \beta J}(\lambda\, dI + \mu\, dJ) \qquad (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \text{ const.}).$$

Mais la condition d'intégrabilité de l'expression précédente montre qu'on a $\alpha\mu - \beta\lambda = 0$ ou que u est de la forme

$$u = \int e^{\alpha U}\, dU,$$

U désignant une intégrale quelconque de première espèce de F.

36. *Formation des systèmes* (s). — Cela étant, la construction des systèmes (s) résultera immédiatement du théorème V. Supposons tout d'abord que u et v soient deux expressions de première espèce, et soit $x = \varphi(U, V), y = \chi(U, V), z = \psi(U, V)$ la représentation hyperelliptique normale de la surface; d'après la forme qu'on vient de trouver pour les expressions de première espèce, la solution $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de (s) s'obtiendra en posant $U = aU_1 + bV_1$, $V = cU_1 + dV_1$ (a, b, c, d, constantes numériques; $ad - bc \neq 0$), (U_1, V_1) coïncidant avec l'un des trois couples

$$\begin{cases} U_1 = \operatorname{Log}(Au + B); \\ V_1 = \operatorname{Log}(Cv + D); \end{cases} \qquad \begin{matrix} U_1 = \operatorname{Log}(Au + B); \\ V_1 = Cv + D; \end{matrix} \qquad \begin{matrix} U_1 = Au + B; \\ V_1 = Cv + D \end{matrix}$$

(A, B, C, D, constantes d'intégration). On obtient ainsi les systèmes (s_1) du n° 6. Réciproquement, si a, b, c, d satisfont à des conditions faciles à former, les fonctions x, y, z seront uniformes en u, v.

Supposons maintenant que u et v ne soient plus de première espèce et appliquons le théorème V. Dans le premier cas possible, $u_1 \equiv \operatorname{Log} u$, $v_1 \equiv \operatorname{Log} v$ seront des différentielles de Picard attachées à F; x, y, z seront uniformes en u_1, v_1, et d'après la solution du problème (A_2) (²), on peut affirmer que : 1° si la surface F est de modules généraux, le système (s) coïncide avec le premier des

(¹) On peut remarquer encore que tout point de F peut être relié à C par un arc appartenant à une autre courbe C.

(²) *Voir* n° 46.

systèmes (s_1); 2° si F est une surface elliptique, (s) coïncide avec le premier des systèmes du n° 23 [soit encore $(s_2)_1$, n° 6].

De même dans le second cas possible du théorème V, (s) se réduit au système $(s_2)_2$.

Examinons le troisième cas : $u+hv$ doit être de première espèce pour une certaine valeur de la constante h. D'après ce qui précède, on aura donc

$$u+hv=\int e^{\alpha U}\,dU,$$

$$u=\int e^{\alpha U}[\Phi(U, V)\,dU\;\Psi(U, V)\,dV],$$

Φ et Ψ étant deux fonctions hyperelliptiques de U et V (rationnelles en x, y, z). De plus, quand on fera $u+hv=$ const., u devra rester fini (¹); Ψ (U, V) se réduit donc à une constante; et l'examen de la condition d'intégrabilité montre qu'on doit avoir $\Psi\equiv 0$, $\Phi\equiv$ const. : l'hypothèse est donc inadmissible.

En résumé, quand F est une surface hyperelliptique de Picard, le système (s) doit être identique à l'un des systèmes (s_1) et (s_2) du n° 6.

III. — Les surfaces elliptiques.

37. *Formation des expressions de première espèce.* — Pour construire les expressions de première espèce appartenant à une surface elliptique quelconque de genre $p_g=1$ nous utiliserons la représentation paramétrique (51); nous aurons donc

$$du=e^{\int P_1 dU+Q_1 dT}(P_2\,dU+Q_2\,dT),$$

P_1, P_2, Q_1, Q_2 étant rationnelles en $p\,(U|\Omega, \Omega')$, $p'\,(U|\Omega, \Omega')$ et en T, W. Ainsi sur une courbe K (T = const.), on aura

$$du=e^{\int P_1 dU}P_2\,dU;$$

mais u doit se réduire alors à une expression de première espèce

(¹) Sous une autre forme, cette remarque a déjà été faite au n° 20, p. 298.

pour K; sur cette courbe du doit donc coïncider [1] avec $\mathrm{B}e^{\int \mathrm{A}\,d\mathrm{U}}\,d\mathrm{U}$, A et B ne dépendant que de (T, W). D'ailleurs, lorsque (x, y, z) décrit un cycle de K (auquel correspond une période ϖ de U), $\frac{\partial u}{\partial x}$ se reproduira multiplié par $e^{\mathrm{A}\varpi}$, ce qui prouve que A *est une constante absolue* et l'on pourra écrire, en modifiant au besoin Q_1,

$$du = e^{\mathrm{AU}+\int \mathrm{Q}_1(\mathrm{T},\mathrm{W})d\mathrm{T}}[d\mathrm{U} + \mathrm{Q}_2(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})\,d\mathrm{T}], \tag{73}$$

et tout revient à déterminer Q_1 et Q_2. Or effectuons sur (73) l'une quelconque des transformations (53) du n° 26; l'expression deviendra

$$(du)' = e^{\mathrm{A}(\mathrm{U}+a)+\int \mathrm{Q}_1(\mathrm{T},\mathrm{W})d\mathrm{T}}[d\mathrm{U} + \mathrm{Q}_2(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})\,d\mathrm{T}]; \tag{73'}$$

d'autre part, les conditions d'intégrabilité de (73) et (73') s'écrivent :

$$\begin{aligned}&\mathrm{AQ}_2(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{U}}\mathrm{Q}_2(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})\\ &\qquad = \mathrm{Q}_1(\mathrm{T},\,\mathrm{W}) = \mathrm{AQ}_2(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{U}}\mathrm{Q}_2(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}),\end{aligned} \tag{74}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \mathrm{U}}[\mathrm{Q}_2(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) - \mathrm{Q}_2(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})]\\ &\qquad + \mathrm{A}[\mathrm{Q}_2(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) - \mathrm{Q}_2(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})] = 0.\end{aligned} \tag{75}$$

Mais $\mathrm{Q}_2\,(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) - \mathrm{Q}_2\,(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})$ est une fonction rationnelle de $p\mathrm{U}$ et $p'\mathrm{U}$; pour $\mathrm{A} \neq 0$ on voit donc aussitôt que la différence précédente doit être identiquement nulle. Et ceci subsiste pour $\mathrm{A} = 0$, car, d'après (75), $\mathrm{Q}_2\,(\mathrm{U}+a;\,\mathrm{T},\,\mathrm{W}) - \mathrm{Q}_2\,(\mathrm{U};\,\mathrm{T},\,\mathrm{W})$ est alors indépendant de U quel que soit a; Q_2 est donc une fonction linéaire de U, c'est-à-dire une fonction de la seule variable (T, W).

Cela étant, les conditions (74) se réduisent à $\mathrm{Q}_1(\mathrm{T},\,\mathrm{W}) = \mathrm{AQ}_2(\mathrm{T},\,\mathrm{W})$ et l'on aura

$$du = e^{\mathrm{A}\left(\mathrm{U}+\int \mathrm{Q}_2 d\mathrm{T}\right)}[d\mathrm{U} + \mathrm{Q}_2(\mathrm{T},\,\mathrm{W})\,d\mathrm{T}],$$

d'où

$$u = \frac{1}{\mathrm{A}}e^{\mathrm{A}\left(\mathrm{U}+\int \mathrm{Q}_2 d\mathrm{T}\right)} \qquad \text{ou} \qquad u = \mathrm{U} + \int \mathrm{Q}_2\,d\mathrm{T},$$

---

(1) *Voir* la note du n° 33, p. 331.

suivant qu'on a $A \neq 0$ ou $A = 0$. Réciproquement, pour qu'une telle expression soit de première espèce, il faut et il suffit que $\int Q_2 \, dT$ se réduise à une intégrale de Picard de première espèce pour F, c'est-à-dire à une intégrale abélienne de première espèce pour (37) qui est actuellement de genre 1 [*cf.* n° 26 et note (²) p. 319] et Q_2 est rationnel en S et T.

38. *Rejet de l'hypothèse actuelle.* — Cela étant, appliquons le théorème V ; si u et v sont deux expressions de première espèce, ainsi que dans les deux premiers cas complémentaires du théorème, le problème actuel se réduit immédiatement à un problème (A_2) : c'est la conséquence de la forme qu'on vient de trouver pour les expressions de première espèce. D'après la solution du problème (A_2) il n'y aura donc pas d'inversion uniforme, sauf toutefois si F est hyperelliptique, cas que nous écartons, comme déjà traité.

Reste le dernier cas du théorème V : $u + hv$ est de première espèce, mais u et v ne le sont pas. Or les lignes d'infini de u sont données par une équation $\mathcal{F}(pU, p'U; T, W) = 0$ où $\mathcal{F}$ est un polynome à coefficients numériques. Elles doivent être de la forme $u + hv =$ const. : elles vérifient donc une équation de la forme $dU + Q_2 (T, S) \, dT = 0$. Mais alors on déduit aussitôt de là que l'intégrale générale de l'équation $dU + Q_2 \, dT \equiv 0$ est algébrique ; on retombe sur le problème traité aux nᵒˢ 22, 23, ce qui montre que l'hypothèse actuelle est inadmissible.

QUATRIÈME PARTIE

LE CYLINDRE ELLIPTIQUE

39. *Si* F *est réglée, elle doit être de genre un.* — Supposons maintenant que F soit une surface irrégulière de genre géométrique zéro : ce sera donc une surface réglée ou une surface elliptique. Envisageons

d'abord le premier cas, et démontrons que *si la surface* F *est réglée, elle est birationnellement identique à un cylindre elliptique.*

Supposons que moyennant une transformation birationnelle on ait ramené l'équation de F à la forme $f(x, y) = 0$; par un simple changement d'écriture on peut toujours admettre que dans (s) (n° 1) H, K, L, M sont des polynomes en z ([1]). Imaginons alors que f soit de genre > 1. A l'exception des génératrices F ne peut posséder aucune courbe rationnelle ou elliptique (car sa projection sur le plan $z = 0$ serait de genre > 1). Donc, d'après le théorème I les intégrales I et J ne peuvent admettre aucune ligne singulière distincte des génératrices : on aura donc ainsi

$$du = e^{\int X(x,y)dy + \int r(z)\,dz} [A(z;\, x, y)\,dx + B(z;\, x, y)\,dz)];$$

de plus la même condition devra être vérifiée après une substitution linéaire quelconque effectuée sur z, ce qui exige que l'on ait $B \equiv 0$, $r \equiv 8$ (et, par suite, A indépendant de z). Mais alors u et v seraient fonctions l'un de l'autre (et, en outre, x et y ne pourraient être uniformes en u).

40. *Forme générale des coefficients de* (s). *L'hypothèse* (H). — Supposons donc que F soit un cylindre elliptique

$$(76) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

ou, si l'on veut

$$x = \wp(w \mid \omega, \omega'), \qquad y = \wp'(w \mid \omega, \omega').$$

Les seules courbes rationnelles que possède F sont les génératrices. Quand aux courbes elliptiques de F, il est aisé de les déterminer : le long d'une telle courbe, C, x, y, z sont des fonctions elliptiques d'un paramètre t, c'est-à-dire des fonctions rationnelles $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, $z(\xi, \eta)$ de $\xi = \wp\,(t \mid \overline{\Omega}, \overline{\Omega}') \equiv \overline{\wp}\,t$ et de $\eta = \overline{\wp}'\,t$; $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ satisfaisant à (76) on a nécessairement

$$dw \equiv \frac{dx}{y} = a\,dt,$$

([1]) Les différentielles écrites sont actuellement linéaires en dx et dz.

soit $w = at + b$, a et b étant deux constantes qu'on peut prendre respectivement égales à 1 et à 0. On en déduit

$$p(w \mid \omega, \omega') = R[p(w \mid \overline{\Omega}, \overline{\Omega'})],$$

R étant une fonction rationnelle : $p w$ est donc une transformée de $\overline{p} w$ et l'on a

$$\overline{\Omega} = a\omega + b\omega', \qquad \overline{\Omega'} = c\omega + d\omega',$$

a, b, c, d étant quatre entiers. Réciproquement, il est clair que les équations

$$x = p w [\equiv R(\overline{p} w)], \qquad y = p' w [\equiv \overline{p}' w R'(\overline{p} w)], \qquad z = f(\overline{p} w, \overline{p}' w),$$

où f est une fonction rationnelle quelconque de $\overline{p}$ et $\overline{p}'$, représentent une courbe elliptique située sur F.

Cela étant, écrivons du sous la forme (s) (n° 1), avec H et K polynomes en z [1], et supposons que les lignes singulières de du soient formées de génératrices et de courbes elliptiques $C_1, \ldots, C_N$. Les équations de ces courbes peuvent s'écrire $z = f_i\,[p(w \mid \overline{\Omega}_i, \overline{\Omega}'_i)$, $p'(w \mid \overline{\Omega}_i, \overline{\Omega}'_i)] = F_i[p(w \mid \Omega, \Omega'), p'(w \mid \Omega, \Omega')]$ les f_i et les F_i étant des fonctions rationnelles, et les $p(\overline{w}, \overline{\Omega}_i, \Omega'_i)$, comme $p(w \mid \omega, \omega')$, étant des transformées de $p(w \mid \Omega, \Omega')$. Pour abréger l'écriture, nous adopterons simplement comme équation de C_i

$$z = \overline{a}_i(w) \qquad \text{ou} \qquad z = a_i(x),$$

$a_i(x)$ étant une certaine fonction algébrique du point (x, y); la notation sera suffisamment explicite d'après ce qui précède.

En retranchant de l'intégrale $\int P\,dx + Q\,dz$ la combinaison $\Sigma h_i \operatorname{Log}[z - a_i(x)]$ la différence n'admettra plus à distance finie, comme courbes logarithmiques, que des génératrices de F; on pourra donc écrire

$$(77) \qquad du = WZ[A(z, x)\,dx + B(z, x)\,dz]$$

---

[1] Les différentielles indépendantes écrites étant dx et dz.

avec

$$W = e^{\alpha w + \int \varphi(w)\,dw}, \qquad Z = \prod_{i=1}^{N} [z - a_i(x)]^{h_i};$$

A et B sont des polynomes en z à coefficients rationnels en x, y [ou, encore, en $p(w|\Omega, \Omega')$, $p'(w|\Omega, \Omega')$; $\varphi(w)$ est une fonction rationnelle de $p(w|\Omega, \Omega')$ et $p'(w|\Omega, \Omega')$ et nous supposerons essentiellement, pour commencer, que l'intégrale $\operatorname{Log} W \equiv \alpha w + \int \varphi(w)\,dv$ *ne se réduit pas à une combinaison logarithmique, à résidus rationnels :* ce sera l'hypothèse (H).

41. *Réduction de l'expression du (conditions d'intégrabilité).* — Ceci posé, nous présenterons d'abord des remarques préliminaires sur la réduction des expressions (77); en principe cette réduction a été indiquée déjà par M. Ermakoff (1); mais, au fond, elle constitue l'extension du procédé employé par M. Émile Picard pour la réduction des intégrales de différentielles algébriques à deux variables. Écrivons pour (77) la condition d'intégrabilité

$$\text{(78)} \qquad A\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{z-a_i} + \frac{\partial A}{\partial z} = \left[\frac{1}{W}\frac{dW}{dx} - \sum_{i=1}^{N}\frac{h_i a_i'(x)}{z-\alpha_i}\right] B + \frac{\partial B}{\partial x}.$$

On en déduit aussitôt (2)

$$\text{(79)} \qquad A(a_i, x) + a_i' B(a_i, x) = 0.$$

Supposons alors $h_1 \neq -1$; posons

$$F(z, x) \equiv \prod_{i=1}^{N} [z - a_i(x)]$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 131, 1906, p. 56. Cet auteur s'était proposé de construire toutes les différentielles totales de la forme $a(x)\,Z\,(A\,dx + B\,dz)$, $a(x)$ et les $a_i(x)$ étant des fonctions *quelconques* de x.

(2) Cette relation exprime un théorème connu, dû à Euler, sur les facteurs intégrants de $A\,dx + B\,dz$.

et retranchons de du l'expression

$$\frac{1}{h_1+1} d\left[\mathrm{WZ}\frac{\mathrm{F}(z, x)}{\mathrm{F}'_z(a_1, x)}\mathrm{B}(a_1, x)\right];$$

on trouve aussitôt, en vertu de (79), que la différence possède encore la forme (77), les h_i n'étant pas modifiés, sauf h_1 qui est remplacé par h_1+1. De proche en proche, en retranchant de du une expression de la forme $d[\mathrm{WZP}(z, x)]$ (P, polynome en z), on peut donc supposer que pour la différence

$$du_1 \equiv d(u - \mathrm{WZP}) = \mathrm{WZ}_1(\mathrm{A}_1\,dx + \mathrm{B}_1\,dz),$$

on a

$$\mathrm{Z}_1 = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} (z-a_i)^{k_i},$$

chacun des k_i satisfaisant à l'une des conditions $\mathcal{R}(k_i) > -1$ ou $k_i = -1$ (avec $k_i = h_i$ entier positif). De plus, si l'on a

$$\mathrm{A}_1 = \alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0, \qquad \mathrm{B}_1 = \beta_q z^q + \ldots + \beta_0 \qquad (\alpha_p \neq 0),$$

on peut toujours supposer les k_i choisis de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} k_i + p \neq 0.$$

Écrivons alors pour du_1 la condition d'intégrabilité (78) ; d'après l'inégalité précédente le premier membre de cette condition sera exactement d'ordre $p-1$ en z, et, en vertu de l'hypothèse (H), le second membre sera d'ordre q exactement ; on aura donc $q = p-1\ (\gtrless 0)$ et, de plus :

$$\alpha_p\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} k_i + p\right) = \frac{\beta_q}{\mathrm{W}}\frac{d\mathrm{W}}{dx} + \frac{d\beta_q}{dx}. \tag{80}$$

Or admettons d'abord que les k_i ne soient pas tous nuls, et supposons $p > \mathrm{N}-1$; on trouvera

$$\frac{1}{\Sigma k_i + p}\, d[\beta_q \mathrm{WZ}_1 \mathrm{F}.(z-a)^{p-\mathrm{N}}] = \mathrm{WZ}_1(\overline{\mathrm{A}}\,dx + \overline{\mathrm{B}}\,dz)$$

avec

$$\overline{A} = \frac{1}{\Sigma k_i + p}\left(\frac{\beta_q}{W}\frac{dW}{dx} + \frac{d\beta_q}{dx}\right)z^p + \ldots,$$
$$\overline{B} = \beta_q z^{p-1} + \ldots.$$

D'après (80) la différence

$$du_1 - \frac{1}{\Sigma k_i + p} d[\beta_q WZ_1 F.(z-a)^{p-N}]$$

sera donc de la même forme que du_1, mais avec A_1 et B_1 de degrés respectifs $p-1$ et $q-2$; d'ailleurs, les $\mathfrak{K}(k_i)$ (qui ne peuvent diminuer) ne seront pas modifiées si l'on prend $a \neq a_i(x)$. De proche en proche, en retranchant de du_1 une expression de la forme $d[WZ_1 FP_1(z, x)]$ (P_1, polynome en z), *on peut donc supposer que pour la différence*

$$du_2 \equiv d(u_1 - WZ_1 FP_1) = WZ_1(A_2\,dx + B_2\,dz)$$

A_2 et B_2 *seront de degrés respectifs* $N-1$ *et* $N-2$.

On aboutirait à la même conclusion si tous les k_i étaient nuls à ceci près qu'on aurait $A_2(z, x) = a(x)$, $B_2 = 0$, soit

$$du_2 \equiv d(u_1 - WP_1) = W a(x)\,dx.$$

En définitive, A_2 et B_2 étant ainsi précisés, on peut écrire

$$du = WZ_1(A_2\,dx + B_2\,dz) + d\left(WZ_1\frac{P_2}{Q_2}\right),$$

P_2 et Q_2 étant des polynomes en z, avec

$$Q_2 = \prod_{i=1}^{N}(z-a_i)^{k_i - h_i}.$$

42. *Propriétés des exposants de du.* — Cela étant, il est aisé de voir qu'*aucun des exposants de* Z_1 *ne peut être égal à* -1 : car supposons par exemple $k_1 = -1$; le résidu en a_1 de la fonction rationnelle de z, WZ_1B_2, doit être indépendant de x [1]. Or le résidu en a_1 de Z_1B_2 est rationnel en $\wp(\varpi|\Omega, \Omega')$, $\wp'(\varpi|\Omega, \Omega')$; en vertu de l'hypo-

---

(1) Car toutes les déterminations de u sont de la forme $Au+B$ (A et B constantes).

thèse (H) le résidu de WZ_1B_2 est donc nul. On a alors $B_2(a_1)=0$, d'où, d'après (79), $A_2(a_1)=0$: c'est dire que l'exposant k_i est nul.

On peut donc supposer que *tous les k_i ont leurs parties réelles supérieures à* -1. Or, moyennant une substitution linéaire T sur z (¹) il est loisible de ramener deux a_i (dont l'un peut être $z=\infty$) à coïncider avec les points $c_1=0$, $c_2=1$. Supposons que T transforme aussi d'autres $a_i(x)$ en des valeurs constantes $c_3, \ldots, c_M$: nous pourrons écrire ainsi :

$$du_2 = W\prod_{i=1}^{M}(z-c_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{N-M}[z-a_j(x)]^{\lambda_j}(A_3\,dx+B_3\,dz),$$

aucun des $a_j(x)$ n'étant constant. Je dis que *tous les exposants λ_j des $z-a_j(x)$ sont des entiers* (nécessairement positifs, d'après ce qui précède).

Observons d'abord qu'on peut écrire

$$u_2 = W\int_0^z \theta(z,x)\,dz,$$

en posant

$$\theta(z,x)\equiv\prod_{i=1}^{M}(z-c_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{N-M}[z-a_j(x)]^{\lambda_j}B_3$$

et, puisque (²) $z=c_2$ $(=1)$ est une intégrale première de $A_3\,dx+B_3\,dz=0$, on aura, quel que soit x,

$$(81)\qquad \Theta(x)\equiv\int_0^1\theta(z,x)\,dz = CW^{-1}\qquad (C=\text{const.}),$$

l'intégrale étant prise, par exemple, le long du segment rectiligne L joignant les points 0 et 1. Or, faisons décrire à (x, y) sur la surface de Riemann (76) un chemin fermé $\mathfrak{L}$ tel que l'un des $a_j(x)$, $a_1(x)$

(¹) Il existe d'ailleurs une infinité de transformations T répondant à la question ; nous en préciserons bientôt une s'il y a lieu. On observera que l'opération T est une transformation birationnelle de F.

(²) Cette application du théorème d'Euler a déjà été faite par M. Ermakoff (*loc. cit.*) et antérieurement (selon cet auteur) par M. Korkine dans un Mémoire écrit en langue russe. Ce sont précisément des équations de la forme (81) qui fournissent à M. Ermakoff la construction des différentielles qu'il avait en vue.

par exemple, tourne autour de $z=0$ et désignons par $a_1(x), \ldots, a_\nu(x)$ tous les points $a_j(x)$ qui, en même temps que a_1, tournent autour de $z=0$ et reprennent leurs positions primitives en même temps que (x, y). D'ailleurs, on peut exclure de ce groupe tous les a_j d'exposants λ_j entiers (positifs) : il suffit, en effet, d'incorporer les $(z-a_j)^{\lambda_j}$ correspondant à A_3 et B_3. Enfin, si la somme $\lambda_1 + \ldots + \lambda_\nu$ est elle-même un entier, on pourra toujours particulariser la transformation T de manière que l'un des a_j $(j=1, \ldots, \nu)$ coïncide avec $z=\infty$ [1].

Cela étant, la disposition initiale du groupe $a_1, \ldots, a_\nu$ par rapport à L dépend de la position initiale de (x, y); si celle-ci est telle que les points traversent L dans le sens direct et dans l'ordre $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ (par exemple), après le cheminement de (x, y) sur $\mathfrak{L}$, $\Theta(x)$ sera devenue :

$$(82) \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\nu\Theta(x) + (1-\varepsilon_1)\int_0^{a_1}\theta\,dz + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\int_0^{a_2}\theta\,dz + \ldots \\ + \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{\nu-1}(1-\varepsilon_\nu)\int_0^{a_\nu}\theta\,dz \qquad (\varepsilon_j = e^{2\pi i\lambda_j}).$$

Or on peut effectuer l'opération précédente en prenant comme position initiale de (x, y) un point quelconque de $\mathfrak{L}$ (tel, par exemple, que les a_j traversent L dans l'ordre $a_\varkappa, a_{\varkappa+1}, \ldots, a_\nu, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}$); on trouvera en tout ν expressions de la forme (82), et chaque fois le second membre de (81) se multipliera par le même facteur constant H. On obtiendra ainsi ν équations (E). Or, quand x sur $\mathfrak{L}$ dépasse un point $\bar{x}$ tel que $a_1(x)$, par exemple, franchisse L en $a_1(\bar{x})$, $\Theta(x)$ *reste continue* en vertu de l'hypothèse faite sur les λ_j; *deux relations* E *consécutives sont donc valables en un même point x, et ainsi de suite.* Les premiers membres de ces relations seront linéaires par rapport aux ν intégrales $(1-\varepsilon_j)\int_0^{a_j}\theta(z, x)\,dz$, et les seconds membres seront

---

[1] Ce résultat peut être obtenu, du reste, avant même la réduction de (77), puisque cette réduction ne modifie la somme $\lambda_1+\ldots+\lambda_\nu$ que d'un entier. Les considérations suivantes s'étendent aisément au cas plus général où les a_j se répartiraient en différents groupes, $g_1, \ldots, g_\sigma$, les points du groupe g_ρ tournant autour de c_ρ.

égaux à $(\mathrm{H}-1)\,\Theta(x)$. Or le déterminant des équations (E) est égal à [1]

$$\Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{\nu-1} \\ \varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_\nu & 1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{\nu-1} \\ \varepsilon_3\ldots\varepsilon_\nu & \varepsilon_3\ldots\varepsilon_\nu\varepsilon_1 & 1 & \ldots & \varepsilon_3\ldots\varepsilon_{\nu-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_\nu & \varepsilon_\nu\varepsilon_1 & \varepsilon_\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_\nu)^\nu.$$

D'après notre hypothèse sur les a_j, Δ est sûrement différent de zéro. Mais alors il résulte aussitôt des équations (E) que chacune des intégrales $\int_0^{a_j(x)} \theta(z, x)\,dz$ est proportionnelle à $\Theta(x)$. Or, si l'on a par exemple

$$\int_0^{a_j(x)} \theta(z, x)\,dz = \mathrm{K}\int_0^1 \theta(z, x)\,dz,$$

en faisant tendre $a_j(x)$ vers o, on en déduira que K est nul, et par suite que le premier membre est identiquement nul. On verrait de même que toutes les expressions $\int_{c_i}^{a_j(x)} \theta(z, x)\,dz$ doivent être $\equiv 0$; par suite, l'expression $\mathrm{W}\,\theta^{-1}\int_0^z \theta(z, x)\,dz$, qui n'a pas de points logarithmiques, est uniforme sur le plan z; comme elle n'a pas de points essentiels, elle est rationnelle en z; dès lors, on peut supposer $\mathrm{W}\int_0^z \theta(z)\,dz$ incorporée à $\mathrm{W}\,\mathrm{Z}_1\,\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{Q}_2}$ (n° 41), ce qui revient à la supposer identiquement nulle : on doit donc admettre que tous les λ_j $(j=1,\ldots, \mathrm{N}-\mathrm{M})$ sont des entiers (positifs). C. Q. F. D.

Maintenant, s'il en est ainsi, on pourra incorporer $\prod\limits_{j=1}^{\mathrm{N}-\mathrm{M}} (z-a_j)^{\lambda_j}$

---

[1] On obtient aisément par récurrence la valeur de Δ : pour passer de $\nu-1$ à ν, on développera Δ suivant les éléments de la première ligne; tous les mineurs seront nuls, à l'exception du premier qui est $\Delta(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{\nu-1}, \overline{\varepsilon_\nu\varepsilon_1}) = (1-\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu)^{\nu-1}$ et du dernier, qui, pris avec son signe dans Δ, est égal à $-\varepsilon_\nu\,\Delta(\overline{\varepsilon_\nu\varepsilon_1}, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}) = -(1-\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu)^{\nu-1}$.

à A_3 et B_3 et écrire (pour $N \geqq 1$) :

$$du_2 = W \prod_{j=1}^{N} (z - c_j)^{k_j} (A_3\, dx + B_3\, dz).$$

Mais nous avons vu qu'on peut supposer A_3 de degré $N-1$ au plus (pour $N \geqq 1$); en vertu de (79) A_3 doit s'annuler pour $z = c_1, \ldots, c_N$; il est donc identiquement nul; et il en est de même de B_3, sinon le produit WB_3 devant être indépendant de x, l'hypothèse (H) ne pourrait être vérifiée.

En définitive, il est donc établi que l'expression (77) est nécessairement de l'un des types suivants :

1° $$du = d[WZP(z, x)];$$

on a

$$Z = \prod_{i=1}^{N} [z - a_i(x)]^{h_i+1},$$

aucun des $h_i + 1$ n'étant un entier positif, et l'un au moins des h_i n'étant pas entier; P est un polynome en z.

2° $$du = d[WZP(z, x)] + Wa(x)\, dx;$$

on a

$$Z = \prod_{i=1}^{N} (z - a_i)^{m_i},$$

tous les m_i étant des entiers négatifs.

43. *Réduction de l'expression du (conditions d'uniformité).* — Réunissant les deux formes précédentes et modifiant la notation, nous sommes ainsi ramenés au problème suivant : Soit un système

$$(83) \quad \begin{cases} u = W_1 Z_1 P_1(z, x) + \int W_1 b_1(x)\, dx, \\ v = W_2 Z_2 P_2(z, x) + \int W_2 b_2(x)\, dx, \end{cases}$$

où l'on a

$$\operatorname{Log} W_j = \alpha_j w + \int \varphi_j(w)\,dw \qquad (j = 1, 2);$$

$$Z_1 = \prod_{i=1}^{N} [z - a_i(x)]^{h_i}, \qquad Z_2 = \prod_{i=1}^{N} [z - a_i(x)]^{k_i};$$

les φ_j sont des fonctions elliptiques (¹), et Log W_j ne se réduit pas à des sommes de logarithmes de fonctions elliptiques (¹) à résidus rationnels; les k_i (ou les h_i) sont des entiers négatifs pour b_1 (ou b_2) $\not\equiv 0$; les a_i, b_1, b_2 et les coefficients des polynomes en z, P_1 et P_2 sont des fonctions elliptiques (¹) : on propose de déterminer tous les systèmes (83) dont l'intégrale générale est uniforme en u et v.

Nous allons montrer tout d'abord qu'*on doit avoir* $P_1 b_1 \equiv 0$ *et* $P_2 b_2 \equiv 0$.

En effet, supposons qu'on ait, par exemple, $b_1 \not\equiv 0$, et qu'il existe un pôle (soit $z = 0$) de Z_1 qui soit effectivement d'ordre p pour $Z_1 P_1$; posons $z = \varepsilon z_1$, $u = \varepsilon^{-p} u_1$, $v = \varepsilon^{-q} v_1$, q étant égal à p_1, ou à 0, suivant que $z = 0$ est un pôle d'ordre p_1 ou un point régulier pour $Z_2 P_2$; puis effaçons les indices de z_1, u_1, v_1. Pour $q \neq 0$, le système (83) sera remplacé par

$$(84)\qquad \begin{cases} u - \dfrac{W_1}{z^p} c_1(x)[1 + \varepsilon z\, d_1(x) + \ldots] = \varepsilon^p \displaystyle\int W_1 b_1(x)\,dx, \\ v - \dfrac{W_2}{z^q} c_2(x)[1 + \varepsilon z\, d_2(x) + \ldots] = \varepsilon^q \displaystyle\int W_2 b_2(x)\,dx \end{cases}$$

(c_1, c_2, d_1, d_2, ... fonctions algébriques de x, y); et pour $q = 0$ $(84)_2$ sera remplacé par $(84)_2$ *bis* :

$$(84)_2\ bis \qquad v - W_2 c_2(x)[d(x) + \varepsilon d_2(x) + \ldots] = 0.$$

Or développons la solution du système précédent suivant les puissances de ε, soit

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \ldots; \qquad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots \qquad (\text{et } w = w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots).$$

Comme au n° 9, on trouvera $w_0 = A \operatorname{Log} u^q v^{-p}$, ainsi que z_0; puis w_i

---

(¹) C'est-à-dire rationnelles en $p(w|\Omega, \Omega')$ et $p'(w|\Omega, \Omega')$ (n° 40).

et z_i seront donnés par un système linéaire à déterminant non nul (¹). Pour i inférieur à p (si $q=0$) ou à la plus petite, r, des quantités p, q, l'uniformité de z_0 et x_0 entraînera celle de z_i et x_i; pour $i=p$ (ou r) un second membre au moins du système linéaire en z_i, w_i contiendra soit l'expression $\int W_1 y b_1\, dw$, soit l'expression $\int W_2 y b_2\, dw$ (dans laquelle w serait remplacé par w_0). Supposons que ce soit la première et désignons par $w=\tau$ un pôle de $\varphi_1(w)$ ou de yb_1 (exprimé en w); z_p et x_p contiendront un terme en

$$[\mathrm{A}\,\mathrm{Log}(u^q v^{-p})-\tau]^\alpha \quad \text{ou en} \quad \mathrm{Log}[\mathrm{A}\,\mathrm{Log}(u^q v^{-p})-\tau]$$

et, par suite, ne pourront être uniformes autour de $u=0$.

Il faudra donc que $W_1 yb_1$ se réduise à $e^{\alpha_1 w_1}$, auquel cas on pourra réunir le second membre de $(84)_1$ au premier. Le même résultat s'appliquera ensuite à $(84)_2$ si q est positif ou, si, q étant nul, $Z_2 P_2$ possède au moins un autre pôle $z=a_i$ (fini ou non), c'est-à-dire si $Z_2 P_2$ n'est pas indépendant de z.

Nous aboutissons ainsi à la conclusion suivante : *Pour que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion d'un système* (83) *soient uniformes, il est nécessaire et suffisant que ce système possède l'une* (²) *des formes suivantes :*

$$u = W_1 Z_1 P_1(z, x), \qquad v = W_2 Z_2 P_2(z, x), \tag{85}$$

$$v = W_1 Z P_1(z, x), \qquad v = \int W_2 b_2(x)\, dx. \tag{86}$$

44. *Formes des systèmes* (S). — Occupons-nous d'abord du système (85). Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$Z_1 P_1 \equiv \prod_{i=1}^{\nu} (z-a_i)^{h_i}, \qquad Z_2 P_2 \equiv \prod_{i=1}^{\nu} (z-a_i)^{k_i} \qquad (\nu \geqq \mathrm{N});$$

quelques-uns des a_i pourront être algébriques en $\wp(w \mid \Omega, \Omega')$ et

(¹) Comme étant égal au déterminant $\dfrac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(w, z)}$ dans lequel on aurait remplacé ε par o, w et z par w_0 et z_0.

(²) Le cas où $Z_1 P_1$ et $Z_2 P_2$ ne contiendraient pas z ne peut être envisagé.

$p'(w|\Omega, \Omega')$, ce qui, d'ailleurs, n'a pas d'importance pour la suite. Appliquons alors les résultats du n° 9 au domaine du point a_i; le système

$$u = e^{\alpha w + \int \varphi dw} \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i)^{h_i}, \qquad v = e^{\beta w + \int \psi dw} \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i)^{k_i}$$

ne pourra avoir sa solution uniforme que si l'on a

$$(87) \quad k_i \int \varphi\, dw - h_i \int \psi\, dw + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{\nu} (k_i h_j - h_i k_j) \operatorname{Log}(a_i - a_j) = C_i \quad (C_i = \text{const.}).$$

Supposons d'abord que φ et ψ ne soient pas identiquement nuls; écrivons alors les équations (87) pour deux valeurs quelconques i', i'' de l'indice; φ et ψ ne pouvant se réduire à des combinaisons logarithmiques, ces deux équations ne sont pas distinctes. On a donc $k_{i'} h_{i''} - h_{i'} k_{i''} = 0$; ceci ayant lieu quels que soient i', i'', on tire de (87) $h_i \int \varphi\, dw - k_i \int \psi\, dw = C_i$; on peut alors poser

$$\varphi = \gamma \mathfrak{I}, \qquad \psi = \delta \mathfrak{I}, \qquad h_i = \gamma \varkappa_i, \qquad k_i = \delta \varkappa_i \qquad (\gamma,\ \delta,\ \varkappa_i = \text{const.});$$

le système (85) est donc de la forme

$$(88) \qquad u = e^{\alpha w + \gamma \int \mathfrak{I}(w) dw} Z^{\gamma}, \qquad v = e^{\beta w + \delta \int \mathfrak{I}(w) dw} Z^{\delta},$$

avec

$$Z = \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i)^{\varkappa_i} \qquad \text{et} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv D \neq 0.$$

On tire de (88) :

$$e^{Dw} = u^{\delta} v^{-\gamma}, \qquad x = p\left[\frac{1}{D} \operatorname{Log}(u^{\delta} v^{-\gamma})\right], \qquad y = p'\left[\frac{1}{D} \operatorname{Log}(u^{\delta} v^{-\gamma})\right];$$

x et y ne seront donc uniformes que si $\frac{2\pi i \gamma}{D}$ et $\frac{2\pi i \delta}{D}$ sont des périodes de $p(w|\omega, \omega')$.

Je dis maintenant que $z(u, v)$ *ne pourra être uniforme que si l'équation* $Z(z, w) = t$ *(où w est regardé comme une constante) donne pour z une* *fonction uniforme de t.* En effet, en même temps que le système

$$x = pw, \qquad y = p'w, \qquad e^{\mathrm{D}w} = u^{\delta} v^{-\gamma}, \qquad \mathrm{Z}\, e^{\int \vartheta\, dw} = u^{-\beta'} v^{\alpha'}$$

($\beta = \beta'\mathrm{D}$, $\alpha = \alpha'\mathrm{D}$), tous les systèmes qu'on déduit de celui-ci en multipliant $u^{\delta} v^{-\gamma}$ par une constante arbitraire h devront aussi avoir leurs solutions uniformes en u et v. Or, soit $z = \zeta(w)$ un zéro de $\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}$ (qui n'annule pas Z); dans le voisinage de ζ on aura

$$\mathrm{Z}\, e^{\int \vartheta(w)\, dw} = g_0(w) + g_1(w)(z - \zeta)^i + \ldots \qquad [i \geqq 2;\ g_1(w) \neq 0].$$

Déterminons w_0 par l'équation $g_0(w_0) = u_0^{-\beta'} v_0^{\alpha'}$, u_0 et v_0 étant arbitraires, mais tels que $g_1(w_0) \neq 0$ et calculons h par la relation

$$e^{\mathrm{D}w_0} = h\, u_0^{\delta} v_0^{-\gamma};$$

puis effectuons la transformation

$$u \mid u_0(1 + \varepsilon^i u), \qquad v \mid v_0(1 + \varepsilon^i v), \qquad w \mid w_0(1 + \varepsilon^i w), \qquad z \mid \zeta(w_0) + \varepsilon z;$$

à la limite, notre système deviendra

$$w = \frac{\delta u - \gamma v}{\mathrm{D} w_0}, \qquad g_1(w_0)\, z^i = g_0(w_0)(-\beta' u + \alpha' v) - g'_0(w_0)\, w.$$

Quel que soit $g'_0(w_0)$, comme on a $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, le second membre de la dernière relation ne pourra jamais s'annuler identiquement, et, pour $i > 1$, z sera une fonction multiforme de u et v.

Ainsi donc l'équation $\sum \dfrac{\varkappa_i}{z - a_i} = 0$ n'a pas de racine finie (¹), et l'on aura

$$\sum \frac{\varkappa_i}{z - a_i} = \frac{\mathrm{A}}{(z - a_1)\ldots(z - a_\nu)}.$$

Changeons z en z^{-1}; en vertu du résultat précédent, on devra avoir $\nu = 1$ ou $\nu = 2$. Le second cas se ramène d'ailleurs au premier par une substitution linéaire sur z (car $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$); et, en définitive, le système (85) sera de la forme

$$(89) \qquad u = e^{\alpha w + \gamma \int \vartheta(w)\, dw} z^{\gamma}, \qquad v = e^{\beta w + \delta \int \vartheta(w)\, dw} z^{\delta};$$

(¹) On serait parvenu au même résultat en appliquant le théorème II.

on en tire

$$z^{\mathrm{D}} = u^{-\beta} v^{\alpha} e^{-\mathrm{D}\int \mathfrak{S}(w)\,dw}.$$

Quand u (ou v) tourne autour de o, $\int \mathfrak{S}(w)\,dw$ augmente de 2ϖ (ou de $2\varpi'$); $-2\pi i\beta - 2\varpi$ et $2\pi i\alpha - 2\varpi'$ devront donc être des multiples de $2\pi i \mathrm{D}$, et ces conditions sont évidemment suffisantes pour l'uniformité de z [1].

Supposons maintenant que φ soit nul; d'après (87) ψ devra être nul, à moins que tous les h_i ne soient nuls (ce qui nous ramènerait au cas précédent avec $\gamma = 0$). Or, posons $a_1 - a_j = b_j$, d'où $a_i - a_j = b_i - b_j$. Les équations (87) écrites pour $i = 2, \ldots, \nu$ sont distinctes par rapport aux inconnues : car le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport aux b_j contient dans sa diagonale le terme irréductible

$$\frac{(21)\ldots(\nu 1)}{b_2\ldots b_\nu} \qquad [\text{avec } (ij) = h_i k_j - h_j k_i],$$

et si quelques-uns des $(i1)$ étaient nuls, (21) par exemple, on envisagerait le terme également irréductible $\frac{(23)^2(41)\ldots(\nu 1)}{(b_3-b_2)^2 b_4\ldots b_\nu}$, ... Il résulte donc [2] des équations (87) que les b_j sont des constantes, et moyennant le changement de $z - a_1$ en z, on peut supposer qu'il en est de même des a_j.

Le système (85) est donc de la forme

$$u = e^{\alpha w} \mathrm{Z}_1, \qquad v = e^{\beta w} \mathrm{Z}_2$$

avec

$$\mathrm{Z}_1 = \prod_{j=1}^{\nu} (z - c_j)^{h_j}, \qquad \mathrm{Z}_2 = \prod_{j=2}^{\nu} (z - c_j)^{k_j},$$

les c_i étant constants. Éliminons w; il viendra $u^{-\beta} v^{\alpha} = \mathrm{Z}_1^{-\beta} \mathrm{Z}_2^{\alpha}$; comme tout à l'heure [3], on montrera que le second membre peut être réduit

---

(1) D'ailleurs, aux notations près, le système (89) est identique au système I' étudié au n° 9, et il peut être simplifié comme ce dernier système.

(2) On écarte le cas où tous les (ij) seraient nuls : on serait alors ramené au système (89).

(3) Comme le second membre ne contient pas w, le résultat sera une conséquence immédiate du théorème de Briot et Bouquet (*voir* la note du n° 10, p. 282).

à z^γ, d'où il résulte que le système (85) s'écrira :

(90) $$u = e^{\alpha w} Z^\alpha z^\gamma, \qquad v = e^{\beta w} Z^\beta z^\delta$$

avec

$$Z = \prod_{j=1}^{\nu} (z - c_j)^{\varkappa_j} \qquad \text{et} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

En se servant des notations (7) on pourra écrire :

$$z = u^{-\beta'} v^{\alpha'}, \qquad e^w = u^{\delta'} v^{-\gamma'} Z^{-1}.$$

Pour que sa solution soit uniforme, α' et β' devront être entiers; supposons-les positifs, par exemple; comme on peut toujours admettre qu'aucun des c_j n'est nul, l'uniformité de x et de y exigera que $2\pi i\gamma'$, $2\pi i\delta'$ et $2\pi i \varkappa_j$ soient des périodes de $p(U\,|\,\omega, \omega')$.

Il nous reste à envisager le système (86). Dans ce cas, x et y ne dépendent que de v; on a nécessairement [1] $v = e^{\beta w}$, et l'on voit aussitôt que les systèmes (86) à intégrales uniformes rentrent comme cas particuliers de (89) (avec $\delta = 0$).

45. *L'hypothèse* (H) *n'est vérifiée que par du. Retour au problème* (A_2). — Examinons maintenant le cas où l'hypothèse (H) du n° 40 n'est vérifiée que par *du*; ainsi *du* conservera sa forme (75), mais *dv* s'écrira :

(91) $$dv = a^k(x) \prod_{j=1}^{N} [z - a_j(x)]^{k_j} (A\,dx + B\,dz),$$

k étant rationnel et $a(x)$ étant une fonction rationnelle de $p(w\,|\,\Omega, \Omega')$ et $p'(w\,|\,\Omega, \Omega')$ (n° 40). Comme au n° 9, effectuons la transformation $z - a_j(x)\,|\,\varepsilon z$, suivie de $u\,|\,\varepsilon^{h_j+1} u$ et de $v\,|\,\varepsilon^{k_j+1} v$. Le système limite

$$u = W_1\, z^{h_j+1}\, C(x), \qquad v = z^{k_j+1}\, D(x)$$

est alors du type I′ du n° 9; il ne peut être identifié à I″ que si l'on prend $\delta = 0$ (avec les notations du n° 9); d'après la forme actuelle de v l'expression désignée au n° 9 par Y est une fonction elliptique; a (n° 9)

---

[1] Le cas $v = w$ du problème (B_1) ne peut se présenter actuellement en raison de l'hypothèse (H).

est donc nul, et l'on se trouve ainsi dans le cas particulier signalé à la fin du n° 9 : ainsi donc *k_j et k sont des nombres rationnels* et l'on pourra poser

$$a^k(x)\prod_{=1}^{N}[z-a_j(x)]^{k_j}=R^{\frac{p}{q}}(x,y,z), \tag{92}$$

p et q étant entiers (et premiers entre eux), et R étant rationnelle. Or il est toujours possible (¹) d'effectuer une transformation

$$R^{\frac{p}{q}}+\lambda y=Y,$$

telle que y, et par suite $R^{\frac{p}{q}}$ soient rationnels en x, Y, z; soit $y=r(x,Y,z)$. Mais la transformation

$$x=X, \qquad y=r(X,Y,Z), \qquad z=Z$$

change le cylindre (76) en une surface $\mathfrak{F}(X,Y,Z)$, et le système (s) (²) en un système de la forme

$$u=\mathfrak{W}\mathfrak{Z}\mathfrak{P}, \qquad dv=\mathfrak{A}(X,Y,Z)\,dX+\mathfrak{B}(X,Y,Z)\,dZ, \tag{93}$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant rationnelles en X, Y, Z et $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{P}$ étant de formes analogues à W_1, Z_1, P_1 ; d'autre part, on trouve d'après $(85)_1$, (91), (92) :

$$\frac{\partial x}{\partial v}=R^{-\frac{p}{q}}\mathcal{G}(x,y,z),$$

$\mathcal{G}$ étant rationnelle en x, y, z ; $R^{\frac{p}{q}}$ (et, par suite, Y) *doit donc être uniforme en u et v*; ainsi le système (93) aura son intégrale générale uniforme en u et v, et, par suite, en v et en $U\equiv \operatorname{Log} u$. Mais le nouveau système s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} dU &= \mathfrak{C}(X,Y,Z)\,dX+\mathfrak{D}(X,Y,Z)\,dZ\\ dv &= \mathfrak{A}(X,Y,Z)\,dX+\mathfrak{B}(X,Y,Z)\,dZ\end{aligned}\right. \qquad [\mathfrak{F}(X,Y,Z)=0], \tag{94}$$

$\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ étant rationnelles en X, Y, Z ; et le système (94) est un système

(¹) Si λ est choisi arbitrairement, on tirera immédiatement y de l'équation (76) jointe à $(Y-\lambda y)^q=R^p$.

(²) Comme au n° **43**, on verra sans peine que si u est de la forme $(83)_1$ l'uniformité de (x,y,z) entraîne $b_1\equiv 0$ (ou $P_1=0$, ce qui conduit à un second système qui n'est qu'un cas particulier du précédent).

(A_2) (n° 2) attaché à la surface $\mathcal{F}$; pour que son intégrale générale soit uniforme, il doit rentrer dans l'une des catégories résultant des recherches de M. Painlevé.

46. *Énoncé de la solution générale du problème* (A_2). — Cette solution a été donnée sous forme explicite par M. Painlevé lorsque l'*intégrale générale de* (A_2) — *ou de* (94) — *renferme algébriquement ses constantes d'intégration* : $\mathcal{F}$ doit être alors une surface hyperelliptique de Picard, un cylindre elliptique ou un plan.

Premier cas. — Les seconds membres de (94) doivent coïncider avec deux différentielles de Picard de première espèce indépendantes attachées à $\mathcal{F}$; X, Y, Z sont des fonctions hyperelliptiques de U et v.

Deuxième cas. — L'équation de $\mathcal{F}$ ayant été ramenée à

$$Y^2 = 4X^3 - G_2X - G_3, \tag{95}$$

une substitution linéaire (qui remplace U et v par u_1 et v_1) donne au système (94) l'une des formes :

$$du_1 = dZ + \varepsilon\frac{X\,dX}{Y}, \qquad dv_1 = \frac{dX}{Y} \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

$$du_1 = \frac{dZ}{Z} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{Y + p'\alpha}{p\alpha - X} + 2\zeta\alpha\right]\frac{dX}{Y}, \qquad dv_1 = \frac{dX}{Y} \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

$$p\alpha \equiv p(\alpha;\, G_2,\, G_3); \qquad \zeta\alpha \equiv \zeta(\alpha;\, G_2,\, G_3).$$

Troisième cas. — L'équation de $\mathcal{F}$ ayant été ramenée à $Z = 0$, le système (94) peut être réduit (par une substitution linéaire) à l'une des formes :

$$du_1 = \frac{dX}{X}, \qquad du_1 = \frac{dX}{X}, \qquad du_1 = dX,$$

$$dv_1 = \frac{dY}{Y}, \qquad dv_1 = dY, \qquad dv_1 = dY.$$

Lorsque, de quelque manière qu'on les choisisse, l'intégrale générale de (94) ne peut être une fonction algébrique des deux constantes d'intégration, *l'intégrale doit être une fonction semi-transcendante des constantes*; en d'autres termes, on doit pouvoir choisir les constantes de manière que l'une d'elles figure algébriquement. Dans ce cas, M. Painlevé, se plaçant dans l'hypothèse plus générale où l'intégrale possède un nombre fini de branches, a obtenu six types distincts pour les systèmes (A_2). De ses résultats il nous sera facile de dégager les formes de $\mathfrak{F}$ et de (A_2) — ou de (94) — lorsque l'intégrale est uniforme (¹).

Premier cas. — On a pour (A_2) :

$$du_1 = \frac{dZ}{Z} + H(X)\,dX, \qquad dv_1 = dX,$$

$H(X)$ étant algébrique en X; $\frac{\partial Z}{\partial v_1}$ devant être uniforme, $H(v_1)$ est uniforme; $H(X)$ est donc rationnelle en X et la surface $\mathfrak{F}$ se réduit au plan $Y = 0$. On peut écrire (²)

$$X = v_1, \qquad Y = 0, \qquad Z = e^{u_1 + \rho(v_1)} \qquad [\rho(v_1) \text{ fonction rationnelle}].$$

Deuxième cas :

$$du_1 = \frac{dZ}{Z} + H(X)\,dX, \qquad dv_1 = \frac{dX}{X},$$

$H(X)$ étant algébrique en X (et uniforme en v_1); il existe donc une relation $\varphi(H, e^{v_1}) = 0$ où φ est rationnelle en H et en e^{v_1} qui donne pour $H(v_1)$ une fonction uniforme. H est alors une fonction rationnelle de $e^{\frac{v_1}{n}}$ (n entier); moyennant une substitution $v_1 = nv_2$ et une transformation rationnelle sur X on peut supposer que $H(X)$ *est rationnelle*. $\mathfrak{F}$ se réduit encore au plan $Y = 0$ et l'on a

$$X = e^{v_1}, \qquad Y = 0, \qquad Z = e^{u_1 + \rho(e^{v_1})}.$$

Troisième cas :

$$du_1 = \frac{dZ}{Z} + H(X, Y)\,dX, \qquad dv_1 = \frac{dX}{Y} \tag{96}$$

[X et Y liés par (95)]. La fonction H, algébrique en X et uniforme en v_1, est une fonction rationnelle de

$$X \equiv p(v_1 \mid \Omega, \Omega'), \qquad Y \equiv p'(v_1 \mid \Omega, \Omega')$$

(¹) La réduction à la forme canonique n'exige qu'une transformation birationnelle sur $\mathfrak{F}$ et une substitution linéaire sur u et v.

(²) *Voir* la note précédente.

avec $\Omega = a\omega + b\omega'$, $\Omega' = c\omega + d\omega'$; a, b, c, d entiers et 2ω, $2\omega'$, périodes primitives de v_1. Or, si l'on effectue sur $\mathcal{F}$ la transformation rationnelle

$$X = r(\overline{X}), \qquad Y = \overline{Y} r'(\overline{X}),$$

le système (94) conservera sa forme actuelle (96) (avec de nouvelles valeurs pour G_2 et G_3) et H sera rationnelle en $\overline{X}$ et $\overline{Y}$. Moyennant cette transformation préalable nous pourrons donc supposer que déjà, dans (96), H(X, Y) *est rationnelle en* X, Y. $\mathcal{F}$ se réduit au cylindre elliptique (95) et l'on peut prendre

$$X = \wp v_1, \qquad Y = \wp' v_1, \qquad Z = e^{u_1 + \varphi(v_1) + h\zeta v_1} \frac{\sigma(v_1 - \alpha)}{\sigma v_1}$$

[$\varphi(v_1)$, fonction rationnelle de X et Y].

Quatrième cas :

$$du_1 = \frac{dX}{Y} + H(Z)\, dZ, \qquad dv_1 = dZ.$$

Cinquième cas :

$$du_1 = \frac{dX}{Y} + H(Z)\, dZ, \qquad dv_1 = \frac{dZ}{Z}.$$

Dans ces deux cas, X et Y sont liés par (95), on voit comme plus haut que la fonction algébrique (¹) H(Z) doit être rationnelle en Z; et $\mathcal{F}$ se réduit encore au cylindre elliptique (95) (²). On peut prendre

$$\begin{aligned}
X &= \wp[u_1 + \rho(V) + \Sigma h_i \operatorname{Log}(V - \alpha_i)], \\
Y &= \wp'[u_1 + \rho(V) + \Sigma h_i \operatorname{Log}(V - \alpha_i)], \\
Z &= V
\end{aligned}$$

($V = v_1$ ou e^{v_1}; ρ, fonction rationnelle).

Sixième cas :

$$du_1 = \frac{d\xi}{\xi_1} + H(\zeta, \zeta_1)\, d\zeta, \qquad dv_1 = \frac{d\zeta}{\zeta_1},$$

(¹) Dans le quatrième cas H(Z), et dans le cinquième ZH(Z), peuvent être supposés non constants; autrement on retomberait sur un système antérieur.

(²) On peut aussi considérer les systèmes comme attachés à une surface elliptique; si l'on revient aux notations de la deuxième partie, on remplacera $dX : Y$ par dU, Z par (S, T) Cf. *Comptes rendus*, t. 179, 1924, p. 740.

avec

$$(97)\qquad \xi_1^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \qquad \zeta_1^2 = 4\zeta^3 - \gamma_2\zeta - \gamma_3;$$

comme au troisième cas, moyennant une transformation préalable, on peut toujours supposer que $H(\zeta, \zeta_1)$ est rationnelle en ζ, ζ_1 (et que de plus H ne se réduit pas à $\alpha : \zeta_1$). Les coefficients de (94) sont alors rationnels en X, Y, Z, la surface $\mathcal{F}(X, Y, Z) = 0$ étant une surface hyperelliptique (elliptique) dont les points correspondent birationnellement aux couples de points des courbes (97). X, Y, Z sont donc rationnels en

$$p\left[u_1 + \int \varphi(v_1)\,dv_1;\, g_2, g_3\right], \qquad p'\left[u_1 + \int \varphi(v_1)\,dv_1;\, g_2, g_3\right],$$
$$p(v_1;\, \gamma_2, \gamma_3), \qquad p'(v_1;\, \gamma_2, \gamma_3)$$

[$\varphi(v_1)$ fonction rationnelle de pv_1 et $p'v_1$].

47. *Démonstration d'un lemme.* — Appliquons ces résultats à notre problème actuel, et pour cela, démontrons d'abord le lemme suivant qui nous servira fréquemment dans cette discussion :

Lemme. — *Pour qu'une expression*

$$(98)\qquad du = e^{\int P(x,y)\,dx}\,dx + e^{\int Q(z)\,dz}\,dz$$

[P rationnelle en (x, y) et Q rationnelle en z] *attachée au cylindre* (76) *et dépendant à la fois de x et de z puisse se mettre sous la forme*

$$du = e^{\int R\,dx + S\,dz}(A\,dx + B\,dz)$$

(R, S, A, B rationnelles en x, y, z) *il faut et suffit que le coefficient de dx dans* (98) *soit rationnel en* (x, y) *et celui de dz, rationnel en z.*

La condition est évidemment suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire. Or A : B devant être égal au quotient d'une fonction de x (nécessairement rationnelle [1] en x, y) par une fonction de z (nécessairement rationnelle) on aura

$$A = ZC, \quad B = XC,$$

[1] Pour le voir, il suffit de faire $z =$ const. dans A : B.

X étant une fonction rationnelle de (x, y), Z étant rationnelle en z, et C en x, y, z. Il en résulte

$$du = e^{\int R_1\,dx + S_1\,dz}(Z\,dx + X\,dz),$$

expression qui ne peut être de la forme (98) que si l'on a

$$R_1 X + X' = 0 = S_1 Z + Z'.$$

Mais on doit supposer $XZ \neq 0$; on pourra donc écrire :

$$du = e^{-\int \frac{X'}{X}dx + \frac{Z'}{Z}dz}(Z\,dx + X\,dz). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

48. *L'intégrale est une fonction algébrique des constantes : premier et second cas.* — Cela étant, supposons d'abord que l'intégrale dépende algébriquement des constantes arbitraires et que la transformée $\mathcal{F}$ de F soit hyperelliptique (premier cas du n° 46); dans (94) dU, devant coïncider avec une différentielle totale de première espèce pour $\mathcal{F}$, ne peut contenir aucune différentielle logarithmique; et, en se reportant à $(93)_1$, on en déduit aussitôt $dU = \alpha\,dw$: dès lors *la surface $\mathcal{F}$ possède deux faisceaux de courbes elliptiques.* Faisons alors $u =$ const. (d'où $X = x =$ const. $\equiv \overline{X}$); dv se réduira à

$$\frac{dz}{\varphi(z)} \equiv a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B(x, y, z)\,dz;$$

de plus, dans $(94)_2$ $\mathfrak{B}(\overline{X}, Y, Z)\,dZ$ doit être une différentielle abélienne de première espèce pour une composante irréductible γ de la courbe $\mathcal{F}(\overline{X}, Y, Z) = 0$ (de module constant). Par suite [1], le nombre N des facteurs de Π ne peut être que 3 ou 4; s'il est égal à 4, on aura :

$$(99) \qquad [\varphi(z)]^2 \equiv (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4);$$

moyennant une substitution linéaire sur z [2] on pourra supposer que a_1, a_2, a_3 sont constants et, comme γ est de module constant, a_4

---

[1] Les résultats suivants supposent qu'on a effectué au préalable sur z une substitution linéaire à coefficients constants.

[2] C'est-à-dire une transformation birationnelle sur F.

sera constant. Si N est égal à 3, φ sera donnée par l'une des formules

$$(100)\qquad \left\{\begin{aligned} &[\varphi(z)]^3=(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2,\\ &[\varphi(z)]^4=(z-a_1)^2(z-a_2)^3(z-a_3)^3,\\ &[\varphi(z)]^6=(z-a_1)^3(z-a_2)^4(z-a_3)^5,\end{aligned}\right.$$

a_1, a_2, a_3 pouvant être supposés constants. Dans tous les cas, puisque dv est une différentielle de première espèce pour $\mathcal{F}$, on aura

$$dv=\beta\,dw+\frac{dz}{\varphi(z)};$$

mais $\varphi(z)$ n'est pas rationnelle; d'après notre lemme, l'expression précédente n'est admissible pour notre problème que si l'on a $\beta=0$ et le système différentiel s'écrit alors

$$(101)\qquad du=e^{\alpha\int\frac{dx}{y}}\frac{dx}{y},\qquad dv=e^{-\int\frac{\varphi'}{\varphi}dz}dz.$$

Second cas. — Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ ne soit pas hyperelliptique; $\mathcal{F}$, devant être la transformée rationnelle du cylindre (76), ne peut être une surface rationnelle : $\mathcal{F}$ est donc birationnellement identique au cylindre (95). Les génératrices de (76) et (95) se correspondant nécessairement, on passe de la première surface à la seconde par des formules telles que :

$$(102)\qquad x=r(\mathrm{X}),\qquad y=\mathrm{Y}\,r'(\mathrm{X}),\qquad z=\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

d'où

$$dw=\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}},$$

r et ρ étant rationnelles. Nous nous bornerons d'ailleurs à la première des deux formes données pour le cas actuel au n° 46 : aussi bien, la seconde forme rentre comme cas particulier d'une forme envisagée plus loin (n° 49). Nous aurons ainsi :

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned} d\,\mathrm{Log}\,u&=d\,\mathrm{Log}(\mathrm{W}_1\mathrm{Z}_1\mathrm{P}_1)\\ &=\alpha\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}+\gamma\left(d\mathrm{Z}+\varepsilon\frac{\mathrm{X}\,d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}\right)\\ dv&=a^k\prod_{j=1}^{\mathrm{N}}(z-a_j)^{k_j}(\mathrm{A}\,dx+\mathrm{B}\,dz)\\ &=\beta\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}+\delta\left(d\mathrm{Z}+\varepsilon\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}\right)\end{aligned}\right.\qquad (\varepsilon=0 \text{ ou } 1).$$

Or z est rationnel en Z ; on a donc $\gamma = \rho$, d'où $Z_1 P_1 \equiv 1$ et $W_1 = e^{\alpha w}$, (avec $\delta \neq 0$). Faisons alors $x =$ const. (d'où $X =$ const.) dans $(103)_2$; il viendra

$$a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B \frac{dz}{dZ} = \delta.$$

Mais si cette équation admet une intégrale rationnelle $z = \rho(\overline{X}, \overline{Y}, Z)$, une substitution linéaire effectuée au préalable sur z permet de ramener cette intégrale à la forme $z = Z^m$, en sorte que l'on a

$$a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B(x, y, z) \equiv \delta' z^{-1+\frac{1}{m}}$$

et, en portant dans $(103)_2$, on en déduira :

$$z^{\frac{1}{m}} A_1(x, y, z)\, dx = \beta \frac{dX}{Y} + \varepsilon\delta \frac{X\, dX}{Y} \qquad (A, \text{ fraction rationnelle}).$$

Or une telle égalité exige que $ZA_1[r(X), Yr'(X), Z^m]$ soit indépendant de Z ; on a donc soit $A_1 \equiv 0$, $\beta = 0 = \varepsilon$, soit $m = 1$. Mais, puisque $y^{-1} dx = Y^{-1} dX$, cette dernière hypothèse exige que X soit rationnel en x et y : on peut donc prendre $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, et en définitive le système ($\mathcal{S}$) est de l'une des deux formes (¹)

$$(104) \qquad du = e^{\alpha \int \frac{dx}{y}} \frac{dx}{y}, \qquad dv = e^{\frac{1-}{m} \int \frac{dz}{z}} dz,$$

$$(105) \qquad du = e^{\alpha \int \frac{dx}{y}} \frac{dx}{y}, \qquad dv = \frac{\beta + \varepsilon\delta x}{y} dx + \delta\, dz.$$

49. *L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes : troisième cas.* — Supposons maintenant que l'intégrale générale de (94) ne puisse dépendre algébriquement des deux constantes ; la surface $\mathcal{F}$ ne pouvant être rationnelle, les deux premiers cas du n° 46 sont inadmissibles ; envisageons alors le troisième cas.

On aura encore des relations de la forme (102) et, de plus, on

---

(¹) *Voir* la note (¹) du n° 2, p. 267. La même remarque s'applique aux systèmes suivants.

pourra écrire :

$$(106)\quad \begin{cases} dU = d\,\mathrm{Log}(W_1 Z_1 P_1) = \alpha\, dw + \gamma\left[\dfrac{dZ}{Z} + H(X, Y)\, dX\right], \\ dv = a^k \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j}(A\, dx + B\, dz) = \beta\, dw + \delta\left[\dfrac{dZ}{Z} + H(X, Y)\, dX\right]. \end{cases}$$

Si l'on fait dans $(106)_2$ $x = \text{const.}$ (d'où $X = \text{const.}$), on en déduira (pour $\delta \neq 0$)

$$a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B \frac{dz}{dZ} = \frac{\delta}{Z}.$$

Or z doit être une fonction rationnelle de Z; ainsi, moyennant une substitution linéaire préalable sur z on pourra supposer que

$$\delta a^{-k} \Pi (z - a_j)^{-k_j} B^{-1}$$

se réduit à l'une des deux expressions

$$mz \quad \text{ou} \quad m\sqrt{z^2 - 1}$$

(m, entier), ce qui donnera $z = Z^m$ ou $z = \dfrac{Z^{2m} + 1}{2Z^m}$. Comme x ne dépend que de X, l'équation

$$\frac{\delta}{m\sqrt{z^2 - 1}} \frac{A}{B} dx = \beta \frac{dx}{y} + \delta H(X, Y)\, dX$$

entraîne $A \equiv 0$, $H \equiv 0$, $\beta = 0$; de même l'équation

$$\frac{\delta}{mz} \frac{A}{B} dx = \beta \frac{dx}{y} + \delta H(X, Y)\, dX$$

exige soit $A \equiv 0$, $H \equiv 0$, $\beta = 0$, soit

$$H(X, Y)\, dX = h(x, y)\, dx,$$

h étant rationnelle en x, y. De plus, on devra écrire selon le cas

$$dU = \alpha\, dw + \frac{\gamma\, dz}{m\sqrt{z^2 - 1}} \qquad \text{ou} \qquad dU = \alpha\, dw + \gamma\left(\frac{dz}{mz} + h\, dx\right),$$

et, d'après notre lemme, la première hypothèse entraîne $\beta = 0$, $Z_1 P_1 \equiv 1$.

Moyennant un changement d'écriture nous aboutissons ainsi aux systèmes

$$(107)\qquad u = e^{\alpha w}, \qquad dv = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}},$$

$$(108)\qquad u = e^{\alpha w+\gamma\tau}, \qquad v = \beta w + \delta\tau, \qquad \tau = \operatorname{Log} z + \int h(x,y)\,dx.$$

On a supposé $\delta \neq 0$. Pour $\delta = 0$, on aurait $dv = \beta\,dw$ et l'examen de $(106)_1$ (où l'on fait $x = \text{const.}$) montre que $z = Z^{m'}$; on retombe ainsi sur un cas particulier du système (108).

50. *Quatrième cas.* — En plus des relations du type (102), nous pouvons écrire les suivantes :

$$(109)\quad \begin{cases} dU = d\operatorname{Log}(W_1 Z_1 P_1) = \alpha[dw + H(Z)\,dZ] + \gamma\,dZ, \\ dv = a^k \prod_{j=1}^{N}(z-\alpha_j)^{k_j}(A\,dx + B\,dz) = \beta[dw + H(Z)\,dZ] + \delta\,dZ. \end{cases}$$

On en déduit

$$-\beta \operatorname{Log} u + \alpha v = (\alpha\delta - \beta\gamma)Z;$$

z, fonction rationnelle de Z, ne peut donc être uniforme en u que si l'on a $\beta = 0$. Faisons alors dans $(109)_2$ $x = \text{const.}$; l'équation obtenue doit pouvoir être résolue par une fonction rationnelle $z = \rho(X, Y, Z)$; moyennant une substitution linéaire sur z on peut donc supposer que $z = Z^m$. D'autre part, si l'on fait $v = \text{const.}$ (d'où $z = \text{const.}$), on voit que u devra se réduire à $e^{\alpha w} \times \text{const.}$; on peut donc écrire

$$(110)\qquad u = e^{\alpha w}\prod_{j=1}^{N}(z-a_j)^{h_j}, \qquad v = e^{\left(\frac{1}{m}-1\right)\int\frac{dz}{z}}\,dz$$

(m, entier; a_j, const.), système qui comprend (104) comme cas particulier.

51. *Cinquième cas.* — On a alors, avec (102) [1] :

$$(111)\quad \begin{cases} d\operatorname{Log} u = d\operatorname{Log}(W_1 Z_1 P_1) = \alpha[dw + H(Z)\,dZ] + \gamma\dfrac{dZ}{Z}, \\ v = \bar{a}^k \prod_{j=1}^{N}(z-a_j)^{k_j}(A\,dx + B\,dz) = \beta[dw + H(Z)\,dZ] + \delta\dfrac{dZ}{Z}. \end{cases}$$

---

[1] On a substitué la notation $\bar{a}$ à a pour éviter toute confusion plus loin.

Faisons dans $(111)_2$ $x=$ const. (ou $X=$ const.); l'équation

$$\bar{a}^k \prod_{j=1}^{N} (z-a_j)^{k_j} B \frac{dz}{dZ} = \beta H + \frac{\delta}{Z}$$

devant être satisfaite par une fonction rationnelle $z=\rho(X_0, Y_0, Z)$, la courbe $z_1 = \prod_{j=1}^{N} (z-a_j)^{k_j}$ est rationnelle; moyennant une substitution linéaire sur z le second membre de cette relation peut donc être ramené à $z^{\frac{p}{q}}$ (p et q étant deux entiers premiers entre eux); et, si l'on pose $z=\zeta^q$, ζ^p et, par suite, ζ sont rationnels en Z. Cela étant, on déduit de (111):

$$(112) \qquad \left\{ \alpha \bar{a}^k z^{\frac{p}{q}} B - \beta \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{z-a_j(x)} + \frac{1}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} \right] \right\} dz = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{Z} dL,$$

et, si l'on fait $z=\zeta^q$, $Z=e^t$, l'équation précédente devient

$$R(\zeta) \frac{d\zeta}{dt} = 1,$$

$R(\zeta)$ étant rationnelle. Elle doit être vérifiée par une fonction uniforme de t (rationnelle en Z); donc, moyennant une substitution linéaire sur ζ, on a $\zeta = Z^m$ (m, entier), c'est-à-dire

$$(113) \qquad z = \left(\frac{aZ^m + b}{cZ^m + d} \right)^q \qquad (a,\ b,\ c,\ d, \text{ fonctions elliptiques de } w).$$

Nous allons montrer que *q est égal à 1 ou 2.*

En effet, on déduit de (113):

$$\frac{m}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{qz} \frac{ad-bc}{\left(d - b z^{-\frac{1}{q}}\right)\left(-c z^{\frac{1}{q}} + a\right)};$$

d'après (112) on aura donc

$$\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(ad-bc)}{mqz} = \left(L z^{\frac{p}{q}} + M\right)\left(d - b z^{-\frac{1}{q}}\right)\left[-c z^{\frac{1}{q}} + a\right],$$

L et M étant rationnelles en z. Supposons d'abord $q \neq 1$; en écrivant qu'il y a dans l'identité précédente en z des termes semblables qui se réduisent, on obtient soit $q=2$ (et $p=1$), soit $q=3$ (et $p=1$ ou 2); mais, en passant à l'identification des coefficients, on trouve que le second cas est impossible. Reste $q=2$. Or, exprimons que les coefficients de dx dans $(111)_2$ sont égaux de part et d'autre; nous obtiendrons

$$\overline{a}^k\sqrt{z}\left\{A+\frac{2B\sqrt{z}}{ad-bc}[ab'-ba'+(a'd-ad'+bc'-cb')\sqrt{z}+(cd'-dc')z\right\}=\frac{\beta}{y};$$

il viendra donc

$$\overline{a}^k B=\frac{B_1}{z(B_2z+B_3)},\qquad \overline{a}^k A=\frac{B_4}{B_2z+B_3},$$

les nouveaux coefficients ne dépendant que de x. Or, si l'expression

$$\frac{B_4\sqrt{z}\,dx+B_1\dfrac{dz}{\sqrt{z}}}{B_2z+B_3}$$

est une différentielle exacte, elle se réduit à $dk\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{z}-a(x)}{\sqrt{z}+a(x)}$ [1]; en multipliant z par une fonction rationnelle de (x, y) on peut supposer $a(x)\equiv 1$; on aura $\beta=0$; $\overline{a}^k$ et les a_i seront indépendants de x, ce qui donnera :

$$(114)\qquad u=e^{\alpha w}\prod_{j=1}^{N}(z-a_j)^{k_j},\qquad v=k\operatorname{Log}\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}\qquad\left[\text{ou } dv=\frac{k\,dz}{\sqrt{z}(z-1)}\right].$$

Supposons maintenant $q=1$, d'où, moyennant une substitution linéaire sur z, $z=Z^m$. Dans l'expression de u, les a_j et les coefficients de P_1 devront être indépendants de x; de plus, $(111)_2$ se réduira à $A(x,y)\,dx+B(z)\,dz$. D'après le lemme du n° 47 on aura donc :

$$dv=\beta\frac{dx}{y}+R(z)\,dz.$$

---

(1) Ou à $d[a(x)\sqrt{z}]$; mais cette forme ramènerait à (110).

Or actuellement (n° 45) on doit supposer $\alpha \neq 0$, ce qui donne :

$$H(Z) = \frac{m}{\alpha} Z^{m-1} \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{z - a_j} - \frac{\gamma}{\alpha Z},$$

d'où

$$R(z) = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{z - a_j} + \left(\delta - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) \frac{1}{mz}$$

et l'on pourra ainsi écrire :

$$(115) \qquad u = e^{\alpha w} \prod_{j=1}^{N} (z - c_j)^{\alpha k_j}, \qquad v = \beta \left[w + \sum_{=1}^{N} k_j \operatorname{Log}(z - c_j) \right] + \delta \operatorname{Log} z.$$

52. *Sixième cas.* — On doit avoir :

$$(116) \quad \begin{cases} dU = d \operatorname{Log}(W_1 Z_1 P_1) = \alpha \dfrac{d\zeta}{\zeta_1} + \beta \left[\dfrac{d\xi}{\xi_1} + H(\zeta, \zeta_1)\, d\zeta \right], \\ dv = a^k \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} (A\, dx + B\, dz) = \gamma \dfrac{d\zeta}{\zeta_1} + \delta \left[\dfrac{d\xi}{\xi_1} + H(\zeta, \zeta_1)\, d\zeta \right]. \end{cases}$$

Si la surface $\mathcal{F}$ est de modules quelconques, elle ne possède que deux faisceaux elliptiques ; et aux génératrices du cylindre (76) correspondent les courbes de l'un de ces faisceaux ; on a donc nécessairement $dw = \frac{d\zeta}{\zeta_1}$ ou $dw = \frac{d\xi}{\xi_1}$.

1° $dw = \frac{d\zeta}{\zeta_1}$: x et y sont des fonctions rationnelles de ζ et ζ_1 (à coefficients numériques) ; on a de plus $\delta \neq 0$: sinon, on en déduirait $\beta \neq 0$, et à cause de la présence de $\frac{d\xi}{\xi_1}$ il serait impossible de satisfaire à $(116)_1$. Cela étant, faisons $x = \text{const.}$ (d'où $\zeta = \text{const.}$) dans $(116)_2$; il viendra

$$a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B\, dz = \delta \frac{d\xi}{\xi_1},$$

équation de la forme

$$(117) \qquad \frac{dz}{z_1} = \frac{d\xi}{\xi_1}$$

avec

$$z_1^m = \Phi(z;\, x, y) \qquad (m \text{ entier; } \Phi, \text{ rationnelle en } z). \tag{118}$$

Or (117) doit être vérifiée par une fonction rationnelle $z(\xi, \xi_1)$ et, s'il en est ainsi, z_1 sera rationnelle en (ξ, ξ_1) : la courbe $(97)_1$ est donc une transformée rationnelle de (118), et d'après (117) $\frac{dz}{z_1}$ est une différentielle de première espèce attachée à (118); par suite, une substitution linéaire sur z ramène (118) à la forme $z_1 = \varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant de l'un des types (99) ou (100). Mais alors, d'après le lemme du n° 47, on a

$$A \equiv 0, \qquad \frac{\gamma}{\zeta_1} + \delta H \equiv 0,$$

et ce dernier résultat est incompatible avec l'hypothèse que nous avons faite sur H (n° 46, *ad fin.*).

2° $dw = \frac{d\xi}{\xi_1}$: dans $(116)_2$ faisons $x =$ const. (d'où $\xi =$ const.); il viendra

$$a^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B\, dz = \left[\frac{\gamma}{\zeta_1} + \delta H(\zeta, \zeta_1)\right] d\zeta,$$

équation qui peut encore s'écrire, moyennant la notation (118) :

$$\frac{dz}{z_1} = \left[\frac{\gamma}{\zeta_1} + \delta H(\zeta, \zeta_1)\right] d\zeta. \tag{119}$$

Or (119) doit être satisfaite si l'on prend $z = r(\zeta, \zeta_1)$, r étant une fonction rationnelle de ζ, ζ_1 (à coefficients fonctions de ξ et ξ_1) ; par suite, (118) est actuellement de genre 1 au plus; *supposons d'abord que cette courbe soit rationnelle.*

Moyennant une substitution linéaire sur z, $\prod_{j=1}^{N} (z - a^j)^{k^j}$ doit alors se réduire à $z^{\frac{p}{q}}$ (p et q entiers premiers entre eux) et l'on déduit de (116) la combinaison

$$\left[-\beta a^k z^{\frac{p}{q}} B(x, y, z) + \delta\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_j}{z - a_j} + \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right] dz = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{d\zeta}{\zeta_1}. \tag{120}$$

Or, d'après $(97)_2$ on peut poser $\zeta = \wp(t; \gamma_1, \gamma_2)$, $\zeta_1 = \wp'(t; \gamma_1, \gamma_2)$; de plus $z_2 \left(\equiv z^{\frac{1}{q}}\right)$ devra être rationnelle en ζ et ζ_1, c'est-à-dire elliptique en t : mais ceci est absurde, car on déduit de (120)

$$R(z_2; x, y)\frac{dz_2}{dt} = \alpha\delta - \beta\gamma, \tag{121}$$

R étant rationnelle en z_2.

On doit donc supposer que *la courbe* (118) *est de genre* 1, et, d'ailleurs, de module constant ; après une substitution linéaire sur z, l'expression $z_3 \equiv \prod_{j=1}^{N}(z-a_j)^{h_j}$ se ramènera donc à l'une des formes $\varphi(z)$ données par (99) ou (100). On pourra donc exprimer z et z_3 comme fonctions elliptiques d'un paramètre τ [à coefficients indépendants de (x, y)] ; et, en procédant comme tout à l'heure on déduira de (116) une combinaison

$$\psi(\tau; x, y)\frac{d\tau}{dt} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

analogue à (121), et qui ne pourra donner pour z une fonction rationnelle de ζ et ζ_1 que si elle coïncide avec $\frac{d\tau}{dt} = C$, C étant nécessairement une constante absolue (qu'on peut supposer égale à 1). Mais alors z est une fonction rationnelle des seuls arguments ζ et ζ_1, et nous savons déjà que (x, y) ne dépend que de (ξ, ξ_1) ; si dans $(116)_2$ on fait $\zeta =$ const., on en déduit que les coefficients de dx et dz ne doivent contenir respectivement que x et z : d'après le lemme du n° 47, on aura donc $A \equiv 0$, $\delta = 0$, et, en procédant de même sur $(116)_1$, on montrera que les a_j sont constants, en sorte que le système différentiel se réduit à

$$u = e^{\alpha w}\prod_{j=1}^{N}(z-c_j)^{h_j}, \qquad dv = \frac{dz}{\varphi(z)}. \tag{122}$$

Pour être complet, il nous faut encore traiter le cas où $\mathcal{F}$ *possède des faisceaux elliptiques d'équations*

$$a\frac{d\xi}{\xi_1} + b\frac{d\zeta}{\zeta_1} = 0 \qquad (ab \neq 0). \tag{123}$$

A un facteur constant près (que nous négligerons) dw sera donc égal au premier membre de (123). Faisons alors $x = \text{const.}$ dans $(116)_2$, nous aurons :

$$(124) \qquad \bar{a}^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} B(x, y, z)\, dz = \left(\gamma - \frac{\partial b}{a}\right) \frac{d\zeta}{\zeta_1} + \partial H(\zeta, \zeta_1)\, d\zeta.$$

On procédera sur (124) comme sur (119), et l'on montrera que z_1 est définie par une relation (118) de genre 1 et que, moyennant une substitution linéaire sur z, z est une fonction rationnelle de ζ et ζ_1 (à coefficients numériques). Dès lors, si dans $(116)_2$ on fait $\zeta = \text{const.}$, on en déduira

$$\bar{a}^k \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} A\, dx = \frac{\partial}{a}\, dw,$$

ce qui entraîne encore $A \equiv 0 = \delta$, et le raisonnement s'achèvera comme plus haut : on ne trouvera donc pas de forme nouvelle.

53. *L'hypothèse* (H) *n'est vérifiée ni par du ni par dv.* — Nous allons terminer la discussion en supposant maintenant que du et dv ne vérifient plus l'hypothèse (H) du n° 40; le procédé du n° 45 s'applique encore, et moyennant une transformation rationnelle

$$(125) \qquad x = x(X, Y, Z), \qquad y = y(X, Y, Z), \qquad z = z(X, Y, Z)$$

qui change (76) en $\mathcal{F}(X, Y, Z) = 0$, le système (S) peut être transformé en un système (à intégrale générale uniforme) :

$$(126) \qquad du = \mathcal{A}\, dX + \mathcal{B}\, dY, \qquad dv = \mathcal{C}\, dx + \mathcal{D}\, dy,$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ étant rationnels en X, Y, Z. Bornons-nous à de rapides indications sur la discussion.

I. *L'intégrale est une fonction algébrique des deux constantes d'intégration. Premier cas : La surface $\mathcal{F}$ est hyperelliptique.* — La transformation (125) change $y^{-1}\, dx$ en une différentielle de première espèce attachée à $\mathcal{F}$ et n'ayant que deux périodes. Supposons que dz figure dans du, par exemple, et faisons-y $x = \text{const.}$; du se réduira à une expression de la forme $a^k \Pi (z - a_j)^{k_j} B\, dz$ qui devra coïncider avec une différentielle de première espèce $z_1^{-1}\, dz$ attachée à l'une des courbes (99) ou (100). D'après notre lemme, on déduit de là que du se réduit à $\frac{dz}{z_1}$; on aura alors $dv = \alpha\, dw + \beta \frac{dz}{z_1}$, et l'application du lemme montre que (S) est de la forme

$$du = \frac{dz}{\varphi(z)}, \qquad dv = \frac{dx}{y}. \tag{127}$$

Deuxième cas : La surface $\mathfrak{F}$ est un cylindre elliptique. — Supposons que dz figure dans dv; comme au n° 48, l'examen de dv donnera $z = Z^m$; pour $m^2 \neq 1$, on trouvera (en tenant toujours compte de la note [1] de la page 267) :

$$du = \frac{dx}{y}, \qquad dv = e^{\left(\frac{1}{m}-1\right)\int \frac{dz}{z}} dz; \tag{128}$$

pour $m^2 = 1$, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} du = (\alpha + \gamma\varepsilon x)\dfrac{dx}{y} + \gamma\, dz, \qquad dv = (\beta + \delta\varepsilon x)\dfrac{dx}{y} + \delta\, dz \\ \qquad\qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1;\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \end{array} \right. \tag{129}$$

II. *L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes d'intégration.*

Troisième cas. — Une substitution linéaire sur z ramène (S) à l'une des deux formes

$$u = \alpha w + \gamma\tau, \qquad v = \beta w + \delta\tau, \qquad \tau = \operatorname{Log} z + \int h(x, y)\, dx \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{130}$$

$$u = \alpha w, \qquad dv = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}. \tag{131}$$

Quatrième cas. — On doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} du = \bar{a}^h \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{h_j} (A\, dx + B\, dz) = \alpha\, dw + [\alpha H(Z) + \beta]\, dZ, \\ dv = \bar{b}^k \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j} (C\, dx + D\, dz) = \gamma\, dw + [\gamma H(Z) + \delta]\, dZ. \end{array} \right. \tag{132}$$

Comme précédemment (n° 51), on voit que les courbes

$$z_1 = \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{h_j}, \qquad z_2 = \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{k_j}$$

sont rationnelles; on peut donc écrire

$$z_1 = z^{\frac{p}{q}}, \qquad z_2 = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\frac{r}{s}}$$

(p et q, premiers entre eux; r et s premiers entre eux; a, b, c, d, fonctions elliptiques de w). D'ailleurs, si l'on pose $z = t^q$, d'après $(132)_1$, t^p, t^q et, par suite, t sont rationnels en Z; d'après $(132)_2$, $\left(\frac{at^q+b}{ct^q+d}\right)^{\frac{r}{s}}$ et t seront rationnels en Z, ce qui exige soit $b = 0 = c$ (ou $a = 0 = d$), soit $q = 1$ (ou $s = 1$), soit $q = 2 = s$ ($abcd = 0$ et $p = 1 = r$). Dans le premier cas, on aura :

$$du = z^{\frac{m_1}{m}}(A\,dx + B\,dz), \qquad dv = z^{\frac{m_2}{m}}(C\,dx + D\,dz),$$

m étant le plus petit commun multiple de q et s; et d'ailleurs, cette forme reste encore valable pour $s = 1$, par exemple, à condition de prendre $m_2 = m$. Ainsi $z^{\frac{1}{m}}$ sera rationnel en Z [1] et l'on déduit alors de (132) :

$$\left(\alpha z^{\frac{m_2}{m}} D - \gamma z^{\frac{m_1}{m}} B\right)\frac{dz}{dZ} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

ou

$$R(\zeta)\frac{d\zeta}{dZ} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

en posant $z = \zeta^m$ et $R(\zeta)$ étant rationnelle en ζ. Mais la fonction $\zeta(Z)$ définie par cette équation ne peut être rationnelle en Z que si elle se réduit à Z (à une substitution linéaire près sur Z) et l'on a ainsi $z = Z^m$; B et D sont donc indépendants de x; A et C, indépendants de z.

Pour $m^2 \neq 1$, on déduit de notre lemme (n° 47) les relations $\beta = 0 = \gamma$ (ou $\alpha = 0 = \delta$) et l'on a

$$(133) \quad du = \alpha\,dw + h(z)\,dz, \quad dv = e^{\left(\frac{1}{m}-1\right)\int\frac{dz}{z}}\,dz \quad [h(z), \text{ fonct. rationnelle}].$$

---

[1] Car il existe deux entiers a et b, tels que $\frac{a}{q} - \frac{b}{s} = \frac{1}{m}$.

Pour $m^2 = 1$ (soit $m = 1$), on trouve, moyennant une transformation rationnelle préalable sur (76) :

$$(134)\quad \left\{ \begin{array}{l} du = \alpha[dw + h(z)\,dz] + \gamma\,dz, \qquad dv = \beta[dw + h(z)\,dz] + \delta\,dz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \end{array} \right.$$

Enfin, on constatera aisément que l'hypothèse $q = 2 = s$ doit être rejetée.

Cinquième cas. — En procédant comme au n° 51, on aura à vérifier une égalité de la forme

$$\left[\alpha z^{\frac{n}{q}} \mathrm{D}(x, y, z) - \gamma z^{\frac{m}{q}} \mathrm{B}(x, y, z)\right]\left(d - b z^{-\frac{1}{q}}\right)\left(-c z^{\frac{1}{q}} + a\right) = \frac{k}{z}.$$

On trouvera $q = 2$ ou 1. Dans le premier cas, on sera conduit au système

$$(135)\qquad du = \alpha\,dw + h(z)\,dz, \qquad dv = \frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)};$$

dans le second cas, au système

$$(136)\quad du = \alpha[dw + h(z)\,dz] + \gamma\frac{dz}{z}, \qquad dv = \beta[dw + h(z)\,dz] + \delta\frac{dz}{z}.$$

Sixième cas. — Une méthode analogue conduit (¹) au système

$$(137)\qquad du = \frac{dz}{\varphi(z)}, \qquad dv = \alpha\,dw + h(z)\,dz,$$

$\varphi(z)$ étant toujours donnée par (99) ou (100).

54. *Classification des systèmes* (S) *obtenus pour le cylindre elliptique.* — Nous allons montrer que *tous les systèmes* (S) *qu'on vient d'obtenir pour le cylindre elliptique dérivent de trois formes simples.* A cet effet, nous poserons

$$w + \int h(z)\,dz \equiv \mathrm{A}, \qquad \mathrm{Log}\,z + \int h(x, y)\,dx \equiv \mathrm{B},$$

(¹) On montrera, notamment, qu'on doit avoir $z = \varphi(\zeta, \zeta_1)$, φ étant une fonction rationnelle à coefficients numériques; et en s'appuyant sur le lemme du n° 47, on établira que l'une des deux formules $z_1 = \Pi\,(z - aj)^{h_j}$, $z_2 = \Pi\,(z - aj)^{h_j}$ (qui, *a priori*, représentent des courbes de genres $\leqq 1$) se réduit à $z_1 = 1$ (ou à $z_2 = 1$).

[$h(z)$, rationnelle en z, et $h(x, y)$ en (x, y)] et nous désignerons par A_0 la valeur de l'expression A pour

$$h(z) \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{z - c_j}.$$

Ces notations admises, les systèmes (101), (104), (107), (110), (114), (122) rentrent dans le type

$$\text{(I)} \qquad u = e^{\alpha A_0}, \qquad dv = \frac{dz}{\psi(z)},$$

$z' = \psi(z)$ étant une équation de Briot et Bouquet, à intégrale générale uniforme.

Les systèmes (127), (128), (131), (133), (135), (137) sont du type

$$\text{(I')} \qquad u = \alpha A, \qquad dv = \frac{dz}{\psi(z)}.$$

Le système (108) est de la forme

$$\text{(II)} \qquad u = e^{\alpha w + \gamma B}, \qquad v = \beta w + \delta B;$$

et le système (130) a la forme

$$\text{(II')} \qquad u = \alpha w + \gamma B, \qquad v = \beta w + \delta B.$$

Le système (115) s'écrit

$$\text{(III)} \qquad u = e^{\alpha A_0 + \gamma \operatorname{Log} z}, \qquad v = \beta A_0 + \delta \operatorname{Log} z,$$

et le système (136),

$$\text{(III')} \qquad u = \alpha A + \gamma \operatorname{Log} z, \qquad v = \beta A + \delta \operatorname{Log} z.$$

Enfin, les systèmes (105), (129) et (134) rentrent dans les types respectifs

$$\text{(IV)} \qquad u = e^{\alpha w}, \qquad v = \beta w + \delta \left[z + \int h(x, y)\, dx \right],$$

$$\text{(IV')} \qquad u = \alpha w + \gamma \left[z + \int h(x, y)\, dx \right], \qquad v = \beta w + \delta \left[z + \int h(x, y)\, dx \right],$$

$$\text{(V)} \qquad u = \alpha A + \gamma z, \qquad v = \beta A + \delta z,$$

et, rappelons que les systèmes (89) et (90), précédemment rencontrés, s'écrivent actuellement :

$$(\text{VI}) \qquad u = e^{\alpha w + \gamma B}, \qquad v = e^{\beta w + \delta B},$$
$$(\text{VII}) \qquad u = e^{\alpha A_0 + \gamma \operatorname{Log} z}, \qquad v = e^{\beta A_0 + \delta \operatorname{Log} z}.$$

Cela étant, on observera que (IV) est une dégénérescence de (II) obtenue en remplaçant dans (II), z, h, δ par $1 + \varepsilon z$, εh, $\varepsilon^{-1}\delta$, et en faisant tendre ε vers o ; de même, (IV′) est une dégénérescence analogue de (II)′. De plus, (V) est une dégénérescence de (III′), qu'on obtient en remplaçant dans (III′) z, γ, δ par $1 + \varepsilon z$, $\varepsilon^{-}\gamma$ et $\varepsilon^{-1}\delta$; (II) est une dégénérescence de (VI) résultant des transformations $v | 1 + \varepsilon v$, $\beta | \varepsilon\beta$, $\delta | \varepsilon\delta$. De même, (II′) est une dégénérescence analogue de (II); (III) et (III′) sont des dégénérescences de (VII) et (I′) est une dégénérescence de (I). Finalement, si l'on observe que A n'est qu'une forme-limite de A_ω, obtenue par coalescence ou croissance indéfinie des a_i, on peut affirmer que le système (s) coïncide avec l'un des systèmes (s_3), (s_4), (s_5) énumérés au n° 6, ou avec l'une des dégénérescences de ces trois systèmes que nous venons d'écrire.

CINQUIÈME PARTIE

LES SURFACES ELLIPTIQUES DE GENRE ZÉRO.

---

55. *Les courbes elliptiques de la surface* F. — Si la surface F est irrégulière, il ne nous reste plus qu'un cas à envisager : celui où elle est une surface elliptique de genre $p_g = 0$. Pour obtenir la forme générale des expressions u correspondant à une telle surface, nous commencerons, d'après le théorème I, par déterminer les courbes Γ de genre $\leqq 1$ appartenant à F.

Tout d'abord, F *ne peut posséder aucune courbe rationnelle* [à l'exception de certaines courbes K(n° 24) décomposées] : car les transformées d'une telle courbe par les substitutions (53) formeraient sur F un système ∞^1, ce qui est impossible [1].

---

[1] G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Ann. di Mat.*, ser. III, t. 6, 1900, n° 17 du Mémoire.

Je dis maintenant que *si les courbes* C (n° 24) *sont de genre* $\varpi > 1$, F *ne peut posséder aucune courbe elliptique en dehors des courbes* K.

En effet, soit Γ une telle courbe; considérée comme fonction d'un point de Γ, l'intégrale de Picard U (n° 24) est une intégrale abélienne de première espèce pour Γ; les coordonnées d'un point de Γ s'expriment donc au moyen de deux fonctions elliptiques $p(U|\omega_1, \omega'_1)$, et $p'(U|\omega_1, \omega'_1)$ avec (1)

$$\omega_1 = A\omega + B\omega', \qquad \omega'_1 = C\omega + D\omega' \qquad (A, B, C, D \text{ entiers}).$$

Soit alors U_j l'une quelconque des n valeurs de U, incongrues modd. 2Ω, $2\Omega'$, qui correspondent au point x, y, z de Γ; d'après (52), on aura pour les valeurs correspondantes W_j de W :

$$W_j = \overline{W}[p(U_j|\omega_1, \omega'_1), p'(U_j|\omega_1, \omega'_1);\ p(U_j|\Omega, \Omega'), p'(U_j|\Omega, \Omega')]$$

($\overline{W}$, fonction rationnelle des quatre arguments). Ainsi donc W_j *et* T [d'après $(36)_1$] *seraient des fonctions elliptiques de* U_j, de périodes primitives $2\omega_2$, $2\omega'_2$; mais alors, d'après (51), les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque de F seraient des fonctions rationnelles de $p(U|\Omega, \Omega')$, $p'(U|\Omega, \Omega')$, $p(U_j|\omega_2, \omega'_2)$, $p'(U_j|\omega_2, \omega'_2)$ et les courbes C, d'équations U = const, ne pourraient être de genre $\varpi > 1$.

Supposons donc $\varpi = 1$, et recherchons s'il existe sur F d'autres courbes elliptiques Γ que les C et les K. F *coïncide alors avec l'une des sept surfaces que nous avons étudiées* (n^{os} 28 et 29). Appelons τ le rapport de deux périodes primitives de l'intégrale U, et désignons respectivement par τ' et τ_1 les quantités analogues relatives aux intégrales de première espèce attachées aux courbes C (de même module) et à Γ. Des considérations développées tout à l'heure il résulte aisément que l'on a :

$$\tau' = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

a, b, c, d étant entiers; de plus, comme les courbes C découpent une involution sur Γ, on a encore

$$\tau = \frac{A_1\tau' + B_1}{C_1\tau_1 + D_1} \qquad (A_1D_1 - B_1C_1 \neq 0),$$

(1) Car tout cycle de Γ est un cycle linéaire de F.

A_1, B_1, C_1, D_1 étant encore quatre entiers. Il suit de là que *les rapports de périodes* τ et τ' satisfont à une relation bilinéaire à coefficients entiers, soit

$$\tau' = \frac{A\tau + B}{C\tau + D} \qquad (AD - BC \neq 0), \tag{138}$$

A, B, C, D pouvant être supposés premiers entre eux dans leur ensemble.

Ainsi donc, si, pour $\varpi = 1$, il existe sur F des courbes elliptiques n'appartenant à aucun des faisceaux $|C|$ et $|K|$, la surface F (qui était déjà singulière, au sens adopté par M. G. Humbert pour les surfaces hyperelliptiques) sera *doublement singulière*.

Cherchons à définir analytiquement Γ. La surface F est l'image d'une involution appartenant à une surface de Picard $\overline{F}$; cette involution n'ayant pas de point de coïncidence sur $\overline{F}$, aux courbes elliptiques C, K, Γ de F correspondent respectivement sur $\overline{F}$ trois courbes elliptiques (¹) $\overline{C}$, $\overline{K}$, $\overline{\Gamma}$. Or les coordonnées (x, y, z) d'un point de F s'expriment actuellement (nos 28, 29) par des fonctions elliptiques de deux paramètres U, V. Le premier, U, devient égal sur $\overline{F}$ à la valeur, $\overline{U}$, d'une intégrale de Picard de première espèce; soient 2ω et $2\tau\omega$ les périodes de x, y, z considérés comme fonction de U. Le second paramètre, V, se transforme sur $\overline{F}$ en une intégrale de Picard (²) de première espèce, distincte de $\overline{U}$; d'ailleurs, on peut multiplier V par une constante de manière que les périodes de x, y, z par rapport à V soient $2\omega(C\tau + D)$ et $2\omega(A\tau + B)$. Cela étant, sur $\overline{F}$ les courbes $\overline{C}$, $\overline{K}$, $\overline{\Gamma}$ appartiennent à trois faisceaux elliptiques; et comme $\overline{F}$ ne possède que deux intégrales de Picard de première espèce linéairement indépendantes (soient U et V), l'équation de Γ sur F sera de la forme

$$a\overline{U} + b\overline{V} = c \qquad (a, b, c = \text{const.});$$

(¹) D'après la formule de correspondance de Zeuthen.

(²) Car sur tout point de $\overline{F}$ ne correspond qu'*un seul* couple $\overline{U}$, $\overline{V}$ (à des couples de périodes près).

donc, sur F, l'équation de Γ sera

$$aU + bV = c. \tag{139}$$

On obtiendra la représentation paramétrique de Γ en remplaçant dans les expressions de x, y, z le paramètre U par $-bt$ et V par $at + c'$: ainsi $p(bt|\omega, \omega\tau)$ et $p[at|\omega(A\tau + B), \omega(C\tau + D)]$ devront être liées algébriquement (¹), et par suite, il devra en être de même de $p(at|\omega, \omega')$ et $p(bt|\omega, \omega')$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que :

1° Si τ est quelconque, $b : a$ soit rationnel;

2° Si τ est un nombre algébrique du second degré, $b : a$ soit de la forme $\mu + \nu\tau$ (μ et ν rationnels); la fonction $p(U|\omega, \omega')$ *admet alors la multiplication complexe,* et F *est triplement singulière.*

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes pour que Γ soit une courbe elliptique.

En définitive, après multiplication de U par une constante convenablement choisie, toutes les courbes elliptiques Γ appartenant à F seront données par le tableau suivant :

Les courbes C sont de genre $\varpi > 1$			*a.* Courbes K.
Les courbes C sont de genre $\varpi = 1$	Les courbes C et K ne se correspondent pas rationnellement :	....	*b.* Courbes K et C.
	Les courbes C et K se correspondent rationnellement :	I......	*c.* Courbes $mU + nV = \text{const.}$ (m et n entiers).
		II.....	*d.* Courbes $(mU+(n_1+n_2\tau V)=\text{const.}$ (m_1, n_1, n_2 entiers).

(I. Les courbes C et K n'admettent pas la multiplication complexe.)
(II. Les courbes C et K admettent la multiplication complexe.)

Ce point acquis, nous allons construire les intégrales de Picard de

(¹) Car, d'après les nᵒˢ 28 et 29, y est une fonction algébrique de $p(U|\omega, \omega')$, et z une fonction algébrique de $p[V|\omega(A\tau + B), \omega(C\tau + D)]$; or y et z (qui ne sont pas constants sur Γ), sont algébriquement liés sur Γ.

troisième espèce I, appartenant à F, et dont les courbes polaires sont formées uniquement de courbes elliptiques Γ.

Dans le cas *a*, la réponse est immédiate : si $f(x, y, z) = \lambda$ est l'équation du faisceau linéaire $|K|$, I est une somme de la forme

$$I_1 \equiv \sum_j \alpha_j \operatorname{Log} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \lambda_0}.$$

Dans le cas *b*, I est égal à une expression I_1 augmentée d'une intégrale de la forme $\int [\alpha + \varphi(U)]\, dU$, $\alpha + \varphi(U)$ étant une fonction elliptique n'ayant que des pôles simples et admettant les périodes de l'intégrale de Picard de première espèce de F.

Dans les cas *c* et *d*, la formation de I est moins simple. On sait, d'après les résultats de MM. Bagnera et de Franchis que l'invariant ρ de M. Émile Picard est égal à 2 pour toutes les surfaces elliptiques dont le faisceau elliptique est formé de courbes elliptiques (même dans les cas *c* et *d*). Deux courbes C et K constituent donc une base pour la totalité des courbes algébriques de F; en vertu d'un important théorème de M. Severi on est sûr alors de pouvoir former une intégrale de différentielle totale de troisième espèce J′, ayant seulement comme courbes logarithmiques une courbe C, une courbe K (choisies une fois pour toutes) et une courbe quelconque Γ : J′ pourra alors jouer le rôle d'élément simple dans la réduction des intégrales de troisième espèce I. Toutefois, au lieu de J′, il nous sera plus commode de former un nouvel élément de réduction J qui devient infini sur Γ et sur plusieurs courbes C et K (1). Pour cela, nous démontrerons d'abord la proposition suivante.

56. *Théorème sur la réduction des transformations des fonctions elliptiques. — Application :*

Théorème (2). — *Sur chacune des fonctions elliptiques* $\wp(U \mid \omega, \tau\omega)$,

---

(1) D'ailleurs, on passerait de J à J′ en ajoutant à J des intégrales de la forme indiquée pour *a* et *b*; *cf.* n° 59.

(2) La proposition précédente est classique (*cf.* Jordan, *Cours d'Analyse*, t. II, n° 309; E. Cahen, *Théorie des nombres*, t. I, p. 268); toutefois les méthodes employées pour

$p[V|\omega(C\tau+D), \omega(A\tau+B)]$ *on peut effectuer une transformation du premier ordre, de telle sorte que les rapports* τ_1, τ'_1 *des nouvelles périodes vérifient une relation*

$$(140)\qquad n\tau_1 - m\tau'_1 = 0 \qquad (m, n, \text{ entiers premiers entre eux}).$$

Nous commencerons par une simplification préliminaire. Posons d'abord

$$\tau = \frac{\alpha\tau_2+\beta}{\gamma\tau_2+\delta}, \qquad \tau' = \frac{\alpha'\tau'_2+\beta'}{\gamma'\tau'_2+\delta'} \qquad (\alpha, \ldots, \delta', \text{ entiers})$$

avec

$$(141)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 = \alpha'\delta' - \beta'\gamma';$$

d'après (138), τ_2 et τ'_2 seront liés par une relation de la forme

$$(142)\qquad N\tau'_2 = L\tau_2 + M \qquad (L, M, N \text{ entiers})$$

pourvu que α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' vérifient les relations (141) et

$$(A\alpha + B\gamma)\gamma' = (C\alpha + D\gamma)\alpha'.$$

Or il est facile de déterminer les entiers α, ..., δ' répondant aux conditions précédentes. Puisque α' et γ' doivent être premiers entre eux, on aura

$$A\alpha + B\gamma = \lambda\alpha', \qquad C\alpha + D\gamma = \lambda\gamma',$$

λ étant entier. Mais, soient δ_1 le p. g. c. d. de A et B, et δ_2 celui de C et D,

$$(\text{avec} \qquad A = \delta_1 A_1, \qquad B = \delta_1 B_1, \qquad C = \delta_2 B_1, \qquad D = \delta_2 D_1).$$

A, B, C, D étant premiers entre eux dans leur ensemble, δ_1 et δ_2 seront premiers entre eux, et l'on pourra prendre $\alpha' = \delta_1$, $\gamma' = \delta_2$; il n'y aura plus qu'à choisir pour α, γ deux entiers premiers entre eux et tels que

$$(A_1 - C_1)\alpha + (B_1 - D_1)\gamma = 0.$$

---

l'établir font appel, d'ordinaire, à un algorithme de réduction plus général que celui du p. g. c. d. La démonstration actuelle n'utilise que cette dernière théorie. Elle se rapproche en cela de la démonstration de Tannery et Molk.

Les couples (α, γ), (α', γ') étant formés d'entiers premiers entre eux, on pourra déterminer β, δ, β', δ' de manière à vérifier (141).

Faisons alors

$$\tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \qquad \tau'_2 = \frac{a'\tau'_1 + b'}{c'\tau'_1 + d'},$$

les entiers $a, \ldots, d'$ devant satisfaire aux relations

(143) $$ad - bc = 1 = a'd' - b'c'.$$

La transformée de (142) sera bien de la forme (140) si l'on a pu choisir les entiers $a, \ldots, d'$ de manière à vérifier les équations

$$(\mathrm{L}a + \mathrm{M}c)c' = \mathrm{N}ca', \qquad (\mathrm{L}b + \mathrm{M}d)d' = \mathrm{N}db'.$$

A cet effet, on prendra d'abord

$$\begin{aligned} \mathrm{L}a + \mathrm{M}c &= \mu a', & \mathrm{L}b + \mathrm{M}d &= \nu b', \\ \mathrm{N}c &= \mu c', & \mathrm{N}d &= \nu d', \end{aligned}$$

μ et ν étant entiers. Or on tire de ces relations et de (143) : $\mathrm{LN} = \mu\nu$. Prenons $\mu = 1$, $\nu = \mathrm{LN}$; toute la question reviendra à résoudre l'équation

$$\mathrm{N}b' - \mathrm{M}d' = b$$

à l'aide de trois entiers b, b', d' tels que b' et d' soient premiers entre eux et que b soit premier à $\mathrm{L}d'$: car, s'il en est ainsi, on pourra déterminer à l'aide de b et de $d (= \mathrm{L}d')$ deux autres entiers a et c vérifiant $(143)_1$; et les formules

$$a' = \mathrm{L}a + \mathrm{M}c, \qquad c' = \mathrm{N}c$$

donneront pour a', c' un couple de valeurs qui, conjointement avec b' et d', vérifieront nécessairement $(143)_2$.

Or, soit δ le p. g. c. d. de M et N (avec $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1\delta$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1\delta$); comme on peut supposer L, M, N premiers entre eux dans leur ensemble, δ sera premier à L; on posera $b = \beta\delta$ et *tout reviendra à résoudre l'équation*

$$\mathrm{N}_1 b' - \mathrm{M}_1 d' = \beta$$

(M_1 et N_1, premiers entre eux) *par trois entiers* b', d', β *tels que :* 1° β

soit premier à d' et à L; 2° *d' soit premier à b' et à δ* (car alors $b = \beta\delta$ sera premier à Ld'). Or soit ε le p. g. c. d. de L et N_1 (avec $L = \varepsilon L_1$, $N_1 = \varepsilon N_2$); et appelons l le plus grand diviseur de L_1 qui soit premier à ε; on aura donc $L_1 = \varepsilon_1 l$, l étant premier à ε_1. Je dis qu'*on pourra satisfaire aux conditions requises en prenant $d' = l$.*

En effet, l étant premier à N_1 et à δ est premier à N; il existe donc un nombre b' tel que Nb' soit premier à l et la condition 2° est ainsi réalisée. Montrons qu'il en est de même de la première.

Si $N_1 b' - M_1 l$ et $d'L\,(= \varepsilon\varepsilon_1 l^2)$ avaient un diviseur premier commun $\theta\,(\neq 1)$, ce diviseur appartiendrait à $\varepsilon\varepsilon_1$ (c'est-à-dire à ε) ou à l. Mais θ ne peut diviser l, car il diviserait $N_1 b'$ et, par suite, Nb' (qui est premier à l); et, si θ divisait ε, il diviserait N_1 et, par suite, $M_1 l$. Mais actuellement θ est premier à l; il devrait donc diviser M_1 et N_1 qui sont premiers entre eux.

En définitive, on peut donc écrire deux transformations modulaires (¹)

$$\tau = \frac{\alpha\tau_1 + \beta}{\gamma\tau_1 + \delta}, \qquad \tau' = \frac{\alpha'\tau'_1 + \beta'}{\gamma'\tau'_1 + \delta'}$$

qui réduisent (138) à la forme (140). On aura ainsi

$$(144)\quad \begin{cases} (A\alpha + B\gamma)\gamma' - (C\alpha + D\gamma)\alpha' = 0, & (A\beta + B\delta)\gamma' - (C\beta + D\delta)\alpha' = -\lambda m, \\ (A\alpha + B\gamma)\delta' - (C\alpha + D\gamma)\beta' = \lambda n, & (A\beta + B\delta)\delta' - (C\beta + D\delta)\beta' = 0, \end{cases}$$

λ étant entier.

Introduisons alors deux quantités ω_1, ω'_1 satisfaisant aux relations (sûrement compatibles)

$$(145)\quad \begin{cases} \omega\tau = \omega_1(\alpha\tau_1 + \beta) & (A\tau + B)\omega = (\alpha'\tau'_1 + \beta')\omega'_1. \\ \omega\ \ = \omega_1(\gamma\tau_1 + \delta), & (C\tau + D)\omega = (\gamma'\tau'_1 + \delta')\omega'_1, \end{cases}$$

On pourra écrire :

$$p(U \mid \omega, \omega\tau) = p[U \mid (\gamma\tau_1 + \delta)\omega_1, (\alpha\tau_1 + \beta)\omega_1] = p(U \mid \omega_1, \omega_1\tau_1),$$
$$p[V \mid (C\tau + D)\omega, (A\tau + B)\omega] = p[V \mid (\gamma'\tau'_1 + \delta')\omega'_1, (\alpha'\tau'_1 + \beta')\omega'_1] = p(V \mid \omega'_1, \omega'_1\tau'_1).$$

Mais on tire de (145) les relations

$$C\omega_1(\alpha\tau_1 + \beta) + D\omega_1(\gamma\tau_1 + \delta) = \delta'\omega'_1 + \gamma'\omega'_1\tau'_1,$$
$$A\omega_1(\alpha\tau_1 + \beta) + B\omega_1(\gamma\tau_1 + \delta) = \beta'\omega'_1 + \alpha'\omega'_1\tau'_1,$$

(¹) On a modifié ici les notations précédentes.

qui, en vertu de (144), se réduisent à

$$\omega'_1 = \lambda m \omega_1, \qquad \omega'_1 \tau'_1 = \lambda n \omega_1 \tau_1.$$

Faisons alors la transformation d'homogénéité $V \mid \frac{V}{\lambda}$ [qui laisse, dans (139), le rapport $a : b$ rationnel], et modifions la notation des périodes; nos fonctions $\wp U$ et $\wp V$ pourront s'écrire

$$(146) \qquad \wp(U \mid \omega, \omega') \text{ et } \wp(V \mid m\omega, n\omega')$$

(m et n, entiers premiers entre eux).

57. *La surface* F *est doublement singulière.* — Ces transformations effectuées, *nous allons construire une intégrale de différentielle totale de troisième espèce qui ne présentera comme courbes logarithmiques que la courbe* Γ, *et des courbes* C *et* K. Nous supposerons d'abord que F est doublement singulière (cas c), et nous raisonnerons sur la surface I du n° 28, mais il n'y aurait aucune difficulté à étendre la méthode aux six autres surfaces.

Cette surface I est birationnellement équivalente à la suivante [1] :

$$x = \frac{\sigma_3\left(U \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\sigma\left(U \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} \wp' V, \qquad y = \wp'\left(U \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \qquad z = \wp V,$$

$\wp V$ (comme plus loin) étant toujours définie par $(146)_2$. Le tableau de périodes de F s'écrit actuellement :

$$(147) \qquad \left\| \begin{matrix} 2\omega & 0 & 2\omega' & 0 \\ 0 & 2m\omega & 0 & 2n\omega' \end{matrix} \right\|;$$

et à un point quelconque de la surface répondent seulement deux couples d'arguments distincts relativement à (147) : ce sont les couples (U, V) et $(U + \omega, -V)$.

Supposons alors que l'équation de Γ s'écrive [2] $aU + bV = 0$ (ce

---

[1] On a modifié la notation des n^{os} 24 et suivants. L'intégrale de Picard U de F admet actuellement pour périodes primitives ω et $2\omega'$.

[2] En négligeant une constante additive (ce qui revient à augmenter U d'une constante).

qui est le seul cas à envisager pour c); soient γ et δ les p. g. c. d. respectifs de a et m, de a et n; appelons σt la fonction de Weierstrass $\sigma(t\,|\,\gamma\omega,\ \delta\omega')$.

Ceci posé, je dis que l'*expression* $\operatorname{Log}\Phi(U, V)$, *où l'on a*

$$\Phi(U, V) = \frac{\sigma(aU + bV)\,\sigma(aU - bV + a\omega)\,\sigma(bV - \delta\omega')\,\sigma(bV + a\omega + \delta\omega')}{\sigma aU\,\sigma(aU + a\omega)\,\sigma^4 bV},$$

est une intégrale de Picard pour F, *ne devenant infinie logarithmiquement que sur* Γ *et sur des courbes* C et K.

La première partie se vérifie aussitôt, car $\Phi(U, V)$ *est une fonction rationnelle du point* (x, y, z) : tout d'abord, $\Phi(U, V)$ admet tous les couples de périodes du tableau (147); $\Phi(U, V)$ est donc une fonction algébrique de (x, y, z) à deux valeurs au plus. Comme d'autre part on a $\Phi(U + \omega, -V) = \Phi(U, V)$, on vérifie bien que cette fonction algébrique est rationnelle.

Pour achever de justifier notre assertion, il nous suffira donc de montrer que $\Phi(U, V)$ *n'a pas d'autre ligne de zéros que la courbe* Γ (en dehors de courbes K), et pour cela, nous pourrons nous borner à établir la même propriété pour $\sigma(aU + bV)$. Or les zéros de cette fonction sont définis par la relation

$$aU + bV + 2M\gamma\omega + 2N\delta\omega' = 0, \tag{148}$$

M et N étant des entiers arbitraires; je dis que quels que soient ces entiers, la courbe représentée par (148) se confond avec Γ. A cet effet, il suffira de montrer qu'on peut toujours déterminer quatre entiers $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned} &aU + bV + 2M\gamma\omega + 2N\delta\omega' \\ &\quad = a(U + 2\mu_1\omega + 2\mu_3\omega') + b(V + 2\mu_2 m\omega + 2\mu_4 n\omega'), \end{aligned}$$

et, pour cela, il n'y aura qu'à résoudre en entiers les équations

$$a\mu_1 + bm\mu_2 = M\gamma, \qquad a\mu_3 + bn\mu_4 = N\delta.$$

Or cette résolution est toujours possible, car a et b étant premiers entre eux comme on l'a supposé, le plus grand commun diviseur de a et bm se réduit à celui de a et m, c'est-à-dire à γ; et une remarque analogue s'applique à la seconde équation.

58. *La surface* F *est triplement singulière.* — Abordons maintenant le cas d du n° 55 : les fonctions $\mathfrak{p}$U et $\mathfrak{p}$V (algébriquement liées) admettent la multiplication complexe. Soit ε le multiplicateur; le tableau de périodes de F peut toujours être réduit à la forme (147), mais $\omega' : \omega$ sera relié au multiplicateur ε par les formules

$$\varepsilon\omega = a\omega + b\omega', \qquad \varepsilon\omega' = c\omega + d\omega' \qquad (ad - bc \neq 0),$$

a, b, c, d étant quatre entiers. Enfin, h, k, l étant trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble, l'équation de Γ s'écrira sous la forme

$$h\mathrm{U} + (k + l\varepsilon)\mathrm{V} = 0$$

(en négligeant une constante additive). Cela étant, nous allons montrer qu'on peut trouver deux périodes 2Ω, $2\Omega'$ (dont le rapport est complexe) telles que l'expression LogΦ (U, V) du n° 57 — où cette fois a est remplacé par h; b, par $k + l\varepsilon$; $\delta\omega'$, par Ω'; $\sigma(t\,|\,\gamma\omega, \delta\omega')$, par $\sigma(t\,|\,\Omega, \Omega')$ — constitue encore une intégrale de Picard de troisième espèce attachée à F, ne devenant logarithmiquement infinie que sur Γ (en dehors de courbes C ou K). A cet effet, il sera nécessaire et suffisant d'établir (comme tout à l'heure) que :

1° Lorsqu'on augmente le couple (U, V) de l'un des couples de périodes du tableau (147), $h\mathrm{U} + (k + l\varepsilon)\mathrm{V}$ augmente d'une période de $\sigma(t\,|\,\Omega_1, \Omega')$;

2° Pour augmenter l'argument $h\mathrm{U} + (k + l\varepsilon)\mathrm{V}$ de 2Ω ou de $2\Omega'$, il suffit d'augmenter (U, V) d'un couple de périodes convenablement choisi.

En d'autres termes, pour que la fonction $\sigma(t\,|\,\Omega, \Omega')$ remplisse les conditions requises, il faut et il suffit que Ω et Ω' soient reliées à ω

---

(1) Ainsi on verra aisément qu'il n'y a pas lieu d'examiner l'invariance de Φ par l'opération U, V | U + ω_1 — V; elle est assurée dès que la première condition qu'on a énoncé sera remplie.

et ω' par les équations

$$(149)\quad \begin{cases} h\omega = p\Omega + q\Omega', \\ h\omega' = p'\Omega + q'\Omega', \\ km\omega + lm(a\omega + b\omega') = r\Omega + s\Omega', \\ kn\omega + ln(c\omega + d\omega') = r'\Omega + s'\Omega', \end{cases}$$

$$(150)\quad \begin{cases} \Omega = [h\lambda_1 + km\lambda_2 + l(am\lambda_2 + cn\lambda_4)]\omega \\ \qquad + [h\lambda_3 + kn\lambda_4 + l(bm\lambda_2 + dn\lambda_4)]\omega', \\ \Omega' = [h\mu_1 + km\mu_2 + l(am\mu_2 + cn\mu_4)]\omega \\ \qquad + [h\mu_3 + kn\mu_4 + l(cm\mu_2 + dn\mu_4)]\omega', \end{cases}$$

où $p, q, p', q', r, s, r', s', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ désignent 16 entiers à déterminer.

Or substituons dans (150) les valeurs de ω et ω' tirées de (149); comme le rapport $\Omega' : \Omega$ est imaginaire, on voit aussitôt que les équations (150) entraînent le système

$$(151)\quad \begin{cases} p\lambda_1 + p'\lambda_3 + r\lambda_2 + r'\lambda_4 = 1, & p\mu_1 + p'\mu_3 + r\mu_2 + r'\mu_4 = 0, \\ q\lambda_1 + q'\lambda_3 + s\lambda_2 + s'\lambda_4 = 0, & q\mu_1 + q'\mu_3 + s\mu_2 + s'\mu_4 = 1. \end{cases}$$

D'autre part, pour la même raison, les équations (149) entraînent

$$(152)\quad \begin{cases} (k + la)\,mp + lbmp' = hr, & (k + la)\,mq + lbmq' = hs, \\ lcnp + (k + ld)\,np' = hr', & lcnq + (k + ld)\,nq' = hs'. \end{cases}$$

Et, réciproquement si les équations (151), (152) sont vérifiées, et si l'un au moins des déterminants extraits de la matrice

$$(153)\quad \left\| \begin{matrix} p & p' & r & r' \\ q & q' & s & s' \end{matrix} \right\|$$

n'est pas nul, les valeurs de Ω et Ω' tirées des équations (149) correspondant à ce déterminant satisfont aux équations (149) restantes et à (150).

Or, considérons le système

$$(154)\quad \begin{cases} (k + la)\,mx + lbmy = hu, \\ lcnx + (k + ld)\,ny = hv, \end{cases}$$

aux entiers inconnus (x, y, u, v); choisissons pour (p, p', r, r') et pour (q, q', s, s') deux solutions de (154) formant un système fondamental [c'est-à-dire telles que les déterminants extraits de (153) soient premiers entre eux dans leur ensemble (¹)]; en vertu de la propriété que nous venons d'assigner à leurs coefficients, les deux systèmes (151) aux inconnues λ_i et μ_j seront sûrement résolubles en entiers.

Remarques. — I. Tous les systèmes fondamentaux de solutions pour (154) se déduisant de l'un quelconque d'entre eux par substitutions $\begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$ de déterminant ± 1; Ω et Ω' seront donc définies à une transformation modulaire près, et l'on voit que :

Quel que soit le système fondamental choisi, la fonction $\sigma(t \mid \Omega, \Omega')$ *qui en résultera restera la même.*

II. On vérifiera aisément que la construction obtenue pour $\sigma(t \mid \Omega, \Omega')$ dans le cas d du n° 55 comprend, comme cas particulier, la solution $\sigma(t \mid \gamma\omega, \delta\omega')$ du cas c : il suffit de faire $l = 0$. Inversement si l'on veut former une fonction $\sigma(t \mid \Omega, \Omega')$ répondant à la question pour le cas d, il ne sera pas toujours possible de la prendre égale à $\sigma(t \mid \gamma'\omega, \delta'\omega')$: il suffira d'indiquer l'exemple suivant : pour la surface F on a $a = 3$, $b = -2$, $c = 7$, $d = -3$; $m = 1$ $n = 1$; et pour la courbe c, $h = 3$, $k = 1$, $l = 2$, on observera d'ailleurs que le corps $\mathfrak{K}(\varepsilon) = \mathfrak{K}(\sqrt{-5})$ contient des classes d'idéaux non principaux.

59. *Forme générale des coefficients de* ($\mathfrak{S}$). — Ces préliminaires établis, il sera facile d'exprimer en fonction de U et V les différentielles

$$du = e^{\int P\,dy + Q\,dz}(\overline{A}\,dz + \overline{B}\,dy)$$

et dv. On aura d'abord

$$J \equiv \int P\,dy + Q\,dz = \sum_{j=1}^{N} h_j \operatorname{Log} \Phi_j(U, V) + J_1,$$

(¹) H.-J. STEPHEN SMITH, *Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London*, vol. 151 (1861; édité en 1862), p. 297; FROBENIUS, *Journ. de Crelle*, t. 86, 1879, p. 171.

avec [1]

$$\Phi_j(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_j(a_j\mathrm{U} + b_j\mathrm{V} + c_j)\,\sigma_j(a_j\mathrm{U} - b_j\mathrm{V} + a_j\omega + c_j) \\ \times\,\sigma_j(b_j\mathrm{V} - \delta_j\omega')\,\sigma_j(b_j\mathrm{V} + a_j\omega + \delta_j\omega') \end{array} \right\}}{\sigma_j(a_j\mathrm{U} + c_j)\,\sigma_j(a_j\mathrm{U} + a_j\omega + c_j)\,\sigma_j^2\, b_j\mathrm{V}},$$

$a_j\mathrm{U} + b_j\mathrm{V} + c_j = 0$ étant l'équation de Γ_j et σ_j étant formée au moyen de deux périodes $2\Omega_j$, $2\Omega'_j$ correspondant à Γ_j. De plus, J_1 sera une intégrale de troisième espèce n'admettant comme courbes logarithmiques que des courbes C ou des courbes K. Or les courbes K appartenant au faisceau linéaire $\mathrm{V} = \text{const.}$, on peut écrire [2]

$$\mathrm{J}_1 = \sum_{l=1}^{p} k_l \operatorname{Log}(p\mathrm{V} - d_l) + \int [\alpha + \varphi(\mathrm{U})]\, d\mathrm{U},$$

$\int \varphi(\mathrm{U})\,d\mathrm{U}$ étant une somme d'intégrales normales de troisième espèce relatives au faisceau elliptique $\{\mathrm{C}\}$; $\varphi(\mathrm{U})$ est donc une fonction elliptique aux périodes ω et $2\omega'$.

Enfin, on pourra poser

$$\overline{\mathrm{A}}(x, y, z)\,dz + \overline{\mathrm{B}}(x, y, z)\,dy = \mathrm{A}(\mathrm{U}, \mathrm{V})\,d\mathrm{U} + \mathrm{B}(\mathrm{U}, \mathrm{V})\,d\mathrm{V}$$

et il nous reste à préciser la forme de A et de B.

Pour abréger le langage nous dirons qu'une fraction $\mathfrak{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ est *normale* si elle satisfait aux conditions suivantes :

1° $\mathfrak{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ *est une fonction elliptique de* U *et de* V *admettant tous les couples de périodes* (147);

2° $\mathfrak{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ *vérifie l'équation*

$$\mathfrak{F}(\mathrm{U} + \omega, -\mathrm{V}) = \mathfrak{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V});$$

3° $\mathfrak{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ *n'admet aucune autre courbe polaire que la courbe* $\mathrm{V} = 0$ *ou des courbes* C.

---

(1) Dans le cas où F serait triplement singulière, on apporterait à cette notation les changements indiqués au n° 58.

(2) Ceci s'accorde bien avec le fait qu'une expression $\int [\mathrm{R}(p\mathrm{V}) + \mathrm{S}(p\mathrm{V})p'\mathrm{V}]\,d\mathrm{V}$ (R et S, fonctions rationnelles) ne peut être une intégrale de Picard pour F que si elle reste invariante par la transformation $\mathrm{V} \mid -\mathrm{V}$: on doit donc avoir $\mathrm{R} \equiv 0$,

Si $\mathcal{F}(U, V)$ possède les deux premiers caractères précédents, mais admet des courbes polaires $V = V_0$ (V_0, quelconque), nous dirons que $\mathcal{F}$ est *semi-normale*.

Il résulte aussitôt de là qu'on peut mettre toute fonction normale sous la forme

$$\mathcal{F}(U, V) = \sum_i \varphi_i(U)\, p^i V + p'V \sum_j \psi_j(U)\, p^j V;$$

les exposants i et j sont positifs; pV désigne toujours la fonction $p(V \mid m\omega, n\omega')$; enfin $\varphi_i(U)$ et $\psi_j(U)$ représentent des fonctions elliptiques, de périodes 2ω et $2\omega'$, et telles que

$$\varphi_i(U + \omega) = \varphi_i(U), \qquad \psi_j(U + \omega) = -\psi_j(U).$$

Cela étant, $A(U, V)$ et $B(U, V)p'V$ vérifient sûrement les deux premières conditions précédentes; enfin, quitte à modifier la forme de J_1 et à augmenter le nombre des Φ_j on peut toujours supposer que A et $Bp'V$ vérifient la troisième condition. On aura ainsi, en se bornant aux termes de plus haut degré en pV :

$$(155) \qquad \begin{cases} A = \alpha_\mu p^\mu V + \ldots + \alpha_0 + (\beta_\nu p^\nu V + \ldots + \beta_0)\, p'V, \\ B = \gamma_\pi p^\pi V + \ldots + \gamma_0 + (\delta_\rho p^\rho V + \ldots + \delta_0)\, p'V, \end{cases}$$

avec

$$(156) \qquad \begin{cases} \alpha_f(U + \omega) = \alpha_f(U), & \beta_f(U + \omega) = -\beta_f(U), \\ \gamma_f(U + \omega) = -\gamma_f(U), & \delta_f(U + \omega) = \delta_f(U). \end{cases}$$

En résumé, nous pourrons donc écrire

$$(157) \qquad du = WZH(A\, dU + B\, dV).$$

A et B ayant leurs valeurs (155), avec en outre :

$$W = e^{\int [\alpha + \varphi(U)]\, dU}, \qquad Z = \prod_{l=1}^{P} (pV - d_l)^{k_l}, \qquad H = \prod_{j=1}^{N} \Phi_j^{h_j}(U, V).$$

60. *Conditions d'intégrabilité.* — Ceci posé, exprimons que du est

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ de l'équation *mumérique* en X

$$f(1, X) + \mu\varphi(1, X) = 0$$

sont fonctions du paramètre μ et la courbe générale du faisceau (1) a pour équation

$$(\gamma - \mu_1\gamma')(\gamma - \mu_2\gamma'), \ldots (\gamma - \mu_p\gamma') = 0.$$

La solution du paragraphe cité est donc trop *particulière :* j'avais réduit en effet f à γ^p et φ à γ'^p, mais la seule conclusion, qui était nécessaire pour achever, subsiste : à savoir que les points de base du faisceau (1) se réduisent aux $\left(\frac{m}{p}\right)^2$ points communs à γ et γ', chacun d'eux comptant pour p^2.

La comparaison des termes prépondérants de (158) dans le voisinage de $V = 0$ donnera alors :

$$\rho = \mu - 1, \qquad \pi = \nu + 2 \tag{161}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_\mu \left(2 \sum_{j=1}^{N} h_j + \sum_{l=1}^{P} k_l + \mu \right) = (\alpha + \varphi)\, \delta_{\mu-1} + \delta'_{\mu-1}, \\ &4\beta_\nu \left(2 \sum_{j=1}^{N} h_j + \sum_{l=1}^{P} k_l + \nu + \frac{3}{2} \right) = (\alpha + \varphi)\, \gamma_{\nu+2} + \gamma'_{\nu+2}. \end{aligned} \right. \tag{162}$$

61. *Réduction de du : première étape.* — Ces préliminaires établis, il nous sera possible d'étendre aux surfaces elliptiques la théorie développée pour le cylindre elliptique. Nous ferons voir tout d'abord comment *on peut augmenter h_j d'une unité (en supposant toutefois $h_j \neq -1$.*

A cet effet, démontrons d'abord la proposition suivante :

Lemme. — *Soit*

$$F(U, V) \equiv \prod_{j=1}^{N} \Phi_j(U, V), \qquad G(V) \equiv \prod_{l=1}^{P} (pV - d_l);$$

on peut construire une fonction normale (n° 59), $E(U, V)$ *telle que le long de* Γ_1 *le produit* $a_1 EC_1 FG$ *prenne la même succession de valeurs que* $A(U, V)$.

En effet, on peut écrire :

$$\frac{A}{a_1 C_1 FG} = \frac{\sum_i \mathfrak{B}_i(U)\, S_i(pV) + p'V \sum_i \mathfrak{C}_i(U)\, T_i(pV)}{\sum_i \mathfrak{A}_i(U)\, R_i(pV)},$$

les symboles R_i, S_i, T_i désignant des fonctions rationnelles de pV, et les coefficients $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ (ou $\mathfrak{C}_i$) des fonctions elliptiques de U, aux périodes 2ω, $2\omega'$ et satisfaisant aux mêmes conditions (156) que les coefficients α_f et δ_f (ou β_f et γ_f). Or le long de Γ_1 on a, par exemple, $V = -\frac{a_1 U + c_1}{b_1}$; dans la fonction $p\left(\frac{a_1 U + c_1}{b_1}\right)$ remplaçons U

par $U+\lambda\omega+2\mu\omega'$; lorsque les entiers λ et μ varieront de toutes les manières possibles, la fonction $p\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\middle| m\omega, n\omega'\right)$ prendra successivement un système de $\mathfrak{N}$ valeurs distinctes. Écrivons alors

$$\frac{\sum_i \mathfrak{B}_i(U)\,S_i\left[p\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\right)\right]}{\sum_i \mathfrak{A}_i(U)\,R_i\left[p\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\right)\right]} = \sum_{l=0}^{\mathfrak{N}-1} \Lambda_l p^l\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\right),$$

les Λ_l étant des fonctions de U à déterminer; et dans cette égalité remplaçons successivement U par les $\mathfrak{N}$ valeurs $U+\lambda\omega+2\mu\omega'$ du système complet précédent. On obtiendra ainsi pour les Λ_l un système d'équations linéaires dont le déterminant est sûrement différent de zéro (pour U arbitraire); et les Λ_l, s'exprimant par des quotients de déterminants qui se multiplient par le même facteur lorsqu'on augmente U de $\lambda\omega+2\mu\omega'$, admettront bien les périodes ω et $2\omega'$. On déterminera de même les $M_l(U)$ par les équations

$$\frac{\sum_i \mathfrak{C}_i(U)\,T_i\left[p\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\right)\right]}{\sum_i \mathfrak{A}_i(U)\,R_i\left[p\left(\frac{a_1U+c_1}{b}\right)\right]} = \sum_{l=0}^{\mathfrak{N}-1} M_l p^l\left(\frac{a_1U+c_1}{b_1}\right)$$

et l'expression

$$E(U,V) \equiv \sum_{l=0}^{\mathfrak{N}-1} [\Lambda_l(U)+M_l(U)\,p'V]\,p^lV$$

satisfera manifestement aux conditions requises.

Cela étant, revenons à notre problème et posons

$$\mathfrak{G} \equiv \frac{1}{h_1+1}\,WZHFGE.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{G}}{WZH} = {} & \frac{1}{h_1+1}\left\{\left[\alpha+\varphi+\sum_{j=1}^{N}(h_j+1)a_jC_j\right]FGE+FG\frac{\partial E}{\partial U}\right\}dU \\ & +\frac{1}{h_1+1}\left\{\left[\sum_{l=1}^{P}\frac{(k_l+1)\,p'V}{pV-d_l}+\sum_{j=1}^{N}(h_j+1)b_jD_j\right]FGE+FG\frac{\partial E}{\partial V}\right\}dV.\end{aligned}$$

Le second membre de cette relation est du type $A^* dU + B^* dV$, A^* et B^* désignant des fonctions semi-normales ; il en résulte que

$$du_1 (\equiv du - d\mathfrak{S})$$

est une différentielle de même forme que du ; d'ailleurs, le long de Γ_1, $a_1 C_1 EFG$ prendra les mêmes valeurs que $A(U, V)$; par suite, d'après (159), $b_1 D_1 EFG$ prendra les mêmes valeurs que $B(U, V)$; on en déduit que $\dfrac{a_1 C_1 EFG - A}{\Phi_1}$ et $\dfrac{b_1 D_1 EFG - B}{\Phi_1}$ posséderont les caractères de fonctions semi-normales ; dans du_1 h_1 sera donc remplacé par $h_1 + 1$, tandis que les autres $\mathcal{R}(h_j)$ et $\mathcal{R}(k_l)$ n'auront pu diminuer.

Dès lors, en opérant ensuite de proche en proche, nous pourrons construire une expression semi-normale $E_1(U, V)$, telle que pour la différence $du_2 \equiv d(u - WZHFE_1)$, de forme analogue à du, chacun des exposants h_j satisfasse à l'une des conditions $\mathcal{R}(h_j) > -1$ ou $h_j = -1$.

Pour ne pas compliquer la notation, nous écrirons encore du_2 sous la forme $WZH(A\,dU + B\,dV)$, en laissant à A et à B leurs expressions (155).

62. *Réduction de du : seconde étape.* — Les h_j étant ainsi fixés, je dis qu'*on pourra, sans diminuer leurs parties réelles, augmenter d'une unité chacune des* $\mathcal{R}(k_l)$, *à moins que* k_l *ne soit égal à* -1.

Pour le voir, observons d'abord qu'*on peut former une fonction normale*

$$K(U, V) \equiv K_1(U) + K_2(U)\,\mathfrak{p}'V$$

telle que, pour $\mathfrak{p}V = d_1$, *la fonction*

$$\frac{B(U, V)}{(k_1 + 1)F(U, V)\,\mathfrak{p}'V}$$

coïncide avec $K(U, V)$, *et cela, quelle que soit la détermination adoptée pour* $\mathfrak{p}'V$.

Effectivement, si l'on a

$$\frac{B(U, V)}{(k_1 + 1)F(U, V)\,\mathfrak{p}'V} = \frac{\sum_i \mathfrak{M}_i(U)\,\sigma_i(\mathfrak{p}V) + \mathfrak{p}'V \sum_i \mathfrak{N}_i(U)\,\tau_i(\mathfrak{p}V)}{\sum_i \mathfrak{L}_i(U)\,\rho_i(\mathfrak{p}V)},$$

les symboles $\mathcal{L}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$; ρ_i, σ_i, τ_i ayant des propriétés analogues à celles de $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, R_i, S_i, T_i, il n'y aura qu'à prendre

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{U}) \equiv \frac{\sum\limits_i \mathfrak{M}_i(\mathrm{U})\,\sigma_i(d_1)}{\sum\limits_i \mathcal{L}_i(\mathrm{U})\,\rho_i(d_1)};$$

et de même pour $\mathrm{K}_2(\mathrm{U})$. Dès lors, si l'on retranche de du_2 l'expression

$$d\mathfrak{T}_1 \equiv d\left[\mathrm{WZHF}\frac{\mathrm{G}(\mathfrak{p}\mathrm{V})}{\mathrm{G}'(d_1)}\mathrm{K}\right],$$

la différence aura même forme que du_2, les $\mathcal{R}(h_j)$ ne pouvant avoir diminué; d'autre part, dans $d\mathfrak{T}_1$ le coefficient de $d\mathrm{U}$ contient en facteur $\mathfrak{p}\mathrm{V} - d_1$ avec l'exposant $k_1 + 1$, comme celui de $d\mathrm{U}$ dans du_2 [d'après la formule (160) appliquée à du_2], et celui de $d\mathrm{V}$ est de la forme

$$\mathrm{WZH}\left[\frac{(k_1+1)\,\mathfrak{p}'\mathrm{V}}{\mathfrak{p}\mathrm{V} - d_1}\,\frac{\mathrm{G}(\mathfrak{p}\mathrm{V})}{\mathrm{G}'(d_1)}\mathrm{KF} + \star\right],$$

l'étoile désignant des termes qui s'annulent pour $\mathfrak{p}\mathrm{V} = d_1$. D'après le choix de K, $\mathfrak{p}\mathrm{V} - d_1$ figurera donc dans la différence $du_2 - d\mathfrak{T}_1$ avec un exposant de partie réelle $\geqq \mathcal{R}(k_1 + 1)$.

Comme précédemment, il résulte de là qu'on pourra construire une expression semi-normale $\mathrm{E}_2(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ telle que la différence

$$du_3[\equiv d(u - \mathrm{WZHFE}_2)]$$

soit de forme analogue à du, chacun des h_j ou des k_l satisfaisant à l'une des conditions

$$(163)\qquad \mathcal{R}(g) > -1 \quad \text{ou} \quad g = -1 \qquad (g = h_j \text{ ou } k_l).$$

Bien entendu, on pourra choisir les nouvelles valeurs des h_j ou des k_l de telle sorte qu'aucune des sommes (¹)

$$f_1 \equiv 2\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} h_j + \sum_{l=1}^{\mathrm{P}} k_l + \mu \quad \text{et} \quad f_2 \equiv 2\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} h_j + \sum_{l=1}^{\mathrm{P}} k_l + \nu + \frac{3}{2}$$

ne soit nulle.

(¹) Pour ne pas compliquer la notation, les symboles qui figurent dans ces sommes et dans les développements suivants sont regardés comme s'appliquant à du_3.

Supposons alors que l'on ait (pour du_3) $\mu > 2N + P$, $\nu > 2N + P$ et formons [1]

$$d\varpi_2 \equiv d\left\{ \varkappa \mathrm{WZHFG} \left[\frac{\delta_{\mu-1}}{f_1} (pV)^{\mu-2N-P} + \frac{\gamma_{\nu+2}}{4 f_2} (pV)^{\nu-2N-P} p'V \right] \right\},$$

avec

$$\varkappa \equiv \prod_{j=1}^{N} \frac{b_j^j}{\sigma_j(-\delta_j \omega') \sigma_j(a_j \omega + \delta_j \omega')};$$

quand V tend vers o, $\frac{\varkappa F}{p^{2N} V}$ tend vers 1, et l'on trouvera aisément que $d\varpi_2$ est de la forme

$$d\varpi_2 \equiv \mathrm{WZH} (\overset{*}{A}\, dU + \overset{*}{B}\, dV),$$

$\overset{*}{A}$ et $\overset{*}{B}$ étant des fonctions normales analogues à A et B, soient

$$\overset{*}{A} = \overset{*}{A}_1 + \overset{*}{A}_2\, p'V, \qquad \overset{*}{B} = \overset{*}{B}_1 + \overset{*}{B}_2\, p'V;$$

$\overset{*}{A}_1$, $\overset{*}{A}_2$, $\overset{*}{B}_1$, $\overset{*}{B}_2$ sont des polynomes en pV et, d'après (162), les termes de plus haut degré dans ces polynomes sont identiques respectivement à ceux de A_1, A_2, B_1, B_2.

Finalement, il est donc établi qu'on peut construire une expression semi-normale $\mathcal{E}(U, V)$ telle que la différence

$$du' \equiv d(u - \mathrm{WZHFG}\,\mathcal{E}) = \mathrm{WZH}(P_1\, dU + Q_1\, dV)$$

soit encore de la même forme que du, telle en outre que les exposants h_j, k_l de du' satisfassent encore à (163) et que, pour P_1 et Q_1 — de formes analogues à (155) —, les exposants μ et ν soient au plus égaux à $2N + P - 1$.

L'énoncé précédent suppose implicitement $2N + P \neq 0$. Dans le cas contraire, N et P étant nuls, on montrera aisément que si Log W ne se réduit pas au logarithme d'une fonction elliptique (à un facteur rationnel près), le même procédé de réduction donnera $du' = \mathrm{W}a(\mathrm{U})d\mathrm{U}$, $a(\mathrm{U})$ étant une fonction elliptique de U.

---

(1) Si l'on avait, par exemple, $\mu \geqq 2N + P$, $\nu < 2N + P$, on supprimerait de $d\varpi_2$ les termes en $p'V$.

63. *Conditions d'uniformité : Réduction définitive de dU dans l'hypothèse* (H). — Dès lors, si l'on procède comme pour le cylindre elliptique (nos 42 et 43), on aboutira à la conclusion suivante :

Lorsque du et dv contiennent respectivement en facteurs deux termes W_1 et W_2 satisfaisant tous deux à l'hypothèse H (no 40), *les solutions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ du système* (S) *ne peuvent être uniformes que si* (S) *se réduit à l'un des systèmes suivants* [1] :

Cas *a* :

$$u = e^{\alpha_1 U} Z_1, \qquad v = e^{\alpha_2 U} Z_2;$$

Cas *b* :

$$u = W_1 Z_1, \qquad v = W_2 Z_2;$$

Cas *c* et *d* :

$$u = W_1 Z_1 H_1 A_1, \qquad v = W_2 Z_2 H_2 A_2.$$

Dans les cas précédents, les courbes K sont supposées avoir pour équation $z = \text{const.}$, et l'on a posé :

$$W_i = e^{\alpha_i U + \int \varphi_i(U)\, dU},$$

$$Z_i = \prod_{l=1}^{p} (z - d_l)^{k_{l,i}}, \qquad H_i = \prod_{j=1}^{N} \Phi_j^{h_{j,i}}(U, V)$$

$$(i = 1, 2),$$

les A_i étant de la forme (155).

On observera que le résultat obtenu reste valable même dans le cas particulier indiqué à la fin du no 62. En effet, soient

$$(164) \qquad r(x, y, z) = \lambda, \qquad s(x, y, z) = \mu$$

avec $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ les équations du faisceau $\{C\}$; on pourra écrire

$$W\, a(U)\, dU = e^{\int \rho(\lambda, \mu)\, d\lambda}\, d\lambda,$$

ρ étant rationnelle en λ et μ; mais, d'après (164), λ et μ doivent être uniformes en u et v; du se réduit donc à $e^{\alpha U} dU$ ou à dU, et, par suite, rentre encore dans le type indiqué plus haut.

---

[1] Les cas *a*, *b*, *c*, *d* sont ceux du no 55.

Comme au n° 44, on montrera que si $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont uniformes, les systèmes précédents se rangent dans l'une ou l'autre des catégories suivantes :

I. Cas b, c, d :

$$u = e^{\alpha U + \gamma \int \mathfrak{I}(U)\, dU} z^{\Upsilon}, \qquad v = e^{\beta U + \delta \int \mathfrak{I}(U)\, dU} z^{\delta} \qquad (\text{avec } z = pV);$$

II. Cas a, b, c, d :

$$u = e^{\alpha U} Z^{\alpha} z^{\Upsilon}, \qquad v = e^{\beta U} Z^{\beta} z^{\delta}$$

avec $z = pV$ pour les cas b, c, d et $Z \equiv \prod_{l=1}^{p} (z - d_l)^{k_l}$.

64. *Forme du système* ($\mathcal{S}$). — Nous montrerons d'abord que *le système I ne peut avoir de solution* (x, y, z) *uniforme en* u *et* v.

En effet, rappelons d'abord que x, y, z sont des fonctions elliptiques de U et des fonctions rationnelles d'un couple de variables [(T, W), dans la notation du n° 25] algébriquement liées; actuellement, la variable T peut être prise égale à z et la seconde variable, que nous appellerons ici ζ, est définie par une relation

$$(40\ bis) \qquad \varphi(z, \zeta) = 0.$$

Ainsi, à tout point (x, y, z) correspondent n systèmes de coordonnées (U_j; z, ζ_j), les ζ_j se déduisant de ζ_1 par les opérations d'un groupe abélien isomorphe à celui qui fournit U_j à partir de U_1.

Cela étant, observons que, quelle que soit la constante $\varkappa$, l'inversion du système

$$(165) \qquad u = \varkappa^{\Upsilon} e^{\alpha U + \gamma \int \mathfrak{I}(U)\, dU} z^{\Upsilon}, \qquad v = \varkappa^{\delta} e^{\beta U + \delta \int \mathfrak{I}(U)\, dU} z^{\delta}$$

devra donner pour x, y, z des fonctions uniformes de u et v. Or, on déduit de (165), avec les notations (7) :

$$U = \delta' \operatorname{Log} u - \gamma' \operatorname{Log} v; \qquad \varkappa z = u^{-\beta'} v^{\alpha'} e^{-\int \mathfrak{I}\, dU}.$$

Attribuons alors à u et v des valeurs quelconques u_0, v_0 ($\neq 0$); soit U_0 une valeur correspondante de U, et choisissons $\varkappa$ de manière que la fonction $z(u, v)$ définie par $(165)_2$ soit égale pour $u = u_0$, $v = v_0$

(et $U = U_0$) à un point critique $\bar{e}$ de la fonction $\zeta(z)$ définie par (40 *bis*).

Nos constantes ainsi fixées, prenons $v = v_0$ et faisons décrire à u un cercle arbitrairement petit autour de u_0 (à partir d'une position initiale arbitrairement voisine de u_0, mais quelconque); U et z varieront très peu et reviendront à leurs valeurs initiales; d'ailleurs z décrira un contour fermé autour de $\bar{e}$, et la détermination initiale de $\zeta(z)$, soit ζ_1, se sera permutée avec une détermination différente, soit ζ_j. Mais l'opération $U' = U_1$, $z' = z$, $\zeta' = \zeta_j$ $(j \neq 1)$ ne peut laisser invariant le point $(U_1;\, z,\, \zeta_1)$ de la surface F.

C. Q. F. D.

Reste le système II. Or on en déduit d'abord, avec les relations (7),

$$z = u^{-\beta'} v^{\alpha'}.$$

Ce qui exige $\alpha' = p$, $\beta' = q$ (p et q entiers). Supposons alors qu'on ait

$$Z \equiv \prod_{l=1}^{Q} (z - d_l)^{k_l} \prod_{j=1}^{M} (z - e_j)^{\rho_j},$$

les e_j étant les points critiques de la fonction $\zeta(z)$. On tirera de II

$$U + \sum_{l=1}^{Q} k_l \operatorname{Log}(z - d_l) + \sum_{j=1}^{M} \rho_j \operatorname{Log}(z - e_j) = \delta' \operatorname{Log} u - \gamma' \operatorname{Log} v.$$

Or, il suffit de se reporter à la représentation paramétrique du n° 27 pour obtenir sous la forme suivante les conditions d'uniformité de $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Tout d'abord on devra avoir

$$2\pi i \gamma' \equiv 0, \qquad 2\pi i \delta' \equiv 0, \qquad 2\pi i k_l \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\omega,\ 2\omega'),$$

les périodes primitives de U étant 2ω, $2\omega'$. De plus, si un lacet simple direct autour de e_j permute ζ_1 et ζ_{m_j}, et si à cette substitution du groupe $\mathcal{G}$ correspond une substitution $U_{m_j} = U_1 + 2\Omega_j$ du groupe G (n° 25) on devra avoir (¹)

$$2\pi i \rho_j + 2\Omega_j = 0,$$

(¹) Il résulte de là que *les points critiques e_j doivent nécessairement figurer dans* (8).

et, réciproquement, ces conditions sont évidemment suffisantes pour l'uniformité de x, y, z.

65. *L'hypothèse* (H) *n'est plus vérifiée. Nouveaux systèmes* ($\mathcal{S}$). — Lorsque du (ou dv) ne vérifie plus l'hypothèse (H) du n° 40, on établira, comme au n° 45, l'existence d'une transformation rationnelle

$$x = x(X, Y, Z), \qquad y = y(X, Y, Z), \qquad z = z(X, Y, Z) \tag{166}$$

qui changera ($\mathcal{S}$) en un système

$$\left\{ \begin{aligned} d\bar{u} &= \mathcal{A}(X, Y, Z)\, dX + \mathcal{B}(X, Y, Z)\, dY, \\ dv &= \mathcal{C}(X, Y, Z)\, dX + \mathcal{D}(X, Y, Z)\, dY, \end{aligned} \right. \tag{167}$$

où l'on a $\bar{u} = \operatorname{Log} u$ ou u; de plus, les fonctions $X(\bar{u}, v)$, $Y(\bar{u}, v)$, $Z(\bar{u}, v)$ définies par (167) devront être uniformes. Mais (167) est un système (A_2) attaché à une surface $\mathcal{F}$, transformée rationnelle de F par (166); puisque X, Y, Z sont uniformes, on peut supposer que $\mathcal{F}$ se réduit à une surface rationnelle, un cylindre elliptique ou une surface hyperelliptique de Picard. Le premier cas est à écarter, puisque F est irrégulière ; le second également puisque F a le plurigenre composé $P_4 + P_6 > 1$ (tandis que pour le cylindre elliptique $P_4 + P_6 = 0$). $\mathcal{F}$ est donc hyperelliptique, *ce qui exclut le cas a du* n° 55 [1], et possède deux intégrales de Picard de première espèce à deux périodes, U_1 et V_1. D'après la solution du problème (A_2) on peut écrire dans le premier cas de la page 356 $\bar{u} = U_1$, $v = V_1$; d'ailleurs, il résulte des développements du n° 55 que l'on a

$$dU_1 = a\, dU + b\, dV,$$

et, avec une notation analogue, $dV_1 = c\, dU + d\, dV$; ainsi le système différentiel ($\mathcal{S}$) est de l'une des formes :

1° $\qquad u = e^{aU + bV}, \qquad v = cU + dV,$

2° $\qquad u = aU + bV, \qquad v = cU + dV.$

Il nous reste à exprimer que, réciproquement, les systèmes précédents sont bien des systèmes ($\mathcal{S}$) attachés à F; et, pour cela, il nous

(1) Ainsi, la surface F est l'une des sept surfaces des nos 28 et 29; les notations U et V du numéro actuel ont la même signification que dans ces numéros.

suffira d'exprimer qu'en un point (x, y, z) toutes les déterminations de du et dv sont identiques, à des facteurs de proportionnalité près. En d'autres termes, lorsqu'on change U en $U + \Omega$, et V en λV ($\lambda \neq 1$), du et dv doivent être remplacés par des quantités proportionnelles. On arrive ainsi aux résultats suivants :

1° On doit avoir $b = 0$, $cd = 0$; $(\mathcal{S})$ coïncide avec le système

$$u = e^{\alpha U}, \qquad v = V;$$

2° On doit avoir $ab = 0 = cd$; $(\mathcal{S})$ coïncide (à une transposition près) avec le système

$$u = U, \qquad v = V,$$

qui est une dégénérescence [1] du précédent [2].

Il reste enfin à examiner le sixième cas de la page 358. Or, écrivons, par exemple,

$$u \text{ ou } \operatorname{Log} u = \alpha(aU + bV) + \beta\left[cU + dV + \int f(aU + bV)\, d(aU + bV)\right]$$

et exprimons que la substitution $(U, V \mid U + \Omega, \lambda V)$ multiplie par une constante la différentielle du second membre; on obtiendra deux équations qui exigent que f se réduise à une constante sauf si l'on a $ab = 0$. Le problème se termine alors aisément et l'on trouve que $(\mathcal{S})$ coïncide avec l'un des systèmes

$$(\mathcal{S}_7)' \quad u \text{ ou } \operatorname{Log} u = \alpha U + \int f(V)\, dV, \qquad v = \beta V \qquad [\lambda f(\lambda V) = f(V)];$$

$$(\mathcal{S}_7)'' \quad u \text{ ou } \operatorname{Log} u = \alpha U; \qquad v = \beta V + \int g(U)\, dU \qquad [g(U + \Omega) = g(U)].$$

La surface F est alors l'une des sept surfaces de la page 320 et il serait aisé de former explicitement dans chaque cas les fonctions elliptiques $f(V)$ ou $g(U)$.

---

[1] *Cf.* n° 54, *ad fin.*

[2] Par exemple, si F est la première surface du n° 28, et si l'on adopte pour la représenter la notation du n° 57, complétée par $4z^3 - \gamma_2 z - \gamma_3 \equiv f(z)$, on aura un système $(\mathcal{S})$ de la forme

$$du = e^{\int \frac{\alpha}{y} d\left[\frac{x^2}{f(z)}\right]} \frac{1}{y}\, d\left[\frac{x^2}{f(z)}\right], \qquad dv = \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}.$$