P. FATOU

Substitutions analytiques et équations fonctionnelles à deux variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 41 (1924), p. 67-142
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__67_0>

SUBSTITUTIONS ANALYTIQUES

ET

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES A DEUX VARIABLES

PAR M. P. FATOU.

PREMIÈRE PARTIE.

L'ITÉRATION AU VOISINAGE D'UN POINT DOUBLE ORDINAIRE OU SINGULIER.

L'itération au voisinage d'un point double attractif ($0 < |s| < |s'| < 1$). — L'étude de l'itération des substitutions analytiques au voisinage d'un point double et des équations fonctionnelles correspondantes dans le cas de deux ou d'un plus grand nombre de variables a fait l'objet de travaux de plusieurs géomètres et non des moindres; je citerai les noms de Poincaré, Picard, Leau, Levi-Civita, Hadamard et Lattès. Pour aborder les problèmes dont il s'agit plusieurs méthodes ont été proposées; celle qui repose sur l'emploi des séries entières et des majorantes; la méthode des approximations successives de M. Picard qui apporte des simplifications à la précédente sans cependant éviter l'emploi de ces séries; enfin une méthode que j'appellerai directe et qui, la première en date, me semble aussi la plus féconde. Elle consiste à former des expressions dépendant d'une manière simple des fonctions itérées et dont les limites fournissent les solutions des équations que l'on a en vue. Dans le choix de ces expressions on pourra être guidé par des méthodes heuristiques sur lesquelles je reviendrai quelque jour; l'une d'elles consiste à chercher l'expression asymptotique des fonctions itérées, en regardant ces dernières comme des solutions d'équations aux différences finies par rapport à l'entier n, et que l'on intégrera d'une manière approchée en leur substituant les équations différentielles obtenues en remplaçant les différences finies par leurs développements en séries de Taylor limités à deux ou trois termes. Si l'on a poussé l'approximation assez loin on pourra obtenir une fonction de l'entier n et des fonctions itérées de rang n qui tende vers une limite finie et différente de zéro ou d'une constante. Cette limite sera alors une fonction des variables données qui, d'après son mode de formation, vérifiera une équation fonctionnelle facile à mettre en évidence; la solution étant obtenue par ce moyen heuristique il sera généralement facile de démontrer qu'elle existe effectivement.

Quoi qu'il en soit de ces moyens de découverte qu'un géomètre habile saura toujours imaginer, c'est la méthode directe qu'a employée M. Kœnigs pour résoudre l'équation de Schröder dans le cas d'une seule variable et d'un point double ordinaire. Lattès a montré qu'on pouvait l'appliquer aussi dans le cas de deux variables, quand les multiplicateurs n'ont pas de valeurs singulières. Mais elle continue à s'appliquer dans le cas où, les multiplicateurs prenant ces valeurs singulières, les fonctions à obtenir ont nécessairement au point double un point singulier essentiel, ou un point critique transcendant et ne sont pas susceptibles d'un mode de représentation connu d'avance et aisé à manier. Ce sont ces cas dont nous nous occuperons principalement au cours de cette étude; nous aurons toutefois à ajouter quelques remarques ou compléments aux théorèmes d'existence concernant les points doubles ordinaires, en renvoyant pour une étude d'ensemble aux mémoires des auteurs déjà cités.

Me bornant aux cas de deux variables comme je le ferai en général dans ce mémoire, je suppose que par l'emploi d'une substitution linéaire auxiliaire, la substitution donnée ait été ramenée à la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = s\,x + \varphi(x, y), \\ y_1 = s'y + \psi(x, y), \end{cases}$$

les fonctions φ et ψ régulières à l'origine étant nulles en ce point ainsi que leurs dérivées premières; ceci est possible si les racines s et s' de l'équation déterminante sont distinctes. Je suppose en outre que

$$0 < |s'| \leqq |s| < 1.$$

Dans ces conditions, on démontre facilement, et c'est ce qu'a fait Lattès dans une note parue au *Bulletin de la Société mathématique* [1], que la méthode de M. Kœnigs permet encore de résoudre l'équation fonctionnelle de Schröder relative au multiplicateur s, cette solution étant la limite pour n infini de l'expression

$$\frac{x_n}{s^n},$$

en désignant par (x_n, y_n) le $n^{\text{ième}}$ *conséquent* du point analytique (x, y); cette fonction $u(x, y)$ qui possède à l'origine un développement de la forme

$$u(x, y) = x + \ldots$$

vérifie l'équation

$$u(x_1, y_1) = s\,u(x, y). \tag{2}$$

On retrouvera aisément la démonstration en faisant voir d'abord que si x et y restent dans un domaine défini par

$$|x| \leqq \rho, \qquad |y| \leqq \rho,$$

il en sera de même des points conséquents, et qu'on aura dans ces conditions

$$|x_n| < q^n A, \qquad |y_n| < q^n A,$$

q étant un nombre positif, supérieur d'aussi peu qu'on le veut à $|s|$ et par suite < 1. On déduira de là la convergence de la série

$$u = x + \left(\frac{x_{n+1}}{s^{n+1}} - x\right) + \ldots + \left(\frac{x_1}{s} - \frac{x_n}{s^n}\right) + \ldots.$$

On aura de même

$$\lim \frac{y_n}{s'^n} = v(x, y) = y + \ldots,$$

$$v(x_1, y_1) = s'\,v(x, y), \tag{3}$$

mais seulement dans le cas où

$$|s|^2 < |s'|,$$

---

(1) *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double* (*B. S. M. F.*, t. XXXIX, 1911).

l'égalité étant exclue. Tout ceci s'applique d'ailleurs à un nombre quelconque de variables et permet de démontrer l'existence d'une solution de l'équation fonctionnelle de Schröder correspondant au plus grand (en module) des multiplicateurs, quand ceux-ci sont tous compris entre o et 1.

Revenant au cas de deux variables, on ramène l'hypothèse

$$|s'| < |s|^2$$

à la précédente en transformant la substitution donnée (1) par une substitution birationnelle auxiliaire

$$\left(\begin{array}{c|c} x & x \\ y & y + \mathrm{P}(x) \end{array}\right)$$

destinée à faire disparaître un certain nombre de termes en x seulement, de la série entière $\psi(x, y)$ de sorte que $\psi(x, y)$ contienne en facteur x^m, m étant un entier quelconque. On constate que cela est toujours possible, en prenant pour $\mathrm{P}(x)$ un polynome de la forme

$$\lambda x^2 + \lambda' x^3 + \ldots$$

pourvu qu'il n'existe entre s et s' aucune relation de la forme

$$s' = s^p \qquad (p \geqq 2).$$

On assure ainsi la convergence de la série

$$\varphi(x, y) = y + \left(\frac{y_1}{s'} - y\right) + \ldots + \left(\frac{y_{n+1}}{s'^{n+1}} - \frac{y_n}{s'^n}\right) + \ldots$$

qui représente la deuxième solution holomorphe de l'équation de Schröder :

$$\varphi(x_1, y_1) = s' \varphi(x, y).$$

Avec les anciennes variables, on aurait donc

$$\varphi(x, y) = \lim \frac{y_n - \mathrm{P}(x_n)}{s'^n}.$$

On constate d'ailleurs que $\frac{y_n}{s'^n}$ ne peut pas, dans le cas de $|s'| < |s|^2$, converger dans un domaine entourant l'origine, en considérant les premiers termes du développement de x_n et y_n dont l'expression nous sera souvent utile :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x_n &= s^n x + a s^{n-1}\frac{(s^n-1)}{s-1}x^2 + b\, s^{n-1}\frac{(s'^n-1)}{s'-1}xy + c\,\frac{(s'^{2n}-s^n)}{s'^2-s}\,y^2+\ldots,\\ y_n &= s'^n y + a'\left(\frac{s^{2n}-s'^n}{s^2-s'}\right)x^2 + b' s'^{n-1}\frac{(s^n-1)}{s-1}xy + c'\,\frac{s'^{n-1}(s'^n-1)}{s'-1}y^2+\ldots\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{y_n}{s'^n} = y + \frac{a'}{s^2-s'}\left[\left(\frac{s^2}{s'}\right)^n - 1\right]x^2+\ldots.$$

Si donc $a'\neq 0$ et $\left|\frac{s^2}{s'}\right| > 1$, le coefficient de x^2 tend vers l'infini, ce qui exclut la possibilité de convergence uniforme.

Il est intéressant, dans certaines applications, de considérer le déterminant fonctionnel J des fonctions u et v. Dans le cas où u et v sont respectivement les limites de $\frac{x_n}{s^n}$ et $\frac{y_n}{s'^n}$, on a évidemment

$$J(x, y) = \lim \frac{1}{s^n s'^n}\,\frac{D(x_n, y_n)}{D(x, y)}.$$

Je dis que cette formule subsiste dans tous les cas. En effet, si nous effectuons le changement de variables employé plus haut,

$$z = y + P(x),$$

d'où

$$z_n = y_n + P(x_n);$$

nous avons, en exprimant u et v en fonction de x et de z,

$$\frac{D(u, v)}{D(x, z)} = \lim \frac{1}{s^n s'^n}\,\frac{D(x_n, z_n)}{D(x, z)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(x, z)}\,\frac{D(x, z)}{D(x, y)} &= \lim \frac{1}{s^n s'^n}\,\frac{D(x_n, z_n)}{D(x, y)}\\ &= \lim \frac{1}{s^n s'^n}\,\frac{D(x_n, z_n)}{D(x_n, y_n)}\,\frac{D(x_n, y_n)}{D(x, y)}.\end{aligned}$$

Mais on a évidemment

$$\frac{D(x_n, z_n)}{D(x_n, y_n)} = 1,$$

donc

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \lim \frac{1}{s^n s'^n} \frac{D(x_n, y_n)}{D(x, y)}. \tag{5}$$

Si, en particulier, $\frac{D(x_1 y_1)}{D(x, y)}$ a une valeur constante, égale nécessairement à ss', on déduit de ce qui précède

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1.$$

En restant dans le cas général on vérifie immédiatement que la fonction $J(x, y)$ possède la propriété fonctionnelle exprimée par l'égalité

$$J(x_1, y_1) \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} = ss' J(x, y). \tag{6}$$

Solution générale de l'équation de Schröder. — Proposons-nous maintenant de trouver toutes les fonctions holomorphes ou méromorphes à l'origine qui sont multipliées par un facteur constant quand on effectue sur x et y la substitution donnée. Pour faire cette recherche on peut évidemment prendre pour variables les fonctions u et v elles-mêmes, car toute fonction régulière à l'origine en x et y devient une fonction régulière en u et v, et réciproquement; de même pour les fonctions méromorphes. Si $F(u, v)$ est régulière, l'identité

$$F(su, s'v) = K F(u, v) \tag{7}$$

se discute aisément par identification des coefficients, Dans tous les cas $F(u, v)$ ne peut être qu'un polynome :

$$\Sigma A u^\alpha v^\beta.$$

K ayant pour valeur $s^\alpha s'^\beta$, ce polynome se réduira à un monome s'il n'existe entre s et s' aucune relation de la forme

$$s^p = s'^q \tag{8}$$

(p et q entiers). Dans le cas contraire, si p et q sont les deux plus petits entiers positifs qui donnent lieu à cette relation, on pourra associer au terme

$$A_0 u^{\alpha_0} v^{\beta_0},$$

des termes tels que $A u^\alpha v^\beta$, en prenant

$$\begin{matrix} \alpha = \alpha_0 + \lambda p \\ \beta = \beta_0 - \lambda q \end{matrix} \qquad (p\alpha + q\beta = \text{const.}),$$

où λ désigne un entier tel que α et β soient positifs ou nuls. Si par exemple $s = s'$, on peut prendre pour $F(u, v)$ tous les polynomes homogènes, si $s = -s'$ les polynomes homogènes de degré pair; si $s^2 = s'^3$ un polynome contenant un terme en $u^4 v^5$ pourra contenir aussi des termes en $u^6 v^2$, $u^2 v^8$ et v^{11}.

Supposons maintenant que $F(u, v)$ ait une discontinuité polaire à l'origine. Il y aura un nombre fini de lignes de discontinuité de cette espèce passant en O et représentables par des équations de la forme $v = \varphi(u)$, φ ayant en O un point critique algébrique, si ce n'est un point ordinaire [1]. D'autre part l'équation fonctionnelle (7) montre que F, méromorphe autour de l'origine, est uniforme et méromorphe en tout point à distance finie; l'ensemble de ses lignes de pôles est invariant par la substitution $u_1 = su$, $v_1 = s'u$; ces lignes passent à l'origine et ne sont autres que les courbes $v = \varphi(u)$ considérées à l'instant. On sait trouver toutes les courbes invariantes par une substitution de la forme précédente [*voir* LATTÈS, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, Thèse (*Annali di Matematica*, 1906, p. 29)]. Leur équation générale est de la forme

$$v = u^{\frac{\log s'}{\log s}}\, \omega(\log u),$$

ω désignant une fonction périodique arbitraire, de période $\frac{\log s}{2 i\pi}$. Si $\frac{\log s'}{\log s}$ est incommensurable, une telle courbe ne peut avoir à l'origine qu'un point critique transcendant, en mettant à part les deux lignes $u = 0$, $v = 0$, qui sont évidemment invariantes et régulières en O. Or, les courbes $v = \varphi(u)$ étant invariantes, soit par la substitution donnée, soit par une de ses puissances, ne peuvent être, d'après ce qui précède, que l'une des lignes $u = 0$, $v = 0$, dans le cas où il n'existe entre

(1) *Voir* par exemple dans le Tome 2 du *Traité d'Analyse* de M. Picard le Chapitre relatif aux fonctions analytiques de plusieurs variables.

s et s' aucune relation de la forme (8). En multipliant $F(u, v)$ par $u^\alpha v^\beta$, α et β étant des entiers convenables, on obtient alors une fonction entière qui vérifie une équation fonctionnelle de même forme que (7), K étant remplacé par $K s^\alpha s'^\beta$, D'après le premier cas examiné, cette fonction se réduit à un monome en u et v; il en sera de même pour $F(u, v)$ dont l'expression générale est alors $A u^m v^n$, m et n entiers positifs ou négatifs; le multiplicateur $s^m s'^n$ sera toujours différent de 1.

Si au contraire il existe une relation telle que (8) entre s et s', il y a également des lignes invariantes ayant à l'origine un point critique algébrique; toutes ces lignes ont des équations de la forme

$$v^\alpha = A u^\beta \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}\right),$$

α et β entiers positifs. Donc en multipliant $F(u, v)$ par un nombre fini de monomes de la forme $Bv^\alpha - Au^\beta$, on obtiendra une fonction entière satisfaisant encore à une relation de la forme (7), c'est-à-dire un polynome d'après ce qui précède. $F(u, v)$ est donc une fraction rationnelle. Il y en a évidemment pour lesquelles le multiplicateur K est égal à l'unité, par exemple $\frac{u^p}{v^q}$.

Ainsi donc, si les deux fonctions u et v existent — ce qui a toujours lieu quand le rapport $\frac{\log s'}{\log s}$ n'est pas un entier — la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction méromorphe dans le domaine de l'origine et invariante par la substitution (1) *est que ce rapport soit commensurable.*

Cas où $s = s'$. — Nous avons laissé de côté dans ce qui précède le cas où l'équation déterminante ayant ses racines égales, la substitution donnée ne peut pas, par un changement linéaire de variables, être ramenée à la forme (1); on peut alors la ramener à la forme suivante :

$$(9) \qquad \begin{cases} x_1 = sx + hy + \varphi(x, y), \\ y_1 = sy \qquad\quad + \psi(x, y), \end{cases}$$

h pouvant être rendu aussi petit que l'on veut. On peut supposer par exemple

$$|h| < \frac{1 - |s|}{2}.$$

φ et ψ étant toujours majorées par l'expression $A(|x| + |y|)^2$, on obtient comme précédemment

$$|x_n| + |y_n| < q^n(|x| + |y|),$$

q ayant la valeur

$$|s| + |h| + A\rho$$

(si l'on suppose $|x| + |y| \leqq \rho$) et pouvant être supposé < 1. On en déduit facilement la convergence de la série

$$y + \left(\frac{y_1}{s} - y\right) + \ldots + \left(\frac{y_n}{s^n} - \frac{y_{n-1}}{s^{n-1}}\right) + \ldots,$$

dont la somme représente une fonction $v(x, y)$, régulière à l'origine et de la forme

$$y + (\quad)x^2 + \ldots,$$

qui vérifie encore l'équation fonctionnelle

$$v(x_1, y_1) = s\,v(x, y).$$

En se servant des inégalités qui servent à majorer les fonctions ψ et χ, on démontrera facilement que l'expression

$$u_n = \frac{x_n}{s^n} - nh\frac{y_n}{s^{n+1}}$$

tend vers une fonction régulière; il suffit pour cela de démontrer la convergence absolue et uniforme de la série

$$\frac{x_{n+1}}{s^{n+1}} - \frac{x_n}{s^n} - h\frac{y_n}{s^{n+1}},$$

ce qui ne présente aucune difficulté. Cette fonction limite $u(x, y)$ possède un développement de la forme

$$x + (\quad)x^2 + (\quad)xy + \ldots,$$

et vérifie l'équation fonctionnelle, obtenue également par Lattès,

$$u(x_1, y_1) = s\,u(x, y) + h\,v(x, y). \tag{10}$$

L'analogie est complète avec le cas général, puisque dans les deux cas, les deux fonctions u et v, lorsqu'on effectue sur x et y la transformation donnée, subissent la même transformation réduite à ses termes du premier degré. Remarquons que la fonction $\frac{u}{v}$, méromorphe à l'origine, s'augmente d'une constante quand on effectue sur x et y la substitution donnée :

$$\frac{u(x_1, y_1)}{v(x_1, y_1)} = \frac{u(x, y)}{v(x, y)} + \frac{h}{s}.$$

Il n'y a pas ici de fonction invariante et uniforme sans singularités essentielles.

Cas de $s' = s^p$. — Ce cas a été étudié également par Lattès dans son article déjà cité du *Bulletin de la Société mathématique*, et d'une manière entièrement correcte, bien qu'il ait indiqué postérieurement des résultats inexacts à ce sujet (¹).

Nous allons retrouver son résultat en employant une méthode un peu différente, qui utilise une transformation auxiliaire, non biuniforme, souvent utile dans ce genre de questions [*cf.* P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (*B. S. M. F.*, 1919, 1ᵉʳ mémoire, § 11)],

Nous savons qu'il existe une solution de l'équation fonctionnelle Schröder relatives au plus grand multiplicateur s' $(s' = s^p)$. On simplifie un peu l'exposition en prenant cette fonction comme variable destinée à remplacer x, et que nous continuons à appeler x pour ne pas avoir trop de notations. La substitution donnée est alors

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 = sx \\ y_1 = s'y + \psi(x, y) \end{cases} \qquad (s' = s^p,\ p > 1).$$

Nous avons déjà vu que l'on peut, en transformant cette substitution par la substitution auxiliaire

$$\left(\begin{array}{c|c} x & x \\ y & y + \mathrm{P}(x) \end{array}\right),$$

(¹) *C. R. Acad. Sc*, t. 166, 1918, p. 151. Les deux fonctions vérifiant les équations (27) ci-après, cessent en général d'exister pour $s' = s^p$, contrairement à l'affirmation contenue dans cette Note.

faire disparaître dans $\psi(x, 0)$ tous les termes de degré $< p$, mais non pas le terme en x^p. Nous supposerons que cela a été fait.

En posant alors

$$(12)\qquad \begin{cases} x^p = X, \\ x_1^p = X_1, \end{cases}$$

on déduit de (11)

$$(13)\qquad \begin{cases} X_1 = sX, \\ y_1 = s'y + aX + \chi(x, y), \end{cases}$$

a pouvant être remplacé par un nombre aussi petit que l'on veut grâce à un changement de variable de la forme $\begin{pmatrix} y & \lambda y \\ y_1 & \lambda y_1 \end{pmatrix}$.

Nous supposerons donc

$$(14)\qquad |a| < |s'|^{1-\frac{1}{p}} - |s'|,$$

ce qui est possible puisque le second membre est > 0, à cause de $|s'| < 1$. Quant à $\chi(x, y)$, il ne renferme que des termes en x^{p+1} au moins, pour $y = 0$. Comme $x = X^{\frac{1}{p}}$ [1], on a

$$(15)\qquad |\chi(x, y)| < C\left[|X|^{\frac{p+1}{p}} + |X^{\frac{1}{p}}|\,|y| + |y|^2\right].$$

pour $|X|$ et $|y| < \rho$. D'après (13) et (15) on aura, en mettant y en facteur dans les termes qui le contiennent dans l'expression de y_1,

$$|y_1| < |y|\,[|s'| + \eta] + |X|\,[|a| + \eta]$$

ou *a fortiori*

$$|y_1| < [|y| + |X|]\,[|s'| + |a| + \eta],$$

η étant aussi petit que l'on veut pour suffisamment ρ petit. Comme $|s'| + |a| < 1$ d'après (16), on peut donc faire en sorte que

$$q = |s'| + |a| + |\eta| < 1.$$

On aura alors

$$(16)\qquad |y_n| < q^n A.$$

---

(1) Nous désignons par A, B, C, ... des constantes positives qui n'ont pas besoin d'être connues avec précision. La même lettre pourra désigner quelquefois deux constantes différentes.

Démontrons maintenant que

$$(17) \qquad w_n = \frac{y_n}{s'^n} - \frac{na}{s'} X = \frac{y_n}{s'^n} - \frac{n a x^p}{s'}$$

tend vers une fonction régulière en O, c'est-à-dire d'après l'identité

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{s'^{n+1}} \chi(x_n, y_n)$$

que la série

$$\Sigma \frac{1}{s'^{n+1}} |\chi(x_n, y_n)|$$

converge uniformément. Or, d'après (15), le terme général de cette série est inférieur à

$$\frac{C}{|s'|^n}\left[|X_n|^{\frac{p+1}{p}} + |X_n|^{\frac{1}{p}}|y_n| + |y_n|^2\right].$$

En tenant compte de (15) et de la valeur $s'^n X$ de X_n, on voit que cette expression est inférieure à la somme des termes de trois progressions géométriques ayant pour raison respectivement

$$|s'|^{\frac{1}{p}}, \quad q|s'|^{-1+\frac{1}{p}}, \quad q^2|s'|^{-1}.$$

Le premier nombre est < 1, le second le sera si l'on suppose

$$q < |s'|^{\frac{p-1}{p}},$$

ce qui est possible d'après (14) en prenant η, donc ρ assez petit. Le troisième également si $q < |s'|^{\frac{1}{2}}$, inégalité vérifiée d'elle-même si la précédente l'est puisque $p \geqq 2$.

Dans ces conditions l'expression (17) tend vers $w(x, y)$ holomorphe non point en X, y [car $\chi(x, y)$ renferme en général des termes en x dont l'exposant n'est pas multiple de p], mais en x, y. L'analyse que nous venons de faire est très voisine de la précédente concernant le cas de $s = s'$, avec une complication résultant de cette remarque que X_1 et y ne sont pas holomorphes en X et y.

La fonction $w(x, y)$, comme on le vérifie aisément en partant de sa définition, vérifie l'équation fonctionnelle

$$w(x_1, y_1) - s' w(x, y) = a x^p.$$

Revenons aux variables initiales, nous obtenons en définitive, dans le cas de $s = s'^p$ $(p > 2)$, deux fonctions régulières qui, la substitution donnée étant de la forme (1), ont pour expressions :

$$u(x, y) = x + (\quad)x^2 + (\quad)xy + \ldots,$$
$$v(x, y) = y + (\quad)x^2 + (\quad)xy + \ldots,$$

et vérifient le système d'équations fonctionnelles :

$$(18)\qquad \begin{cases} u(x_1, y_1) = s\,u(x, y), \\ v(x_1, y_1) = s^p\,v(x, y) + a[u(x, y)]^p \qquad (s^p = s'). \end{cases}$$

Le système des fonctions u et v lorsqu'on effectue sur x et y la substitution donnée subit une transformation birationnelle et entière, mais non bilinéaire comme dans le cas général.

On peut démontrer que toute solution de l'équation

$$F(x_1, y_1) = K\,F(x, y),$$

où K désigne une constante, se confond avec $u(x, y)$ ou une de ses puissances, si on la suppose holomorphe ou méromorphe à l'origine. En prenant u et v comme variables indépendantes on est conduit à chercher les solutions méromorphes de l'équation

$$(19)\qquad F(su, s^p v + au^p) = K\,F(u, v).$$

C'est là une discussion tout à fait analogue à celle que nous avons faite pour traiter le même problème dans le cas de $s' \neq s^p$. Commençons par étudier l'itération de la substitution

$$u_1 = su,$$
$$v_1 = s^p v + au^p.$$

On trouve par récurrence les formules

$$(20)\qquad \begin{cases} u_n = s^n u, \\ v_n = s^{np} v + nas^{(n-1)p} u^p. \end{cases}$$

Comme $|s| < 1$, u_n et v_n tendent uniformément vers zéro dans tout domaine borné des u, v. On a inversement pour définir les antécédents d'un point les formules

$$u_{-n} = u s^{-n},$$
$$v_{-n} = v s^{-np} - n a s^{-(n+1)p} u^{+p}.$$

En écrivant la seconde ainsi

$$v_{-n} = s^{-np}(v - n a s^{-p} u^{+p}),$$

il est visible que v_{-n} tend vers l'infini avec n sauf si v et u sont nuls à la fois; de même u_{-n} tend vers l'infini sauf pour $u = 0$. En particulier les antécédents d'un petit domaine entourant l'origine et défini par exemple par

$$|u| + |v| \leqq \rho$$

sont, comme nous le savons, des domaines emboîtés les uns dans les autres, et qui finissent par comprendre un point analytique (u, v) quelconque à distance finie. On déduit de là qu'une fonction holomorphe (ou méromorphe) à l'origine et vérifiant l'équation (19) conserve le même caractère en tout point à distance finie. Remarquons enfin que

$$\lim_{n=+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n=+\infty} s^{(p-1)n} \frac{v}{u} + n a s^{(n-1)p-p} u^{p-1} = 0,$$

sauf pour $u = 0$. Toutes les courbes invariantes, sauf l'axe des v, sont donc tangentes à l'axe des u, si elles ont une tangente. Si $v = f(u)$ est l'équation d'une de ces courbes, on a

$$f(s, u) - s^p f(u) = a u^p, \tag{21}$$

équation fonctionnelle qui n'a pas de solution régulière pour $u = 0$. On trouvera aisément la solution générale de cette équation en dérivant p fois. Mais il est inutile de nous y attarder. Il nous suffit de remarquer qu'elle n'a pas non plus de solution algébroïde à l'origine, comme on le voit en remplaçant $f(u)$ par un développement de la forme

$$h u^\alpha + k u^\beta + \ldots,$$

où α, β, ... sont des nombres réels positifs. Il s'ensuit que les lignes de discontinuité polaire que peut avoir la fonction $F(u, v)$ coïncident nécessairement avec la droite $u = 0$. Par suite, en multipliant F par une puissance entière de u, on est ramené à une fonction holomorphe vérifiant une équation de même forme. Il ne doit pas être difficile de trouver par identification toutes les solutions holomorphes de l'équation (19). C'est même probablement le moyen le plus simple d'y parvenir, mais cela n'a aucun intérêt. La méthode suivante a l'avantage de s'appliquer, *mutatis mutandis*, à beaucoup d'autres équations fonctionnelles.

Remarquons d'abord que l'équation (19) implique pour toute solution entière un mode de croissance qui est nécessairement celui d'un polynome. On a en effet pour n entier, u_n et v_n étant définis par les formules (20),

$$F(u, v) = \frac{1}{K^n} F(u_n, v_n). \tag{22}$$

Donnons à u une valeur fixe u_0, différente de zéro mais d'ailleurs quelconque, puis faisons croître y indéfiniment suivant une loi quelconque, et à chaque valeur de v faisons correspondre le plus petit entier n pour lequel u_n et v_n sont compris dans un domaine borné, fixé une fois pour toutes, par exemple celui qui est défini par

$$(D_0) \qquad \begin{cases} |u_n| < |u_0|, \\ |v_n| < |u_0|. \end{cases}$$

La première condition est vérifiée d'elle-même pour $n > 0$. La seconde implique que n croît indéfiniment avec $|v|$.

Comme $(nas^{(n-1)p}u_0)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, on aura, pour n très grand,

$$|s|^{np}|v| - \varepsilon_n < |u_0| < |s|^{(n-1)p}|v| + \varepsilon_n,$$

ε étant très petit, d'où

$$(n-\theta)p = \frac{\log|v| - \log|u_0|}{\log\left|\frac{1}{s}\right|},$$

θ compris entre 0 et 1, par suite

$$n < A \log|v|.$$

Si M est le module maximum de F dans le domaine (D_0), on a d'après (22)

$$(23)\qquad |F(u_0, v)| < \left|\frac{1}{K^n}\right| M < M e^{A \log\left|\frac{1}{K}\right| \log|v|} = M|v|^B.$$

Il s'ensuit que $F(u_0, v)$ est un polynome en v; comme u_0 est arbitraire, le développement

$$F(u, v) = f_0(u) + v f_1(u) + \ldots$$

ne contient qu'un nombre limité de termes ([1]).

Donnons maintenant à v une valeur fixe v_0 et raisonnons de la même manière en faisant croître u indéfiniment et faisant correspondre à (u, v_0) le plus petit entier n pour lequel

$$(D'_0)\qquad \begin{cases} |u_n| < |v_0|, \\ |v_n| < |v_0|. \end{cases}$$

Comme on a

$$v_n = s^{np} v_0 + b n (s^n u)^p \qquad \left(b = \frac{a}{s^p}\right),$$

et que n croît indéfiniment, nous aurons si $|v_0|$ est compris entre $|v_n|$ et v_{n-1}

$$|v_0| = \varepsilon_n + |b|(n+\theta)|s|^{p(n+\theta)}|u|^p,$$

θ et ε_n ayant des significations analogues à celles de tout à l'heure. Si n vérifie cette condition on voit que $|s|^{n+\theta}|u|$ est de l'ordre $\frac{|v_0|}{n^{\frac{1}{p}}}$, donc infiniment petit; $s^n u = u_n$ est donc infiniment petit et la relation $u_n| < v_0$ est vérifiée. On aura pour cette valeur de n

$$\log|b| + \log(n+\theta) - p(n+\theta)\log\frac{1}{|s|} + p\log|u| = \log|v_0| + \varepsilon'_n.$$

Comme $\log(n+\theta)$ est négligeable devant pn, on aura

$$n < C\log|u|,$$

([1]) Car s'il existait une suite infinie de fonctions identiquement nulles,

$$f_{\alpha_1}(u),\quad f_{\alpha_2}(u),\quad \ldots,\quad f_{\alpha_p}(u)\quad \ldots,$$

leurs zéros formeraient un ensemble dénombrable, et pour u étranger à cet ensemble la série en v serait illimitée.

et comme plus haut, en appelant M' le maximum de $|F|$ dans (D'_0),

$$|F(u, v_0)| < M' e^{C \log \left|\frac{1}{K}\right| \log |u|} = M' |u|^{C'}.$$

Donc $F(u, v)$ est un polynome en u. C'est donc un polynome en u et v.

On est donc ramené à chercher les polynomes en u et v qui vérifient l'équation (19). Ici encore nous emploierons un raisonnement général qui se rattache à la théorie des groupes. Le groupe discontinu des substitutions (20) est contenu dans le groupe à deux paramètres :

$$u' = \sigma u,$$
$$v' = \sigma^p v + \tau u^p.$$

L'équation (22) exprime que l'on a pour une infinité de valeurs σ et τ une relation

$$F(u', v') \equiv F(\sigma u, \sigma^p v + \tau u^p) = H\, F(u, v),$$

H étant indépendant de u et de v. Exprimons donc que F vérifie cette relation, σ et τ étant regardés comme des inconnues. On a pour déterminer ces quantités un certain nombre de relations algébriques qui par hypothèse sont compatibles, puisqu'elles ont lieu pour

$$(24) \qquad \sigma = s^n, \qquad \tau = nb\sigma^p,$$

quel que soit l'entier n. Ces relations

$$R_1(\sigma, \tau) = 0, \quad \ldots, \quad R_q(\sigma, \tau) = 0$$

ayant une infinité de solutions communes, il faut ou bien qu'elles se réduisent toutes à des identités, ou que leurs premiers membres admettent le plus grand commun diviseur

$$P(\sigma, \tau)$$

qui égalé à zéro représente une courbe algébrique, décomposable ou non, mais contenant tous les points (24).

Cette dernière hypothèse est manifestement impossible, car en faisant tendre n vers l'infini, σ et τ tendent vers zéro ($n > 0$) et l'on a

$$\frac{\tau}{\sigma^p} = \frac{b}{\log s} \log \sigma.$$

Ces points ne peuvent donc pas appartenir à un nombre fini de courbes algébriques, car $\frac{\tau}{\sigma^p}$ serait alors de l'ordre σ^f, f ne pouvant recevoir qu'un nombre fini de valeurs, ce qui est incompatible avec l'équation précédente.

Il faut donc admettre qu'on a identiquement, quels que soient σ et τ,

$$F(\sigma u, \sigma^p v + \tau u^p) = H(\sigma, \tau) F(u, v),$$

$H(\sigma, \tau)$ étant visiblement un polynome en σ et τ.

Il en résulte bien facilement que $F(u, v)$ ne peut contenir v, car en faisant par exemple $\sigma = 1$ on aurait

$$F(u, v + \tau u^p) = H(1, \tau) F(u, v),$$

d'où, par itération,

$$F(u, v + n\tau u^p) = [H(1, \tau)]^n F(u, v),$$

par suite

$$[H(1, \tau)]^n = H(1, n\tau),$$

pour tout entier n, ce qui n'est évidemment possible, $H(1, \tau)$ étant un polynome en τ, que si c'est une constante. Mais alors $H(1, \tau)$ étant une constante absolue, $F(u, v + \tau u^p)$ ne dépend pas de τ, ce qui revient à dire que $F(u, v)$ ne dépend pas de v.

Or, les polynomes $F(u)$ tels que l'on ait

$$F(su) = F(u) \times \text{const.}$$

se réduisent évidemment à des monomes en u.

Conclusion : *toute solution de l'équation*

$$F(su, s^p v + au^p) = K F(u, v),$$

holomorphe ou méromorphe au point $(0, 0)$, *est de la forme* $A u^{\pm m}$.

Nous savons donc trouver toutes les solutions de l'équation

$$u(x_1, y_1) = u(x, y) \times \text{const.},$$

qui à l'origine sont uniformes et sans point singulier essentiel. En particulier toutes celles pour lesquelles la constante est égale à s sont identiques à un facteur constant près à celle que nous avons construite directement. La fonction u étant donnée, la solution la plus générale de l'équation

$$w(x_1, y_1) = s^p w(x, y) + a u^p(x, y)$$

sera de la forme $v(xy) + \lambda u^p$, v étant la solution particulière que nous avons formée.

En résumé, étant donnée une substitution uniforme et régulière de deux variables complexes, ayant à l'origine un point double pour lequel les deux multiplicateurs sont compris en module entre o et 1, il est toujours possible de trouver deux fonctions u et v, régulières à l'origine et ayant en ce point un déterminant fonctionnel non nul, qui jouissent de la propriété suivante : Lorsqu'on effectue sur x et y la substitution donnée, les fonctions u et v éprouvent une substitution birationnelle Σ ayant cette propriété que les transformés de tout point (u, v) à distance finie par les puissances entières et positives de Σ tendent vers zéro, uniformément dans tout domaine borné, tandis que les transformés de (u, v) par les puissances entières négatives de Σ tendent vers (∞, ∞) à moins que (u, v) ne coïncide avec l'origine (o, o). Σ est donc une substitution entière, ainsi que Σ^{-1}, mais n'est pas toujours bilinéaire.

Tel est le résultat fondamental qui découle des faits que nous avons rappelés et qui s'obtient, comme on l'a vu sans grande difficulté. Mais la difficulté augmente considérablement, quand on se place dans les cas limites où le module de l'un des multiplicateurs atteint les valeurs extrêmes o et 1.

Cas où $s' = o$. — Supposons que l'un des multiplicateurs soit nul. Il est clair que les deux fonctions u et v ne peuvent exister avec l'ensemble des propriétés qu'elles possèdent dans le cas de $ss' \neq o$. En effet x et y sont alors, au voisinage de l'origine, des fonctions uniformes de u et de v. Si nous conservons à la substitution Σ les propriétés précédentes, u et v seront des fonctions uniformes et régulières de $u\Sigma$ et $v\Sigma$, qui sont à leur tour des fonctions uniformes de x_1 et y_1 ; donc x et y seront des fonctions uniformes et régulières de x_1 et y_1 ; or si l'équation en s a une racine nulle, le déterminant fonctionnel

$\frac{D(x_1 y_1)}{D(xy)}$ étant nul pour $x=y=0$, les fonctions qui expriment (x, y) en fonction de $(x_1\, y_1)$ ont nécessairement un point critique ou un point d'indétermination à l'origine. Si donc on conserve les hypothèses faites sur l'allure de u et de v à l'origine, Σ ne pourra conserver toutes ses propriétés. Si Σ est rationnelle, elle sera en général simplement rationnelle, les fonctions $x(x_1, y_1)$ et $y(x_1, y_1)$ ayant un point critique; exemple :

$$x_1 = sx + y^2,$$
$$y_1 = xy^2;$$
$$x = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4sy_1}}{2s},$$
$$y_1 = \sqrt{\frac{y_1}{x}}.$$

Ou bien, si Σ est birationnelle, Σ^{-1} ne sera pas entière, ayant un point fondamental à l'origine, si les fonctions $x_1\,(x, y)$ et $y_1\,(x, y)$ sont indéterminées en ce point.

Ces considérations suffisent à expliquer que le problème est extrêmement complexe et demanderait une discussion assez minutieuse et des constructions analytiques moins simples que dans le cas général. On voit que si ce cas a toujours été laissé de côté, c'est qu'il est apparemment assez difficile à traiter. Je me contenterai d'étudier un cas particulier. Supposons que la courbe invariante analytique $u(x,y)=0$, qui correspond à la racine non nulle de l'équation s, et qui existe toujours comme nous l'avons vu, soit telle que les transformés de tous ses points coïncident avec l'origine. En prenant $u(x,y)$ comme variable à la place de x on aura

$$x_1 = sx,$$
$$y_1 = \psi(x, y) = x\chi(x, y).$$

Supposons maintenant qu'il y ait une deuxième courbe analytique invariante $y=\varphi(x)$. En prenant $y-\varphi(x)$ comme variable à la place de y, la transformation pourra s'écrire

$$x_1 = sx,$$
$$y_1 = xy(a + bx + cy + dx^2 + \ldots).$$

On peut supposer $a = 1$ (en prenant ax comme variable à la place de x). On a donc :

$$x_1 = sx,$$
$$y_1 = xy(1 + bx + cy + \ldots) = xy\,F(x, y).$$

En remarquant que $x_n = s^n x$, on a par suite :

$$\frac{y_n}{s^n x y_{n-1}} = F(x_{n-1}, y_{n-1}),$$
$$\frac{y_n}{s^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n} = y \prod_0^{n-1} F(x_p, y_p).$$

Le produit infini dont le terme général est $F(x_n, y_n)$ est absolument et uniformément convergent puisque $|x_n|$ et $|y_n|$ décroissent comme les termes d'une progression géométrique convergente. Il représente donc une fonction holomorphe et l'on a

$$\lim \frac{y_n}{s^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n} = v(x, y) = y + (\quad)x^2 + \ldots,$$
$$v(x_1, y_1) = x\,v(x, y).$$

On a donc ici un système de deux fonctions holomorphes u et v tel que

$$u(x_1, y_1) = s\,u(x, y),$$
$$v(x_1, y_1) = u(x, y)\,v(x, y).$$

La transformation

$$\Sigma = \begin{pmatrix} u & su \\ v & uv \end{pmatrix}$$

est birationnelle mais son inverse

$$\Sigma_{-1} = \begin{pmatrix} u & \frac{u}{s}, \\ v & s\frac{v}{u} \end{pmatrix}$$

admet un point fondamental à l'origine, comme il fallait s'y attendre.

L'itération analytique. — Considérons maintenant le cas où les deux multiplicateurs s et s' sont supérieurs à 1 en module. Ce cas se ramène immédiatement, par inversion de la substitution donnée à celui où l'on a

$$0 < |s'| \leqq |s| < 1,$$

ce qui permet de conclure à l'existence des fonctions u et v vérifiant les équations

$$(25) \qquad \begin{cases} u(x_1, y_1) = s\, u(x, y), \\ v(x_1, y_1) = s' v(x, y). \end{cases}$$

Inversement x et y sont des fonctions régulières de u et de v :

$$(26) \qquad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

vérifiant les équations fonctionnelles [1] :

$$(27) \qquad \begin{cases} f(su, s'v) = \mathrm{R}[f(u, v), g(u, v)], \\ g(su, s'v) = \mathrm{S}[f(u, v), g(u, v)], \end{cases}$$

en rappelant $\mathrm{R}(x, y)$, $\mathrm{S}(x, y)$ les seconds membres de (1). Remarquons que si la substitution (1) n'a pas ses termes de premier degré réduits à la forme canonique, on aura encore des fonctions f et g vérifiant les conditions précédentes, mais dans leur développement les termes du premier degré au lieu de se réduire à u et à v seront de la forme $\alpha u + \beta v$, $\gamma u + \delta v$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quelconques. On le vérifie aisément en faisant sur x et y une substitution linéaire, de manière à ramener R et S à la forme qu'ils ont dans (1).

Dans le cas où $s = s^p$, les équations (27) doivent être remplacées par

$$(28) \qquad \begin{cases} f(su, s'v + au^p) = \mathrm{R}[f(u, v), g(u, v)], \\ g(su, s'v + au^p) = \mathrm{S}[f(u, v), g(u, v)]. \end{cases}$$

Les formules qui précèdent permettent de définir les puissances d'ordre non entier de la substitution donnée, c'est-à-dire de renfermer le groupe discontinu formé par les puissances entières de la substitution donnée dans un groupe continu à un paramètre. Mais ici, comme dans

---

[1] *Cf.* E. PICARD et G. SIMARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (t. II, note 1).

le cas d'une seule variable, il y a à faire des réserves sur le caractère commutatif de ce groupe [voir *Sur l'itération analytique et les substitutions permutables* (*Journal de Mathématiques*, 1923)], les substitutions Σ_{-n} n'étant définies en général, même pour n entier, que dans un domaine dont les dimensions tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Si Σ est, par exemple, une substitution rationnelle, Σ_{-n} aura en général des lignes critiques tendant vers l'origine pour n infini, et des déterminations de plus en plus nombreuses se permutant autour de ces lignes. C'est seulement dans le cas des substitutions birationnelles que la considération de ce groupe a réellement de l'intérêt. Quoi qu'il en soit, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
x_\lambda &= f(s^\lambda u, s'^\lambda v) = \mathrm{R}_\lambda[f(u, v), g(u, v)] = \mathrm{R}_\lambda(x, y), \\
y_\lambda &= g(s^\lambda u, s'^\lambda v) = \mathrm{S}_\lambda[f(u, v), g(u, v)] = \mathrm{S}_\lambda(x, y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\lambda(x_{\lambda'}, y_{\lambda'}) &= \mathrm{R}_{\lambda'}(x_\lambda, y_\lambda) = \mathrm{R}_{\lambda+\lambda'}(x, y), \\
\mathrm{S}_\lambda(x_{\lambda'}, y_{\lambda'}) &= \mathrm{S}_{\lambda'}(x_\lambda, y_\lambda) = \mathrm{S}_{\lambda+\lambda'}(x, y),
\end{aligned}$$

et ces formules définissent les puissances d'ordre quelconque λ de la substitution donnée. Dans le cas où $s' = s^p$, on aura des formules analogues, qui se déduisent des équations (22) en y regardant n comme un paramètre continu.

Cas où l'on a $s = 1, |s'| < 1$. — Lorsque l'un au moins des multiplicateurs prend une valeur égale à 1 en module, la question de la recherche des domaines de convergence des substitutions itérées et de la réduction à une forme canonique devient extrêmement complexe. Une étude détaillée de ces problèmes pourrait donner lieu à plusieurs mémoires de l'importance de celui-ci, et qui, ainsi que l'a montré M. Levi-Civita, seraient intéressants au point de vue des applications à des questions de stabilité. Nous ne pouvons pas songer à développer ici cette étude comme elle le mériterait, mais seulement à traiter quelques cas et à montrer la complexité des problèmes qui se posent.

L'équation d'Abel. — Nous nous placerons d'abord dans l'hypothèse

$$s = +1, \qquad 0 < |s'| < +1,$$

et nous ferons voir qu'en général il existe une solution de l'équation fonctionnelle d'Abel, holomorphe dans un domaine dont les conséquents admettent l'origine pour point limite.

Remarquons d'abord que les formules (4) deviennent

$$x_n = x + nax^2 + b\frac{s'-1}{s'^n-1}xy + c\frac{s'^{2n}-1}{s'^2-1}y^2 + \ldots,$$

$$y_n = s'^n y + a'\frac{s'-1}{s'^n-1}x^2 + nb's'^{n-1}xy + c's'^{n-1}\frac{(s'^n-1)}{s'-1}y^2 + \ldots.$$

Si l'on suppose $a \neq 0$ on voit que le coefficient na de x^2 tend vers l'∞; ce qui prouve que x_n, quel que soit y, ne reste pas borné dans un cercle de rayon arbitrairement petit du plan des x ayant son centre en O, en admettant que les rayons de convergence de la première série ne tendent pas vers zéro; si, par exemple, x_1 et y_1 sont des fonctions rationnelles de x et de y, il faut nécessairement que x_n ne soit pas borné dans un domaine tel que

$$|x| \leqq \varepsilon, \qquad |y| \leqq \varepsilon,$$

puisque les seules singularités des x_n et y_n sont des pôles. Si x_1 et y_1 sont des polynomes en x et y, les séries étant alors toujours limitées, il faut que x_n prenne des valeurs infiniment grandes dans tout domaine tel que

$$|x| \leqq \varepsilon, \qquad |y - y_0| \leqq \varepsilon,$$

quel que soit y_0. On voit donc bien qu'en général le point $(x = 0, y = 0)$ et même la ligne $(x = 0)$ ne peuvent pas être intérieurs à un domaine de convergence uniforme des (x_n, y_n) vers $(0,0)$. Il n'y a donc lieu de chercher que des domaines ayant l'origine pour point frontière.

Je vais maintenant simplifier les équations

$$(29) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \varphi(x, y), \\ y_1 = s'x + \psi(x, y), \end{cases}$$

en utilisant un théorème de Poincaré, démontré au début de son mémoire (*J. M., Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* 4^e série, 1890), et d'après lequel une transformation ponctuelle admet en général une ligne analytique invariante passant par un point double, si l'un au moins des multiplicateurs en ce point a un module différent de l'unité. Je vais indiquer succinctement, pour le cas particulier dont j'ai besoin maintenant, la démonstration de ce théorème qui est alors assez simple. Je vais considérer la transformation inverse de celle que je viens d'écrire, afin d'avoir un multiplicateur > 1, en module, et j'écrirai

$$x_{-1} = Sx + M(x, y),$$
$$y_{-1} = S'y + N(x, y),$$

avec

$$S = \frac{1}{s} = 1 \qquad \text{(dans le cas actuel)},$$

$$S' = \frac{1}{s'}, \qquad |S'| > 1,$$

mais je peux laisser S indéterminé. Il faut montrer qu'il existe des fonctions $\theta(u)$, $\lambda(u)$, régulières pour $u = 0$, nulles en ce point qui vérifient les équations fonctionnelles

$$\theta(S'u) = S\,\theta(u) + M[\theta(u), \lambda(u)],$$
$$\lambda(S'u) = S'\lambda(u) + N[\theta(u), \lambda(u)].$$

Il suffit d'écrire

$$\theta(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots,$$
$$\lambda(u) = b_1 u + b_2 u^2 + \ldots,$$
$$M(x, y) = \Sigma A_{ik} x^i y^k$$
$$N(x, y) = \Sigma B_{ik} x^i y^k \qquad (i + k \geqq 2)$$

et d'identifier, ce qui donne en supposant $s - s' \neq 0$ et $s'^n - s \neq 0$:

$$a_1 = 0, \qquad b_1 \text{ arbitraire.}$$

Je prends $a_1 = 1$; j'ai ensuite pour $n > 1$

$$a_n(S'^n - S) = \Phi(a_1 \ldots a_{n-1}, b_1 \ldots b_{n-1}, A_{ik}, B_{jl}),$$
$$b_n(S'^n - S') = \Psi(a_1 \ldots a_{n-1}, b_1 \ldots b_{n-1}, A_{ik}, B_{jl}),$$

Φ et Ψ étant des polynomes à coefficients positifs. J'aurai de proche en proche a_2, b_2, a_3, b_3, ... exprimés en fonction entière à coefficients positifs des quantités suivantes : 1° certains des coefficients A et B des séries M et N; 2° les rapports

$$\frac{1}{S'^2-S},\quad \frac{1}{S'^3-S},\quad \ldots,\quad \frac{1}{S'^n-S},\quad \frac{1}{S'^2-S'},\quad \frac{1}{S'^3-S'},\quad \ldots,\quad \frac{1}{S'^n-S'}.$$

Donc les coefficients a_n et b_n seront augmentés en valeur absolue si d'une part on remplace les A et B par leurs valeurs absolues, ce qui conserve des rayons de convergence finis aux séries M et N; si d'autre part on remplace S et S' par un nombre Σ réel et > 1, tel que

$$\Sigma^n - \Sigma < |S'^n - S'|,$$
$$\Sigma^n - \Sigma < |S'^n - S|$$

pour tout $n \geqq 2$. Un tel nombre Σ est facile à trouver. Prenons

$$1 < \Sigma < \frac{1+|S'|}{2}.$$

Nous aurons pour tout n

$$\Sigma^n - \Sigma = \Sigma^{n-1}(\Sigma - 1) < \left(\frac{|S'|-1}{2}\right)\Sigma^{n-1} < \left(\frac{|S'|-1}{2}\right)|S'^{n-1}| = \frac{|S'^n|-|S'|}{2}.$$

La première condition est donc vérifiée; la seconde le sera dès qu'on aura

$$\frac{|S'^n|-|S'|}{2} < |S'^n| - |S| > 0,$$

c'est-à-dire

$$|S'^n| > |S|,$$
$$|S'^n| > 2|S| - S',$$

donc à partir d'une valeur n_0 de n qui ne dépend que de $|s|$ et $|s'|$. Pour $n \leqq n_0$, les différences $|s'^n - s|$ supposées non nulles ont un minimum $\mu > 0$; on prendra Σ assez voisin de 1 pour que

$$\Sigma^{n_0} - \Sigma < \mu,$$

ce qui est possible.

Ceci fait, les nouveaux coefficients obtenus à la place des a_n, b_n sont ceux des séries entières résolvant des équations fonctionnelles de même forme que celles dont on est parti, s et s' étant remplacés tous deux par Σ, et nous sommes alors dans un cas où nous pouvons affirmer l'existence de ces solutions, les deux multiplicateurs étant égaux et > 1 ; ce sont les fonctions

$$f(0, v) \quad \text{et} \quad g(0, v)$$

obtenues en annulant un des arguments dans les fonctions de deux variables qui vérifient les équations (27). Les séries qui les représentent sont donc convergentes, il en est de même des séries $\theta(u)$ et $\lambda(u)$. On a

$$x = \theta(u) = a_2 u^2 + \ldots,$$
$$y = u + b_2 u^2 + \ldots$$

qui représente une courbe analytique invariante tangente à l'axe des y :

$$x = a_2 y^2 + \ldots = P(y).$$

Après cette digression sur les courbes invariantes de Poincaré, je reviens aux équations (29) que je transforme de manière que la courbe invariante

$$x = P(y)$$

devienne $x = 0$, c'est-à-dire que je prends $x - P(y)$ comme variable à la place de x, $x_1 - P(y_1)$ devant remplacer x_1. J'obtiens des équations de même forme mais dans lesquelles x_1 est identiquement nul pour $x = 0$,

$$x_1 = x[1 + F(x, y)],$$
$$y_1 = s'y + \psi(x, y),$$

F commençant par des termes du premier degré.

Je pose maintenant

$$x = \frac{1}{X}, \qquad x_1 = \frac{1}{X_1},$$

et puisque $\frac{1}{1+F}$ est holomorphe pour $x = y = 0$, il vient pour la première des équations de transformation

$$X_1 = X + a + Xy(b + \ldots) + \left(\frac{c}{X} + dy + \ldots\right), \tag{30}$$

la première parenthèse ne contenant que des termes en y.

Pour $|y|$ et $\frac{1}{|X|}$ inférieurs à ρ, les termes de la deuxième parenthèse ont une somme inférieure en module à

$$A\left(\frac{1}{|X|}+|y|\right)<2A\rho,$$

donc aussi petite que l'on veut pour ρ convenable. Je supposerai essentiellement dans ce qui suit $a\neq 0$ et je peux rendre ce nombre réel et positif par le changement de X en $Xe^{i\theta}$. J'observe que (30) peut être résolue en X, au moyen d'une série en y et X_1 de même forme que son second membre, avec X_1 au lieu de X, $-a$ au lieu de a; cette série peut être supposée encore convergente pour $|y|$ et $\left|\frac{1}{X_1}\right|<\rho$.

Je vais maintenant restreindre davantage le domaine de (X, y) en imitant le procédé employé dans la question analogue concernant les substitutions à une seule variable [*Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919, § 8-13, et 1920, § 72-73)].

Je prends un point P sur la partie positive de l'axe réel et mène par ce point les deux demi-droites symétriques faisant avec cet axe les angles $\pi-\omega$ et $\omega-\pi$, ω compris entre 0 et π, mais arbitrairement petit. Ces deux demi-droites divisent le plan en deux régions, et je place X dans la région de droite qui comprend les points à l'infini sur l'axe réel positif; P est supposé assez éloigné pour que cette région soit extérieure au cercle $|X|=\frac{1}{\rho}$. Pour que X_1 soit encore dans la même région il suffira que l'on ait

$$\eta<\frac{4}{a\sin\omega},$$

$$|\mu X y|<\frac{a\sin\omega}{4\mu},$$

η module maximum de la deuxième série entre parenthèses dans (30) et μ celui de la première; ou si l'on veut

$$\rho<\frac{a}{8A}\sin\omega,$$

$$|Xy|<\frac{a\sin\omega}{4\mu}=\lambda,$$

en supposant $\mu\neq 0$. Dans ces conditions X_1 est non seulement dans la région initiale, mais encore dans cette région déplacée de $\frac{a}{2}$ vers la droite par translation parallèle à l'axe réel : tout cela résulte de considérations géométriques extrêmement simples. On peut alors écrire

$$X_1 > p + \frac{a}{2}\sin\omega,$$

p étant la distance à l'origine des droites qui limitent la région considérée.

Nous devons rechercher maintenant si y_1 satisfait encore aux mêmes conditions que y. On a

$$y_1 = s'y + \psi(x, y)$$

avec

$$|\psi(x, y)| < B[|x| + |y|]^2,$$

d'où

$$|y_1| < |y|[|s'| + 2B|x| + B|y|] + B|x|^2,$$
$$|y_1| < \rho[s'| + 4B\rho],$$

on aura encore $|y_1| < \rho$, si

$$\rho < \frac{1 - |s'|}{4B}.$$

Mais si $b \neq 0$, il faut encore que

$$|X_1 y_1| < \lambda.$$

Or des inégalités

$$|X_1| < |X| + a + \frac{a \sin\omega}{2} = |X| + h$$

et

$$(31) \qquad |y_1| < |s'||y| + B[|x| + |y|]^2,$$

on déduit

$$(32) \qquad |X_1 y_1| < |s'||Xy| + B\rho|Xy| + \rho(h|s'| + 3B + 4h\rho).$$

Comme $|s'| < 1$, il est clair que cette dernière expression sera inférieure à $|Xy|$ pour ρ assez petit.

Dans ces conditions, les points X, X_1, X_2, ... restent dans le domaine initial et l'on a par récurrence

$$(33) \qquad |X_n| > p + \frac{na}{2}\sin\omega,$$

$$(34) \qquad |X_n y_n| < \lambda;$$

$\frac{1}{X_n}$ et y_n tendent uniformément vers zéro comme $\frac{1}{n}$ au moins.

Si nous revenons à la variable x, nous obtenons ce qui suit : traçons dans le plan de cette variable deux cercles non tangents passant par l'origine et symétriques par rapport à l'axe réel, de rayons suffisamment petits; soit Δ le domaine des points intérieurs à l'un de ces deux cercles; à tout point x de Δ, faisons correspondre dans le plan de la variable y le cercle

$$|y| \leqq \lambda |x|.$$

L'ensemble des points (x, y) ainsi obtenus constitue un domaine connexe D dans lequel (x_n, y_n) tendent uniformément (frontière comprise) vers (o, o) (¹).

Précisons la loi de décroissance des (x_n, y_n), en procédant par étapes. Montrons d'abord que

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right| = |X_n y_n| = \mu_n$$

tend uniformément vers zéro. D'après (32), (33) et (34) on obtient

$$\mu_2 < |s'|\mu_1 + \frac{C}{1},$$

$$\mu_3 < |s'|\mu_2 + \frac{C}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\mu_{n+1} < |s'|\mu_n + \frac{C}{n};$$

d'où

$$\mu_{n+1} < |s'|^n\mu_1 + C|s'|^{n-1}\left[1 + \frac{1}{2|s'|} + \dots + \frac{1}{n|s'|^{n-1}}\right],$$

$$\mu_{n+1} < \frac{\mu_1}{Q^n} + \frac{C}{Q^n}\left[Q + \frac{Q^2}{2} + \dots + \frac{Q^n}{n}\right], \qquad Q = \frac{1}{|s'|}.$$

(¹) Nous désignerons par D′ et Δ′ les domaines correspondant à D et Δ quand on emploie la variable X au lieu de x.

Évaluons cette dernière somme

$$Q + \frac{Q^2}{2} + \ldots + \frac{Q^n}{n} = \int_0^Q \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}\, dz = \int_0^{Q'} + \int_{Q'}^{Q},$$

en prenant Q' entre 1 et Q, soit $= \frac{1+Q}{2}$.

La première intégrale est plus petite que $\frac{Q'^{n+1}}{Q'-1}$.

La seconde est inférieure (théorème de la moyenne) à

$$\frac{1}{Q'-1}\,\frac{Q^{n+1}}{n+1}.$$

On a donc

$$\mu_{n+1} < \frac{\mu_1}{Q^n} + \frac{C}{Q^n}\left[Q'^{n+1} + \frac{Q^{n+1}}{n+1}\right]\frac{1}{Q'-1}.$$

On déduit de là, en employant le symbole de M. Landau

(35) $$\mu_{n+1} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et la relation (30), en y remplaçant (X, y) par (X_n, y_n), donne ensuite

$$X_{n+1} = X_n + a + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$X_n = X + na + O\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = X + na + O(\log n).$$

On aura donc

(36) $$|X_n| > na'$$

uniformément dans D′ et

$$|X_n| < na''$$

dans une partie bornée de ce domaine, avec

$$\frac{X_n}{na} \sim 1.$$

Cherchons maintenant la valeur asymptotique de y_n. Explicitons l'expression de y_1

$$y_1 = s'y + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \ldots.$$

Soit $\alpha \neq 0$. Comme $\frac{y_n}{x_n}$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de x_n, nous sommes conduits à poser

$$y_n = (l + u_n)x_n^2,$$

l, constante que nous déterminerons ensuite.

On a successivement

$$y_{n+1} = s'y_n + \alpha x_n^2 + \beta x_n y_n + \gamma y_n^2 + O\big((|x_n| + |y_n|)^3\big),$$

puis, d'après (33) et (34),

$$y_{n+1} = s'y_n + \alpha x_n^2 + O(|x_n|^3),$$

ce qui s'écrit

$$(l + u_{n+1})x_{n+1}^2 = s'(l + u_n)x_n^2 + \alpha x_n^2 + O(|x_n|^3),$$

$$l + u_{n+1} = s'(l + u_n)\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^2 O(|x_n|).$$

Or, on a

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{X_{n+1}}{X_n} = 1 + \frac{a}{X_n} + by_n + \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'après (35) et 36), et ceci uniformément dans Δ', frontière comprise. La relation entre u_{n+1} et u_n devient ainsi

$$l + u_{n+1} = s'(l + u_n)\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons

$$l = s'l + \alpha,$$

$$l = \frac{\alpha}{1 - s'},$$

il vient

$$u_{n+1} = s'u_n\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme le produit

$$|s'|\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

est à partir d'une certaine valeur de n, inférieur à un nombre fixe plus petit que 1, on aura

$$|u_{n+1}| < ru_n + \frac{D}{n} \qquad (r < 1),$$

et le calcul fait plus haut pour les μ_n donne encore

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc

$$y_n = l x_n^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) O(|x_n|^2) = l x_n^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Si l'on avait $\alpha = 0$, on trouverait

$$y_n = l' x_n^3 + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad \text{(en général)},$$

et ainsi de suite.

Nous allons préciser de nouveau la valeur asymptotique de X_n grâce à celle de y_n que nous venons d'obtenir.

On obtient tout d'abord

$$X_{n+1} = X_n + a + \frac{k}{X_n} + O\left(\frac{1}{|X_n|^2}\right) \qquad (k = bc + l).$$

Je pose

$$X_n = na + \frac{k}{a} \log n + \xi_n.$$

Je vais prouver que ξ_n tend vers une fonction holomorphe dans O'. La démonstration est la même que dans le cas d'une seule variable. En remplaçant X_n par l'expression précédente dans la relation de récurrence écrite à l'instant, on a

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} - \xi_n &= \frac{k}{X_n} - \frac{k}{a} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{|X_n|^2}\right)\\ &= \frac{k}{X_n} - \frac{k}{na} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Je dis que la série dont le terme général est $\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{na}\right)$ converge uniformément dans toute partie bornée de D'.

On a en effet

$$\begin{aligned}X_n &= X + na + O(\log n)\\ &= na + O(\log n),\end{aligned}$$

si $|X|$ est borné.

Par suite

$$\frac{1}{X_n} - \frac{1}{na} = \frac{na - X_n}{naX_n} = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right),$$

$$\xi_{n+1} - \xi_n = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

Comme $\frac{\log n}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, la série

$$\xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) + (\zeta_3 - \xi_2) + \ldots$$

converge uniformément et représente donc une fonction holomorphe dans D″; appelons-la $U(X, y)$. On a

$$U(X, y) = \lim_{n=\infty}\left(X_n - na - \frac{k}{a}\log n\right),$$

$$U(X_1, y_1) = \lim_{n=\infty}\left(X_{n+1} - na - \frac{k}{a}\log n\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[X_n - (n-1)a - \frac{k}{a}\log(n-1)\right];$$

$$U(X_1, y_1) = U(X, y) + a + \lim \frac{k}{a}\log\frac{n-1}{n}$$

$$= U(X, y) + a.$$

Nous obtenons donc une solution, holomorphe dans D′, de l'équation fonctionnelle d'Abel; nous allons maintenant rechercher comment se comporte cette fonction quand X s'éloigne à l'infini dans Δ′, y satisfaisant toujours à la condition

$$|Xy| < \lambda.$$

Pour cela il nous suffit de remarquer que U est la somme d'une série convergente dont chaque terme a été décomposé en plusieurs autres; les termes partiels qui forment une série uniformément convergente dans le domaine D′ tout entier donnent comme somme une fonction bornée et continue dans ce domaine y compris les points à l'infini et il n'y a pas lieu d'en tenir compte. U se comporte donc à l'infini comme

$$\xi_1 + \sum_1^\infty k\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{na}\right).$$

Le terme

$$\xi_1 = X_1 - a = X + bXy + \ldots,$$

se comporte au point $(\infty, 0)$ comme une fraction rationnelle, mais par suite des conditions imposées à X et y il se comporte dans D′ comme le seul terme X. Considérons maintenant le terme général de la série

$$\sum_1^\infty k\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{na}\right),$$

et remplaçons-y X_n par la valeur approchée $X + na$; la différence des deux expressions obtenues représentera une fonction continue et bornée à l'infini dans D′. En effet, la série

$$\sum\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X+na}\right) = \sum \frac{X + na - X_n}{X_n(X+na)}$$

converge uniformément dans D′ puisque, d'après une relation déjà obtenue, on a

$$X + na - X_n = O(\log n);$$

et que d'autre part, X restant dans l'angle Δ' défini plus haut, on a toujours, comme le montre une figure,

$$|X + na| > na''.$$

On a donc, dans l'expression

$$\frac{X + na - X_n}{X_n(X+na)} = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right),$$

le terme général d'une série absolument et uniformément convergente dans le domaine total, de sorte que finalement U se comporte à l'infini comme

$$X + \sum_1^\infty k\left(\frac{1}{X+na} - \frac{1}{na}\right).$$

Je n'insisterai pas sur l'évaluation approchée de cette dernière série qu'on trouvera dans mon mémoire déjà cité du *Journal de Mathématiques,* et qui est d'ailleurs connue, cette série représentant, à un changement insignifiant près, la dérivée logarithmique de la fonction Γ. On trouve ainsi que (X, y) restant dans le domaine considéré, on a

$$(37)\qquad U(X, y) = X - \frac{k}{a}\log X + \text{quantité bornée}\quad (^1).$$

Si nous posons $t = Xy = \frac{y}{x}$, et que nous donnions à t une valeur fixe, plus petite en module que λ, la fonction

$$U(X, y) = U\left(X, \frac{t}{X}\right)$$

devient ainsi une fonction de X qui, on le verra aisément, ne prend jamais deux fois la même valeur dans Δ', étant la limite uniformément atteinte de fonctions univalentes dans Δ'. Les valeurs de U d'après l'expression asymptotique (37) couvrent une région limitée par deux courbes s'éloignant à l'infini avec les mêmes directions asymptotiques que les deux droites limitant Δ'. Si l'on fait décrire à t le domaine $|t| \leqq \lambda$, l'ensemble des domaines correspondant aux diverses valeurs de t ont en commun un domaine de même forme, puisque les termes complémentaires à ajouter à $\left(X - \frac{K}{a}\log X\right)$ pour obtenir l'expression de U sont uniformément bornés pour X situé dans Δ' et $|t| \leqq \lambda$.

On voit que l'expression asymptotique de U est, dans ces conditions, indépendante de t, si l'on néglige les quantités bornées.

Il y aurait lieu maintenant de rechercher des domaines de convergence plus étendus, ce à quoi l'on parvient en construisant les domaines antécédents successifs de D. Il faudrait démontrer, en outre, que si les domaines conséquents d'un domaine élémentaire entourant le point analytique P tendent vers l'origine, ces domaines finissent par devenir intérieurs au domaine D que nous avons construit. Il serait intéressant notamment de reconnaître si, restant dans un tel domaine, on peut faire tendre x vers zéro, y restant fixe, ou si au contraire une condition telle que $|y| < \lambda |x|$ est nécessairement remplie. Je laisserai sans réponse satisfaisante ces différentes questions, me contentant des considérations suivantes qui, développées, pourront permettre à quelqu'un de plus habile que moi d'y répondre plus complètement.

(1) Le terme complémentaire est même continu pour X infini dans Δ'.

Je suppose que x_n et y_n tendent vers zéro, x_n n'étant jamais nul, c'est-à-dire X_n jamais infini. Comme on a

$$\frac{X_1}{X} = \frac{1}{1+F(x,y)} \qquad [F(x,y) = -ax - by + \ldots],$$

il s'ensuit que le produit infini

$$\prod_0^\infty \frac{1}{1+F(x_n, y_n)}$$

est divergent. Par suite on ne peut pas avoir constamment

$$|x_n|^2 < \varepsilon |y_n|$$

si ε est un nombre positif assez petit. Nous avons en effet

$$y_{n+1} = y_n[s' + \eta_n] + \mathfrak{B} x_n^2,$$

η_n tendant vers zéro avec x_n et y_n et $\mathfrak{B}$ étant une quantité bornée. Si l'inégalité précédente avait lieu, on en déduirait

$$|y_{n+1}| < |y_n|[|s'| + |\eta_n| + \varepsilon|\mathfrak{B}|].$$

Par suite pour $n > p$

$$|y_{n+1}| < r y_n,$$

r étant compris entre $|s'|$ et 1, si ε est assez petit. On en déduit

$$|y_n| < A r^{n-p} y,$$
$$|x_n| < (\varepsilon A |y|)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n-p}{2}}.$$

Le produit infini considéré serait donc convergent puisque

$$F(x_n, y_n) = O(|x_n| + y_n|).$$

On a donc une infinité de fois

$$|y_n| < \frac{1}{\varepsilon}|x_n|^2,$$

c'est-à-dire $X_n y_n$ de l'ordre $\frac{1}{X_n}$ au plus. Mais il faudrait prouver pour pouvoir conclure que, pour ces valeurs de n, X_n appartient bien à un domaine tel que Δ', que par exemple sa partie réelle est positive et très grande. Or, cela ne serait certain que si $|X_n y_n|$ restait *constam-*

ment inférieur à un nombre suffisamment petit, car on aurait alors, d'après (30),

$$X_{n+1} = X_n + a + \varepsilon_n,$$

ε_n restant par exemple $< \frac{a}{2}$ en module, à partir de $n = p$, et alors

$$\mathcal{R}(X_{n+1}) > \mathcal{R}(X_n) + \frac{a}{2},$$

$$\mathcal{R}(X_{n+p}) > \mathcal{R}(X_n) + \frac{na}{2},$$

et la partie réelle de X_n augmentant indéfiniment par valeurs positives, X_n finirait par tomber dans un domaine Δ'. Il y a donc une lacune à combler pour arriver au résultat probable que les seuls domaines de convergence ($x = 0$ excepté) sont ceux que nous avons obtenus [1].

Étude de quelques cas particuliers. — Dans le cas où $b = 0$, on peut remplacer la condition

$$|Xy| < \mu$$

par la condition moins restrictive

$$|Xy^2| < \mu.$$

Cette condition sera encore remplie pour le point $(X_1 y_1)$. On peut écrire en effet

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad y[s' + O(|x| + |y|)] + O(|x|^2), \\ y_1^2 &= \quad y^2[s'^2 + O(|x| + |y|)] + O(|x|^4), \\ X_1 y_1^2 &= Xy^2[s'^2 + O(|x| + |y|)\ \frac{X_1}{X} + O(|x|^3)\frac{X_1}{X}. \end{aligned}$$

Or si x et y sont très petits, $\frac{X_1}{X}$ est très voisin de 1, et inférieur à $1 + \varepsilon$; on aura donc

$$|X_1 y_1^2| < \lambda[|s'^2| + O(|x| + |y|)](1 + \varepsilon) + O(|x|^3).$$

---

[1] Dans tous les cas les courbes invariantes autres que $x = 0$ sont tangentes à Ox si elles ont une tangente, car $\frac{y_n}{x_n}$ a zéro comme limite d'indétermination.

Comme $|s'^2| < 1$ et qu'on peut prendre $1 + \varepsilon < \frac{1}{|s'^2|}$, on aura encore bien

$$|X_1 y_1^2| < \lambda,$$

si $|x|$ et $|y|$, donc si ρ sont convenablement choisis. Les conséquents de (X, y) restent dans le domaine initial, X_n tend toujours vers l'infini comme $a\,n$, donc y_n tend aussi vers zéro puisque

$$|X_n y_n^2| < \lambda.$$

Plus généralement si le coefficient de Xy dans (30) commence par un terme en y^{p-1}, on pourra assujettir y à la condition

$$|X y^p| < \lambda.$$

Si en particulier ce coefficient, fonction de y, est identiquement nul on pourra supprimer toute restriction relative à y, autre que

$$|y| \leqq \rho;$$

nous avons déjà vérifié en effet que si ρ est assez petit, on a encore $|y_1| < \rho$ et X_1 dans Δ'.

Toutes les conclusions, dans ces différents cas, concernant les valeurs asymptotiques de X_n, y_n et la fonction d'Abel subsistent également, mais nous devons modifier légèrement notre analyse, parce que nous n'avons plus le droit d'écrire

$$|y_n| < \lambda |x_n|.$$

Mais y_n n'en reste pas moins, ce qui est le fait essentiel, de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. On a en effet d'après ce qui précède

$$|y_1| < q|y| + B|x|^2 \qquad (|s'| < q < 1).$$

Je dis que pour A convenablement choisi, on aura

(38) $$|y_n| < q^{n-1}|y| + A|x_n|^2.$$

Ceci a lieu pour $n = 0$; si c'est vrai pour n c'est vrai pour $n + 1$. Car

$$|y_{n+1}| < q|y_n| + B|x_n|^2 < q^n|y| + Aq|x_{n-1}|^2 + B|x_n|^2.$$

On aura bien

$$|y_{n+1}| < q|y_n| + A|x_n|^2,$$

si

$$Aq|x_{n-1}|^2 + B|x_n|^2 < A|x_n|^2.$$

Or $\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{X_n}{X_{n-1}}$ tend uniformément vers 1, dans ces différents cas, puisqu'il est prouvé que X_n tend uniformément vers zéro ainsi que $X_n g(y_n)$ et qu'on a

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = 1 + \frac{a}{X_n} + g(y_n) + \frac{c}{X_n^2} + \ldots.$$

Soit donc

$$|x_{n-1}^2| < |x_n^2|(1+\varepsilon).$$

On veut avoir

$$Aq(1+\varepsilon) + B < A,$$

$$A > \frac{B}{1 - q(1+\varepsilon)} > 0.$$

Comme on a $q < 1$, on peut supposer

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{q}},$$

$$A < \frac{B}{1 - \sqrt{q}}.$$

Avec ce choix de A, (38) a toujours lieu. On a donc également

$$|y_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$O(|x_n| + |y_n|) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$X_n = X + na + O(\log n).$$

Les expressions asymptotiques trouvées ensuite pour X_n demeurent également, et l'on a encore dans le domaine étendu la fonction d'Abel et son expression asymptotique

$$U(X, y) = X - \frac{k}{a}\log X + \theta(X, y),$$

θ continue et bornée pour X infini dans Δ'.

Si l'on est dans le cas où la fonction appelée tout à l'heure $g(y)$ est identiquement nulle, autrement dit si l'on a

$$x_1 = \frac{x}{1 + x\,P(x, y)}, \tag{39}$$

la fonction $\theta(X, y)$ peut tendre vers une fonction de y qui ne soit pas une constante comme dans le cas général, quand X tend vers l'infini; car on peut dans ces conditions laisser y en un point quelconque du cercle $|y| \leqq \rho$, tandis qu'en général y tend vers zéro avec $\frac{1}{X}$ dans D'. La droite $x = 0$, ou plus généralement la ligne invariante analytique de Poincaré est alors ligne frontière de notre domaine, ligne singulière en général essentielle de la fonction d'Abel. On est certain, en outre, qu'il n'y a pas d'autres domaines de convergence que les antécédents de D.

On peut remarquer du reste que le cas où x_1 a la forme (39) n'est pas aussi particulier qu'il semble d'abord. Un artifice simple y ramène le cas général. Il suffit de poser

$$\begin{aligned} y &= z\,x + l x^2 \\ y_1 &= z_1 x_1 + l x_1^2 \end{aligned} \qquad l = \frac{\alpha}{1 - s'}$$

pour obtenir ce résultat. On aura

$$z_1 x_1 + l x_1^2 = s'(zx + lx^2) + \alpha x^2 + \beta x(zx + lx^2) + \ldots,$$

$$x_1 = x[1 + F(x, y)] = \frac{x}{1 + ax + by + \ldots} = \frac{x}{1 + ax + b(zx + lx^2) + \ldots},$$

et après simplifications

$$z_1 = s'z + l(\alpha + \beta)x^2 + \ldots,$$

$$x_1 = \frac{x}{1 + x[a + bz + \ldots]},$$

x_1 a bien la forme (39), et z_n, x_n tendent vers zéro pour

$$|z| \leqq \rho, \qquad |x| \leqq \rho,$$

et x situé en outre à l'intérieur du domaine Δ que nous connaissons. Le domaine correspondant de l'espace (x, y) sera défini par les mêmes conditions pour x, et

$$|y - lx^2| < \rho |x|.$$

La fonction d'Abel $w(x, z)$ devient

$$w\left(x, \frac{y}{x} + l\right) = u(x, y) = u(x_1, y_1) - a,$$

que nous avons construite directement, mais nous voyons bien que $x = 0$ n'est pas forcément une ligne singulière pour $u(x, y)$ puisque la condition

$$|y - lx^2| < \rho |x|$$

ne permet de s'approcher que du seul point $(0, 0)$ en restant dans le domaine considéré.

L'artifice que nous venons d'employer aurait permis d'abréger un peu ce qui précède, mais il y a un certain intérêt à traiter la question directement, car nous trouverons des cas analogues où l'on ne peut pas l'employer.

Il faudrait maintenant trouver une deuxième fonction $v(x, y)$ telle que le système des deux fonctions u et v éprouve une substitution bilinéaire ou tout au moins birationnelle quand on effectue sur x et y la transformation donnée. Je n'ai pas réussi jusqu'à présent à former une pareille fonction dans le cas général. Je traiterai donc simplement un cas particulier, celui où il existe une deuxième courbe analytique invariante, nécessairement tangente à l'axe des x, et qu'on peut par une transformation évidente supposer confondue avec : $y = 0$. Les équations de la substitution donnée sont alors

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x(1 - ax - by - \ldots), \\ y_1 &= s'y(1 - \alpha x - \beta y + \ldots). \end{aligned} \right.$$

Le point (x, y) restant dans le domaine D, on peut trouver un facteur de convergence $\varphi(n)$ tel que

$$\frac{y_n}{s'^n \varphi(n)}$$

tende vers une fonction limite holomorphe dans D. Il suffit pour cela que le produit infini

$$\frac{y}{\varphi(0)}\,\frac{y_1\,\varphi(0)}{s'y\,\varphi(1)}\cdots\frac{y_{n+1}\,\varphi(n)}{s'y_n\,\varphi(n+1)}\cdots$$

soit uniformément convergent; en posant

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=\psi(n),$$

on peut l'écrire

$$\frac{y}{\varphi(0)}\prod_0^\infty(1-\alpha x_n-\beta y_n+\gamma x_n^2+\ldots)\,\psi(n).$$

Le logarithme du terme général s'écrit

$$\log\psi(n)+\alpha x_n+w_n,$$

w_n désignant une série entière en x_n, y_n, dont tous les termes contiennent en facteur y_n ou x_n^2, et sont par suite de l'ordre de $\frac{1}{n_2}$ au plus; w_n étant d'ailleurs une fonction de x et de y holomorphe autour du point (0, 0), il est visible que, le point (x, y) restant dans D, la série

$$\Sigma w_n$$

converge absolument et uniformément dans ce domaine *fermé* et représente une fonction analytique, continue et bornée pour x tendant vers zéro. D'autre part, X_n étant de l'ordre de $n\,a$, la série

$$\Sigma[\alpha x_n+\log\psi(n)]$$

sera convergente si l'on prend

$$\log\psi(n)=-\frac{\alpha}{na}\cdot$$

Elle devient en effet

$$\alpha\sum\left(\frac{1}{X_n}-\frac{1}{na}\right)$$

qui, comme nous l'avons déjà démontré, représente une fonction holomorphe dans D', étant absolument et uniformément convergente dans toute partie bornée de ce domaine. De plus elle se réduit à

$$\alpha\sum\left(\frac{1}{X+na}-\frac{1}{na}\right),$$

en négligeant encore des fonctions continues et bornées à l'infini, ou plus simplement à

$$-\frac{\alpha}{a}\log X.$$

Telle est donc l'expression asymptotique de la fonction

$$\log\left[\frac{v(x, y)\,\varphi(o)}{y}\right],$$

$v(x, y)$ étant représentée par le produit infini qui précède. On peut prendre ([1])

$$\varphi(o) = 1,$$
$$\varphi(n) = c^{\frac{\alpha}{a}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)},$$

et l'on voit qu'on peut écrire asymptotiquement pour x très petit

$$v(x, y) = cyx^{\frac{\alpha}{a}} \quad \text{ou} \quad cyu^{\frac{\alpha}{a}},$$

c étant fini et différent de zéro.

La fonction $v(x, y)$ vérifie évidemment l'équation fonctionnelle de Schröder

$$v(x_1, y_1) = s'\,v(x, y).$$

Elle est identiquement nulle pour $y = 0$. De plus, dans le cas particulier où $g(y)$ est nulle, on peut faire tendre x vers zéro, y restant arbitraire dans le cercle : $|y| < \rho$. La fonction $x^{-\frac{\alpha}{a}}v(x, y)$ tend alors vers une fonction limite, non nulle, de la variable y, holomorphe pour $|y| \leqq \rho$, dont il est bien facile de trouver la signification. On a en effet

$$x^{-\frac{\alpha}{a}}v(x_1, y_1) = s'\,v(x, y)\,x^{-\frac{\alpha}{a}}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{\alpha}{a}},$$

([1]) Le choix de $\varphi(n)$ comporte naturellement un certain arbitraire; on pourrait prendre, au lieu de l'expression obtenue, $\varphi(n) = n^{\frac{\alpha}{a}}$, v serait seulement multipliée par un facteur constant.

et comme $\frac{x}{x_1}$ tend vers 1, la fonction limite $j(y)$ vérifie l'équation de Schröder

$$j(y_1) = s' j(y)$$

relative à la substitution, concernant la seule variable y, qui s'obtient en faisant $x = 0$ dans l'expression de y_1. Si au contraire $g(y) \neq 0$, on doit faire tendre y vers zéro avec x, et l'expression $x^{-\frac{\alpha}{a}} v(x, y)$, contenant y en facteur, tend naturellement vers zéro. Comme pour la fonction $u(x, y)$ on peut dire que : $x = 0$ est une ligne de points singuliers, en général transcendants, de la fonction $v(x, y)$, si $g \equiv 0$; si $g \neq 0$, on peut seulement dire que l'origine est un point singulier, en général transcendant.

Considérons maintenant le déterminant fonctionnel des deux fonctions u et v, que nous appelons $\mathrm{U}(\mathrm{X}, y)$, $\mathrm{V}(\mathrm{X}, y)$ en prenant X comme variable. Comme on a

$$\mathrm{U} = \lim[\mathrm{X}_n - \rho(n)],$$
$$\mathrm{V} = \lim \frac{y_n}{\sigma(n)},$$

ρ et σ étant les fonctions numériques que nous connaissons, on a aussi

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{U}, \mathrm{V})}{\mathrm{D}(\mathrm{X}, y)} = \lim \frac{1}{\sigma(n)} \frac{\mathrm{D}(\mathrm{X}_n, y_n)}{\mathrm{D}(\mathrm{X}, y)} = \lim \frac{1}{\sigma(n)} \Delta(\mathrm{X}, y) \ldots \Delta(\mathrm{X}_{n-1}, y_{n-1})$$

en posant

$$\Delta(\mathrm{X}, y) = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{X}_1, y_1)}{\mathrm{D}(\mathrm{X}, y)}.$$

Il y a un certain intérêt à obtenir la limite de l'expression précédente, sans donner à $y_1(\mathrm{X}, y)$ la forme particulière que nous lui avons assignée, c'est-à-dire sans supposer que l'axe des x soit invariant, et en choisissant $\sigma(n)$ de manière à assurer la convergence. Nous posons donc momentanément, à la place des équations (39) les suivantes :

$$(41) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1 = \mathrm{X} + a + b\mathrm{X}y + \dfrac{c}{\mathrm{X}} + d'y + \ldots, \\ y_1 = s'\left(y + \dfrac{a'}{\mathrm{X}^2} + \dfrac{b'}{\mathrm{X}} y + c' y^2 + \ldots\right). \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = 1 - by + cx^2 + \ldots,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{b}{x} + d + \ldots,$$

$$\frac{1}{s'}\frac{\partial y_1}{\partial X} = -2a'x^3 - b'x^2 y + \ldots,$$

$$\frac{1}{s'}\frac{\partial y_1}{\partial y} = 1 + b'x + 2c'y + \ldots,$$

$$\frac{1}{s'}\Delta(X, y) = 1 + b'x + (2c' - b)y + (\quad)x^2 + \ldots.$$

Nous avons à rechercher la condition de convergence du produit infini dont le terme général est

$$s'\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}[1 + b'x_n + (2c' - b)y_n + \ldots].$$

Comme on a toujours

$$x_n \sim \frac{1}{na}$$

et

$$y_n = O(q^n|y|) + O(|x_n|^2),$$

la condition de convergence s'obtient, comme précédemment dans la construction de $\varphi(x, y)$, en réduisant le crochet au terme $1 + b'x_n$, ce qui conduit à prendre

$$\sigma(n) = s'^n n^{-\frac{b'}{a}},$$

et l'on pourrait répéter ici ce qui a été dit au sujet des propriétés de la fonction $\frac{\varphi(x,y)}{y}$. La fonction représentée par ce produit infini jouit d'ailleurs de la propriété fonctionnelle (6), en y faisant $s = 1$.

Dans le cas particulier des équations (40) tout ceci s'applique. On doit remplacer b' par $-\alpha$, et l'on retrouve bien le même facteur de convergence que pour le produit qui a servi à définir $\varphi(x, y)$. On a du reste

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{1}{x^2}\frac{D(U, V)}{D(X, y)}.$$

Il s'ensuit que si le domaine D a été convenablement choisi, le déterminant fonctionnel des fonctions u et v n'y devient jamais nul, puisque aucun des facteurs du produit infini qui représente $\frac{D(U, V)}{D(X y)}$ ne peut devenir nul si $|x|$ et $|y|$ sont suffisamment petits. Il s'ensuit que les fonctions u et v sont indépendantes, et même que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne sont jamais ramifiées quand (u, v) décrit le domaine correspondant à D; malheureusement ce domaine du point (u, v) n'est pas aisé à définir, et le problème d'inversion qui, dans le cas d'un point double ordinaire, se résout immédiatement, permettant de passer des solutions de l'équation de Schröder aux fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$ considérées pour la première fois par M. Picard, est ici très délicat et ne conduit pas en général à un résultat simple. Nous allons l'examiner de plus près.

J'ai déjà indiqué que, quand le point X décrit Δ', la valeur de $U(X, y)$ couvre un domaine de même forme, et que les domaines ainsi obtenus pour U, quand on fait varier y, ont une partie commune. Je vais préciser ce point. Considérons les deux demi-droites qui limitent Δ' et font l'angle ω avec la direction négative de l'axe réel, soient PT et PT'. Prenons le point Q au delà de P sur l'axe réel et menons les deux demi-droites symétriques QU, QU' faisant l'angle $\omega_1 > \omega$ avec l'axe réel négatif. Soit E le domaine limité par QU, QU' et s'étendant à l'infini à droite. Je dis que, si les points P et Q sont convenablement choisis, à tout point u intérieur à E, l'équation

$$u = U(X, y) = X - \frac{k}{a} \log X + \theta(X, y)$$

fait correspondre un point X et un seul dans Δ'.

Faisons décrire à X la frontière de son domaine; le rapport $\frac{X-u}{X}$, quel que soit u dans E, restera supérieur en module à une quantité que nous allons évaluer.

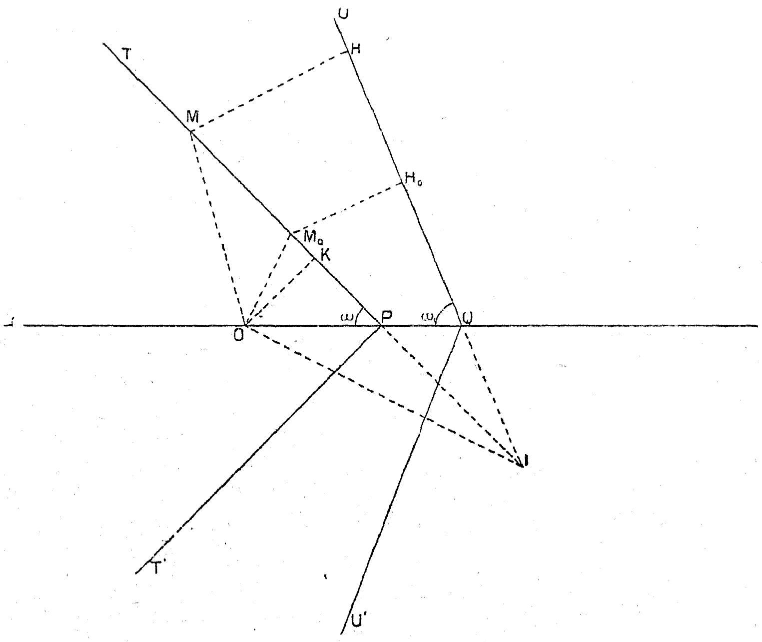
Si M est un point de PT, on a évidemment

$$|X - u| > MH,$$

MH étant la distance de M à QU. Par suite

$$\left|\frac{X-u}{X}\right| > \frac{MH}{MO}.$$

Ce rapport $\frac{MH}{MO}$, quand M décrit PT, a une valeur stationnaire quand PT devient tangente à l'une des courbes, lieu des points pour lesquels ce rapport est constant, c'est-à-dire à une conique de foyer O et de directrice QU ; une seule de ces coniques est tangente à PT, et le point



de contact M_0 s'obtient par l'intersection avec la perpendiculaire menée par O à la droite OI, I étant le point d'intersection des deux droites PT et QU ; comme le rapport $\frac{MH}{MO}$ serait nul si M était en I, on voit que M_0 correspond à un maximum. Donc le rapport croît quand M va de P en M_0 et décroît quand M va de M_0 à l'infini. En P, sa valeur est

$$\frac{PQ}{OP}\sin\omega_1;$$

à l'infini sa valeur limite est égale à $\sin(\omega_1 - \omega)$. Si nous transformons la figure homothétiquement par rapport à O, le rapport $\frac{PQ}{OP}$ reste constant ainsi que ω et ω_1, et l'on a toujours quand u est intérieur à E et X sur le contour de Δ'

$$\left|\frac{X-u}{X}\right| > c,$$

c étant le plus petit des deux nombres $\frac{PQ}{OP}\sin\omega_1$ et $\sin(\omega_1-\omega)$.

Or pour $|X|$ suffisamment grand on a

$$c|X| > \left|-\frac{k}{a}\log X + \theta(X, y)\right|.$$

En effet, comme $\theta(X, y)$ est bornée on a

$$|\theta(X, y)| < m,$$

et l'inégalité qui précède sera vérifiée si

$$c|X| > \left|\frac{k}{a}\right|[\log|X| + 2\pi] + m,$$

ce qui a bien lieu pour $|X| > h$. Comme d'ailleurs

$$|X| \geqq OP\sin\omega,$$

on voit que pour

$$OP > \frac{h}{\sin\omega},$$

on aura, quel que soit X sur la frontière de Δ', et u intérieur à E,

$$|X-u| > \left|\frac{k}{a}\log X - \theta(X, y)\right|.$$

Les domaines Δ' et E étant ainsi fixés, faisons décrire à X le contour $\mathfrak{S}$ formé des deux grands segments symétriques PT et PT' et d'un arc de cercle de très grand rayon et de centre O, de sorte que $\frac{X}{u}$ soit infiniment grand sur cet arc et que l'inégalité qui précède y soit encore vérifiée. Le principe de l'argument de Cauchy montre alors que l'équation

$$u = X - \frac{k}{a}\log X + \theta(X, y) = X - \frac{k}{a}\log X + \zeta(X, X, y)$$

possède une racine et une seule à l'intérieur de $\mathfrak{S}$; cette racine est une fonction analytique de u pour u intérieur à E; c'est aussi une fonction analytique de $t = Xy$ pour $|t| \leqq \lambda$, ou une fonction analytique de y

pour $|y| \leqq \rho$ dans le cas particulier où $|Xy|$ n'est pas borné dans D'.

Dans ces conditions le domaine E est simplement et totalement couvert par u quand X décrit Δ'; on aura d'ailleurs pour $|u|$ très grand

$$X = u + \frac{k}{a} \log u + \text{quantité bornée.}$$

On peut prendre, en particulier, $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$; le domaine E est alors limité par une perpendiculaire à l'axe réel.

Revenons maintenant à $v(x, y)$; comme v s'annule avec y et que le domaine de v contient ainsi un certain entourage de l'origine dans son plan, et cela quel que soit x, il est naturel de se demander si à tout point analytique (u, v) il n'est pas possible de faire correspondre un point analytique (x, y), lorsque le domaine de (u, v) est défini par

$$(42) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}(u) \geqq A, \\ |v| \leqq B, \end{cases}$$

A et B constantes positives. Or, il n'en est pas ainsi en général. Il résulte en effet de l'étude des valeurs asymptotiques de u et de v qu'on a

$$v(x, y) = y\, x^{\frac{\alpha}{a}} \mu(x, y),$$

μ étant une fonction continue bornée et différente de zéro dans D. D'autre part, $|u|$ est de l'ordre de $\frac{1}{|x|}$.

Supposons que, $g(y)$ n'étant pas identiquement nulle, le rapport $\frac{y}{x}$ soit borné dans D. On a alors

$$|v| < K|x|^{\mathcal{R}\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)} < H|u|^{\mathcal{R}\left(-1-\frac{\alpha}{a}\right)}.$$

Si la partie réelle de $1 + \frac{\alpha}{a}$ est positive et égale à m, on a donc

$$|v| < \frac{H}{|u|^m}.$$

Donc v, dans le voisinage de $v = 0$, ne peut pas être pris arbitrairement, quel que soit u satisfaisant à

$$\mathcal{R}(u) > A.$$

Si $g \equiv 0$, la condition $|y| < C|x|$ disparaît; on a seulement, y étant borné,

$$|v| < \frac{H}{|u|^{\mathcal{R}\left(\frac{\alpha}{a}\right)}},$$

ce qui donne lieu à une remarque analogue.

On arrive aisément au contraire, dans le cas particulier où

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad g(y) \equiv 0,$$

à montrer la possibilité de l'inversion uniforme, si u et v satisfont à des conditions telles que (42). Dans ce cas il est visible du reste, puisque

$$|x_n| = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad y_n = O(q^n|y|) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

que le produit

$$\frac{1}{y} v(x, y) = \Pi(1 - \beta y_n + \gamma x_n^2 + \ldots)$$

converge uniformément dans le domaine fermé D, et qu'on peut y faire $x = x_n = 0$, sans précaution particulière; $\frac{v(x,y)}{y}$ est continue par rapport à x pour $x = 0$, et tend alors vers la fonction limite

$$\frac{1}{y} v(0, y) = 1 + p y + \ldots.$$

Prenons

$$|y| \leqq h,$$

h étant assez petit pour que les termes qui suivent l'unité au second membre de la relation qui précède aient une somme inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, d'où

$$|v(0, y)| > \left|\frac{y}{2}\right|.$$

Il suit de là et du principe de l'argument de Cauchy que pour

$$|v'| < \frac{h}{2},$$

l'équation

$$v(0, y) = v'$$

admet une racine et une seule de module $< h$.

Si nous supposons maintenant

$$|v'| \leqq \frac{h}{3},$$

l'équation

$$v(x, y) = v'$$

admettra également une racine et une seule, si $|x|$ est suffisamment petit. Posons en effet

$$v(x, y) = w(x, y) y,$$

et démontrons que les équations

$$v(x, y) = v',$$
$$v(0, y) = v'$$

ont le même nombre de solutions dans le cercle $|y| \leqq h$, ou que le quotient

$$\frac{v(x, y) - v(0, y)}{v(0, y) - v'} = \frac{y[w(x, y) - w(0, y)]}{v(0, y) - v'}$$

est plus petit que 1 en module, sur la circonférence $|y| = h$; ceci est immédiat car

$$|v(0, y)|_{|y|=h} > \frac{h}{2},$$
$$|v'| \leqq \frac{h}{3},$$
$$\max. |w(x, y) - w(0, y)|_{|y|=h} = \mu(x).$$

Le quotient considéré est donc, pour $|y| = h$, inférieur en valeur absolue à

$$\frac{h\,\mu(x)}{\frac{h}{2} - \frac{h}{3}} = 6\,\mu(x),$$

donc inférieur à 1 si $|x|$ est suffisamment petit, $\mu(x)$ tendant vers zéro avec $|x|$. On a donc bien une solution unique de l'équation en y

$$v(x, y) = v',$$

fonction analytique de x pour $x \neq 0$, continue pour $x = 0$ comme il résulte de sa représentation par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|y|=h}\frac{y\,dy}{[v(x,y)-v']\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Portons cette valeur de y

$$y(x, v'),$$

dans l'équation

$$u' = u(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{k}{a}\log x + \theta\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

que nous voulons résoudre par rapport à x, u' vérifiant la condition

$$|\mathcal{R}(u')| > \text{A}.$$

Il résulte de ce que nous avons démontré en détail qu'il y a une solution et une seule, fonction analytique de u' et de v'.

L'unicité de la solution résulte d'une manière plus générale de la définition de u et de v par les formules

$$u = \lim\left[\frac{1}{x_n} - \rho(n)\right],$$

$$v = \lim\frac{y_n}{\sigma(n)}.$$

En effet les fonctions $x_n(x, y)$ et $y_n(x, y)$ forment un système univalent dans D, c'est-à-dire ne prennent jamais le même système de valeurs en deux points distincts de D, car cette assertion résume les deux faits suivants :

1° Quand $(x_1\ y_1)$ est dans D_1, conséquent immédiat de D, x et y sont des fonctions uniformes de x_1 et y_1.

2° Les domaines D, D_1, D_2, ... sont contenus chacun dans le précédent. Les fonctions sans le signe *lim* dans les équations précédentes, fonctions du premier degré de x_n et y_n, forment donc aussi un système univalent. D'autre part nous avons démontré que

$$\frac{\text{D}(u, v)}{\text{D}(x, y)} \neq 0.$$

Admettons maintenant le lemme bien simple qui suit, que nous démontrerons ultérieurement :

Si les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$, régulières pour $x = y = 0$, nulles en ce point et de déterminant fonctionnel non nul, sont respectivement les limites de deux suites de fonctions holomorphes $F_n(x, y)$, $G_n(x, y)$ qui convergent uniformément dans un domaine entourant l'origine, ce point est limite de points (ξ_n, η_n) vérifiant les équations

$$F_n(\xi_n, \eta_n) = 0, \qquad G_n(\xi_n, \eta_n) = 0.$$

Il s'ensuit que si u et v prenaient les valeurs (u', v') en deux points distincts de D, les deux fonctions dont elles sont les limites posséderaient, pour n assez grand, la même propriété, ce qui, nous venons de le voir, est impossible.

La correspondance entre (x, y) et $u, v)$ est donc biuniforme et analytique, et l'on a

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v); \\ f(u+a, s'v) &= R(x, y), \\ g(u+a, s'v) &= S(x, y); \\ f\left(u-a, \frac{v}{s'}\right) &= R_{-1}(x, y), \\ g\left(u-a, \frac{v}{s'}\right) &= S_{-1}(x, y); \end{aligned}$$

cette dernière formule permettant de prolonger le domaine d'existence des fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$ de proche en proche, aussi longtemps que les fonctions $R_{-1}(x, y)$, $S_{-1}(x, y)$ restent analytiques et uniformes.

On aura d'ailleurs : $y = 0$ pour $v = 0$, et $x = 0$ pour u infini avec une partie réelle positive. Si l'on n'a pas ramené préalablement les deux courbes invariantes analytiques à coïncider avec $x = 0$ et $y = 0$, ce sont ces deux courbes qui correspondent à u infini ($\mathfrak{R}u > 0$), et à $v = 0$.

Nous pouvons encore nous servir de la transformation

$$y = zx$$

pour ramener le cas de $g \neq 0$ à celui de $g \equiv 0$, car les équations (39) deviennent

$$x_1 = x(1 - ax - bzx + cx^2 + \ldots),$$
$$z_1 x_1 = s' zx(1 - \alpha x - \beta zx + \ldots),$$

et en divisant membre à membre

$$z_1 = s' z[1 + (a - \alpha)x + (\gamma - c)x^2 + (b - \beta)zx + \ldots].$$

Les équations de transformation gardent la même forme, mais il n'y a plus de terme en z dans $\frac{x_1}{x}$. Seulement α se trouve remplacé par $\alpha - a$ qui n'est plus nul, si α l'était.

Cas de $a = 0$. — Je vais passer maintenant au cas où l'on a $a = 0$, les équations de transformation étant alors

$$x_1 = \frac{x}{1 + x[a + g(y)] + \ldots},$$
$$y_1 = s' y + \alpha x^2 + \ldots.$$

Une étude détaillée de ce cas entraînerait des développements considérables, d'écriture notamment, et les résultats qu'on peut espérer en obtenir ne semblent pas avoir une importance assez grande pour qu'il y ait lieu de pousser jusqu'au bout cette discussion, comme je l'ai fait dans le cas d'une seule variable. Je vais montrer simplement que ce cas se ramène en général à celui où a n'est pas nul, moyennant une série de changements de variables simples. Nous pouvons d'abord employer le changement de variables $\left(\begin{array}{c|c} x & x \\ y & xy + l x^2 \end{array}\right)$ destiné à faire disparaître le terme $g(y)$. Ceci fait, supposons que dans nos équations, qui conservent la même forme sauf l'évanouissement de g, le premier terme en x non nul dans la parenthèse soit le terme ax^2; nous pouvons écrire

$$x_1 = x[1 - ax^2 P_0(x^2, y) + x P_1(x^2, y)],$$

P_0 désignant une série entière qui commence par la constante $+1$, tandis que P_1 commence par les termes

$$(\quad)x^2 + (\quad)y.$$

En élevant au carré, on obtient

$$x_1^2 = x^2\Big[[1 - ax^2\,P_0(x^2, y)]^2 + 2x\,P_1(x^2, y)\,[1 - ax^2\,P_0(x^2, y)] + x^2\,P_1^2(x^2, y)\Big]$$

ou, en posant

$$x^2 = \xi,$$
$$x_1^2 = \xi_1;$$
$$\xi_1 = \xi\Big[1 - 2a\xi - b\xi^{\frac{3}{2}} - c\xi^{\frac{1}{2}}y + P_2(\xi, y)\Big],$$

P_2 commençant par des termes du second degré, mais contenant du reste des termes à exposant fractionnaire. En posant

$$\frac{1}{\xi_1} = X_1, \qquad \frac{1}{\xi} = X,$$

il vient

$$X_1 = X + 2a + \frac{b}{X^{\frac{1}{2}}} + cX^{\frac{1}{2}}y + \ldots;$$

mais, comme précédemment, nous emploierons simultanément les variables ξ et X. Si nous considérons maintenant les deux équations

$$y_1 = s'y + \alpha\xi + \beta\xi^{\frac{1}{2}}y + \gamma y^2 + \ldots,$$
$$\xi_1 = \xi - 2a\xi^2 + \ldots = \xi[1 + O(|\xi| + |y|)],$$

nous voyons que les termes du premier degré ne présentent plus la forme canonique; pour les y ramener, il faut poser

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta_1 + l\xi_1 \\ y &= \eta + l\xi \end{aligned} \qquad l = \frac{\alpha}{1 - s'}.$$

On obtient alors le système

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= X + 2a + \frac{b + cl}{X^{\frac{1}{2}}} + cX^{\frac{1}{2}}\eta + O\left[\left|\frac{1}{X}\right| + |\eta|\right], \\ \eta_1 &= s'\eta + l\beta\xi^{\frac{3}{2}} + \beta\xi^{\frac{1}{2}}\eta + (\quad)\xi\eta + \ldots. \end{aligned}\right.$$

La deuxième équation peut encore s'écrire

$$\eta_1 = \eta\left[s' + O\left(|\xi|^{\frac{1}{2}} + |\eta|\right)\right] + O\left(|\xi|^{\frac{3}{2}}\right). \tag{44}$$

Le choix de la détermination qu'il faut prendre pour les termes en $\xi^{\frac{1}{2}}$, $X^{\frac{1}{2}}$ ne donne lieu à aucune difficulté. Je renverrai pour ce point à la discussion analogue que j'ai faite pour le cas d'une seule variable dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*.

L'itération de la substitution (42), malgré la présence des termes à exposant fractionnaire, se discute aisément comme celles que nous avons étudiées jusqu'ici.

Nous imposerons à X et η la condition

$$\left|X^{\frac{1}{2}}\eta\right| < \lambda, \tag{45}$$

λ étant une constante que nous déterminerons plus exactement. Nous supposerons d'autre part que $|X^{\frac{1}{2}}|$ et $|\eta|$ restent inférieurs à un nombre fixe ρ; si ces nombres λ et ρ sont suffisamment petits les termes qui suivent $X + 2a$ dans l'expression de X_1 peuvent être rendus aussi petits que l'on veut. Nous construisons alors un domaine du plan des X analogue au domaine Δ' considéré précédemment, et limité, en supposant a réel et positif, par deux demi-droites se coupant sur l'axe réel, en un point d'abscisse positive très grande, et symétriques par rapport à cet axe. En établissant des relations d'inégalité convenables entre les quantités λ, ρ et l'inclinaison de ces deux droites, on fera en sorte que si X est dans ce domaine, X_1 se trouve dans le même domaine déplacé par translation d'une quantité constante vers la droite. De plus la relation (43) montre que l'inégalité (44) subsistera encore pour (X_1, η_1), si ρ est assez petit; de (43) on déduit en effet, si $|\xi|$ et $|\eta|$ sont assez petits

$$|\eta_1| < q|\eta| + A|\xi|^{\frac{3}{2}} = q|\eta| + \frac{A}{|X|^{\frac{3}{2}}},$$

en prenant par exemple

$$q = \frac{1 + |s'|}{2}.$$

On a du reste pour $\dfrac{X_1}{X} - 1$, qui est de l'ordre de $|\xi| + |\eta|$, une valeur très petite; on peut donc écrire

$$\left|\frac{X_1}{X}\right|^{\frac{1}{2}} < 1 + h,$$

$$\left|X_1^{\frac{1}{2}}\eta_1\right| < q\left|X^{\frac{1}{2}}\eta\right|(1+h) + \frac{A(1+h)}{\left|X^{\frac{1}{2}}\right|}$$

$$< q\lambda(1+h) + \frac{A(1+h)}{\left|X^{\frac{1}{2}}\right|} < q\lambda(1+h) + A\rho(1+h).$$

Comme $q < 1$, ceci sera encore inférieur à λ si ρ et h sont assez petits.

Dans ces conditions le point (X_1, η_1) restera dans le domaine initial. On ne peut d'ailleurs pas, si $c \neq 0$, supprimer la condition (44), et ici on n'aperçoit pas d'artifice qui permette de faire disparaître ce coefficient c. On trouve alors, en raisonnant comme nous l'avons fait maintes fois que X_n tend vers l'infini comme $2na$; d'une manière plus précise on aura

$$X_n = X + 2na + O(\sqrt{n}).$$

De même y_n tend vers zéro et l'on a

$$|\eta_n| < q^n|\eta| + \frac{B}{|X_n|^{\frac{3}{2}}},$$

$$|\eta_n| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

En remontant de proche en proche aux variables primitives on trouve d'abord que $|y_n|$ tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$. La transformation

$$x^2 = \xi,$$
$$x_n^2 = \xi_n$$

nous donnera ensuite pour (x, y) deux domaines entièrement distincts dans lesquels (x_n, y_n) tendent vers l'origine. L'un de ces domaines sera défini de la manière suivante : le point x se trouvera à l'intérieur d'une courbe passant par l'origine et ayant en ce point une pointe avec un angle $\pi - \frac{\omega}{2}$ (ω est aussi petit que l'on veut) ; cette courbe se déduit par la transformation $x^2 = \xi$ du système de deux arcs de cercle, déduits eux-mêmes par inversion des deux demi-droites de tout à l'heure ; pour chaque position de x, y doit être à l'intérieur du domaine défini par

$$|y + lx| < \lambda |x|, \tag{45 bis}$$

c'est-à-dire d'un cercle dont le centre tend vers l'origine et le rayon vers zéro, quand x tend vers zéro ; x_n et y_n sont alors tous deux de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On démontrera facilement que $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers $-l$. On aura un autre domaine analogue en prenant l'autre détermination du radical dans l'expression

$$x = \sqrt{\xi}.$$

Dans le cas où le développement de $x_1 - x$ suivant les puissances ascendantes de x et de y commencerait par un terme en x^{p+1} quand on y fait $y = 0$, la même méthode permettra de mettre en évidence l'existence de p domaines de convergence distincts, mais à condition, si p est quelconque, qu'il y ait un certain nombre de coefficients nuls ([1]).

Soit par exemple

$$x_1 = \frac{x}{1 + y^2 - x^3},$$

$$y_1 = \frac{y}{2} + x^3.$$

Effectuons les calculs indiqués

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\xi}{(1 - \xi - y^2)^3} \\ y_1 &= \frac{y}{2} + \xi \end{aligned}\right\} \qquad (\xi = x^3).$$

La nouvelle substitution est uniforme dans le cas actuel. On fait

([1]) La démonstration de l'existence d'une solution de l'équation d'Abel exigerait l'emploi de nouvelles transformations analogues à celles que nous avons employées dans le cas d'une seule variable.

ensuite les changements de variables

$$y = \eta + 2\xi,$$
$$\xi = \frac{1}{X},$$

ce qui donne

$$X_1 = X - 3 + 3\eta^2 X + \frac{12}{X} + \dots$$
$$\eta_1 = \frac{\eta}{2} - 6\xi^2 + \dots.$$

On devra poser

$$|\eta^2 X| < \lambda$$

ou

$$\eta^2 < \lambda\xi,$$

et cette condition sera vérifiée par le point (ξ_1, η_1) moyennant les hypothèses que l'on connaît. On trouvera donc pour le point (x, y) trois domaines de convergence distincts.

Prenons au contraire

$$x_1 = \frac{x}{1 + xy + x^6},$$
$$y_1 = \frac{y}{2} + x^2.$$

En posant encore

$$X = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}},$$

on obtient

$$X_1 = X + 6 + 6yX^{\frac{5}{6}} + \dots,$$
$$y_1 = \frac{y}{2} + \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}.$$

Pour obtenir un domaine de convergence dans le plan des X, on serait conduit à poser

$$\left|X^{\frac{5}{6}} y\right| < \lambda,$$

mais cette condition ne saurait être remplie pour le point (X_1, y_1), car on aura

$$\left|X_1^{\frac{5}{6}} y_1\right| = \left|\frac{X^{\frac{5}{6}} y}{2} + X^{\frac{1}{2}}\right| (1 + \varepsilon),$$

ε étant très petit pour y et $\frac{1}{X}$ eux-mêmes très petits. Si donc $X^{\frac{5}{6}}y$ est borné, $X^{\frac{5}{6}}y$ sera donc de l'ordre de $X^{\frac{1}{2}}$, donc très grand. On n'obtiendra pas par cette méthode de domaine de convergence. Je ne sais pas s'il en existe néanmoins; il est probable que non.

Cas d'une ligne de points doubles. — Il est d'ailleurs certain qu'il existe des substitutions avec un point double de l'espèce étudiée actuellement pour lesquelles il n'y a pas de domaine de convergence, mais seulement une ligne de convergence : la courbe invariante de Poincaré. Tel est le cas des substitutions, étudiées par Lattès dans sa thèse souvent citée, qui possèdent une ligne de points doubles, ce qui arrive quand le déterminant fonctionnel de $x_1 - x$, $y_1 - y$ par rapport à x et y est identiquement nul. La substitution se ramène alors à la forme

$$(45)\qquad \begin{cases} x_1 = x[1 + y\,P(x, y)] = M(x, y), \\ y_1 = y[s' + \;Q(x, y)] = N(x, y), \end{cases}$$

P et Q étant des fonctions régulières autour de l'origine, avec $Q(0, 0) = 0$; la ligne de points doubles est $y = 0$, la droite $x = 0$ est toujours la courbe invariante de Poincaré.

Lattès a montré, en se servant de cette forme réduite, que la courbe des points doubles possède la propriété suivante. Soit AB un arc de la courbe des points doubles le long duquel $|s'|$ est constamment inférieur à 1, en désignant par s' le multiplicateur différent de l'unité; on peut limiter de part et d'autre de l'arc AB un domaine tel que les conséquents d'un point de ce domaine restent dans le domaine et tendent vers un point de la courbe des points doubles, en restant sur une même courbe analytique invariante (courbe de Poincaré).

On peut compléter ce résultat en ramenant l'équation précédente à une forme canonique qui met bien en évidence le processus d'itération.

Soit ρ un nombre tel que pour $|x|$ et $|y| \leqq \rho$, on ait

$$|P(x, y)| < A,$$
$$|Q(x, y)| < \frac{1 - |s'|}{2},$$

d'où

$$|s' + Q(x, y)| < \frac{1 + |s'|}{2} = q < 1.$$

Prenons $\rho' < \rho$, et $|x|$ et y inférieurs à ρ'. On aura

$$|y_1| < q|y|,$$
$$|x_1| < |x|[1 + A|y|].$$

On aura encore

$$|x_1| < \rho, \qquad |y_1| < \rho,$$

pourvu que

$$\rho'(1 + A\rho') < \rho,$$

ce que nous pouvons supposer. On obtiendra ensuite

$$|y_2| < q^2|y|,$$
$$|x_2| < |x|[1 + A|y|][1 + Aq|y|],$$

et l'on peut continuer à écrire indéfinitivement les inégalités analogues

$$|y_n| < q^n|y|,$$
$$|x_n| < |x|[1 + A|y|]\dots[1 + Aq^{n-1}|y|].$$

si le produit convergent

$$\rho'(1 + A\rho')\dots(1 + Aq^{n-1}\rho')\dots$$

est inférieur à ρ.

Il suffit pour cela que

$$\rho' e^{\frac{A\rho'}{q-1}} < \rho,$$

ce qui a bien lieu pour ρ' suffisamment petit. Dans ces conditions le produit infini

$$[1 + yP(x, y)][1 + y_1 P(x_1, y_1)]\dots[1 + y_n P(x_n, y_n)] + \dots$$

est absolument et uniformément convergent puisqu'on a

$$|P(x_n, y_n)| < A,$$
$$|y_n| < q^n \rho',$$

et représente une fonction holomorphe dans le domaine

$$|x| \leqq \rho', \qquad |y| \leqq \rho',$$

égale à 1 pour $y = 0$, et qui n'est autre que la limite $\frac{x^n}{x}$ pour n infini. On a donc uniformément

$$\lim_{n=\infty} x_n = u(x, y) = x[1 + y\varpi(x, y)],$$
$$u(x_1, y_1) = u(x, y),$$

u et ϖ holomorphes dans le domaine considéré.

En prenant $u(x, y)$ comme variable indépendante à la place de x, dans un certain domaine entourant l'origine, ce qui est permis, la substitution sera ramenée à la forme suivante :

$$(46)\qquad \begin{cases} u_1 = u, \\ y_1 = y[s' + R(u, y)] \qquad [R(0, 0) = 0]. \end{cases}$$

En effet la relation entre u, x et y est de la forme

$$u = x[1 + y\,a_0(y)] + x^2 y\,a_1(y) + \ldots + x^n y\,a_n(y) + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + mx + py + \ldots,$$

donc différent de zéro pour $|x|$ et $|y|$ suffisamment petits, et la théorie des fonctions inverses permet de développer x suivant les puissances de u, les coefficients étant des fonctions de y qui sont toutes nulles pour $y = 0$, sauf le coefficient de x qui se réduit à l'unité. On aura donc pour $|u|$ et $|y|$, suffisamment petits, le développement convergent

$$x = u[1 + y\,\beta(y)] + u^2 y\,b_1(y) + \ldots + u^n y\,b_n(y) + \ldots.$$

En remplaçant x par cette expression dans la seconde des équations (45), on a bien pour y_1 une expression de la forme indiquée.

On est donc ramené à une forme canonique dans laquelle l'une des variables reste invariante, ce qui conduit à faire l'itération d'une fonction d'une seule variable, mais contenant un paramètre arbitraire u. Le multiplicateur est donc fonction de u; il a pour valeur

$$s' + R(u, 0) = s' + Q(u, 0) = s' + ku + \ldots$$

et, se réduisant à s' pour $u = 0$, il restera pour $|u|$ suffisamment petit inférieur à $q < 1$. Dans ces conditions la fonction holomorphe à l'origine et de dérivée égale à 1 en ce point qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder relative à la seule variable y, est une fonction holomorphe non seulement de y mais encore de u; c'est ce qui résulte immédiatement de son expression connue sous forme de produit infini. En appelant $v(u, y)$ cette fonction, on a

$$v(u, y_1) = [s' + \sigma(u)]\, v(u, y),$$

en posant

$$\sigma(u) = Q(u, o) = ku + \ldots.$$

On peut évidemment d'après la forme du développement de v,

$$v = y + hy^2 + luy + \ldots,$$

la prendre pour variable destinée à remplacer y, et finalement la substitution (45) se trouve ramenée, par un changement de variables régulier et biunivoque, à la forme canonique

$$(47) \qquad \begin{cases} u_1 = u \\ v_1 = v[s' + \sigma(u)] \end{cases} \qquad [\sigma(o) = o],$$

sur laquelle on aperçoit immédiatement l'exactitude de la proposition de Lattès, puisque

$$\begin{aligned} u_n &= u, \\ v_n &= v[s' + \sigma(u)]^n. \end{aligned}$$

Un cas particulier remarquable est celui où

$$\sigma(u) \equiv o,$$

$|s'|$ étant toujours compris entre zéro et un (1). Dans tous les cas x et y s'expriment, dans un domaine entourant le point $(u = o, v = o)$ en fonction holomorphe de u et de v :

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \end{aligned}$$

et l'on a d'après (45), en posant

$$s' + \sigma(u) = \tau(u),$$

les formules suivantes qui résolvent le problème de l'itération

---

(1) Ceci aura lieu notamment si x_1, y_1 satisfont aux équations aux dérivées partielles $\dfrac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} = s'$ et $\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{\partial y_1}{\partial y} = 1 + s'$.

analytique :

$$
\begin{aligned}
f[u, v\,\tau(u)] &= \mathrm{M}[f(u, v), g(u, v)],\\
g[u, v\,\tau(u)] &= \mathrm{N}[f(u, v), g(u, v)];\\
f[u, v\tau^\lambda(u)] &= \mathrm{M}_\lambda[f(u, v), g(u, v)],\\
g[u, v\tau^\lambda(u)] &= \mathrm{N}_\lambda[f(u, v), g(u, v)]
\end{aligned}
$$

et qui sont surtout intéressantes quand $\sigma(u) \equiv 0$, $\tau(u) = s'$, ou tout au moins quand $\tau(u)$ est une fonction rationnelle.

Remarquons que si les équations de la substitution peuvent se ramener à la forme

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x,\\
&y_1 = s'y + \psi(x, y) = s'y + (\;\;)x + (\;\;)x^2 + (\;\;)xy + \ldots,
\end{aligned}
$$

$\psi(x, y)$ n'étant pas divisible par y, on est toujours dans le cas d'une ligne de points doubles, car on peut toujours résoudre par rapport à y l'équation

$$s'y + \psi(x, y) = y.$$

qui donne pour y une fonction régulière de x, puisque $1 - s' \neq 0$.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une ligne de points doubles, c'est qu'il existe une fonction invariante par la substitution donnée, régulière à l'origine, nulle en ce point, les dérivées premières ne s'y annulant pas toutes les deux.

Les substitutions qui possèdent cette propriété sont-elles les seules, parmi celles dont les multiplicateurs sont 1 et s' $(0 < |s'| < 1)$, pour lesquelles il n'y a pas de domaine de convergence? Évidemment non, car il peut exister des lignes de points doubles pour une puissance de la substitution donnée Σ^n $(n > 1)$, tandis que Σ elle-même n'aurait qu'un point double isolé. Mais je regarde en outre comme probable qu'il y en a encore d'autres que ces dernières. Je propose de démontrer qu'il en est ainsi pour

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x}{1+y},\\
y_1 &= s'y + x
\end{aligned}
$$

ou, si ma présomption est fausse, de trouver les domaines de convergence.

Cas de $s' = 0$, $s = 1$. — Je vais maintenant passer au cas où l'équation en s a une racine nulle, une autre égale à 1. On peut ramener la substitution à la forme

$$x_1 = x + \alpha y + \ldots,$$
$$y_1 = a' x^2 + b' xy + c' y^2 + \ldots$$

par une substitution linéaire auxiliaire. Nous allons effectuer encore d'autres changements de variables pour donner une forme plus simple à ces équations; on peut d'abord remplacer y par $y + a' x^2$, et y_1 par $y_1 + a' x_1^2$ ce qui fait disparaître le terme en x^2 de la seconde. Nous supposerons donc $a' = 0$. On peut ensuite mettre le second membre de la première (Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. IX) sous la forme

$$\frac{(x + \alpha y + \beta y^2 + \ldots)}{1 + P(x, y)},$$

où

$$P(x, y) = ax + by + \ldots$$

est régulière à l'origine, ainsi que le numérateur. Si $\alpha \neq 0$ nous pouvons prendre l'expression

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha y + \beta y^2 + \ldots)$$

comme nouvelle variable destinée à remplacer y, qui sera elle-même développable suivant les puissances entières de cette nouvelle variable. Si α était nul et que le numérateur fût de la forme

$$(x + \lambda y^p + \mu y^{p+1} + \ldots),$$

on prendrait pour nouvelle variable

$$y \sqrt[p]{1 + \frac{\mu}{\lambda} y + \ldots}.$$

On aura donc avec ce choix de variables, puisque ce dernier changement ne fait pas intervenir la variable x et que par suite a' reste nul :

$$x_1 = \frac{x + \alpha y^p}{1 + P(x, y)},$$
$$y_1 = b' xy + c' y^2 + \ldots.$$

Nous supposerons $p = 1$, mais le cas de p quelconque n'introduit pas de complications. En posant comme précédemment

$$X_1 = \frac{1}{x_1}, \qquad X = \frac{1}{x},$$

il vient

$$X_1 = \frac{X[1 + P(x, y)]}{1 + \alpha X y},$$

$P(x, y)$ est ordonnée suivant les puissances entières ascendantes de $\frac{1}{X}$ et de y; si de plus nous supposons

$$|Xy| < \frac{1}{|\alpha|},$$

nous pouvons développer $\frac{1}{1+\alpha X y}$ suivant les puissances ascendantes de Xy. Nous poserons même

$$|X^2 y| < \lambda,$$

constante positive, et nous aurons ainsi

$$X_1 = (X - \alpha X^2 y)\left(1 + \frac{a}{X} + by + \ldots\right) + \theta.$$

Le terme θ, si l'on suppose

$$|P(x, y)| < h,$$

a un module inférieur à

$$\frac{|\alpha^2 X^3 y^2|}{1 - |\alpha X y|}(1 + h) < \frac{\lambda^2 |\alpha|^2}{|X|} \frac{1 + h}{1 - \left|\frac{\lambda\alpha}{X}\right|}.$$

Supposons maintenant $a \neq 0$, et, comme précédemment réel et positif. En effectuant le produit dans l'expression de X_1, on le trouve égal à

$$X + a - \alpha X^2 y + (b - a\alpha) X y - b\alpha X^2 y^2,$$

les termes négligés ayant une somme inférieure en module à

$$A[|X| + |\lambda\alpha|]\left[\frac{1}{|X|} + |y|\right]^2.$$

Si l'on prend

$$|X| > 2\lambda\alpha,$$

on trouve finalement

$$X_1 = X + a - \alpha X^2 y,$$

en négligeant une quantité dont le module ne dépasse pas

$$2A|X|\left[\frac{1}{|X|} + \frac{\lambda}{|X|^2}\right]^2 + |b - a\alpha|\frac{\lambda}{|X|} - \frac{|b\alpha\lambda|}{|X|^2} + \frac{B\lambda^2}{|X|},$$

B étant une constante indépendante de λ, ainsi que A. En supposant $\lambda < 1$, par exemple, on voit que ceci est inférieur à

$$\frac{C + C'\lambda}{|X|},$$

C, C′ constantes indépendantes de λ. On a finalement

$$X_1 = X + a - \alpha X^2 y + \left(\frac{C + C'\lambda}{|X|}\right)\mathfrak{B},$$

$\mathfrak{B}$ étant une quantité bornée (indépendamment de λ).

On pourra alors construire dans le plan des X un domaine semblable au domaine Δ' qui nous est bien connu, et l'on constatera comme précédemment que si l'on prend par exemple

$$|\lambda\alpha| < \frac{a \sin\omega}{4},$$

et si le sommet de l'angle de Δ' est assez éloigné vers la droite, le point X_1 sera contenu dans Δ', et même dans un domaine congruent déplacé de $\frac{a}{2}$ par translation.

Il faut maintenant vérifier qu'on a bien encore

$$|X_1^2 y_1| < \lambda,$$

et que par suite X_n ne sortira jamais de Δ'. On le vérifie aisément, en remarquant que, grâce à l'évanouissement de a', on a

$$y_1 = y \times O[|x| + |y|] + O(|x|^3),$$

et le calcul s'achève comme dans les cas déjà examinés. On verra alors successivement que $|X_n|$ tend vers l'infini comme n, que y_n tend vers zéro comme x_n^3 ou $\frac{1}{n^2}$, d'où l'on déduira

$$X_n = X + na + O(\log n),$$

enfin que y_n est asymptotique à lx_n^3. On en déduira l'existence d'une solution, holomorphe dans le domaine de convergence des x_n, y_n, de l'équation d'Abel

$$u(x_1, y_1) = u(x, y) + a.$$

Tout se passe, à peu près, comme dans le cas $s' = 0$. Mais ici nous n'avons plus la simplification que nous permettait d'introduire dans notre analyse l'existence de la courbe analytique invariante de Poincaré. Je ne sais pas si cette courbe existe dans le cas actuel.

Bien entendu, il y aurait encore ici un grand nombre de cas particuliers à examiner, dont les uns tendent à simplifier, les autres à compliquer l'étude des problèmes qui se posent. Je me contente de signaler le cas où il y a une ligne de points doubles. Il peut arriver qu'on ait $s' = 0$ en tous les points de cette ligne :

$$x_1 = x + xy,$$
$$y_1 = y^2.$$

On voit de suite sur cet exemple que les conclusions de Lattès subsistent; mais pour ne pas allonger cette discussion déjà longue, je laisserai de côté la question de savoir s'il en est toujours ainsi.

Cas de $s = s' = 1$. — Ce cas, très important au point de vue des applications aux équations de la dynamique, exigerait de longues et difficiles recherches pour être élucidé complètement. Nous indiquerons seulement les résultats auxquels on est conduit dans quelques cas particuliers. Ici encore, il n'y aura pas toujours de domaine de convergence, notamment dans le cas où l'une des équations de la transformation se ramène à la forme $n = x_1$; il y aura alors une ligne de points doubles. Un autre cas intéressant est celui où le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$ est constant et égal à 1. Dans ce cas il est clair qu'il n'y a pas de domaine de convergence, car la transformation conserve les aires, ou les volumes dans l'hyperespace complexe; un domaine simple D suffisamment voisin de l'origine, ayant pour conséquent un domaine simple D_1, la suite des domaines D, D_1, D_2, ... ne saurait tendre vers un point limite unique; ou bien ces domaines ne resteront pas compris dans l'hypersphère de centre O et de rayon ρ à l'intérieur de laquelle $x_1(x, y), y_1(x, y)$ sont supposées définies et uniformes, et alors la transformation peut cesser d'avoir un sens : on sort du problème local et l'on a affaire au problème général de l'itération; ou bien les domaines conséquents restant compris dans cette hypersphère les fonctions analytiques $x_n(x, y), y_n(x, y)$ forment dans D une famille normale au sens de M. Montel, étant bornées dans leur ensemble; et de toute suite de ces fonctions on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers les fonctions limites $u(x, y), v(x, y)$ dont le déterminant fonctionnel est égal à 1, et qui font correspondre au domaine simple D un domaine simple Δ; soit

$$\Sigma_{\alpha_1}, \quad \Sigma_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \Sigma_{\alpha_n}, \quad \ldots$$

cette suite de puissances de la substitution Σ qui tend ainsi vers la substitution limite

$$\begin{bmatrix} x & u(x, y) \\ y & v(x, y) \end{bmatrix}.$$

Si Δ' est intérieur à Δ, les substitutions

$$\Sigma_{\alpha_2-\alpha_1}, \quad \Sigma_{\alpha_3-\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \Sigma_{\alpha_n-\alpha_{n-1}}, \quad \ldots$$

tendent vers la substitution identique; tout point de Δ' est donc limite de ses propres conséquents. De même tout point de Δ' est limite de ses propres antécédents (¹).

Prenons par exemple la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \alpha y + a x^2 + 2b\,xy + c\,y^2, \\ y_1 &= y + a' x^2 + 2b' xy + c' y^2. \end{aligned}$$

En exprimant que $\dfrac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$ est égal à 1, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \alpha y + a\left[x + \left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right) y\right]^2, \\ y_1 &= y + \lambda a \left[x + \left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right) y\right]^2 \end{aligned}$$

(¹) Ceci est à rapprocher du théorème de Poincaré concernant les transformations qui admettent un invariant intégral positif (*Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, chap. XXVI).

et le cas limite

$$x_1 = x + \alpha y,$$
$$y_1 = \qquad y + a' x^2,$$

substitution birationnelle que nous étudierons plus en détail dans la seconde partie de ce Mémoire.

D'autre part on trouve facilement des cas où il existe des domaines de convergence. Nous allons examiner celui où la substitution est réductible à la forme

$$x_1 = \frac{x}{1 + x[a + P(x, y)]}, \qquad y_1 = \frac{y}{1 + y[a' + Q(x, y)]} \qquad (a, a' \neq 0),$$

P et Q étant des fonctions holomorphes à l'origine, nulles en ce point. Les deux lignes $x = 0$, $y = 0$ sont alors invariantes et de plus $\frac{x_1}{x}$, $\frac{y_1}{y}$ sont égaux à l'unité pour $x = 0$ et $y = 0$ respectivement.

En posant

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

on obtient

$$X_1 = X + a + \frac{b}{X} + \frac{c}{Y} + \ldots, \qquad Y_1 = Y + a' + \frac{b'}{X} + \frac{c'}{Y} + \ldots \qquad (a, a' \neq 0),$$

et l'on peut ainsi raisonner sur les deux variables X et Y séparément pourvu que $|X|$ et $|Y|$ soient $> \frac{1}{\rho}$. On construira comme dans les cas analogues déjà examinés deux domaines Δ et Δ' dans le plan des X et des Y respectivement, dans lesquels X_n et Y_n tendent vers l'infini avec les valeurs asymptotiques na et na'. D'une manière plus précise on aura

$$X_n = na + \frac{b}{a} \log n + \frac{c}{a'} \log n + \xi_n,$$
$$Y_n = na' + \frac{c'}{a'} \log n + \frac{b'}{a} \log n + \eta_n,$$

ξ_n et η_n tendant vers les fonctions limites u et v qui vérifient l'équation fonctionnelle d'Abel

$$u(X_1, Y_1) = u(X, Y) + a,$$
$$v(X_1, Y_1) = v(X, Y) + a',$$

et qui, lorsque X et Y sont deux points très éloignés de l'origine à l'intérieur de leurs domaines respectifs sont de la forme

$$u(X, Y) = X - \frac{b}{a} \log X - \frac{c}{a'} \log Y + \theta(X, Y),$$
$$v(X, Y) = Y - \frac{c'}{a'} \log Y - \frac{b'}{a} \log X + \theta'(X, Y),$$

θ et θ' désignant des fonctions continues et bornées dans le domaine (Δ, Δ'). Le problème de l'inversion est aisé à discuter; il est particulièrement simple dans le cas où les coefficients b' et c sont nuls. On aura alors

$$X = f(u, v),$$
$$Y = g(u, v),$$

f et g étant uniformes quand u et v varient indépendamment dans deux domaines E et E' du plan des u et des v, ayant la même structure que Δ et Δ'; de plus,

$$X_1 = f(u + a, v + a'),$$
$$Y_1 = g(u + a, v + a').$$

On démontrera enfin, comme dans le cas d'une seule variable, l'existence de domaines dans lesquels il y a convergence vers l'origine aussi bien des antécédents que des conséquents d'un point.

Nous allons donner maintenant la démonstration d'un lemme de la théorie des fonctions analytiques de deux variables, que nous avons utilisé plus haut et qui est l'extension d'une propriété bien connue des fonctions d'une variable. Nous supposons que les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$, holomorphes dans le domaine du point (o, o), nulles en ce point et de déterminant fonctionnel non nul, sont respectivement les limites des deux suites de fonctions holomorphes $F_n(x, y)$, $G_n(x, y)$ qui convergent uniformément dans le domaine D défini par

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R'.$$

Comme $\frac{D(F, G)}{D(x, y)}$ n'est pas nul à l'origine, on peut supposer $\frac{\partial F}{\partial y}$ différente de zéro à l'origine et même dans D (rétréci s'il le faut).

Les fonctions $F_n(o, y)$ tendant uniformément pour $|y| < R'$ vers $F(o, y)$, qui n'est pas une constante puisque sa dérivée n'est pas nulle pour $y = o$, il est connu que le point $y = o$, zéro de la fonction $F(o, y)$ par hypothèse, est limite de zéros des fonctions $F_n(o, y)$ et de toute suite infinie de fonctions qu'on en peut extraire, autrement dit on aura

$$F_n(o, \eta_n) = o,$$

$|\eta_n|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Je dis qu'on peut trouver deux nombres ρ et ρ' ($\rho \leqq R$, $\rho' \leqq R'$), tels que, pour $|x| \leqq \rho$, l'équation en y,

$$F_n(x, y) = o,$$

ait une racine et une seule de module $< \rho'$, fonction analytique de x prenant la valeur η_n pour $x = o$. L'équation précédente peut en effet s'écrire

$$[F_n(x, y) - F_n(o, y)] + [F_n(o, y) - F_n(o, \eta_n)] = o.$$

Le premier crochet tendant uniformément vers

$$F(x, y) - F(o, y) = \int_0^x \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

sera, pour $n > p$, inférieur à

$$\varepsilon + K|x|,$$

si l'on appelle K le module maximum de $\frac{\partial F}{\partial n}$ dans D.

Le deuxième crochet tendant uniformément vers

$$F(o, y) = y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + \ldots,$$

pour laquelle $y = o$ est un zéro simple, puisque $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_n \neq o$, sera pour $|y| = \rho'$ supérieur en module à

$$K'\rho' - \varepsilon,$$

K étant par exemple $\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right|$, si ρ' est convenablement choisi; ε est aussi petit qu'on le veut pour n suffisament grand; ρ' étant choisi, si l'on prend ρ de manière que

$$\varepsilon + K\rho < K'\rho' - \varepsilon,$$
$$\rho < \frac{K'\rho' - 2\varepsilon}{K}$$

et $\rho \leqq R$, ce qui est possible quand ε ou $\frac{1}{n}$ sont assez petits, l'équation en y,

$$F_n(x, y) = 0,$$

aura, pour $|x| \leqq \rho$, le même nombre de racines dans le cercle $|y| \leqq \rho'$ que l'équation

$$F_n(0, y) = 0.$$

Cette dernière ayant d'ailleurs la seule racine simple $y = \eta_n$ dans le cercle considéré du plan des y, comme on le voit facilement, $F_n(x, y)$ admettra la racine simple

$$y = \varphi_n(x)$$

exprimable, comme on le sait, par une intégrale définie, et fonction continue et monogène de x se réduisant à η_n pour $x = 0$. Je dis que $\varphi_n(x)$ tend vers la fonction implicite, nulle pour $x = 0$, définie par

$$F(x, y) = 0.$$

Pour le démontrer rapidement, on peut remarquer que les fonctions $\varphi_n(x)$ régulières pour $|x| \leqq \rho$ et bornées dans leur ensemble (inférieures en module à ρ' et à R') forment, au sens de M. Montel, une famille normale dans ce cercle du plan des x; et que de toute suite infinie de ces fonctions on en peut extraire une autre qui converge uniformément vers une fonction limite régulière $\varphi(x)$. Comme on a

$$F_n[x, \varphi_n(x)] = 0$$

par définition; que d'autre part $F_n(x, y)$ converge uniformément vers $F(x, y)$ pour $|x| \leqq \rho$, $|y| \leqq \rho'$; et qu'enfin $\varphi_n(x)$, pour la suite considérée de valeurs de n, tend uniformément vers $\varphi(x)$, on en conclut

$$F[x, \varphi(x)] = 0.$$

D'ailleurs

$$\varphi(0) = 0$$

puisque

$$\varphi_n(0) = \eta_n \to 0.$$

Donc toutes les fonctions limites coïncident avec la fonction implicite de x, nulle en $x = 0$, obtenue en annulant $F(x, y)$, ce qui démontre notre assertion.

Ceci étant, les fonctions

$$G_n[x, \varphi_n(x)] = g_n(x)$$

tendent uniformément vers

$$G[x, \varphi(x)] = g(x).$$

Comme on a

$$g(0) = G[0, \varphi(0)] = 0,$$

et que les fonctions g et g_n sont régulières pour $|x| \leqq \rho$, l'équation

$$g_n(x) = 0$$

aura une racine de module infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, à moins que $g(x)$ ne soit identiquement nulle, hypothèse à écarter car elle signifierait que le déterminant fonctionnel de $F(x, y)$ et $G(x, y)$ est identiquement nul.

Mais dire que $g_n(x)$ admet un zéro de module infiniment petit revient à dire que les deux courbes

$$F_n(x, y) = 0,$$
$$G_n(x, y) = 0$$

se coupent en un point dont l'x est infiniment petit. Il en sera de même de l'y correspondant puisqu'on a

$$y = \varphi_n(x);$$

et comme $\varphi(0) = 0$, et que $\varphi_n(x)$ tend uniformément vers $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ sera infiniment petit avec $|x|$ et $\frac{1}{n}$.

Ainsi, moyennant nos hypothèses, tout point de rencontre des courbes

$$F(x, y) = 0, \qquad G(x, y) = 0$$

est limite des points de rencontre des courbes

$$F_n(x, y) = 0, \qquad G_n(x, y) = 0.$$

La démonstration suppose que le point d'intersection considéré est un point simple de l'une des courbes. Le déterminant fonctionnel peut s'annuler en ce point mais les deux courbes n'y doivent pas avoir une branche commune.

Nous verrons dans la seconde partie de ce Mémoire consacré à l'étude de certaines classes de substitutions biuniformes ou birationnelles que les équations fonctionnelles correspondantes permettent de définir des fonctions uniformes possédant des propriétés remarquables et parfois assez inattendues, sur lesquelles Poincaré a le premier attiré l'attention dans son Mémoire « Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes ». Mais les difficultés deviennent telles lorsqu'on ne se borne plus à l'étude de ces fonctions dans le voisinage d'un point double que nous devrons nous borner à établir seulement quelques propriétés de ces fonctions, sans pouvoir, même dans les cas les plus simples, obtenir des résultats aussi précis que ceux que nous avons obtenus dans l'étude des substitutions rationnelles d'une seule variable.