SZOLEM MANDELBROJT

Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 413-462
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__413_0>

SUR LES

SÉRIES DE TAYLOR QUI PRÉSENTENT DES LACUNES

PAR M. S. MANDELBROJT.

INTRODUCTION.

Le premier exemple connu d'une série de Taylor, admettant le cercle de convergence comme coupure, est celui de Weierstrass :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^{b^n}$$

(a est un nombre positif et b un entier positif). Il jouit de cette propriété que la série a un nombre infini de lacunes relatives aux coefficients. Différents auteurs ont démontré qu'une telle propriété, convenablement précisée, suffit pour que le cercle de convergence soit une coupure.

Étant donnée une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{c_n},$$

M. Hadamard a démontré que le cercle est une coupure si l'expression $\frac{c_{n+1}-c_n}{c_n}$ reste supérieure à un nombre positif fixe. M. Borel a étendu cette conclusion au cas où $\frac{c_{n+1}-c_n}{\sqrt{c_n}}$ satisfait à la même condition. Enfin M. Fabry a établi un résultat très général, dont un cas particulier est le suivant : Le cercle de convergence est une coupure si

$$\lim(c_{n+1}-c_n)=\infty \quad (^1).$$

(1) Pour la bibliographie, *voir* HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (*Scientia*, n° 12).

Tout récemment, M. Ostrowski [1], en étudiant un problème relatif à l'extension en dehors du cercle de convergence du domaine où une suite

$$S_{n_1}, \quad S_{n_2}, \quad \ldots, \quad S_{n_i}, \quad \ldots,$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_m x^m$$

converge uniformément, a donné quelques relations entre la convergence de la suite S_{n_i} pour les points réguliers de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

autres que les points intérieurs du cercle de convergence et l'existence de lacunes pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

A cette occasion, M. Ostrowski présente un exemple d'une série prolongeable en dehors du cercle de convergence, quoiqu'elle ait des lacunes, dont la largeur croît infiniment (étant donnée une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

on nommera *largeur* de lacunes la différence $\lambda_{n+1} - \lambda_n$).

On voit donc qu'étant donnée une série

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

qui a des lacunes (relatives aux coefficients), le cas où

$$\lim_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty$$

---

(1) *Abh. aus dem Mathemat. Seminär der Hamburgischen Universität*, Band 1, Heft 3-4.

n'est pas le seul où l'on puisse donner des renseignements sur la nature de la fonction $\psi(x)$.

M. Fatou [1] a énoncé un théorème très élégant, démontré par lui pour un cas spécial, et par MM. Hurwitz et Polyà [2] pour le cas général :

On peut, dans la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

changer les signes d'une infinité de coefficients, de manière que la nouvelle série admette le cercle de convergence comme coupure.

Ce fait est strictement lié à celui que les séries qui ont des lacunes satisfaisant à certaines conditions admettent le cercle de convergence comme coupure.

En effet, supposons que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

admette sur le cercle de convergence un seul point singulier. Soient $n_1, n_2, \ldots, n_i$ la suite d'indices correspondant aux termes de la série (1), dont on a changé le signe, pour que la nouvelle série obtenue par cette opération

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n x^n \qquad (a'_{n_i} = -a_{n_i};\ a'_n = a_n \text{ si } n \neq n_i)$$

admette le cercle de convergence comme coupure. On voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} x^{n_i}$$

et la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} x^{n_i},$$

---

(1) *Acta mathematica*, t. 30, p. 335.
(2) *Ibid.*, t. 40, p. 179.

qui a des lacunes, admet le cercle de convergence comme coupure.

Dans les exemples cités plus haut (à l'exception du dernier), c'est la croissance de la largeur des lacunes qui joue un rôle important. On est tenté de croire que cette condition, relative aux lacunes, qui pourrait donner des renseignements sur la nature de fonctions correspondantes n'est pas unique. L'exemple formé par le théorème de M. Fatou permet de le prévoir. On peut donc se poser le problème suivant :

Chercher une liaison entre la nature et le nombre des singularités de la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

(les a_n étant quelconques) *et la croissance de la suite* λ_n.

C'est le problème principal que j'aborde dans les pages qui suivent.

D'autre part, il existe quelques théorèmes qui se rattachent à l'étude des singularités d'une fonction, obtenus en considérant les coefficients de la série entière comme une fonction de leur indice [1]. Je montrerai que, des résultats que nous allons obtenir, on peut tirer une proposition se rapportant au même sujet.

Enfin, d'après la définition classique de Weierstrass pour la fonction analytique, les points singuliers isolés d'une telle fonction sont en général des points de ramification.

Si la fonction représentée par la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n$$

admet sur le cercle de convergence un pôle d'affixe x_0, la multiplication de chaque coefficient a_n par un facteur $T(n)$ suffit pour que la série transformée

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n \qquad [a'_n = a_n T(n)]$$

admette le point x_0 comme point critique.

---

[1] *Voir*, par exemple, Le Roy, *Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **127**, p. 949).

Dans une Note, j'indiquerai une opération sur les coefficients permettant de transformer un point isolé quelconque sur le cercle de convergence en un point critique.

En traitant cet ordre de faits, je serai amené à examiner des problèmes qui s'y rattachent.

J'exprime ici mes vifs remerciments à M. Hadamard, qui a été le premier à s'intéresser à mes recherches dès mon arrivée à Paris.

Je remercie très chaleureusement M. Henri Lebesgue de l'accueil bienveillant qu'il a fait à mes Notes en les présentant à l'Académie des Sciences, et pour les conseils très encourageants qu'il m'a donnés.

Mais je suis surtout reconnaissant à mon cher maître, M. Paul Montel, qui s'est intéressé très vivement à mes recherches, m'a donné des conseils très précieux et m'a consacré beaucoup d'heures pour suivre mes démonstrations et faire des remarques très utiles.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma reconnaissance profonde à mon frère Calel Mandelbrojt, qui n'a épargné aucun effort pour m'initier à la vie scientifique dès mon enfance.

CHAPITRE I.

1. Dans les numéros suivants, je me propose d'étudier la dépendance qui existe entre la *nature* des singularités sur le cercle de convergence d'une fonction, représentée par une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

et la croissance de la suite des λ_n, en supposant que cette série admette des lacunes relatives aux coefficients.

Au premier abord, je suppose qu'il y a une infinité de lacunes dont la largeur augmente infiniment, et j'envisage le cas le plus général, à savoir :

Étant donnée la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

je suppose qu'il existe une suite de λ_n

$$\lambda_{n_1}, \quad \lambda_{n_2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{n_i}, \quad \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad \lim(\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = \infty.$$

Je vais démontrer *que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

a sur le cercle un point singulier au moins qui n'est pas un pôle.

Je rappelle quelques résultats dus à M. Hadamard (1), qui sont nécessaires pour la démonstration :

Étant donnée une série entière

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

dont les seules singularités sur le cercle de convergence sont des pôles, on peut toujours trouver un polynome

$$P(x) = 1 + A.(x) + \ldots + A_p x^p$$

de degré égal au nombre des pôles situés sur ce cercle (2), et tel que la série

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = \psi(x) P(x)$$

admette un rayon de convergence supérieur à celui de la série $\psi(x)$.

Les coefficients de la série (α) sont donnés par la formule suivante :

$$b_{m+p} = a_{m+p} + A_1 a_{m+p-1} + \ldots + A_p a_m,$$

(1) Thèse, *Essai sur l'étude des fonctions données par le développement de Taylor*, 1892, p. 19-25.

(2) On compte chaque pôle avec son degré de multiplicité.

d'où l'on tire l'égalité

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p-1} & b_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p-1} & b_{m+2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{m1} & \dots & a_{m+p} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}.$$

Les b étant les coefficients d'une série dont le rayon de convergence est plus grand que celui de $\psi(x)$, on voit que

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|b_{m+i}|} < \frac{1}{\rho} \qquad (i = \rho, \dots, 2p),$$

ρ étant le rayon de convergence de la série $\psi(x)$. On a d'autre part

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_{m+j}|} = \frac{1}{\rho} \qquad (j = 1, 2, \dots, 2p-1).$$

On constate donc que

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,p}|} < \frac{1}{\rho^{p+1}} \qquad (^1).$$

En tenant compte d'une identité relative aux déterminants et leurs mineurs, à savoir

$$D_{m+1,p-1} D_{m-1,p-1} - D^2_{m,p-1} = D_{m-1,p} D_{m,p-2},$$

M. Hadamard démontre aussi la réciproque. Supposons que, pour certaines valeurs de P,

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,p}|}$$

soit moindre que $\frac{1}{\rho^{p+1}}$; soit p la plus petite de ces valeurs, et $\frac{1}{\rho^p \rho'}$ la limite supérieure correspondante. Par hypothèse, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ est $\frac{1}{\rho^p}$; M. Hadamard démontre alors qu'il y a sur le cercle de convergence p pôles, et les autres singularités les plus proches sont sur le cercle de rayon ρ'.

---

(1) P. 431-432.

Au cours de cette démonstration, on constate que

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} = \frac{1}{\rho^p}$$

régulièrement.

C'est précisément le résultat qui jouera pour nous le rôle important.

On voit, en effet, que si les seules singularités sur le cercle de convergence d'une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sont des pôles en nombre p, les quantités $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ tendent régulièrement vers la limite $\frac{1}{\rho^p}$.

Il est maintenant facile de démontrer le lemme suivant :

Si, dans la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

il y a une infinité de λ_{n_i} tels que

$$\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i} > k,$$

la fonction représentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

admet au moins $k+1$ pôles sur le cercle de convergence, ou bien elle a, sur ce cercle, des points singuliers autres que les pôles.

Il suffit, pour la démonstration, de former les déterminants $D_{m,p-1}$ successivement pour

$$p = 1, \qquad p = 2, \qquad \ldots, \qquad p = k$$

et pour

$$m = \lambda_{n_i} + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

En effet, on voit que les premières lignes (et premières colonnes) étant formées de termes tous égaux à zéro, les déterminants sont nuls. Aucune des valeurs

$$\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} \quad (p=1, 2, \ldots, k)$$

ne tendra régulièrement vers $\frac{1}{\rho^p}$ (quand m tend vers l'infini).

Notre lemme est donc démontré.

On démontre le théorème énoncé au commencement en remarquant qu'il ne peut y avoir sur le cercle de convergence k pôles (k étant quelconque) sans qu'il y ait d'autres singularités.

Remarquons que pour $k=1$ le lemme précédent coïncide avec un cas particulier d'un théorème traité par M. Soula (¹) sur les points principaux.

2. M. Ostrowski a énoncé le théorème suivant : Si la suite

$$S_{\lambda_{n_1}}, \quad \ldots, \quad S_{\lambda_{n_i}}, \quad \ldots,$$

où

$$S_{\lambda_n} = \sum_{m=1}^{\lambda_n} a_m x^m$$

converge uniformément dans un domaine connexe, qui contient dans son intérieur les points intérieurs du cercle de convergence et d'autres points extérieurs à ce cercle, alors la fonction

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence R, peut être représentée par une somme de deux séries, dont l'une a un rayon de convergence supérieur à R, et l'autre possède des lacunes telles que

$$\frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} > 1 + \delta.$$

On voit donc que *dans l'hypothèse du théorème de M. Ostrowski, il y*

(¹) Thèse Soula, *Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par le développement de Taylor*, 1921.

a sur le cercle de convergence un point singulier au moins qui n'est pas un pôle.

3. Le théorème que nous allons démontrer maintenant est une application du lemme précédent.

Précisons d'abord quelques définitions. $f(t)$ étant une fonction réelle d'une variable réelle t définie dans un intervalle quelconque, nous dirons que la fonction $f(t)$ devient infinie en un point t_0, si l'on peut trouver une suite de t_i

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_i, \quad \ldots,$$

tendant vers t_0 et pour lesquels

$$\lim_{i=\infty} |f(t_i)| = \infty.$$

Si $f(t)$ est une fonction imaginaire

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$$

(la variable t restant réelle) on dira que la fonction $f(t)$ devient infinie pour la valeur t_0, si l'une au moins des deux fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$ le devient pour t_0.

Soit alors $f(t)$ une fonction imaginaire de la variable réelle définie pour tout l'axe positif et périodique de période $\alpha = 2\omega$ incommensurable. Supposons que dans un intervalle de longueur α la distance entre deux points quelconques pour lesquels la fonction $f(t)$ devient infinie ne soit jamais égale à un nombre entier; nous supposons aussi que

$$M > \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|f(m)|} > 1.$$

Soit $p = E(\omega)$ (¹). *Je vais démontrer que la fonction représentée par la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, x^n$$

(¹) On désigne par $E(a)$ le plus grand entier inférieur à a.

ou bien admet au moins $p+1$ pôles sur le cercle de convergence, ou bien a, sur ce cercle, des points singuliers autres que des pôles.

Considérons un intervalle $(a, a+2\omega)$.

A un point quelconque θ de cet intervalle correspondent une infinité d'homologues que l'on peut représenter par la suite [1]

$$m_1+\eta_1, \quad m_2+\eta_2, \quad \ldots, \quad m_i+\eta_i, \quad \ldots,$$

m_i étant entier et $0 \leqq \eta_i < 1$. On dira que $m_i+\eta_i$ est l'$i^{\text{ième}}$ homologue de θ.

Comme $\alpha = 2\omega$ est incommensurable, on voit tout de suite que

$$\eta_2 \neq \eta_k \quad \text{si} \quad r \neq k.$$

Tous les nombres η_i sont situés dans l'intervalle $(0, 1)$ et ils admettent au moins un point limite η.

Soient

$$\eta_{i_1}, \quad \eta_{i_2}, \quad \ldots, \quad \eta_{i_n}, \quad \ldots$$

des valeurs de η_i qui tendent régulièrement vers η.

Étant donné un nombre positif, arbitrairement petit, δ, on pourra trouver un indice n_0 tel que pour $n > n_0$, on ait

$$|(m_{i_n}+\eta_{i_n})-(m_{i_n}+\eta)| < \delta.$$

De même, l'$i_n^{\text{ième}}$ homologue d'un nombre quelconque $c+\theta$ situé dans l'intervalle $(a, a+2\omega)$ se trouve dans le même voisinage d'un nombre situé dans l'intervalle [2]

$$(\mathrm{A}_n)\ (m_{i_n}+\eta+a-\theta,\ m_{i_n}+\eta+a+2\omega-\theta) \qquad (n > n_0).$$

Soient N_n, N_n+1, ..., $\mathrm{N}_n+\mathrm{S}$ [3] les entiers situés dans l'intervalle (A_n); N, $\mathrm{N}+1$, ..., $\mathrm{N}+\mathrm{S}$ [4] les nombres de l'intervalle

---

(1) On ne distinguera pas les nombres de points qui leur correspondent.

(2) C'est-à-dire que l'on a

$$|(m_{i_n}+\eta_{i_n}+c)-(m+\eta+c)| < \delta.$$

(3) S étant un des trois nombres suivants $2p-1$, $2p$, ou $2p+1$.

(4) N n'est pas nécessairement entier.

$(a, a+2\omega)$ satisfaisant à l'égalité

$$N-\theta = N_n - N_{i_n} \qquad (N_{i_n} = m_{i_n} + r_{i_n}).$$

Dans l'intervalle $(a, a+2\omega)$ il y a par hypothèse un seul point au plus de la forme $N+r(r=0, 1, \ldots, S)$ pour lequel la fonction $f(t)$ devient infinie.

On peut donc diviser l'intervalle $(a, a+2\omega)$ en deux segments; l'un au moins de ces segments ayant la propriété, que dans le voisinage assez proche de chaque point d'abscisse $N+r$ situé à l'intérieur de ce segment $|f(t)|$ soit borné supérieurement; la longueur de ce segment n'est pas inférieure à ω.

Le nombre de ces points est au moins égal à $E(\omega)=p$. Supposons que ces points soient les suivants :

$$N, \quad N+1, \quad \ldots, \quad N+p-1.$$

On voit maintenant très facilement que pour n assez grand, on a les inégalités suivantes :

$$(1) \quad |f(N_n)| < M_0, \qquad |f(N_n+1)| < M_0, \qquad \ldots, \qquad |f(N_n+p-1)| < M_0,$$

et alors

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[N_n]{|f(N_n)|} \leq 1 \ldots \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[N_n+p-1]{|f(N_n+p-1)|} \leq 1.$$

Par hypothèse

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|f(n)|} > 1,$$

le cercle de convergence de la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n$$

est donc inférieur à 1, et l'on voit alors que pour caractériser les singularités de notre fonction sur le cercle de convergence, il n'est pas nécessaire de tenir compte des termes dont les coefficients sont les valeurs qui entrent dans les inégalités (1).

Il nous reste donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\, x^{\lambda_n},$$

λ_n étant tel qu'il y ait une suite

$$\lambda_{n_1},\ \lambda_{n_2},\ \ldots,\ \lambda_{n_i},\ \ldots,$$

satisfaisant à la condition

$$\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i} \geqq p.$$

Notre théorème se ramène donc au lemme démontré plus haut.

4. La condition (1) (n° 1) ne peut pas donner de renseignements sur le nombre des points singuliers sur le cercle de convergence. On peut en effet construire une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

qui a des lacunes satisfaisant à cette condition et qui, pourtant, représente une fonction n'ayant qu'un seul point singulier même dans le plan tout entier. D'autre part, il suffit d'annuler, dans une telle série, un nombre infini de coefficients pour que la nouvelle série admette le cercle de convergence comme coupure.

Afin de construire notre exemple, il est nécessaire de rappeler un théorème dû à M. Leau ([1]).

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, x^n,$$

où $g(t)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à 1, n'a, dans tout le plan, d'autre point singulier que le point d'affixe 1.

Soit une série convergente à termes positifs

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_i + \ldots.$$

([1]) LEAU, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 5, 1899, p. 409-410.

Dans chaque série convergente (A_k)

$$(A_1) \qquad \frac{1}{2^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots+\frac{1}{(n^2+1)^s}+\ldots,$$

$$(A_2) \qquad \frac{1}{3^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots+\frac{1}{(n^2+2)^s}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(A_k) \qquad \frac{1}{(1+k)^s}+\ldots+\frac{1}{(n^2+k)^s}+\ldots,$$

où $\frac{1}{2}<S<1$, supprimons les n_k-1 premiers termes, n_k étant suffisamment grand pour que la somme des termes restants soit inférieure à ε_k.

La série formée par les termes

$$1, \quad \left(\frac{1}{i^2}\right)^s, \quad \ldots, \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)^s, \quad \ldots$$

et les termes qui restent dans les séries

$$(A_k)\ (k=1, 2, \ldots)$$

est une série convergente. On peut donc former une fonction entière $g(z)$ d'ordre inférieur à 1, admettant comme zéros les points d'affixes

$$(n_k+i)^2+k\,(k=0, 1, 2, \ldots, i=0, 1, \ldots, n_0=1);$$

la fonction

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n$$

admet, d'après le théorème de M. Leau, le seul point singulier 1. D'autre part, les coefficients $g(n)$ satisfont à la condition (1) relative aux lacunes, c'est-à-dire qu'il y a des lacunes dont la largeur augmente infiniment. [On voit, en effet, que pour un entier $m>n_k\,(k=1, 2, \ldots, p)$ on a

$$g(m^2)=0, \qquad g(m^2+1)=0, \qquad \ldots, \qquad g(m^2+p)=0,$$

et la largeur de ces lacunes augmente avec m] [1].

---

[1] M. Faber (*Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten* 1906) donne un exemple d'une série entière qui a une infinité de lacunes infiniment croissantes et qui admet un seul point singulier sur *le cercle de convergence*, *mais pour laquelle*

5. Il est intéressant, pour les résultats à venir, de faire la remarque suivante.

Supposons que, dans la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

les lacunes dont la largeur augmente infiniment soient les seules lacunes, c'est-à-dire que les seuls coefficients qui s'annulent soient ceux dont les indices se trouvent dans les intervalles

$$(\lambda_{n_i}, \lambda_{n_i+1}) \, (i = 1, 2, \ldots),$$

les extrémités étant exclues.

Supposons, en outre, que l'on puisse choisir les a_n de telle manière que la fonction représentée par une telle série n'admette pas le cercle de convergence comme coupure (c'est le cas de l'exemple construit dans le dernier numéro).

Alors la série $\sum b_n x^{\lambda'_n}$, où les λ'_n forment la suite des entiers qui ne figurent pas dans la suite λ_n, satisfait à la même condition (1) relative aux lacunes.

Il suffit, pour le vérifier, de rappeler un cas particulier d'un théorème de M. Fabry.

La série $\sum a_n x^{\lambda_n}$ admet le cercle de convergence comme coupure si

$$\lim_{n=\infty} (\lambda_{n+p} - \lambda_n) = \infty,$$

p étant fixe [1].

Soient en effet λ_{n_i} les indices satisfaisant à la condition (1), on a donc

$$\lim (\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = \infty,$$

si tous les λ_n jouissaient de cette propriété [c'est-à-dire si les λ_{n_i}

---

la lemniscate $|X(X+1)| = 2$ *est une coupure;* M. Faber *suppose* (sans donner la preuve) que, pour que la série puisse admettre sur le cercle de convergence des points singuliers isolés, il faut avoir $\lim_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} > 0$ [$n(\nu)$ indiquant le nombre de coefficients non nuls appartenant à la puissance d'ordre $\leq \nu$]. Dans notre exemple on voit précisément un seul point singulier *dans le plan entier*.

(1) FABRY, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 13, 1896, p. 381-382.

pour $i = 1, 2, \ldots$ prennent toutes les valeurs λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$], le cercle de convergence serait une coupure; il y a donc une suite $\lambda_{n_j}(j = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$a_{n_j} \neq 0; \qquad \alpha_{n_j+1} \neq 0; \qquad \ldots, \qquad a_{n_j+k_j} \neq 0.$$

Or, d'après le théorème de Fabry rappelé plus haut, k_j ne peut pas être borné supérieurement, et notre remarque est vérifiée.

On voit donc que la condition (1) relative à la suite de λ_n donne quelquefois les mêmes renseignements sur la nature des singularités sur le cercle de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda}.$$

6. Cette condition (1) suffit pour conclure à l'existence, sur le cercle de convergence, d'un point singulier au moins qui n'est pas un pôle. Mais, *a priori*, il peut aussi exister des pôles sur ce cercle. D'où l'utilité de la proposition suivante :

Appelons deux suites λ_n et λ'_n qui donnent par leur réunion l'ensemble de tous les nombres naturels, les *suites complémentaires* λ_n *et* λ'_n.

S'il existe une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

représentant une fonction qui admet un seul point singulier, sur le cercle de convergence, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda'_n},$$

où les b_n sont quelconques, n'a pas de pôles dont la partie principale se réduise à un seul terme $\dfrac{A_p}{(x_0 - x)^p}$.

En particulier, il n'y a pas de pôles simples sur le cercle de convergence.

Cette dernière proposition sera établie plus loin, comme conséquence d'un autre théorème.

CHAPITRE II.

7. Considérons maintenant une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

admettant des lacunes telles que, pour une suite de λ_{n_i} on ait,

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty.$$

Cette condition qui est un cas particulier de la condition (1) (n° 1) envisage un cas spécial qui doit son intérêt au théorème suivant de M. Ostrowski [1] :

Si la série de rayon de convergence 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

admet une infinité de lacunes telles qu'il y ait une suite d'indices satisfaisant à la condition

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty,$$

alors la somme de $f(x)$

$$S_{n_i} = \sum_{k=1}^{n_i} a_k x^{\lambda_k}$$

converge en chaque point régulier de $f(x)$, et uniformément dans chaque domaine intérieur à la région d'existence de la fonction $f(x)$.

La fonction $f(x)$ est donc uniforme dans toute la région d'existence (simplement connexe) et sa surface de Riemann a une seule feuille.

Pour plus de commodité, on désignera ce théorème par la lettre (A).

---

[1] *Abhandlungen aus deuss Mathem. Seminär der Hambur Univ.* Band I, Neft 3-4.

M. Ostrowski donne immédiatement un exemple d'une série satisfaisant à la condition indiquée et prolongeable au delà du cercle de convergence

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{10^{10^k}} \sum_{n=1}^{10^{4 \cdot 10^k}} \frac{(-10^{2 \cdot 10^k} z)^n}{n!}.$$

Le théorème de M. Ostrowski va nous conduire à la proposition suivante :

Si la série

$$\psi(x) = \Sigma a_n x^{\lambda_n}$$

admet des lacunes telles que, pour une suite de λ_{n_i}, on ait

$$\lim_{i=\infty} \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty,$$

les seules singularités de la fonction représentée par cette série sont des continus non bornés.

Pour la démonstration je rappelle le théorème suivant, tiré de la théorie des ensembles.

Soit E un ensemble borné, parfait et partout discontinu, on peut tracer une courbe entourant un point quelconque P de E dont aucun point n'appartient à l'ensemble et qui est tout entière contenue dans un cercle de centre P et de rayon arbitrairement petit (¹).

On généralise cette propriété de la manière suivante : soit F un ensemble contenu dans E et tel que tout ensemble contenant F et contenu dans E soit discontinu, on peut alors entourer F d'une ligne δ ne contenant aucun point E, il y a même un canal autour δ qui ne contient pas de point de E (²).

Je désignerai ce théorème généralisé par la lettre (B), et j'indiquerai, par la notation (C), le théorème de Weierstrass sur les séries de fonctions holomorphes dans un domaine fermé et convergentes uniformément sur le contour.

(¹) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les séries des polynomes*, p. 1-7.

(²) *Loc. cit.* (c'est dans ces leçons qu'on trouvera aussi la définition des notions employées ici).

Revenons à la démonstration de notre proposition.

On ne restreint pas la généralité si l'on suppose le rayon de convergence égal à 1.

D'abord il n'y a pas de points singuliers isolés : ce fait résulte des théorèmes (A) et (C). Donc l'ensemble E de points singuliers de la fonction $\psi(x)$ est parfait.

Soit P un point de l'ensemble E; entourons-le d'une courbe quelconque, par exemple, un cercle K, de rayon R. L'ensemble F, formé par les points de l'ensemble E qui se trouvent à l'intérieur du cercle K, et la circonférence K elle-même, est un ensemble parfait (il est aussi borné), puisque chaque point de l'ensemble E qui se trouve à l'intérieur du cercle K est encore une limite, c'est évidemment aussi le cas pour les points qui se trouvent sur la circonférence de K. D'autre part chaque point limite de l'ensemble E est situé ou bien à l'intérieur de K, ou bien sur K, il appartient donc, lui-même aussi à l'ensemble F.

Je dis que cet ensemble est un continu. Ce fait se ramène au suivant :

Chaque sous-ensemble F_1 de l'ensemble F est contenu dans un ensemble continu F_2, contenu lui-même dans F.

Cette proposition se démontre facilement.

Si aucun ensemble F_2 (contenu dans F et contenant F_1) n'est continu, on peut appliquer le théorème (B), on pourrait donc entourer l'ensemble F_2 d'un canal ne contenant pas de points de F. Les théorèmes (A) et (C) montrent que cela est impossible.

Donc F est un continu. Deux points quelconques de F étant donnés, par exemple un point P_1 à l'intérieur du cercle K et l'autre P_2 sur la circonférence, on pourra former une chaine correspondant à un nombre ε (les côtés du polygone sont inférieurs à ε) et qui joint les deux points.

Partons d'une suite ε_i de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_i, \quad \ldots,$$

qui tendent vers zéro.

A chaque nombre ε_i correspond un ensemble fini de sommets de polygone joignant P_1 et P_2.

Soit T_i le premier sommet (en partant de P_1) correspondant à ε_i, qui est sur la circonférence de K (il peut être le point P_2). L'ensemble dérivé de la suite de points $T_i (i=1, 2, \ldots)$ est situé sur le cercle K; soit θ un point quelconque de cet ensemble dérivé et $\varepsilon_{i_j} (j=1, 2, \ldots)$ les ε_i qui correspondent à ce point (T_{i_j} est la suite des T_i qui tend vers θ). A chaque ε_{i_j} correspond un polygone dont les sommets sont à l'intérieur du cercle K. G étant l'ensemble de ces sommets, correspondant à tous les $\varepsilon_{i_j} (j=1, 2, \ldots)$, soit G' le dérivé de cet ensemble.

Or, d'après un théorème de M. Zoretti, l'ensemble G' est un continu [1].

En remarquant que le rayon du cercle K est arbitraire, on arrive à la conclusion annoncée.

CHAPITRE III.

8. Nous allons maintenant démontrer un théorème plus général que celui du n° 1, et qui peut être regardé comme une transition entre ce théorème et celui du n° 7 :

Étant donnée une série entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

de rayon de convergence égal à un et dont les λ_n sont tels qu'il existe une suite

$$\lambda_{n_1}, \quad \lambda_{n_2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{n_i}, \quad \ldots,$$

satisfaisant à la condition

$$(1^\circ) \qquad \lim(\lambda_{n_i+1} - 2^p \lambda_{n_i}) = \infty,$$

où p est un nombre naturel, je dis que la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas être mise sous la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{[\mathrm{P}(x)]^{\frac{q}{p+1}}},$$

---

(1) *Voir* ZORETTI : *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (*Journal de Liouville*, 1905, p. 8).

On pourrait aussi démontrer notre théorème en tenant compte d'un résultat de H. MONTEL (*Sur les suites infinies de fonctions*, 1907, p. 91) en le complétant convenablement.

où φ_1 est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à un; $P(x)$ est un polynome de la forme

$$P(x) = (x - x_1)^{\nu_1}(x - x^2)^{\nu_2}\ldots(x - x_k)^{\nu_k} \qquad |x_j| = 1, \; (j = 1, 2, \ldots, k).$$

ν_k sont des nombres entiers positifs, et q un entier quelconque [1].

Le théorème reste vrai si l'on substitue dans (A) au lieu de p un entier non négatif quelconque inférieur à p.

Si l'on prend $p = 0$, on retombe sur le théorème du n° 1.

En remarquant que l'inégalité

$$\frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} > 2^p + \varepsilon$$

pour i assez grand, entraîne la condition (1°), on voit que la condition

$$\lim \frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}} = \infty$$

est un cas limite de la condition (1°), car la dernière est alors satisfaite pour p quelconque.

Pour la démonstration du théorème annoncé, mettons la série $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} x^m,$$

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} &= a_{\lambda_n} \quad \text{pour} \quad m = \lambda_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ a_m^{(1)} &= 0 \quad \text{pour} \quad m \neq \lambda_n. \end{aligned}$$

Désignons par $a_m^{(2)}$ les coefficients de la série qui représente $[\varphi(x)]^2$, et, en général, par $a_m^{(r)}$ les coefficients de la série qui représente $[\varphi(x)]^r$.

Désignons, d'autre part, par (a) le plus grand entier inférieur ou égal à a, a étant un nombre positif quelconque et par $[a]$ le plus petit entier supérieur ou égal à a; si a est entier, on a $(a) = [a] = a$.

---

[1] Si la fonction $\varphi(x)$ est multiforme, c'est la branche définie par la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ qui jouit de cette propriété.

On a évidemment

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{cases}
a_m^{(2)} = a_0^{(1)} a_m^{(1)} + \ldots + a_{\left(\frac{m}{2}\right)}^{(1)} a_{\left[\frac{m}{2}\right]}^{(1)} + a_{\left[\frac{m}{2}\right]}^{(1)} a_{\left(\frac{m}{2}\right)}^{(1)} + \ldots + a_m^{(1)} a_0^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_m^{(r)} = a_0^{(r-1)} a_0^{(1)} + \ldots + a_{\left(\frac{m}{2}\right)}^{(r-1)} a_{\left[\frac{m}{2}\right]}^{(1)} + a_{\left[\frac{m}{2}\right]}^{(r-1)} a_{\left(\frac{m}{2}\right)}^{(1)} + \ldots + a_m^{(r-1)} a_0^{(1)} \quad (^1).
\end{cases}
$$

En profitant de la condition (1°) on voit que, pour i assez grand, on a

$$
\begin{aligned}
a_{\lambda_{n_i}+1}^{(1)} &= 0, \\
a_{\lambda_{n_i}+2}^{(1)} &= 0, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
a_{2\lambda_{n_i}+s}^{(1)} &= 0,
\end{aligned}
$$

s étant aussi grand qu'on le veut.

Par suite, en vertu de la première relation de (B) on voit que, pour i assez grand, on a

$$
\begin{aligned}
a_{2\lambda_{n_i}+1}^{(2)} &= 0, \\
a_{2\lambda_{n_i}+2}^{(2)} &= 0, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
a_{2\lambda_{n_i}+s}^{(2)} &= 0.
\end{aligned}
$$

En effet on voit d'après les relations (B) que pour former

$$a_{2\lambda_{n_i}+k}^{(2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

il faut prendre les sommes

$$a_{\lambda_{n_i}+\left[\frac{k}{2}\right]}^{(1)} a_{\lambda_{n_i}+\left(\frac{k}{2}\right)}^{(1)} + a_{\lambda_{n_i}+1+\left[\frac{k}{2}\right]}^{(1)} a_{\lambda_{n_i}-1+\left(\frac{k}{2}\right)}^{(1)} + \ldots + a_{2\lambda_{n_i}+k}^{(1)} a_0^{(1)}.$$

Or ces sommes sont toutes égales à zéro. On voit donc que la série

$$[\varphi(x)]^2 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} x^m,$$

satisfait à la condition (1) du théorème du n° 1.

---

(1) Si m est pair on a $\left[\frac{m}{2}\right] = \left(\frac{m}{2}\right)$ et il faut remplacer les deux termes $a_{\left(\frac{m}{2}\right)} a_{\left[\frac{m}{2}\right]}$, $a_{\left[\frac{m}{2}\right]} a_{\left(\frac{m}{2}\right)}$ par un seul $a_{\frac{m}{2}}^2$.

En reprenant le raisonnement p fois et appliquant toutes les relations (B) pour $r = p + 1$, on peut conclure que la fonction

$$[\varphi(x)]^{p+1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(p+1)} x^m$$

satisfait à la condition (1) du n° 1.

D'autre part si l'on supposait l'égalité (A) satisfaite, la fonction $[\varphi(x)]^{p+1}$ n'aurait sur le cercle de convergence que des pôles, ce qui est impossible, en vertu du même théorème du n° 1.

CHAPITRE IV.

9. Dans les numéros précédents, on a vu que la condition (1) (p. 418) relative aux lacunes ne suffit pas pour nous renseigner sur le nombre des points singuliers de la fonction situés sur le cercle de convergence.

D'autre part, on a vu que, étant donnée une série qui a des lacunes

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

avec des a_n quelconques, et la suite complémentaire λ'_n, la suite λ'_n peut donner quelquefois des renseignements sur les singularités de la fonction $\psi(x)$.

C'est cette voie que nous allons suivre pour obtenir quelques indications sur le *nombre* de points singuliers d'une fonction représentée par une série de Taylor qui a des lacunes.

10. Rappelons le théorème fondamental de M. Hadamard sur la multiplication des singularités :

Soient les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ définies par les éléments

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots,$$

les rayons de convergence de ces deux séries étant respectivement R et R' non nuls, la fonction $F(x)$ définie par l'élément

(1) $$F(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_n b_n x^n + \ldots$$

ne peut pas avoir dans tout le plan d'autre point singulier que les produits $\alpha\beta$, α désignant l'affixe d'un point singulier de $f(x)$ et β l'affixe d'un point singulier de $\varphi(x)$ (¹).

Comme d'habitude, nous désignerons par $H[f(x), \varphi(x)]$ la série et la fonction correspondante définies par l'élément (1).

Nous dirons qu'une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n},$$

dont les coefficients non nuls sont égaux à 1, est *une série de la classe* (A), si elle peut être complétée par l'introduction de termes de coefficients quelconques correspondant aux puissances qui y manquent de façon que le cercle de convergence reste le cercle de rayon *un* et que la fonction représentée par la nouvelle série admette le point d'affixe 1 comme point régulier.

On aperçoit que si l'on supprime, dans une série de la classe (A), un nombre quelconque de termes, la série restante est encore de la classe (A).

On peut alors démontrer la proposition suivante :

Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

est de la classe (A), *la fonction*

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

dans laquelle les a_n *sont arbitraires, possède sur son cercle de convergence au moins deux points singuliers.*

Supposons, en effet, que $\psi(x)$ n'ait qu'un seul point singulier d'affixe x_0 sur le cercle de convergence.

(¹) Hadamard, *Un théorème sur les séries entières* (*Acta mathematica*, t. 22, 1898).

Soit

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \qquad (b_m = 1 \text{ pour } m = \lambda_n)$$

la nouvelle série obtenue en complétant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n},$$

et soient β les points singuliers de la fonction $\varphi(x)$.

L'opération $H(\psi, \varphi)$ ne change pas la fonction primitive $\psi(x)$.

D'autre part les seules singularités, sur le cercle de convergence, de la fonction $H[\psi(x), \varphi(x)]$ sont données par les produits $x_0\beta$.

On aboutit donc à une contradiction, puisque $x_0\beta (\beta \neq 1)$ n'est jamais égale à x_0. Notre proposition est donc démontrée.

La remarque suivante nous en fournira des exemples.

Soit une série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \tag{1}$$

telle que la suite

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

ne contienne qu'un nombre fini de multiples d'un nombre premier p.

Dans la série (1), supprimons les n_0 premiers termes pour que la série

$$f_1(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

n'admette pas d'indices multiples de p. Les singularités sur le cercle de convergence de cette série sont les mêmes que celles de la série (1).

Regardons maintenant la série

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{np} \tag{2}$$

dont les seules singularités sont des pôles simples d'affixes

$$1, \quad e^{\frac{2i\pi}{p}}, \quad e^{\frac{4i\pi}{p}}, \quad \ldots, \quad e^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}.$$

La partie principale du pôle d'affixe 1 est égale à $\frac{1}{p(1-x)}$, et l'on voit facilement que l'on peut former la série

$$(3) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=0} p x^{np} = \frac{1}{1-x} - \frac{p}{1-x^p}$$

qui représente une fonction holomorphe en 1 et de rayon de convergence égal à 1; en outre, les coefficients correspondant aux puissances $\lambda_n (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots)$ sont égaux à 1. La série

$$\sum_{n=}^{\infty} b_n x^n$$

est donc celle-ci qui est obtenue en complétant

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} x^{\lambda_n}$$

qui est une série de la classe (A).

D'après notre théorème, la série (1) a, sur le cercle de convergence, au moins deux points singuliers.

De plus, soit x_1 un point singulier de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

sur le cercle de convergence; je dis qu'il y a, sur le rercle de convergence, au moins un point singulier d'affixe $x_1 e^{\frac{2mi\pi}{p}}$, m étant un des nombres $1, 2, \ldots, p-1$.

En effet, la série (3) admet les points d'affixes

$$e^{\frac{2i\pi}{p}}, \quad \ldots, \quad e^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}$$

comme seuls points singuliers; les seuls points singuliers possibles sur le cercle de convergence de la fonction

$$\mathrm{H}[f_1(x), \varphi(x)] = f_1(x)$$

sont donc les points d'affixes

$$\alpha e^{\frac{2k i\pi}{p}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1),$$

α étant un point singulier de la fonction $f(x)$.

On voit donc que

$$x_1 = \alpha_1 e^{\frac{2k_1 i\pi}{p}},$$

α_1 appartenant à l'ensemble α, et k_1 étant un des nombres $1, 2, \ldots, p-1$.

On a, en définitive,

$$\alpha_1 = x_1 e^{\frac{-2k_1 i\pi}{p}} = x_1 e^{\frac{2(p-k_1)i\pi}{p}}.$$

La série très simple

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$$

peut être regardée comme un exemple de ce fait.

11. On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

Soit une suite

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_i, \quad \ldots$$

ne contenant qu'un nombre fini de multiples de chaque nombre p_i, appartenant à une suite quelconque donnée de nombres premiers

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_i, \quad \ldots.$$

La fonction $f(x)$, représentée par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

a, sur le cercle de convergence, un ensemble non réductible de points singuliers (¹).

En effet, soit x_1 un point singulier sur le cercle de convergence;

(¹) Un ensemble est réductible quand l'un de ses dérivés ne contient aucun point.

à chaque nombre $p_i\,(i=1, 2, \ldots)$ correspond au moins encore un point singulier d'affixe

$$x_1 e^{\frac{2n_i i\pi}{p_i}}$$

et, comme les $p_i\,(i=1, 2, \ldots)$ sont premiers, tous les points $x_1 e^{\frac{2n_i i\pi}{p_i}}$ sont différents. Il y a donc une infinité de points singuliers sur le cercle de convergence et un point limite au moins.

Désignons par E, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ... l'ensemble des points singuliers de la fonction $f(x)$, et ses ensembles dérivés successifs s'ils existent ; démontrons le lemme suivant :

« Si $E^{(r)}$ existe et si à chaque point d'affixe $P^{(r)}$ appartenant à $E^{(r)}$ et à chaque nombre p_i correspond au moins un point d'affixe

$$P^{(r)} e^{\frac{2m_i i\pi}{p}} \quad (m_i \text{ étant un des nombres } 1, 2, \ldots, p-1),$$

appartenant lui-même à l'ensemble $E^{(r)}$, alors $E^{(r+1)}$ existe et à chaque point d'affixe $P^{(r+1)}$ appartenant à $E^{(r+1)}$ correspond au moins un point d'affixe

$$P^{(r+1)} e^{\frac{2m'_i i\pi}{p_i}} \qquad (m'_i = 1, 2, \ldots, p_i - 1),$$

appartenant aussi à $E^{(r+1)}$. »

En remarquant que $E^{(0)} \equiv E$ possède cette propriété, et en utilisant le principe d'induction, on voit que notre théorème se trouve démontré.

Supposons donc que l'hypothèse du lemme énoncé soit remplie.

Il est évident que l'ensemble $E^{(r+1)}$ existe. Soit $P^{(r+1)}$ un point de cet ensemble. Marquons-le sur le cercle de convergence.

En ne conservant dans la suite

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_i, \quad \ldots$$

que les k premiers termes $p_1, p_2, \ldots, p_k$, k étant quelconque, on peut limiter le point $P^{(r+1)}$ sur le cercle de convergence par un arc C d'extrémités e^{φ_1} et e^{φ_2} assez petit pour qu'aucun point de l'ensemble

$E^{(r)}$, $P^{(r)}$ qui se trouve sur l'arc C ne puisse avoir aucun point correspondant

$$P^{(r)} e^{\frac{2 m_i i\pi}{p_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

sur le même arc.

Désignons par F une suite de points de l'ensemble $E^{(r)}$ qui tendent vers $P^{(r+1)}$. Chaque point de F qui se trouve dans $(e^{\varphi_1}, e^{\varphi_2})$ (¹) a son point correspondant sur un arc

$$\left(e^{\varphi_1+\frac{2n_m i\pi}{p_m}}, e^{\varphi_2+\frac{2n_m i\pi}{p_m}}\right) \qquad (n_m = 1, 2, \ldots, p_{m-1};\ m = 1, 2, \ldots, k)$$

au moins. Comme il n'y a pour chaque m qu'un nombre fini d'arcs de cette forme, on constate qu'il y a pour chaque p_m au moins un arc

$$\left(e^{\varphi_1+\frac{2n_m i\pi}{p_m}}, e^{\varphi_2+\frac{2n_m i\pi}{p_m}}\right)$$

qui contient une infinité de points de l'ensemble $E^{(r)}$ tendant vers un point de l'ensemble $E^{(r+1)}$ —— $P^{(r+1)} e^{\frac{2n_m i\pi}{p_m}}$. k étant arbitraire notre lemme est démontré, et avec cela notre théorème.

12. Nous allons maintenant démontrer le théorème du n° 6.

Nous procéderons par l'absurde. Supposons que la série

$$(1) \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda'_n} \quad (^2)$$

admette, sur le cercle de convergence, un pôle dont la partie principale est

$$\frac{A_p}{(x_0 - x)^p},$$

par $p+1$ intégrations successives de la fonction $\psi(x)$, on obtient une

(¹) On désignera ainsi l'arc d'extrémités e^{φ_1}, e^{φ_2}.

(²) *Voir* n° 6.

fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n x^{\lambda'_n + p - 1} \quad [1]$$

avec un pôle simple d'affixe x_0; par multiplication convenable des coefficients b'_n et par multiplication de la fonction obtenue dans cette opération, par x^{-p+1} on obtient une fonction

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b''_n x^{\lambda'_n}$$

qui admet le point d'affixe 1 comme pôle avec la partie principale

$$\frac{1}{1-x}$$

et de rayon de convergence 1.

La différence de deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} b''_n x^{\lambda'_n}$$

est une série obtenue en complétant la série de la classe (A)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

les a_n étant quelconques, admet donc sur le cercle de convergence deux points singuliers au moins, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.

13. Je voudrais, à la fin de ce Chapitre, montrer au moyen de deux exemples que les conditions, d'après lesquelles on constate quelquefois que le cercle de convergence d'une série est une coupure, sont les conditions des théorèmes des nos 6 et 11, convenablement particulari-

---

[1] A un polynome près.

sées. On constatera en même temps que les conditions qui entrent dans les hypothèses de ces théorèmes sont naturelles.

Premier exemple. — La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{p_n},$$

où la suite

$$p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_n,\quad \ldots$$

est formée des nombres premiers, admet le cercle de convergence comme coupure.

En effet, on sait que si l'on désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x par $\pi(x)$ on a l'égalité suivante :

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1.$$

On voit donc que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

et le rapport du nombre de nombres premiers qui se trouvent entre $p_n - \lambda p_n$ et $p_n + \lambda p_n$ (λ étant quelconque inférieur à 1) sur p_n satisfait à l'égalité à la limite

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\pi(p_n + \lambda p_n)}{p_n} - \frac{\pi(p_n - \lambda p_n)}{p_n} \right] = 0,$$

et, d'après un théorème de M. Fabry [1], on voit que le cercle de convergence est une coupure. Cette série satisfait aux conditions du théorème du n° 11.

Deuxième exemple. — La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n},$$

---

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 13, 1896, p. 381-382.

où la suite de λ_n est telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} \qquad (s < 1)$$

soit convergente, admet le cercle de convergence comme coupure.

En effet, il est évident que l'on peut former une fonction $g(z)$ d'ordre inférieur à 1 dont les zéros sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, et la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda'_n)\, x^{\lambda'_n} \quad (^1)$$

admet un seul point singulier dans le plan tout entier. Ce fait répond à la condition du théorème du n° 6.

D'autre part, η_m étant le nombre de termes λ_n situés dans l'intervalle

$$\lambda < 1 \qquad (\lambda_m - \lambda\lambda_m,\ \lambda_m + \lambda\lambda_m;\ m = 1, 2, \ldots),$$

il est facile de démontrer que

$$\lim \frac{\eta_m}{\lambda_m} = 0;$$

en effet, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}$$

entraîne la convergence de la série

$$\text{(A)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Si, d'autre part, il y avait une suite de λ_m

$$\lambda_{m_1},\ \lambda_{m_2},\ \lambda_{m_3},\ \ldots,\ \lambda_{m_i},\ \ldots$$

telle que

$$\frac{\eta_{m_i}}{\lambda_{m_i}} > \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0;\ i = 1, 2, 3, \ldots),$$

---

(1) Les λ'_n et les λ_n forment, par leur réunion, la suite de tous les nombres premiers.

les termes λ_n qui se trouvent dans l'intervalle

$$(B_i) \qquad (\lambda_{m_i} - \lambda\lambda_{m_i};\ \lambda_{m_i} + \lambda\lambda_{m_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

fourniraient pour la série (A) une somme supérieure à

$$\frac{\eta_{m_i}}{\lambda_{m_i}(1+\lambda)} > \frac{\lambda_{m_i}\varepsilon}{\lambda_{m_i}(1+\lambda)} = \frac{\varepsilon}{1+\lambda}.$$

En choisissant parmi les intervalles (B_i) ceux qui n'empiètent pas les uns sur les autres (B_{i_n}), on voit que les (B_{i_n}) $(n = 1, 2, \ldots)$ correspondants fournissent chacun une somme supérieure à $\frac{\varepsilon}{1+\lambda}$, et la série (A) doit diverger; nous sommes donc en contradiction avec l'hypothèse.

On voit donc que

$$\lim \frac{\eta_m}{\lambda_m} = 0$$

et le même théorème de H. Fabry conduit à la conclusion cherchée [1].

CHAPITRE V.

14. Dans sa Thèse [2] M. Fatou a démontré le théorème suivant : soit une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

dont les coefficients a_n vérifient les deux conditions

1° $$\lim a_n = 0;$$

2° $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

est divergente.

Alors il suffit de changer le signe d'une infinité de coefficients

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 13, 1896, p. 381-382.
(2) *Acta mathematica*, t. 30, p. 335.

(convenablement choisis) pour que la nouvelle série admette le cercle de convergence comme coupure.

En faisant ces restrictions relatives aux coefficients, M. Fatou affirmait qu'il est « infiniment probable » que le théorème est vrai pour des a_n quelconques. Ce théorème général a été établi par MM. Hurwitz et Polyà [1].

Nous avons déjà indiqué, dans l'introduction, la liaison entre cette proposition et l'étude des séries entières qui ont des lacunes.

Nous verrons plus loin le parti que l'on peut tirer de ce théorème pour obtenir des renseignements relatifs aux singularités sur le cercle de convergence pour une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

qui a des lacunes.

15. Nous allons démontrer dans ce numéro un théorème analogue à celui de M. Fatou :

Soit une suite d'indices

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_i, \quad \ldots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim(n_{i+1} - n_i) = \infty.$$

Soit, d'autre part, un ensemble quelconque non dénombrable de valeurs de φ *situé dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$; *alors la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

étant quelconque de rayon de convergence ρ, *on peut trouver pour* φ *une valeur particulière* φ_0 *telle que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n,$$

---

[1] *Acta mathematica*, t. 40, p. 179 et 182.

où

$$a'_{n_i} = a_{n_i} e^{i\varphi_n} \quad et \quad a'_n = a_n \quad si \quad n \neq n_i,$$

admette le cercle de convergence comme coupure [1].

Démonstration. — Remarquons qu'une fonction étant prolongeable en dehors du cercle de convergence, est régulière pour un point d'affixe $\rho e^{i\psi}$, ψ étant rationnel et ρ le cercle de convergence. Désignons par

$$F_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n,$$

$$a'_{n_i} = a_{n_i} e^{i\varphi} \quad et \quad a'_n = a_n \quad si \quad n \neq n_i,$$

Si l'on supposait qu'aucune série $F_\varphi(x)$ n'admît le cercle de convergence comme coupure, on serait obligé d'admettre que deux fonctions au moins, par exemple $F_{\varphi_1}(x)$ et $F_{\varphi_2}(x)$, admettent sur le cercle de convergence le même point régulier $\rho e^{i\psi}$, ψ étant rationnel, car l'ensemble des ψ est dénombrable [2] et celui des φ est non dénombrable.

Or ceci est impossible; en effet on voit que la série

$$F(x) = F_{\varphi_1} - F_{\varphi_2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\, x^{n_i}$$

devrait admettre le point $\rho e^{i\varphi_1}$ comme point régulier, ce qui est impossible d'après le théorème de M. Fabry.

On voit d'après notre démonstration, que l'ensemble des valeurs φ de l'intervalle (0, 2π), qui ne satisfont pas à notre proposition, est dénombrable [3]. En effet, s'il était non dénombrable, on pourrait en extraire une valeur de φ satisfaisant à notre proposition. La contradiction est évidente.

---

(1) La méthode de démonstration de ce théorème diffère de celle donnée par M. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. **40**, p. 182) pour le théorème de M. Fatou et de celle donnée par M. Polyà (*Acta Mathematica*, t. **41**, p. 106) pour un théorème analogue à celui de M. Fatou et le nôtre, en ce que les deux auteurs prennent comme base le fait suivant : « un ensemble d'arcs n'empiétant pas les uns sur les autres est dénombrable.

(2) *Voir* note précédente.

(3) Je dois cette remarque à M. P. Montel.

16. Ce résultat peut être relié au théorème bien connu : Le cercle de convergence est en général une coupure [1]. L'énoncé de ce théorème est assez vague, car l'ensemble de séries non prolongeables et l'ensemble de celles prolongeables ont l'un et l'autre la puissance du continu (*Voir* à cet effet Polyà, *Acta mathematica*, t. 41, p. 99). Mais, en se reportant au numéro précédent, on voit que l'on a obtenu un moyen d'exprimer un fait très voisin du théorème en question et qui est en même temps très précis.

Étant donnée une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et une suite de n_i telle que

$$\lim(n_{i+1}-n_i)=\infty,$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}=\frac{1}{\rho},$$

on peut former une infinité ayant la puissance du continu de séries,

$$\sum a'_n x^n,$$

$$a'_{n_i}=a_{n_i}e^{i\varphi} \qquad et \qquad a'_n=a_n \qquad si \qquad n\neq n_i,$$

telles que les fonctions correspondantes admettent le cercle de convergence comme coupure, et une infinité dénombrable (peut-être même un ensemble fini) de séries de la même forme prolongeables au delà du cercle de convergence.

Cet énoncé éclaire en partie le théorème rappelé plus haut.

Remarquons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

---

[1] Voici l'énoncé exact de ce théorème : « Si l'on donne au hasard une série de Taylor dont le cercle de convergence ait un rayon fini, en général la fonction qu'elle représente ne pourra être prolongée au delà de ce cercle »; la signification de l'expression « écrite par hasard » est la suivante : « ayant donné les m premiers coefficients, les coefficients suivants n'ont aucune relation particulière avec les premiers (*Voir* Hadamard, *La série de Taylor*, etc.) ».

étant une série entière, $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ une suite telle que

$$\lim(n_{i+1} - n) = \infty,$$

il n'y a qu'une seule valeur pour φ telle que la série

$$\sum a'_n x^n,$$

$$a'_{n_i} = e^{i\varphi} a_{n_i} \qquad \text{et} \qquad a'_n = a_n \qquad \text{si} \qquad n \neq n_i,$$

n'admette sur le cercle de convergence que des points singuliers isolés ([1]).

Signalons enfin le fait suivant très curieux.

Étant donnée une série $\sum a_n x^n$ (les a_n sont différents) et une suite de n_i telle que

$$\lim(n_{i+1} - n_i) = \infty,$$

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = \frac{1}{\rho},$$

on peut trouver dans un cercle de rayon aussi petit que l'on veut une valeur de ε telle que *la série*

$$\sum a''_n x^n,$$

$$a''_{n_i} = (a_{n_i} + \varepsilon)\, e^{i\varphi} \qquad \textit{et} \qquad a''_n = a_n \qquad \textit{si} \qquad n \neq n_i,$$

admette le cercle de convergence comme coupure quelle que soit la valeur de φ. La démonstration ne diffère pas de celle du théorème du n° 15.

17. En se reportant à la démonstration du théorème de M. Fatou, donnée par M. Polyà ([2]), on aperçoit qu'elle pourrait servir à démontrer le fait suivant qui est plus général : Étant donnée une série entière (de rayon de convergence fini), *on peut changer le signe d'une infinité de coefficients de manière que la fonction correspondante admette sur le cercle de convergence un ensemble fermé quelconque de points singuliers.*

([1]) Au lieu de prendre les points isolés, on pourrait faire les hypothèses plus générales. On se sert toujours du même procédé en faisant la différence de deux fonctions.

([2]) *Acta mathematica*, t. 40, p. 179.

Je vais modifier la démonstration de M. Polyà, cette modification a pour nous quelque intérêt.

Rappelons pour cela un théorème très général de M. Fabry, dont les autres propositions, souvent citées, sont des conséquences :

γ_n étant un arc qui dépend de n, soit S le nombre de changements de signe de la partie réelle a'_q de $a_q e^{-i\gamma_n}$ lorsque q varie de $n - \lambda n$ à $n + \lambda n$ (λ étant un nombre arbitraire < 1 positif, mais fixe). Si l'on peut choisir γ_n en fonction de n de telle sorte que, pour une infinité de valeurs de n, les quantités $\frac{1}{n} \mathrm{L} |a'_n|$ et $\frac{\mathrm{S}}{n}$ tendent vers zéro, le point $z = 1$ est singulier ([1]).

Soit alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Étant donné sur le cercle de convergence un ensemble dénombrable de points

$$e^{i\varphi_1}, \quad e^{i\varphi_2}, \quad \ldots, \quad e^{i\varphi_j}, \quad \ldots,$$

admettant notre ensemble comme dérivé. Soit

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_j, \quad \ldots$$

une suite ayant les deux propriétés suivantes : 1°

$$\lim_{j=\infty} \sqrt[n_j]{|a_{n_j}|} = 1; \tag{1}$$

2° Les intervalles

$$(n_j - \lambda n_j, \quad n_j + \lambda n_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

n'empiétant pas les uns sur les autres.

Groupons les indices n_j de la manière suivante :

$$n_1,$$
$$n_2 n_3,$$
$$n_4 n_5 n_6.$$

([1]) M. Polyà se sert d'une modification de ce théorème. Pour notre but, la démonstration même du théorème de M. Fatou par la méthode de M. Polyà exige des compléments.

Nous désignerons les n_j de la première colonne par n_{j_1} de la deuxième n_{j_2}, etc.

A chaque nombre φ_k, faisons correspondre une colonne n_{j_k}.

Pour que l'égalité (1) soit vérifiée, il faut nécessairement que l'une des deux égalités suivantes soit vérifiée.

Ou bien

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \sqrt[n_{jk}]{|a'_{n_{jk}}|} = 1,$$

ou bien

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \sqrt[n_{jk}]{|a''_{n_{jk}}|} = 1,$$

$a'_{n_{jk}}$ étant la partie réelle de $e^{-in_{jk}\varphi_k}a^{n_{jk}}$ et $a''_{n_{jk}}$ sa partie imaginaire.

Si la première de ces égalités a lieu, il suffit, d'après le théorème de M. Fabry, de changer de signe une infinité de coefficients pour que le point 1 soit singulier pour chaque série

$$\sum a_n e^{-in\varphi_k} x^n \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et le point $e^{i\varphi_k}$ sera singulier pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Si, au contraire, c'est la deuxième égalité qui a lieu, il suffit de multiplier la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-in\varphi_k} x^n,$$

par le nombre imaginaire i pour retomber dans le cas précédent (c'est-à-dire la partie imaginaire deviendra la partie réelle et nous avons exactement le même cas que nous venons de considérer). Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Remarquons que les coefficients dont on change le signe ne sont pas complètement déterminés même si la correspondance entre les nombres φ_k et une suite de n_j est déjà fixée. Notre méthode nous laisse libres, en quelque sorte, de donner par le même procédé plusieurs séries qui jouissent de la même propriété en question.

18. Voici une conséquence immédiate de ce théorème :

Étant donnée une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

assujettie à la seule condition d'avoir, sur le cercle de convergence, tous ses points singuliers isolés, on peut, en annulant une infinité de coefficients, obtenir une nouvelle série, admettant tous les points de l'ensemble fermé (¹) *donné comme points singuliers* (²).

Soient, en effet,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la série donnée,

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_i, \quad \ldots,$$

les indices correspondant aux coefficients dont on change le signe pour que les points de l'ensemble donné soient singuliers, et soit

$$\sum a'_n x^n$$

la série obtenue après le changement de signe, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 2 \sum a_{n_i} x^{n_i},$$

d'où la conclusion cherchée.

Cela s'applique en particulier à une série qui admet sur le cercle de convergence un seul point singulier, par exemple un pôle simple.

19. Revenons aux séries qui ont des lacunes, pour démoutrer la proposition suivante :

(¹) Cet ensemble ne doit pas contenir de points isolés identiques à ceux de la fonction donnée.

(²) On a ici la même liberté pour choisir les coefficients à annuler.

Considérons trois séries :

1° $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \qquad \text{(de rayon de convergence } \rho\text{)}$$

possédant une infinité de lacunes telles que pour une suite de λ_n

$$\lambda_{n_1}, \quad \lambda_{n_2}, \quad \ldots,$$

on ait

$$\lim(\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = \infty;$$

2° $$\sum_{i=1}^{\infty} b_{n_i} x^{\lambda_{n_i}+1};$$

3° $$\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda_m} \qquad \text{(de rayon } \rho\text{)},$$

les b étant les coefficients (de même indice) d'une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

admettant un seul point singulier, sur le cercle de convergence, qui est pôle simple, et les λ sont tels que les trois suites λ_n, $\lambda_{n_i} + 1$, λ_m forment la suite de tous les nombres naturels.

Je dis alors que :

La fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda_m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

admet sur son cercle de convergence un point singulier au moins qui n'est pas un pôle.

Mais la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{n_i} x^{\lambda_{n_i}+1} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$$

peut n'avoir qu'un pôle simple sur le cercle de convergence (il faut pour cela choisir les a_n).

Ce théorème se démontre par la même méthode que celui du n° 1.

Onf orme les déterminants

$$D_{\lambda_{n_i}+2,p},$$

relatifs aux coefficients c_n, et l'on remarque que l'expression

$$\sqrt[\lambda_{n_i}+2]{|D_{\lambda_{n_i}+2,p}|}$$

pour $p > 0$ ne tend jamais régulièrement vers $\frac{1}{\rho^{p+1}}$ [1] (puisque la fonction admet un seul pôle sur le cercle de convergence).

On remarque, d'autre part, que pour $p = 0$, on a

$$c_{\lambda_n+1} = 0,$$

la première partie de notre théorème peut être considérée comme démontrée. Quant à la deuxième partie, on voit qu'il y a une série au moins, satisfaisant à cette condition, à savoir la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

(mais il en a une infinité, ce qu'on voit en ajoutant à $\varphi(x)$ une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n x^{\lambda_n}$$

de rayon de convergence inférieur à ρ).

20. Nous allons maintenant résumer les résultats obtenus dans ce Chapitre pour les coordonner.

Il serait très naturel d'adopter la convention suivante : si la somme de deux séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_n$$

de même rayon de convergence représente une fonction dont les seules singularités sur le cercle de convergence sont des pôles, on dira alors que *la singularité totale de la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_m$$

(1) *Voir* HADAMARD, *Thèse*, p. 19-25.

sur ce cercle est identique à celle de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

On arrive donc à un mode de comparaison des singularités, sur le cercle de convergence, des deux séries.

Les propositions des nos 18 et 19 montrent bien que les singularités sur le cercle de convergence des séries de la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda m}$$

formées par les coefficients d'une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

qui n'admet qu'un pôle simple sur le cercle de convergence (en annulant une infinité de coefficients) *peuvent, pour caractériser les singularités, sur le cercle de convergence, servir de mesure à d'autres séries de même rayon de convergence.*

En effet, les trois suites λ_n, λ_m et $\lambda_{ni} + 1$ ayant le même sens qu'aux numéros précédents, on voit que *la singularité totale de la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda m}$$

(a_n étant quelconque) ne peut pas être identique à celle de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda m},$$

mais on peut trouver une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda m}$$

(c'est-à-dire on peut choisir les a_n), dont la singularité totale soit iden-

tique à celle de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda_m} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{\lambda_{n_i}+1} x^{\lambda_{n_i}+1}.$$

On voit, d'autre part, que les deux séries peuvent admettre tous les points d'un ensemble donné comme points singuliers [1].

Si l'ensemble fermé en question était tout le cercle de convergence on voit *qu'on pourrait comparer*, en quelque sorte, *la nature de la coupure des séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \quad [2]$$

(a_n étant quelconque) à celle des séries complètement définies.

D'autre part, on voit l'influence de la croissance de la suite λ_n sur la nature des singularités sur le cercle de convergence d'une fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

qui a des lacunes.

Remarquons, enfin, que d'après le n° 15 les modules de tous les coefficients étant définis, ainsi que tous les arguments, sauf ceux qui correspondent aux indices n_1, n_2, ..., n_i, ..., on voit que toutes les séries (obtenues par ce théorème du n° 14) qui admettent le cercle de convergence comme coupure et qui sont de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$$

ont une propriété commune.

---

[1] En effet, notre démonstration du théorème de M. Fatou, généralisé, montre bien qu'on peut former les deux séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{\lambda_m} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{\lambda_{n_i}+1} x^{\lambda_{n_i}+1}$$

ayant, toutes deux, les points donnés comme points singuliers.

[2] Si cette série admet le cercle de convergence comme coupure.

NOTE.

1. La série bien connue de M. Fredholm

$$\psi(x) = 1 + ax + a^2 x^4 + \ldots + a^n x^{n^2} + \ldots$$
$$(0 < a < 1)$$

a la propriété de prendre elle-même, ainsi que toutes ses séries dérivées, des valeurs bien déterminées et continues sur le cercle de convergence, quoique ce cercle soit une coupure.

On a donné plusieurs exemples de fonctions analytiques jouissant de la propriété indiquée.

Il est intéressant de remarquer que, *étant donnée une série entière quelconque*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence fini, on peut toujours indiquer une infinité de fonctions

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{T(n)} x^n$$

qui admettent les mêmes points singuliers que la fonction $F(x)$, *et qui soient elles-mêmes, ainsi que leurs dérivées, continues sur le cercle de convergence* (quand on s'approche d'un point de ce cercle par une courbe quelconque ne sortant pas du cercle).

La propriété de la série de M. Fredholm offre un cas particulier de celle de cet énoncé.

Nous nous appuierons sur deux propositions de M. Polyà (¹) :

1° Les r_n étant positifs et tels que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{r_n} = 1,$$

(¹) *Acta math.*, t. 41, p. 106.

on peut former une fonction entière $g(z)$ de genre O, de zéros négatifs, et telle que $g(n) \geqq r_n$.

2° La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{g(n)} x^n$$

admet les mêmes points singuliers que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pour établir notre proposition, prenons un nombre positif a supérieur à un; on a

$$\lim \log \sqrt[n]{a^{\sqrt{n \log n}}} = \lim \frac{\sqrt{n \log n}}{n} = 0$$

et l'on voit que

$$\lim \sqrt[n]{a^{\sqrt{n \log n}}} = 1.$$

Soit maintenant

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série entière de rayon de convergence 1.

On peut donc, d'après les propositions de M. Polyà, former une fonction entière de genre O et de zéros non positifs, telle que l'on a

$$\frac{|a_n|}{g(n)} \leqq a^{-\sqrt{n \log n}} \text{ (1)}.$$

---

(1) On peut remplacer les deux théorèmes de M. Polyà par son troisième qui est le résumé de deux précédents : ε_n étant une suite de nombres positifs tels que

$$\lim \sqrt[n]{\varepsilon_n} = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série de rayon de convergence égale à 1, on peut former une nouvelle série

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{g(n)} x^n \right)$$

qui a les mêmes singularités que la première et dont les coefficients correspondants sont inférieurs à ε_n. (Si les premiers termes de la suite ε_n sont zéros, les premiers coefficients de la nouvelle série sont aussi zéros.)

D'autre part on voit, que

$$\lim \frac{-\sqrt{n \log n}.\log a}{s \log n} = -\infty,$$

s étant quelconque.

Et l'on constate facilement que les termes de la série

$$1 + a^{-\sqrt{2\log 2}} + \ldots + a^{-\sqrt{n \log n}} + \ldots$$

et, *a fortiori*, ceux de la série

$$\frac{|a_1|}{g(1)} + \frac{|a_2|}{g(2)} + \ldots + \frac{|a_n|}{g(n)} + \ldots,$$

décroissent plus vite que les termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots.$$

D'où il résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{g(n)} x^n,$$

ainsi que ses séries dérivées, convergent uniformément à l'intérieur du cercle de rayon 1 et sur le cercle lui-même.

Le théorème classique d'Abel suffit pour vérifier notre proposition (¹).

2. On peut tirer de ce fait quelques conséquences intéressantes.

Soit une série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qui admet sur le cercle de convergence, de rayon ρ, un point singulier, non critique P.

Supposons, en outre que, à l'intérieur d'un cercle C_1, de rayon $\rho_1 > \rho$,

(¹) La généralisation pour le cas d'un rayon de convergence fini quelconque est évidente.

le point P soit le seul point singulier de la fonction $F(x)$ (une généralisation sera évidente).

Envisageons sur le cercle C_1 deux points quelconques A et B et menons les deux segments AP et BP formant l'angle α (pour éviter les difficultés arrondissons le sommet P de cet angle) (voir *fig.* 1).

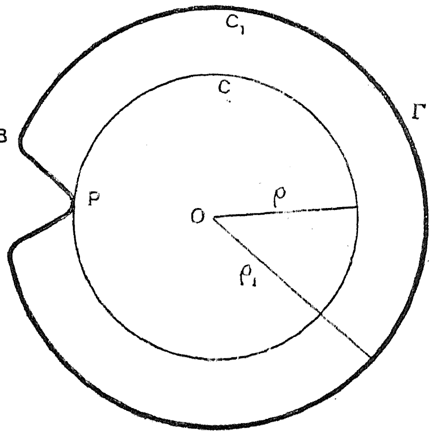

Fig. 1.

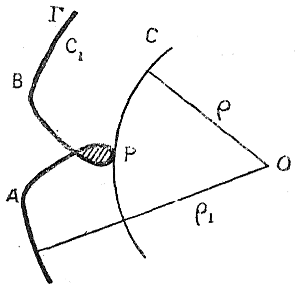

Fig. 2

Je dis que l'on peut effectuer sur les coefficients a_n de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une opération telle que pour la série de coefficients transformés par l'opération en question, le point P reste encore le seul point singulier sur le cercle de convergence de rayon ρ, et (si le point P est essentiel) ce n'est que dans l'angle $\widehat{APB}$ que la fonction représentée par cette nouvelle série prend une infinité de fois, dans tout cercle de centre P, toute valeur finie ou infinie, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus.

[Si la figure est faite de telle manière que, près du point P, la couronne entre C et C_1 soit deux fois couverte (*fig.* 2) (1), le point P devient critique.]

Soit, en effet, Γ le contour fermé entourant le domaine Δ.

(1) La figure 2 montre seulement le voisinage du point P.

Soit, en outre,

$$X = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^n$$

la fonction qui effectue la représentation conforme de Δ sur un cercle de centre O et de rayon 1.

La fonction

$$F(x) = F_0(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

admet sur le cercle de convergence de rayon 1 un seul point singulier d'affixe P_0 ; on pourra donc former une fonction

$$F_1(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{g(n)} X^n \text{ (1)},$$

qui a la propriété, indiquée dans la proposition, démontrée au n° 1 de cette Note.

D'autre part, on sait que les coefficients de la série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

satisfont aux égalités suivantes (2) [en remarquant que $f(0) = 0$] :

$$(A_0) \qquad a_0 = b_0,$$
$$(A_1) \qquad a_1 = b_1 \gamma_1,$$
$$(A_2) \qquad a_2 = b_1 \gamma_2 + b_2 \gamma_1^2,$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(A_n) \qquad a_n = b_1 \gamma_n + \ldots + b_n \gamma_1^n.$$

Les nombres γ et a étant connus on peut déterminer les b de proche en proche, par les équations (A_n).

---

(1) $g(z)$ étant convenablement choisie.

(2) *Voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I.

On obtient les coefficients a'_n de la fonction

$$F_2(x) = F_1(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n$$

en remplaçant dans les égalités (A_1), ..., (A_n), ..., les b_n par $\frac{b_n}{g(n)}$. Cette fonction $F_2(x)$ a bien la propriété indiquée au commencement de ce numéro.