ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 39 (1922), p. 131-215
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__131_0>

MÉMOIRE

SUR LA

PERMUTABILITÉ DES FRACTIONS RATIONNELLES

Par M. Gaston JULIA.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES FRACTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES.

INTRODUCTION.

1. Étant donnée une fraction rationnelle quelconque $Z_1 = R(Z)$ pour laquelle le point $Z = \alpha$ est un point invariant répulsif,

$$\alpha = R(\alpha), \ |R'(\alpha)| > 1,$$

il est connu [voir *Journal de Liouville*, 1890 (*Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes*, par H. Poincaré)] qu'on peut toujours déterminer une fonction méromorphe $G(z)$ telle que $G(0) = \alpha$, $G'(0) = 1$, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$G(sz) = R[G(z)] \qquad [s = R'(\alpha)]. \tag{1}$$

On dit que $G(z)$ admet un théorème de multiplication rationnel. $G(z)$ est la fonction méromorphe *fondamentale* correspondant à $R(Z)$ et au point α, parce qu'on a choisi $G'(0) = 1$. Il est clair qu'il existe une fonction méromorphe $G_\sigma(z)$ pour toute valeur $\sigma \neq 0$ et telle que

$$G'_\sigma(0) = \sigma, \qquad G_\sigma(0) = \alpha,$$

avec

$$G_\sigma(sz) = R[G_\sigma(z)]. \tag{2}$$

Il suffit de prendre

$$G_\sigma(z) = G(\sigma z)$$

pour s'en assurer; et comme la méthode des coefficients indéterminés appliquée à la détermination des coefficients du développement de $G_\sigma(z)$ en puissances entières de z de façon que $G_\sigma(z)$ satisfasse aux conditions (2), détermine tous ces coefficients à partir de α et de σ, il est clair que $G_\sigma(z)$ *est unique pour chaque valeur de* σ, la fonction R et le point α étant donnés fixes. La relation $G_\sigma(z) = G(\sigma z)$ prouve alors qu'il suffit d'étudier $G(z)$.

Ces fonctions $G(z)$, pour lesquelles existe un théorème de multiplication rationnel, jouissent de propriétés remarquables que j'ai étudiées ailleurs : on peut définir dans le plan des z un ensemble parfait que j'ai appelé $\mathcal{E}_s$ sur lequel j'ai attiré l'attention dans mes précédents Mémoires des *Annales de l'École Normale supérieure* [*A. E. N. S.*, t. XXXVI, XXXVII, XXXVIII (*Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes*)], parce que les propriétés de cet ensemble $\mathcal{E}_s$ relativement aux $G(z)$ peuvent s'étendre à toutes les fonctions entières et à tous les nombres s supérieurs à 1 en module, ainsi qu'à la plus grande partie des fonctions méromorphes. Les fonctions particulières $G(z)$ ont ainsi servi à préciser notablement le théorème de M. Picard relatif aux points singuliers essentiels isolés des fonctions uniformes.

2. Une observation facile à faire est qu'il existe des classes intéressantes de fonctions uniformes admettant plusieurs théorèmes *distincts* de multiplication rationnels. Par exemple, toutes les fonctions circulaires, les fonctions elliptiques. Si l'on cherche, étant données deux fractions rationnelles, à quelles conditions une fonction uniforme $G(z)$ peut admettre deux théorèmes de multiplication correspondant à ces deux fractions, une condition nécessaire, la *permutabilité* des deux fractions, vient s'offrir immédiatement et il est remarquable, ainsi qu'on le démontrera plus loin, que cette *condition est suffisante.* Ainsi se trouve posé naturellement le problème très intéressant de *la permutabilité des fractions rationnelles, et de l'étude des fonctions uniformes qui*

admettent des théorèmes de multiplication rationnels correspondants. Dans le présent Mémoire, j'étudierai ce problème et je montrerai qu'il est en liaison étroite avec le problème de l'itération auquel j'ai consacré un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1918 (*Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles*), pages 47 à 245, ainsi que plusieurs Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (t. 165, 166). Les résultats auxquels je suis parvenu sont suffisamment simples et précis pour légitimer l'étude du problème ici posé. De plus, ils jettent un jour nouveau sur le problème de l'itération lui-même et sur des problèmes connexes relatifs aux équations fonctionnelles. A ce double titre, le problème ici posé et traité m'a paru intéressant.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS MÉROMORPHES AYANT DEUX THÉORÈMES DE MULTIPLICATION RATIONNELS. INTRODUCTION DES SUBSTITUTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES.

3. Soit $G(z)$ une fonction méromorphe satisfaisant aux deux relations

$$G(s_1 z) = R_1[G(z)], \tag{3}$$

$$G(s_2 z) = R_2[G(z)], \tag{4}$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles d'un argument et de degré > 1 (¹); de plus, $s_2 \neq s_1^m$, *quel que soit l'entier positif ou négatif m.* Je dirai que ces deux relations sont distinctes. La relation

$$G(s_1^k z) = R_1^{(k)}[G(z)],$$

où $R_1^{(k)}$ est l'itérée d'ordre k de R_1, n'est pas considérée comme distincte de (3), elle en est une conséquence.

Si $G(0) = \alpha$, on a

$$R_1(\alpha) = R_2(\alpha) = \alpha,$$

α *est point invariant commun à* R_1 *et* R_2. On peut toujours, en considé-

(¹) Si R_1, par exemple, est du premier degré, $G(z)$ ne pourrait être qu'une *fonction homographique de z*, cela se voit immédiatement en ramenant $R_1(Z)$ à la forme $Z_1 = s_1 Z$ par une transformation homographique auxiliaire.

rant au besoin $G(z)-\alpha$ au lieu de $G(z)$, supposer que $\alpha = 0$ sans restreindre la généralité. Alors

$$R_1(0) = R_2(0) = 0.$$

De plus, par un changement de z en $z\sigma$, on peut toujours supposer que $G'(0)$, supposé ici $\neq 0$, est égal à 1 :

$$G(0) = 0,$$
$$G'(0) = 1.$$

Il est clair que les multiplicateurs s_1 et s_2 sont respectivement égaux à

$$R'_1(0) = \left(\frac{dR_1(Z)}{dZ}\right)_{Z=0} \qquad \text{et} \qquad R'_2(0) = \left(\frac{dR_2}{dZ}\right)_{Z=0}.$$

4. Si, comme on le suppose, $G(z)$ est méromorphe dans tout le plan, $|s_1|$ et $|s_2|$ *doivent être nécessairement* > 1.

Démontrons-le, par exemple, pour s_1 :

1° Supposons $|s_1| < 1$ et soit z un point quelconque du plan, les points $z_1 = zs_1$, $z_2 = zs_1^2$, ..., $z_n = zs_1^n$, ... tendront vers zéro quand n grandit indéfiniment.

Il leur correspond dans le plan $Z = G(z)$ des points, $Z = G(z)$:

$$\begin{array}{ll}
Z_1 = G(z_1) = R_1(Z), & \\
Z_2 = G(z_2) = R_1[R_1\ (Z)] = R_1^{(2)}(Z) & [R_1^{(2)}(Z) \text{ itérée de } R_1(Z)], \\
Z_3 = G(z_3) = R_1[R_1^{(2)}(Z)] = R_1^{(3)}(Z) & [R_1^{(3)}(Z) \text{ itérée } 3^e \text{ de } R_1(Z)], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\
Z_n = G(z_n) = \qquad\qquad R_1^{(n)}(Z), & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

et les points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont les conséquents successifs de Z dans l'itération que définit $R_1(Z)$. Si n grandit indéfiniment, $G(z_n)$ tend vers $G(0) = 0$ quel que soit z dans toute région à distance finie du plan z. Donc Z_n doit tendre vers *zéro* quel que soit Z dans la région qui correspond par $Z = G(z)$ à une région à distance finie du plan z. Or, si l'on choisit pour Z un point d'un cycle de la substitution

$$Z_1 = R(Z),$$

cycle dont tous les points ne soient pas confondus avec l'origine, ses conséquents successifs sont en nombre fini et distincts de zéro, ils ne peuvent tendre vers l'origine.

L'étude des cycles de la substitution $Z_1 = R(Z)$, et spécialement des cycles répulsifs a été faite dans mon Mémoire déjà cité [1]. Il y en a une infinité distincts entre eux; par conséquent on en pourra toujours choisir un $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ dont aucun point ne soit valeur exceptionnelle de $G(z)$, car les valeurs exceptionnelles sont au nombre de deux au plus. L'existence de pareils cycles met en défaut l'hypothèse faite. Donc $|s_1|$ ne peut être < 1.

2° Supposons $s_1 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, p et q étant deux entiers positifs premiers entre eux; alors $s_1^q = 1$, par conséquent, on aurait

$$G(s_1^q z) = R_1^{(q)}[G(z)] = G(z).$$

Quel que soit Z, non valeur exceptionnelle de $G(z)$, on aurait

$$Z = R_1^{(q)}(Z),$$

$R_1^{(q)}$ étant l'itérée d'ordre q de R_1. Or, on sait qu'aucune itérée de R_1 ne peut être identique à Z si R_1 n'est pas du premier degré [2]. L'hypothèse actuelle est donc à rejeter.

3° Supposons $s_1 = e^{2\pi i\theta}$, θ étant un nombre incommensurable. Alors les conséquents z_n, $zs_1^n = ze^{2\pi i\theta}$ sont partout denses sur la circonférence de centre O qui passe par le point z, et quel que soit z à distance finie. Il leur correspond, par la transformation $Z = G(z)$, des points

$$Z_n = G(Z_n)$$

---

(1) Voir *J. de Math.*, 1918, p. 83 à 97. Les points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ forment un cycle d'ordre n ou groupe circulaire si $Z_2 = R(Z_1)$, $Z_3 = R(Z_2)$, $\ldots$, $Z_1 = R(Z_n)$. Le multiplicateur s du cycle est

$$s = R'(Z_1).R'(Z_2)\ldots R'(Z_n).$$

Si $|s| > 1$, le cycle est répulsif. Si $|s| < 1$, il est attractif.

(2) Les degrés respectifs des itérées sont en effet $d_1, d_1^2, d_1^3, \ldots, d_1^n, \ldots$ si d_1 est le degré de R_1.

D'ailleurs, si R_1 était du premier degré, G se réduirait à une fraction rationnelle du premier degré, contrairement aux hypothèses faites.

du plan Z qui sont les conséquents successifs de Z par $Z_1 = R_1(Z)$ et ces Z_n seraient denses partout sur une courbe fermée analytique correspondant au cercle $|z| =$ const. par $Z = G(z)$: ceci devrait se produire *quel que soit* Z, sauf peut-être pour les deux valeurs exceptionnelles possibles de $G(z)$. Or, il suffit, ici encore, de choisir pour Z un point d'un cycle de $R_1(Z)$, dont l'origine ne fasse pas partie, pour mettre la conséquence précédente en défaut.

La deuxième hypothèse devant être écartée, il s'ensuit que $|s_1|$ est nécessairement > 1.

5. Supposant $|s_1|$ et $|s_2| > 1$, on a immédiatement la conséquence suivante des équations (3) et (4) :

$$G(s_2 s_1 z) = R_2[G(s_1 z)] = R_2[R_1[G(z)]],$$
$$G(s_1 s_2 z) = R_1[G(s_2 z)] = R_1[R_2[G(z)]].$$

Par conséquent, quel que soit z,

$$R_2[R_1[G(z)]] = R_1[R_2[G(z)]],$$

et, comme on peut donner à $G(z) = Z$ toute valeur, hormis peut-être les deux valeurs exceptionnelles toujours possibles de $G(z)$, il suit que les deux fractions rationnelles $R_2[R_1(Z)]$ et $R_1[R_2(Z)]$ sont *identiques :*

$$R_2[R_1(Z)] \equiv R_1[R_2(Z)],$$

ce qu'on exprime en disant que *les deux fractions rationnelles* $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ *sont permutables* (¹).

La permutabilité de R_1 et R_2 apparaît comme une condition *nécessaire* pour que les relations (3) et (4) soient simultanément possibles. On va montrer qu'*elle est suffisante*.

(¹) On dira également alors que les deux substitutions rationnelles

$$[Z \mid R_1(Z)] \quad \text{et} \quad [Z \mid R_2(Z)]$$

sont permutables. Dans la suite, il nous arrivera de parler indifféremment de la permutabilité des deux *fractions* ou des deux *substitutions* rationnelles précédentes.

6. Supposons donc que R_1 et R_2 soient permutables et admettent l'origine pour point invariant répulsif commun.

Désignons respectivement par $G_1(z)$ et $G_2(z)$ les fonctions fondamentales que définissent respectivement (3) et (4) :

$$G_1(s_1 z) = R_1[G_1(z)], \qquad G_1(0) = 0, \qquad G'_1(0) = 1;$$
$$G_2(s_2 z) = R_2[G_2(z)], \qquad G_2(0) = 0, \qquad G'_2(0) = 1.$$

G_1 et G_2 sont définies sans ambiguïté grâce à l'hypothèse $|s_1|$ et $|s_2| > 1$. Elles sont méromorphes.

On a

$$G_1(s_1 z) = R_1[G_1(z)].$$

Formons

$$\Gamma(z) = R_2[G_1(z)].$$

$\Gamma(z)$ est méromorphe comme $G_1(z)$:

$$\Gamma(0) = R_2[G_1(0)] = 0; \qquad \Gamma'(0) = R'_2(0).G'_1(0) = s_2.$$

De plus,

$$\Gamma(s_1 z) = R_2[G_1(s_1 z)] = R_2\big[R_1[G_1(z)]\big]$$

et, à cause de la permutabilité de R_1 et R_2,

$$\Gamma(s_1 z) = R_1\big[R_2[G_1(z)]\big] = R_1[\Gamma(z)];$$

$\Gamma(z)$ est donc une fonction méromorphe satisfaisant aux relations

$$\begin{cases} \Gamma(s_1 z) = R_1[\Gamma(z)], \\ \Gamma(0) = 0, \qquad \Gamma'(0) = s_2. \end{cases}$$

Puisque $G_1(z)$ est la fonction fondamentale de R_1 relative à l'origine, on aura

$$\Gamma(z) = G_1(s_2 z).$$

Or

$$\Gamma(z) = R_2(G_1(z)],$$

ce qui veut dire que G_1 satisfait à la deuxième relation

$$G_1(s_2 z) = R_2[G_1(z)], \qquad \text{avec} \qquad G_1(0) = 0, \qquad G'_1(0) = 1.$$

Donc G_1 est aussi fonction fondamentale pour R_2 et

$$G_1 \equiv G_2.$$

La permutabilité de R_1 et R_2 entraîne que les fonctions fondamentales de ces deux fractions rationnelles relatives à l'origine (point invariant répulsif commun à R_1 et R_2) sont *identiques*. La condition énoncée est donc suffisante.

7. La démonstration précédente peut être légèrement modifiée. Conservons l'hypothèse que $|s_1| > 1$, $R_1(0) = 0$. Alors $G_1(z)$ est parfaitement définie et méromorphe. Mais si, relativement à $R_2(Z)$, on suppose simplement que $R_2(0) = 0$ avec la permutabilité de R_1 et R_2, sans supposer que

$$|s_2| = |R'_2(0)| > 1,$$

on voit facilement que le raisonnement du n° 6 peut se faire jusqu'au bout, et $G_1(z)$ fonction fondamentale de R_1 satisfait à

$$G_1(s_2 z) = R_2[G_1(z)].$$

Comme $G_1(z)$ est une fonction méromorphe, on conclut, comme au n° 4, que s_2 doit être en valeur absolue > 1. D'où cette première conclusion :

Si un point α du plan Z est invariant par deux substitutions permutables $[Z|R_1(Z)]$ et $[Z|R_2(Z)]$, *et si α est répulsif pour l'une des substitutions, il est répulsif pour l'autre.*

Comme tout point β d'un cycle d'ordre p de R_1 est point invariant pour la substitution $[Z|R_1^{(p)}(Z)]$ itérée $p^{\text{ième}}$ de R_1, on peut dire plus généralement :

Si deux substitutions permutables (¹) *ont un cycle commun, ce cycle ne peut être répulsif pour l'une sans être répulsif pour l'autre.*

La conclusion est vraie d'ailleurs quel que soit le nombre des relations telles que (3) et (4) auxquelles satisfait la fonction $G(z)$. Toutes les fractions rationnelles R_i sont alors permutables deux à deux et elles admettent toutes le point α (ou le cycle considéré) comme point invariant répulsif (ou cycle répulsif).

(¹) Il faut remarquer, ce qui est d'ailleurs immédiat, que si deux substitutions R_1 et R_2 sont permutables, toute puissance de R_1 (ou toute *itérée* de R_1) est permutable à toute puissance de R_2.

8. On a supposé précédemment, outre la permutabilité de R_1 et R_2, l'existence du point invariant répulsif α commun aux deux substitutions. La deuxième hypothèse est-elle impliquée par la première, ou bien constitue-t-elle une restriction à l'hypothèse de la permutabilité; c'est ce que nous allons maintenant voir en faisant l'étude directe des points invariants et des cycles des deux substitutions $[Z|R_1(Z)]$, $[Z|R_2(Z)]$ supposées simplement permutables entre elles.

CHAPITRE II.

LES POINTS DOUBLES ET LES CYCLES DE DEUX SUBSTITUTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES $R_1(z)$ ET $R_2(z)$.

9. Soit α un point double de $Z_1 = R_1(Z)$. On a

$$\alpha = R_1(\alpha).$$

On peut toujours, au besoin par une transformation homographique préalable, supposer α à distance finie, le multiplicateur s relatif à α est alors bien défini

$$s = R'_1(\alpha) = \left[\frac{dR_1(Z)}{dZ}\right]_{Z=\alpha};$$

et comme ce multiplicateur est un invariant par toute transformation homographique effectuée simultanément sur Z et Z_1, il est défini dans tous les cas.

Considérons le point $\alpha_1 = R_2(\alpha)$. Il est visible que l'on a, puisque $\alpha = R_1(\alpha)$,

$$R_2(\alpha) = R_2[R_1(\alpha)],$$

et, à cause de la permutabilité de R_1 et R_2,

$$R_2(\alpha) = R_1[R_2(\alpha)],$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = R_1(\alpha_1);$$

α_1 est donc comme α un point double de $[Z|R_1(Z)]$. Si α est point double de R_1, tous ses conséquents dans l'itération par $R_2(Z)$, à savoir $R_2(\alpha)$, $R_2^{(2)}(\alpha)$, ..., $R_2^{(n)}(\alpha)$, ..., sont aussi points doubles de $R_1(Z)$. Il y a une

relation très simple entre les multiplicateurs de $R_1(Z)$ relatifs à tous ces points doubles.

Effectivement on a

$$\mathcal{R}(Z) = R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)],$$
$$\frac{d\mathcal{R}}{dZ} = \mathcal{R}'(Z) = R'_1[R_2(Z)].R'_2(Z) = R'_2[R_1(Z)].R'_1(Z),$$

et pour $Z = \alpha$, il vient $R_2(\alpha) = \alpha_1$ et

$$R'_1(\alpha_1).R'_2(\alpha) = R'_2(\alpha).R'_1(\alpha),$$

car $\alpha = R_1(\alpha)$.

Par conséquent : 1° ou bien $R'_2(\alpha)$ est nul, auquel cas $\alpha_1 = R_2(\alpha)$ serait un point critique pour la fonction algébrique inverse de la fonction rationnelle $Z_1 = R_2(Z)$ [on peut désigner par $R_2^{(-1)}(Z)$ cette fonction inverse] (*voir* le n° 11 du présent Mémoire); 2° ou bien $R'_1(\alpha_1) = R'_1(\alpha)$, c'est-à-dire que *$\alpha$ et α_1 sont deux points doubles de R_1 pour lesquels R_1 a le même multiplicateur. Tous les conséquents $R_2^{(k)}(\alpha)$ sont alors également des points doubles de R_1 avec même multiplicateur que α.* Ils seront simultanément répulsifs, attractifs ou indifférents, selon que le multiplicateur sera > 1, < 1 ou $= 1$ en module.

La conclusion précédente se vérifie en particulier si l'on choisit $R_2(Z) = R_1^{(k)}(Z)$, c'est-à-dire si la substitution $[Z|R_2(Z)]$ est la puissance $k^{\text{ième}}$ de la substitution $[Z|R_1(Z)]$, [$R_1^{(k)}(Z)$ itérée $k^{\text{ième}}$ de $R_1(Z)$]. Car évidemment toute puissance de $[Z|R_1(Z)]$ est permutable à $[Z|R_1(Z)]$ et α point double de $[Z|R_1(Z)]$ est aussi point double de $[Z|R_1^{(k)}(Z)]$.

10. Les propriétés précédentes ont des conséquences diverses. De chaque point double α de R_1 résultent $R_2(\alpha)$, $R_2^{(2)}(\alpha)$, ..., $R_2^{(n)}(\alpha)$, ..., qui sont aussi points doubles de R_1. Or R_1 n'a qu'un nombre de points doubles au plus égal à $d_1 + 1$, d étant son degré. La suite

$$\alpha, \quad R_2(\alpha), \quad R_2^{(2)}(\alpha), \quad \ldots, \quad R_2^{(n)}(\alpha), \quad \ldots$$

ne comporte donc qu'un nombre $\leqq d_1 + 1$ de points distincts. Il existe donc deux nombres i et j tous deux $\leqq d_1 + 1$ pour lesquels

$$R_2^{(i)}(\alpha) = R_2^{(i+j)}(\alpha).$$

D'où il résulte que le conséquent d'ordre i de α, $R_2^{(i)}(\alpha)$ est un point double pour $R_2^{(j)}(Z)$ ou, si l'on veut, fait partie d'un cycle d'ordre $j \leqq d_1 + 1$ de la substitution $R_2(Z)$.

Le cycle d'ordre j considéré pour R_2 sera formé des points

$$R_2^{(i)}(\alpha), \quad R_2^{(i+1)}(\alpha), \quad \ldots, \quad R_2^{(i+j-1)}(\alpha),$$

tous points doubles de R_1, d'où ce théorème :

Tout point double de $[Z \mid R_1(Z)]$ *itéré indéfiniment par* $R_2(Z)$ *donne naissance, à partir d'un certain rang, à un cycle de* $[Z \mid R_2(Z)]$ *composé de points doubles de* R_1.

Tout cycle de $[Z \mid R_1(Z)]$ est composé de points doubles d'une certaine puissance de la substitution $[Z \mid R_1(Z)]$, à savoir de $[Z \mid R_1^{(k)}(Z)]$, et $R_2(Z)$ permutable à $R_1(Z)$ l'est aussi à toute puissance $R_1^{(k)}(Z)$. Donc *tout point d'un cycle d'ordre k de* $[Z \mid R_1(Z)]$, *itéré indéfiniment par* $R_2(Z)$, *donne naissance, à partir d'un certain rang, à un cycle de* $[Z \mid R_2(Z)]$ *composé de points de cycles d'ordre* $\leqq k$ de $[Z \mid R_1(Z)]$.

11. Il reste à voir dans tous les cas que les conséquents d'un point double α de $[Z \mid R_1(Z)]$ dans l'itération par $R_2(Z)$ sont toujours des points doubles de $[Z \mid R_1(Z)]$ *de même nature que* α, c'est-à-dire répulsifs, attractifs ou indifférents en même temps que α. Cela a été démontré lorsque $R_2'(\alpha) \neq 0$. Supposons maintenant $R_2'(\alpha) = 0$. On a comme précédemment, Z étant voisin de α,

$$\mathcal{R}'(Z) = \frac{d}{dz} R_1[R_2(Z)] = R_1'[R_2(Z)].R_2'(Z) = R_2'[R_1(Z)].R_1'(Z),$$

d'où suit

$$\frac{R_1'[R_2(Z)]}{R_1'(Z)} = \frac{R_2'[R_1(Z)]}{R_2'(Z)}.$$

Par hypothèse, $R_2'(\alpha) = 0$; donc, si Z tend vers α, le deuxième membre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais la règle de l'Hôpital prouve que, si $R_2''(\alpha) \neq 0$, le deuxième membre a même limite que

$$\frac{R_2''[R_1(Z)].R_1'(Z)}{R_2''(Z)},$$

c'est-à-dire $R'_1(\alpha)$. Par conséquent, $R'_1[R_2(Z)]$ a toujours une limite lorsque Z tend vers α et cette limite $R'_1[\alpha_1]$ est égale à $[R'_1(\alpha)]^2$.

Si $R''_2(\alpha) = 0$, $R'''_2(\alpha) \neq 0$, la limite de $R'_1[R_2(Z)]$ serait

$$R'_1(\alpha_1) = [R'_1(\alpha)]^3, \ldots;$$

si

$$R''_2(\alpha) = R''_2(\alpha) = \ldots, \qquad \left[\frac{d^{p-1} R_2(Z)}{dZ^{p-1}}\right]_{Z=\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^p R_2}{dZ^p}\right)_{Z=\alpha} \neq 0,$$

on aurait

$$R'_1(\alpha_1) = [R'_1(\alpha)]^p.$$

Ceci prouve que si α est répulsif pour R_1, $[R'_1(\alpha)] > 1$, alors $[R'_1(\alpha_1)] > 1$ et α_1 est aussi répulsif pour R_1; de même si α est attractif ou indifférent pour R_1, α_1 l'est aussi.

Tout point double $[Z|R_1(Z)]$, *itéré indéfiniment par* R_2, *donne naissance à des points doubles de* R_1; *et ces points sont, pour* R_1, *de même nature que le point initial.*

Tout cycle d'ordre p de $[Z|R_1(Z)]$, itéré par R_2, donne naissance à des cycles d'ordre $\leqq p$ de $[Z|R_1(Z)]$ et ces cycles sont pour R_1 de même nature que le cycle initial.

Si tous les points doubles de R_1 sont *à multiplicateurs distincts* et si aucun d'eux n'annule R'_2, chacun d'eux sera, d'après le 2° du n° 9, un point double de R_2; et, dans tous les cas, la substitution $[Z|R_2(Z)]$ ne pourra qu'*échanger entre eux* des points doubles de $[Z|R_1(Z)]$ de même multiplicateur, à moins qu'en un de ces points doubles R'_2 s'annule, auquel cas on vient de voir ci-dessus quelle est la correspondance entre les multiplicateurs des points doubles qui se correspondront par $[Z|R_2(Z)]$.

12. *Étude des cycles répulsifs.* — La transformation $[Z|R_2(Z)]$, supposée permutable à $[Z|R_1(Z)]$, respecte les trois classes de cycles ou points doubles de R_1 : cycles répulsifs, cycles attractifs, cycles indifférents. A cause de la réciprocité, il en est de même de R_1 vis-à-vis des cycles de R_2. Ceci a d'importantes conséquences.

Partons d'un point d'un cycle répulsif de R_1 [c'est un point double répulsif de $R_1^{(k)}$] et itérons-le indéfiniment par R_2, nous obtenons des points doubles de $R_1^{(k)}$ tous répulsifs et nous arrivons à un point d'un cycle de R_2 d'après le n° 10, c'est-à-dire à un point double de $R_2^{(l)}$ pour une certaine valeur de l. *Il existe donc un point double commun aux deux substitutions permutables* $R_1^{(k)}$ *et* $R_2^{(l)}$ *et ce point double est répulsif pour* $R_1^{(k)}$; *donc il est aussi répulsif pour* $R_2^{(l)}$ (n° 7). *Le cycle de* R_2 *auquel on aboutit en itérant indéfiniment par* R_2 *un cycle répulsif de* R_1 *est un cycle répulsif pour* R_2.

13. L'ensemble des points des cycles répulsifs de $R_1(Z)$ a été appelé E dans mon Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles (*J. de Math.*, t. VIII, 1918, p. 83). Son dérivé E′ est un ensemble parfait qui joue un rôle très important dans l'étude de l'itération de la fraction $R_1(Z)$ en délimitant les diverses régions de convergence de cette itération. J'appellerai ici E_{R_1} l'ensemble des points des cycles répulsifs de $R_1(Z)$ et E_{R_2} l'ensemble analogue pour $R_2(Z)$. Les ensembles dérivés seront respectivement E'_{R_1} et E'_{R_2}.

Partant d'un point de E_{R_1} et l'itérant indéfiniment par R_2, on obtient toujours des points de E_{R_1} et l'on arrive à des points formant cycle dans R_2 et appartenant à E_{R_2}. Tout point de E_{R_1} est donc l'antécédent d'ordre λ par $R_2^{(-\lambda)}$ d'un certain point de E_{R_2}; or c'est une propriété de E'_{R_2}, dérivé de E_{R_2}, de contenir E_{R_2} ainsi que tous les antécédents et les conséquents par R_2 des points de E'_{R_2} comme de E_{R_2}. *Tout point de* E_{R_1} *appartient donc à* E'_{R_2}. Or tout point de E'_{R_1} est limite de points de E_{R_1} qui sont des points de E'_{R_2}. E'_{R_2} étant parfait, tout point de E'_{R_1} appartient à E'_{R_2}. La réciproque est immédiate, car il y a réciprocité parfaite entre $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$. *Les deux ensembles parfaits* E'_{R_1} *et* E'_{R_2}, *relatifs à deux substitutions permutables* R_1 *et* R_2, *sont donc toujours identiques*.

14. On pourrait se demander si l'ensemble E_{R_1} est identique à E_{R_2}. On va voir par un exemple que cela n'est pas toujours vrai. Considérons en effet les deux substitutions suivantes :

1° $R_1(Z)$ sera le polynome qui exprime $Z_1 = \sin 3z$ en fonction de $Z = \sin z$;

2° $R_2(Z)$ sera le polynome qui exprime $Z_2 = \sin 5z$ en fonction de $Z = \sin z$.

La permutabilité est évidente, $R_1[R_2(Z)]$ et $R_2[R_1(Z)]$ sont identiques au polynome qui exprime $Z_3 = \sin 15z$ en fonction de $Z = \sin z$.

Un cycle d'ordre p de R_1 s'obtient par l'une ou l'autre des deux relations

$$3^p z = z + 2k\pi \quad \text{ou} \quad z = \frac{2k\pi}{3^p - 1},$$

$$3^p z = -z + \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad z = \frac{2k\pi + \pi}{3^p + 1}.$$

Un cycle d'ordre p de R_2 s'obtient de même par

$$z = \frac{2k\pi}{5^p - 1} \quad \text{ou bien} \quad z = \frac{2k\pi + \pi}{5^p + 1}.$$

Avec

$$Z_p = \sin 3^p z, \qquad Z = \sin z,$$

on a

$$\frac{dZ_p}{dZ} = 3^p \frac{\cos 3^p z}{\cos z},$$

et, pour un point $z = \frac{2k\pi}{3^p - 1}$, on a

$$\frac{dZ_p}{dZ} = 3^p;$$

pour $z = \frac{\pi + 2k\pi}{3^p + 1}$, on a

$$\frac{dZ_p}{dZ} = -3^p.$$

Donc les cycles obtenus précédemment sont tous répulsifs.

Or prenons $p = 2$, on obtient pour R_2 le cycle suivant :

$$z = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}, \qquad z_1 = \frac{5\pi}{12}, \qquad z_2 = \frac{25\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{12} \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi), \quad \ldots,$$

ce qui donne le cycle d'ordre 2 répulsif de R_2

$$\boxed{Z = \sin \frac{\pi}{12}, \qquad Z_1 = \sin \frac{5\pi}{12}}$$

Considérons le point $Z = \sin \frac{\pi}{12}$ dans R_1, il a pour conséquents par R_1

$$Z = \sin\frac{\pi}{12}, \qquad Z_1 = \sin\frac{3\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4}, \qquad Z_2 = \sin\frac{3\pi}{4},$$
$$Z_3 = \sin\frac{9\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = Z_1, \qquad Z_4 = \sin\frac{3\pi}{4} = Z_2.$$

En général,

$$Z_1 = Z_{2p+1} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = Z_{2p}.$$

$Z = \sin\frac{\pi}{12}$ *n'appartient donc pas à un cycle répulsif de* R_1, mais il est antécédent par R_1^{-1} du point $Z_1 = \sin\frac{\pi}{4}$ qui forme avec $\sin\frac{3\pi}{4}$ un cycle d'ordre 2 de R_1.

Voici donc l'exemple d'un point $Z = \sin\frac{\pi}{12}$ qui, *appartenant à* E_{R_2}, *n'appartient pas à* E_{R_1}, *mais est bien l'antécédent dans l'itération par* R_1 *d'un point de* E_{R_1}. Ceci correspond bien au fait démontré dans les n^{os} 10, 11, 12, rappelé au n° 13, que tout point de E_{R_2} indéfiniment itéré par R_1 conduit toujours à un point de E_{R_1}.

15. Remarquons ici que l'étude faite aux n^{os} 9-13 prouve, sinon que les substitutions R_1 et R_2, supposées permutables, ont un point double répulsif commun, du moins que deux puissances convenables $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$ de ces substitutions en ont toujours un, c'est-à-dire que R_1 et R_2 ont toujours en commun des points appartenant à des cycles répulsifs pour R_1 et R_2. On voit ainsi que, des deux hypothèses faites au Chapitre précédent sur R_1 et R_2, la seconde, celle de l'existence d'un point double répulsif commun, ne restreint pas sensiblement la généralité de la première (permutabilité) en remplaçant au besoin R_1 et R_2 par deux puissances convenables $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$ qui sont aussi permutables. Il nous arrivera par la suite, *pour établir certaines propriétés de* R_1 *et* R_2 *qui se conservent lorsqu'on remplace* R_1 *et* R_2 *par deux puissances quelconques* $R_1^{(k)}$ *et* $R_2^{(l)}$, de supposer *a priori* que R_1 et R_2 ont un point double répulsif commun et de considérer la fonction méromorphe $G(z)$ qui satisfait aux deux théorèmes de multiplication correspondants; la généralité de la démonstration ne sera pas atteinte par l'hypothèse particulière ci-dessus.

Il sera utile pour la suite de résumer ce qui précède en disant :

Tout point de E_{R_1} a un certain conséquent par R_2 dans E_{R_2} et tous les conséquents suivants, qui sont en nombre fini, y sont aussi. De même, tout point de E_{R_2} a un certain conséquent par R_1 dans E_{R_1}.

Tout point de E_{R_1} : ou bien appartient à E_{R_2}, ou bien est un antécédent [par $R_2^{(-\lambda)}$] d'un point de E_{R_2}. Même remarque pour E_{R_2}.

Il y aurait là plusieurs questions à préciser : 1° sur les points communs à E_{R_1} et E_{R_2}; 2° pour savoir s'il suffit d'une même substitution $R_2^{(\lambda)}(\lambda > 0)$ appliquée à tout l'ensemble E_{R_1} pour n'obtenir que des points de E_{R_2}, etc. Ces questions sont secondaires pour le but que nous nous proposons. Aussi nous les laissons provisoirement de côté.

16. *Étude des cycles attractifs.* — Partant d'un point α qui est point double attractif de R_1, $\alpha = R_1(\alpha)$, $|R'_1(\alpha)| < 1$, et l'itérant indéfiniment par R_2, on obtient des points $R_2(\alpha)$, $R_2^{(2)}(\alpha)$, ... qui sont tous points doubles attractifs de R_1. Comme ces points sont en nombre fini, on finira par trouver un cycle de j points $R_2^{(i)}(\alpha)$, $R_2^{(i+1)}(\alpha)$, ..., $R_2^{(i+j-1)}(\alpha)$ tous différents, mais tels cependant que $R_2^{(i+j)}(\alpha) = R_2^{(i)}(\alpha)$; ces j points formeront un cycle d'ordre j pour R_2. On va montrer que ce ne peut être qu'un cycle *attractif* pour R_2 dès l'instant que tous les points dont il se compose sont des points doubles attractifs de R_1. Considérons un des points $R_2^{(i+k)}(\alpha)$ appartenant au cycle d'ordre j de R_2; par exemple, $\alpha_i = R_2^{(i)}(\alpha)$. C'est un point double attractif pour $R_1(Z)$ et un point double pour $R_2^{(j)}(Z)$. Il faut montrer que c'est un point double attractif de $R_2^{(j)}$. Or ce point étant attractif pour R_1 est, ainsi que je l'ai montré dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (n^{os} 19 et 28), isolé parmi les points des cycles de R_1, c'est-à-dire que α_i est à une *distance non nulle* de tout point de l'ensemble parfait E'_{R_1} relatif à R_1, α_i est intérieur à l'une des régions en lesquelles E'_{R_1} divise le plan, car en vertu de l'existence de α_i, attractif pour R_1, E'_{R_1} n'est nulle part superficiel (*J. de Math.*, n° 19). Or E'_{R_1} et E'_{R_2} sont identiques, donc α_i, étant situé à distance non nulle de E'_{R_2}, qui est l'ensemble parfait caractéristique de R_2 comme de $R_2^{(j)}$, ne peut être pour $R_2^{(j)}$ qu'un *point attractif* ou *un centre,* cette dernière expression ayant été expliquée dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (n° 117).

J'ai énoncé dans une Note des *Comptes rendus* (t. 168, 20 janv. 1914, p. 147) l'impossibilité pour une fraction rationnelle d'avoir de centres. Mais je vais montrer ici directement l'impossibilité pour α_i d'être un point double attractif pour R_1 et un centre pour $R_2^{(j)}$ si ces deux substitutions sont permutables. En effet, dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1918, au n° 117, j'ai montré qu'un point double de $R(Z)$ ne pouvait être un centre que si la région du plan limitée à l'ensemble E'_R qui correspond à R et contenant O' ainsi que toutes ses antécédentes ne contenait aucun point critique des fonctions $R^{(-k)}(Z)$ inverses des itérées de $R(Z)$. Or, dans le domaine immédiat de α_i, point double attractif de $R_1(Z)$, il y a certainement au moins un point critique de $R_1^{(-1)}(Z)$; on verra par la suite (¹) que l'ensemble des points critiques des $R_1^{(-k)}(Z)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) est identique à l'ensemble des points critiques des $R_2^{(-l)}(Z)$ ($l = 1, 2, \ldots, \infty$). Par conséquent, le domaine immédiat de α_i contient ici un point critique au moins d'une fonction $R_2^{(-l)}(Z)$. α_i ne peut dès lors être un centre pour $R_2^{(j)}(Z)$. C'est donc un point attractif pour $R_2^{(j)}(Z)$. On peut raisonner autrement : α_i, point attractif de R_1, est point limite des conséquents successifs par R_1 d'un point critique de $R_1^{-1}(Z)$, points qui sont respectivement des points critiques de $R_1^{-1}(Z)$, $R_1^{(-2)}(Z)$, ..., $R_1^{(-k)}(Z)$, ... Les points critiques des $R_2^{(-l)}(Z)$ étant identiques à ceux des $R_1^{(-k)}(Z)$, α_i serait limite de points critiques des $R_2^{(-l)}(Z)$, c'est-à-dire que les conséquents successifs *par* R_2 des points critiques de $R_2^{(-1)}(Z)$ auraient α_i pour point limite. Ceci est impossible pour un centre qui, étant entouré de courbes analytiques qui se conserveraient de façon biunivoque par la transformation $[Z \mid R_2^{(j)}(Z)]$ ne pourrait jamais être point limite des conséquents d'un point du plan.

17. *Cycles indifférents*. — Il est donc acquis que l'itération indéfinie par R_2 (permutable à R_1) d'un point double attractif (ou d'un cycle attractif) de R_1 conduit à un cycle attractif de R_2. On en conclut que, tout cycle indifférent de R_1 $\left(\text{cycle dont le multiplicateur } s \text{ est de la forme } s = e^{2\pi i \frac{p}{q}}, p \text{ et } q \text{ entiers premiers entre eux}\right)$, itéré indéfiniment

(¹) N° 20 du présent Mémoire.

par R_2, conduira encore à un cycle indifférent de R_2, car un cycle indifférent de R_1 a tous ses points dans E'_{R_1}, par conséquent dans E'_{R_2}, et tous ses conséquents pour R_2 seront dans E'_{R_2}, le cycle de R_2 auquel on parviendra sera dans E'_{R_2} : ce ne pourra être qu'un cycle répulsif ou indifférent (car les cycles attractifs et les centres sont extérieurs à E'_{R_2}) et il ne peut être répulsif pour R_2 sans l'être pour R_1 ; l'hypothèse étant que le cycle initial est indifférent pour R_1, tous les conséquents appartiennent à des cycles indifférents de R_1 : ce cycle auquel on aboutit étant indifférent pour R_1 le sera aussi pour R_2.

18. Notons le résultat essentiel des considérations précédentes. $R_1(Z)$ ne peut avoir un point double ou un cycle attractif ou indifférent sans que $R_2(Z)$ ait aussi un cycle attractif ou indifférent composé de points doubles attractifs ou indifférents ou de points de cycles attractifs ou indifférents de R_1 : en deux mots, *si* $R_1(Z)$ *a un point double ou un cycle attractif ou indifférent*, $R_1^{(k)}(Z)$ et $R_2^{(l)}(Z)$, k et l étant des entiers positifs convenables, *auront un point double attractif ou indifférent commun*. Mais on sait qu'une substitution rationnelle peut n'avoir ni point double ni cycle attractif : c'est le cas de la substitution qu'on obtient en exprimant $Z_1 = p(2u)$, en fonction rationnelle de $Z = p(u)$, $p(u)$ étant la fonction elliptique classique. L'hypothèse actuelle peut donc, *a priori*, être considérée comme particulière (même remarque pour les cycles indifférents). Alors qu'au contraire on sait que *toute substitution rationnelle a une infinité de cycles répulsifs* : on pouvait donc, sans hypothèse autre que la permutabilité, affirmer que $R_1^{(i)}(Z)$ et $R_2^{(j)}(Z)$ pour i et j entiers positifs convenables ont toujours un point double répulsif commun.

Nous ferons plus loin l'étude des solutions fondamentales des équations de Schrœder, etc., relatives à deux substitutions rationnelles permutables ayant un point double commun attractif ou indifférent, comme nous avons au Chapitre I étudié les fonctions méromorphes fondamentales relatives à un point répulsif commun. Avant d'entreprendre cette étude nous allons étudier les points critiques des fonctions algébriques $R_1^{(-k)}(Z)$ et $R_2^{(-l)}(Z)$, fonctions inverses des itérées successives de deux substitutions rationnelles permutables R_1 et R_2.

CHAPITRE III.

LES POINTS CRITIQUES DES FONCTIONS INVERSES DES ITÉRÉES DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES.

19. On a vu précédemment que si deux substitutions rationnelles R_1 et R_2 sont permutables, il existe deux puissances entières positives $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$ de ces substitutions, qui ont en commun un point double répulsif.

Remarquons que les points critiques de la fonction $R_1^{(-n)}(Z)$ inverse de $R_1^{(n)}(Z)$ sont les points critiques de $R_1^{(-1)}(Z)$ et leurs conséquents d'ordre $1, 2, \ldots, (n-1)$ ou bien, si l'on veut, ce sont les conséquents d'ordre $1, 2, \ldots, n$ des points du plan où $R'_1(Z) = 0$. L'ensemble des points critiques des $R_1^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ se compose donc de tous les conséquents successifs des points du plan où $R'_1(Z) = 0$. Mais considérons la fonction $R_1^{(k)}(Z)$, l'ensemble des points critiques des $[R_1^{(k)}(Z)]^{(-n)}$ se compose des points critiques de $R_1^{(-k)}(Z)$ et de leurs conséquents de tout ordre dans l'itération par $R_1^{(k)}(Z)$, on obtient ainsi :

1° Les points critiques de $R_1^{(-1)}(Z)$ et leurs conséquents par R_1 jusqu'à l'ordre $(k-1)$;

2° Les conséquents successifs de tous les points du 1° dans l'itération par $R_1^{(k)}$.

Il est clair qu'on obtient ainsi les points critiques de $R_1^{(-1)}(Z)$ et leurs conséquents de tout ordre par R_1.

Donc : *l'ensemble des points critiques des* $R_1^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *est identique à celui des points critiques des* $\mathcal{R}_1^{(-l)}(Z)$ $(l = 1, 2, \ldots, \infty)$ *en posant* $\mathcal{R}_1 = R_1^{(k)}(Z)$ *quel que soit l'entier positif fixe k.*

Sans changer l'ensemble des points critiques des

$$R_1^{(-n)}(Z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

on peut remplacer $R_1(Z)$ par une itérée *quelconque* $R_1^{(k)} = \mathcal{R}_1$.

On fera de même pour R_2, on la remplacera par $R_2^{(l)} = \mathcal{R}_2$.

On est donc ramené au problème suivant :

$\mathcal{R}_1(Z)$ et $\mathcal{R}_2(Z)$ étant deux fractions rationnelles permutables, ayant un point double répulsif commun o, y a-t-il une relation simple entre les points critiques des $\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ et ceux des $\mathcal{R}_2^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$.

20. La réponse est très simple : *l'ensemble des points critiques des* $\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *est identique à celui des points critiques des* $\mathcal{R}_2^{(-n)}(Z)$.

Il n'y a, pour s'en assurer, qu'à considérer la fonction méromorphe fondamentale $G(z)$ relative au point double o. Elle satisfait aux deux relations

$$G(s_1 z) = \mathcal{R}_1[G(z)], \tag{5}$$

$$G(s_2 z) = \mathcal{R}_2[G(z)], \tag{6}$$

s_1 et s_2 étant les multiplicateurs de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ relatifs à o.

Considérons un point Z où $\mathcal{R}'_1(Z) = 0$ et qui ne soit pas une valeur exceptionnelle de $G(z)$: les cas où $G(z)$ a des valeurs exceptionnelles sont connus et particuliers.

1° $G(z)$ a deux valeurs exceptionnelles si $\mathcal{R}_1$ peut se ramener par homographie à la forme $Z_1 = Z^{\pm k}$ (k entier positif). Mais alors $G(z)$ se réduit à la fonction exponentielle. D'ailleurs le problème de la permutabilité est ici résolu très simplement [1]. Les seules fractions per-

---

[1] I. Cherchons les fractions permutables à $Z_1 = Z^k$ $(k \geqq 2)$ (si $k = 1$, toute fraction est satisfaisante).

1° Si la fraction est holomorphe à l'origine, nous la développerons en série entière en Z,

$$R_2(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots$$

et l'on devra avoir

$$R_2(Z^k) = [R_2(Z)]^k,$$

$$a_0 + a_1 Z^k + a_2 Z^{2k} + \ldots = [a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots]^k.$$

Si $a_0 \neq 0$, il faut $a_0 = a_0^k$. Égalant les termes en $Z, \ldots, Z^{k-1}$, on a $a_1 = 0$, puis $a_2 = 0, \ldots$ et R_2 doit se réduire à a_0 tel que $a_0^{k-1} = 1$.

Si $R_1(Z) = a_n Z^n + \ldots$ $(a_n \neq 0)$, on aura

$$R_2(Z) = Z^n [a_n + a_{n+1} Z + \ldots].$$

mutables à $Z^{\pm k}$ sont du type $AZ^{\pm l}$ (A constante convenable et l entier quelconque).

2° $G(z)$ a une valeur exceptionnelle, si $\mathcal{R}_1$ peut se ramener par homographie à un *polynome* (1). Dans ce cas $G(z)$ devient une

---

et

$$Z^{nk}[a_n + a_{n+1}Z^k + \ldots] = Z^{nk}[a_n + a_{n+1}Z + \ldots]^k$$

donnera encore $a_n^{k-1} = 1$ et tous les coefficients suivants $= 0$.

Si la fraction R_2 est holomorphe à l'origine, elle se réduit à AZ^n, n entier arbitraire positif et $A^{k-1} = 1$.

2° Si la fraction admet o pour pôle d'ordre n, on aura

$$\mathcal{R}_2(Z) = \frac{P_2(Z)}{Z^n},$$

P_2 holomorphe à l'origine

$$P_2 = a_0 + a_1 Z + \ldots \qquad (a_0 \neq 0).$$

La condition de permutabilité est

$$\frac{P_2(Z^k)}{Z^{nk}} = \frac{[P_2(Z)]^k}{Z^{nk}} \qquad \text{ou} \qquad P_2(Z^k) = [P_2(Z)]^k.$$

Donc, d'après 1°,

$$R_2(Z) = AZ^m, \qquad A^{k-1} = 1.$$

Les seules fractions permutables à $Z_1 = Z^k$ ($k \geqq 2$) sont les fractions banales $Z_2 = AZ^{\pm\lambda}$, λ entier positif arbitraire $A^{k-1} = 1$.

II. Si $k < 0$, $k = -k'$, $Z_1 = \frac{1}{Z^{k'}}$; alors l'itérée $Z_1^{(2)} = Z^{k'^2}$ devra être permutable aux fractions cherchées. On est ramené au cas précédent où l'exposant est positif; on retrouve

$$Z_2 = R_2(Z) = AZ^{\pm\lambda} \qquad \text{avec} \qquad A^{k-1} = 1.$$

(1) Montrons que si $\mathcal{R}_1$ est un polynome, $\mathcal{R}_2$, permutable à $\mathcal{R}_1$, est nécessairement un polynome, sauf le cas banal étudié dans la note 1 (I).

Soit a_i les pôles distincts de $\mathcal{R}_2$ (à distance finie), l'ensemble des antécédents de l'infini par toutes les branches de $\mathcal{R}_1^{(-1)}$ se réduit au point à l'infini, et l'ensemble des antécédents (à distance finie) de ces points par toutes les branches de $\mathcal{R}_2^{(-1)}$ se compose des a_i. Cela veut dire que l'ensemble des antécédents de l'infini par toutes les branches de $[\mathcal{R}_1[R_2(Z)]]^{(-1)}$ se compose des a_i. Cet ensemble doit être identique à l'ensemble des antécédents de l'infini par toutes les branches de $[\mathcal{R}_2[\mathcal{R}_1(Z)]]^{(-1)}$ qu'on obtient en prenant d'abord tous les antécédents de l'infini par $\mathcal{R}_2^{(-1)}$, ce qui donne les a_i, puis tous les antécédents des a_i par $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$. Les antécédents des a_i par toutes les branches de $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$ doivent fonction entière et l'on choisira pour Z une valeur distincte de celle qui annule $\mathcal{R}'_1(Z)$, $\mathcal{R}''_1(Z)$, ..., $\mathcal{R}_1^{(d-1)}(Z)$ (si $\mathcal{R}$ est d'ordre d) tout en satisfaisant à $Z = \mathcal{R}_1(Z)$, car cette valeur sera envoyée à l'infini par la transformation qui change $\mathcal{R}_1$ en un polynome et constitue, par conséquent, une valeur exceptionnelle de $G(z)$.

Donc, hors ces deux cas, Z n'est pas valeur exceptionnelle de $G(z)$. Soit z une racine de $Z = G(z)$, on a, au point $s_1 z$,

$$s_1 G'(s_1 z) = \mathcal{R}'_1[G(z)]\, G'(z) = \mathcal{R}'_1(Z)\, G'(z).$$

Donc $G'(s_1 z) = 0$ et, par conséquent, $Z_1 = G(s_1 z)$ est un point critique algébrique de l'inverse de $G(z)$ que je désigne par $z = \Gamma(Z)$.

---

redonner les a_i. Or, deux a_i distincts ont toujours des antécédents distincts. Donc les antécédents des a_i par les $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$ sont en nombre supérieur ou égal au nombre des a_i et ils ne peuvent être identiques aux a_i que s'ils sont en nombre égal, et pour cela il faut que chaque a_i ait tous ses antécédents, par toutes les branches de $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$ confondus en un seul point. Or, la fonction inverse d'un polynome $[\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)]$ ne peut avoir toutes ses branches égales qu'en *un point* au plus à distance finie du plan. Et si ce point est a_1 et si toutes les $\mathcal{R}_1^{(-1)}(a_1)$ sont égales à a, on doit avoir

$$\mathcal{R}_1(a) = a_1, \qquad \mathcal{R}'_1(a) = 0, \qquad \mathcal{R}''_1(a) = 0, \qquad \ldots, \qquad \left[\frac{d^{d_1-1}}{dZ^{d_1-1}}[\mathcal{R}_1(Z)]\right]_{Z=a} = 0,$$

d_1 étant le degré de $\mathcal{R}_1$, toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(d_1 - 1)$ de $\mathcal{R}_1$ doivent être nulles au point a. $\mathcal{R}_1$ est alors de la forme

$$Z_1 = \mathcal{R}_1(Z) = a_1 + A(Z - a)^{d_1},$$

A étant une constante arbitraire.

$\mathcal{R}_2$ ne peut avoir d'autre pôle à distance finie que a_1, encore faut-il que les antécédents a de a_1 par $\mathcal{R}_1^{(-1)}$ soient confondus avec a_1, c'est-à-dire que $a = a_1$. Alors $\mathcal{R}_1$ est de la forme

$$Z_1 - a = A(Z - a)^{d_1},$$

et en amenant l'origine au point a, $\mathcal{R}_1$ se ramène à la forme canonique

$$Z_1 = Z^k \qquad (k > 0).$$

Donc, sauf pour les polynomes $\mathcal{R}$, qui se ramènent à $Z_1 = Z^k$ par homographie, lesquels sont permutables à toute fraction

$$\mathcal{R}_2 = AZ^{\pm\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty),$$

il est impossible que $\mathcal{R}_2$, permutable à $\mathcal{R}_1$, ait des pôles à distance finie, *$\mathcal{R}_2$ est donc nécessairement un polynome*.

Mais

$$Z_1 = G(s_1 z) = \mathcal{R}_1[G(z)] = \mathcal{R}_1(Z)$$

est un point critique de $\mathcal{R}_1^{-1}(Z)$ et tout point critique de $\mathcal{R}_1^{-1}(Z)$ est conséquent d'un point Z où $\mathcal{R}'_1(Z) = 0$.

On voit donc que, à tout point critique Z_1 de $\mathcal{R}_1^{-1}(Z)$ correspond une valeur z_1 telle que

$$G(z_1) = Z_1, \qquad G'(z_1) = 0,$$

Z_1 est un point critique algébrique pour une branche de $\Gamma(Z)$ fonction inverse de $G(z)$.

Réciproquement, soit Z_1 un point critique algébrique d'une branche de $\Gamma(z)$, il existe donc un point z_1 du plan z tel que $Z_1 = G(z_1)$ et tel que $G'(z_1) = 0$. A cause de

$$s_1 G'(z_1) = \mathcal{R}'_1\left[G\left(\frac{z_1}{s_1}\right)\right] G'\left(\frac{z_1}{s_1}\right),$$

on voit que : 1° ou bien $\frac{z_1}{s_1}$ annule $G'(z)$; 2° ou bien $Z = G\left(\frac{z_1}{s_1}\right)$ annule $\mathcal{R}'_1(Z)$.

Si c'est la première éventualité qui se produit on recommencera pour $\frac{z_1}{s_1}$ le raisonnement fait pour z_1 et l'on finira par arriver à un $\frac{z_1}{s_1^n}$ qui n'annule plus $G'(z)$, et pour $\frac{z_1}{s_1^n}$ c'est l'éventualité 2° qui se produit.

Si cette deuxième éventualité se produit pour $n = 1$, $Z = G\left(\frac{z_1}{s_1}\right)$ annule $\mathcal{R}'_1(Z)$.

On voit donc que l'antécédent Z de Z_1 dans l'itération $Z_1 = \mathcal{R}_1(Z)$ annulant $\mathcal{R}'_1(Z)$, Z_1 *sera un point critique de* $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$.

Si

$$G'(z_1) = G'\left(\frac{z_1}{s_1}\right) = \ldots = G'\left(\frac{z_1}{s_1^{n-1}}\right) = 0 \qquad \text{avec} \quad G'\left(\frac{z_1}{s_1^n}\right)$$

on verra, par le même raisonnement, que Z_1 *est point critique de* $\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z)$ (1).

(1) D'une façon précise, les points critiques de $\mathcal{R}_1^{-1}(Z)$ correspondent aux $Z_1 = G(z_1)$, pour lesquels

$$G'(z_1) = 0, \qquad G'\left(\frac{z_1}{s_1}\right) \neq 0.$$

Les points critiques de $\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z)$, qui ne sont critiques pour aucune des $\mathcal{R}_1^{(-k)}(Z)$ $(k < n)$, Il y a donc *identité entre l'ensemble des points critiques des* $\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *et l'ensemble des points du plan* Z *qui sont* CRITIQUES ALGÉBRIQUES *pour une branche au moins de la fonction* $z = \Gamma(Z)$ *inverse de* $Z = G(z)$.

Il est dès lors évident, $G(z)$ vérifiant à la fois les deux relations (5) et (6), que l'ensemble des points critiques des

$$\mathcal{R}_1^{(-n)}(Z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

est identique à celui des points critiques des

$$\mathcal{R}_2^{(-k)}(Z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

21. La propriété précédente se vérifie sur les exemples simples de fractions permutables :

1° Considérons les deux fractions qui expriment $Z_1 = \sin 3z$ et $Z_1 = \sin 5z$ en fonction de $Z = \sin z$.

Les itérées d'ordre n expriment $Z_1^{(n)} = \sin 3^n z$ et $Z_2^{(n)} = \sin 5^n z$ en fonction de $Z = \sin z$.

Les zéros de $\dfrac{dZ_1^{(n)}}{dZ} = 3^n \dfrac{\cos 3^n z}{\cos z}$ s'obtiennent par $3^n z_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

---

correspondent aux $Z_n = G(z_n)$, pour lesquels

$$G'(z_n) = 0, \qquad G'\left(\frac{z_n}{s_1}\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad G'\left(\frac{z_n}{s_1^{n-1}}\right) = 0, \qquad G'\left(\frac{z_n}{s_1^n}\right) \neq 0.$$

Il faut noter que, de toute racine z_1 de $G'(z) = 0$ pour laquelle $G'\left(\dfrac{z_1}{s_1}\right) \neq 0$ et à laquelle correspond $Z_1 = G(z_1)$ point critique algébrique de $\Gamma(Z)$ et de $\mathcal{R}_1^{(-1)}(Z)$, part une série de nombres $z_1 s_1$, $z_1 s_1^2$, $\ldots$, tous racines de $G'(z) = 0$ à cause de

$$G'(z_1 s_1) = R'_1[G(z_1)]\, G'(z_1)$$

(pourvu, toutefois, qu'aucun de ces points $z_1 s_1^k$ ne donne pour G une valeur qui soit pôle de R_1, et, par conséquent, de R'_1). Toutes les valeurs $Z_{k+1} = G(z_1 s_1^k)$ sont les conséquents successifs de $Z_1 = G(z_1)$ dans l'itération par $R_1(Z)$. Elles constituent, comme on sait, les points critiques respectifs de $\mathcal{R}_1^{(-2)}(Z)$, $\mathcal{R}_1^{(-3)}(Z)$, $\ldots$, $\mathcal{R}_1^{-(k+1)}(Z)$, Z_k étant point critique pour $\mathcal{R}^{(-k)}(Z)$ et toutes les $\mathcal{R}^{(-j)}(Z)$ pour $j \geqq k$, mais ne l'étant point pour $j < k$. N'oublions pas qu'aucune des valeurs de Z_k ne doit être pôle de $\mathcal{R}_1$, ce qu'on obtiendra en faisant une transformation homographique du plan de la variable Z, qui rejette à l'infini un point distinct de tous les conséquents des points critiques de $\mathcal{R}_1^{-1}(Z)$.

On a

$$Z_0 = \sin \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{3^n}$$

pour la première et

$$Z'_0 = \sin \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{5^n}$$

pour la deuxième.

Les points critiques de $Z[Z_1^{(n)}]$ sont alors

$$\sin 3^n z_0 = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

et ceux de $Z[Z_2^{(n)}]$ sont

$$\sin 5^n z_0 = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1.$$

Les $Z_1^{(-n)}$ et les $Z_2^{(-n)}$ ont les mêmes points critiques.

2° Il est clair, si $R(Z)$ est une fraction rationnelle quelconque, que son itérée $R_k = R^{(k)}(Z)$, quel que soit l'entier positif k, lui est permutable.

On a vu précédemment (n° 19), que les $R^{(-n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ont, dans leur ensemble, les mêmes points critiques que

$$R_k^{(-l)}(Z) \qquad (l = 1, 2, \ldots, \infty),$$

et ceci corrobore bien le théorème général.

22. On pourrait se poser la question suivante : R_1 *et* R_2 *étant deux fractions permutables, l'ensemble des zéros des dérivées*

$$\frac{dR_1^{(n)}}{dZ} \quad et \quad \frac{dR_2^{(n)}}{dZ} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

des itérées de R_1 *et* R_2 *est-il le même?* Cet ensemble, pour R_1, par exemple, comprend les zéros de $\frac{dR_1(Z)}{dZ}$ et tous leurs antécédents successifs dans l'itération par R_1. Si l'on prend $R_2 = R_1^{(k)}$, les zéros de $\frac{dR_1^{(k)}}{dZ}$ sont les zéros de $\frac{dR_1}{dZ}$ et leurs antécédents d'ordre $1, 2, \ldots, (k-1)$; les antécédents de ces points dans l'itération par $R_1^{(k)}$ seront donc tous les zéros de $\frac{dR_1}{dZ}$ et tous leurs antécédents successifs dans l'itération par R_1. Donc, dans ce cas particulier, les dérivées des itérées de R_1 et R_2 auraient dans leur ensemble les mêmes zéros. Mais un exemple simple prouve que *ce phénomène n'est pas général à tous les couples de fonctions rationnelles permutables*.

Prenons

$$Z = \sin z,$$
$$Z_1 = R_1(Z) = \sin 3z$$

et

$$Z = \sin z,$$
$$Z_2 = R_2(Z) = \sin 5z;$$

alors

$$\frac{dR_1^{(n)}}{dZ} = 3^n \frac{\cos 3^n z}{\cos z} \qquad \text{et} \qquad \frac{dR_2^{(n)}}{dZ} = 5^n \frac{\cos 5^n z}{\cos z}.$$

La première équation donne $3^n z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et les zéros Z des $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ sont les points

$$Z = \sin \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{3^n}.$$

Les zéros des $\frac{dR_2^{(n)}}{dZ}$ sont les

$$Z' = \sin \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{5^n}.$$

Ces deux espèces de points sont essentiellement distinctes.

D'ailleurs, la considération des deux relations

$$G(s_1 z) = R_1[G(z)],$$
$$G(s_2 z) = R_2[G(z)]$$

prouve que les zéros de $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ sont les valeurs de

$$Z = G(z), \qquad [G'(z) \neq 0],$$

auxquelles correspondent des z tels que $G'(z s_1^n) = 0$. Pour avoir ces z, il suffira de considérer tous les z_i, zéros de $G'(z)$ pour lesquels $G'\left(\frac{z}{s_1}\right) \neq 0$, les z cherchés seront tous les $\frac{z_i}{s_1^n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ et les zéros de $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ seront les points $G\left(\frac{z_i}{s_1^n}\right)$ (i, n variables).

En prenant, par exemple, le zéro z_0 de $G'(z)$ *le plus voisin de l'origine*, ni $\frac{z_0}{s_1}$ ni $\frac{z_0}{s_2}$ ne seront zéros de $G'(z)$, et, par conséquent, les $G\left(\frac{z_0}{s_1^n}\right)$ et $G\left(\frac{z_0}{s_2^n}\right)$ seront respectivement des zéros de $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ et $\frac{dR_2^{(n)}}{dZ}$; s_1 et s_2 étant distincts, les deux suites $\frac{z_0}{s_1^n}$ et $\frac{z_0}{s_2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ne sont pas identiques.

Donc, *les ensembles de zéros de* $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ *et* $\frac{dR_2^{(n)}}{dZ}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *ne sont pas, en général, identiques.*

22 *bis*. On peut préciser ce qui précède. Soit Z_0 un zéro de $R'_1(Z)$. A cause de

$$R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)],$$

d'où

$$R'_1[R_2(Z)]\, R'_2(Z) = R'_2[R_1(Z)]\, R'_1(Z).$$

On voit que $R'_1(Z_0) = 0$ entraîne

$$R'_2(Z_0) = 0$$

ou bien

$$R'_1[R_2(Z_0)] = 0.$$

Ou bien Z_0 annulera aussi $R'_2(Z)$, ou bien $R_2(Z_0)$ annulera $R'_1(Z)$.

Continuons le même raisonnement : ou bien $R_2(Z_0)$ annulera $R'_2(Z)$, ou bien $R_2^{(2)}(Z_0)$ annulera encore $R'_1(Z)$.

En continuant ainsi, on voit que l'on n'a que deux hypothèses à choisir : 1° ou bien un conséquent $R_2^{(k)}(Z_0)$ annule $R'_1(Z)$; 2° ou bien tous les conséquents $R_2^{(n)}(Z_0)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ annulent $R'_1(Z)$.

Or $R'_1(Z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros $\leqq 2(d_1 - 1)$, d_1 degré de R_1. Il faudra donc qu'il existe un indice i et un indice j

$$[i \leqq 2(d_1 - 1),\ j \leqq 2(d_1 - 1)]$$

tels que

$$R_2^{(i)}(Z_0) = R_2^{(i+j)}(Z_0)$$

les points $R_2^{(i)}(Z_0)$, $R_2^{(i+1)}(Z_0)$, $\ldots$, $R_2^{(i+j-1)}(Z_0)$ (et tous les conséquents suivants) formant un cycle d'ordre j de R_2, uniquement composé de zéros de R'_1 qui n'annulent pas R'_2.

Donc : 1° ou bien Z_0, zéro de $\frac{dR_1}{dZ}$ annule $\frac{dR_2^{(k+1)}}{dZ}$ [car c'est cela qu'exprime le fait que $R_2^{(k)}(Z_0)$ annule $R'_2(Z)$] ; 2° ou bien Z_0, dans l'itération par R_2, donne naissance à un cycle de R_2 dont tous les points sont zéros de R'_1, mais non zéros de R'_2.

Ce qu'on vient de dire d'un zéro de R'_1, on peut le dire d'un zéro quelconque de $\frac{dR_1^{(k)}}{dZ}$, quel que soit l'entier positif k, car R_2 est permutable à $R_1^{(k)}$. Tout zéro d'une dérivée $\frac{dR_1^{(k)}}{dZ}$ ou bien annule une dérivée $\frac{dR_2^{(n)}}{dZ}$, ou bien donne naissance, dans l'itération par R_2, à un cycle de R_2 dont tous les points, n'annulant aucune

$$\frac{dR_2^{(n)}}{dZ} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

sont tous des zéros de la dérivée $\frac{dR_1^{(k)}}{dZ}$ considérée.

Les points de l'ensemble des zéros de $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *qui n'appartiennent pas à l'ensemble des zéros des* $\frac{dR_2^{(n)}}{dZ}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *sont ou bien des points appartenant à des cycles de* R_2 *ou bien des antécédents (dans l'itération par* R_2*) de cycles de* R_2.

CHAPITRE IV.

RETOUR SUR L'ÉTUDE DES CYCLES DE DEUX SUBSTITUTIONS PERMUTABLES. ÉTUDE PLUS PRÉCISE DES CYCLES ATTRACTIFS.

23. Partant d'un point α qui était point double de $[Z|R_1(Z)]$, ou qui faisait partie d'un cycle de $[Z|R_1(Z)]$, et l'itérant indéfiniment par $[Z|R_2(Z)]$, on n'a obtenu qu'un nombre limité de points, tous points doubles ou points de cycles de $[Z|R_1(Z)]$, pour aboutir finalement à un cycle de $[Z|R_2(Z)]$. *Tout point d'un cycle de* R_1 *est antécédent, dans l'itération par* R_2, *d'un cycle de* R_2.

Est-il toujours conséquent d'un cycle de R_2? La question est importante, parce que tout point conséquent d'un cycle de R_2, dans l'itération par R_2, fait lui-même partie du cycle de R_2 considéré. Si elle était résolue par l'affirmative, tout point faisant partie d'un cycle de R_1 ferait partie d'un cycle de R_2 et réciproquement. Or, nous avons donné l'exemple (n° 14) d'un couple de substitutions permutables où un point d'un cycle de R_2 n'appartenait à aucun cycle de R_1, tout en étant cependant antécédent, dans l'itération par R_1, d'un cycle de R_1. La question *n'est donc pas toujours résolue par l'affirmative.* Il est cependant remarquable qu'elle se résolve par l'affirmative pour les points faisant partie de cycles attractifs ou indifférents de R_1, en sorte qu'on a le théorème suivant :

L'ensemble des points (en nombre fini) composant les cycles attractifs (ou indifférents) d'une substitution $R_1(Z)$ *rationnelle est le même que pour toute substitution rationnelle* $R_2(Z)$ *permutable à* $R_1(Z)$.

Tout repose sur le fait que l'ensemble considéré ne compte qu'un nombre fini de points. J'ai montré, dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, n° 34, que le nombre des cycles attractifs ou indifférents est fini, et dans une Note des *Comptes rendus*, citée plus haut, qu'il n'y a pas de *centres*.

Le nombre des points qu'ils comptent est alors fini (*voir* aussi FATOU, *Bulletin Soc. math. de France*, t. XLVIII, p. 66-69).

24. Partons d'un point double α de $[Z|R_1(Z)]$ et prenons tous ses antécédents dans l'itération par $[Z|R_2(Z)]$: ce sont des points, en nombre d_2 (degré de R_2) au plus, qu'on peut désigner par $R_2^{(-1)}(\alpha)$. Appliquons à tous ces points la transformation $[Z|R_1(Z)]$, on obtient un ensemble de points $R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]$, et si à ces points $R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]$ on applique $[Z|R_2(Z)]$, on obtient

$$R_2[R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]] = R_1[R_2[R_2^{(-1)}(\alpha)]] = R_1(\alpha) = \alpha,$$

à cause de la permutabilité de R_1 et R_2, et du fait que α est point double de $[Z|R_1(Z)]$. Les points $R_2^{(-1)}(\alpha)$ soumis à $[Z|R_1(Z)]$, puis à $[Z|R_2(Z)]$, donnent α, cela prouve que les points $R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]$ *appartiennent au groupe des* $R_2^{(-1)}(\alpha)$. Partant d'un point α_{-1} du groupe des $R_2^{(-1)}(\alpha)$, et lui appliquant successivement la substitution R_1 et toutes ses puissances, on n'obtiendra qu'un nombre limité ($\leqq d_2$) de points tous compris parmi les $R_2^{(-1)}(\alpha)$; il existera donc deux nombres i et j tels que $0 \leqq i \leqq d_1$, $i+j \leqq d_2$, $j \geqq 0$, pour lesquels

$$R_1^{(i)}(\alpha_{-1}) = R_1^{(i+j)}(\alpha_{+1}).$$

Les points $R_1^{(i)}(\alpha_{-1})$, $R_1^{(i+1)}(\alpha_{-1})$, ..., $R_1^{(i+j-1)}(\alpha_{-1})$, tous antécédents d'ordre 1 de α par $[Z|R_2^{(-1)}(Z)]$, forment un cycle de R_1.

Parmi les antécédents d'ordre 1 *de tout point double de* $[Z|R_1(Z)]$, *antécédents pris avec toutes les branches de* $[Z|R_2^{(-1)}(Z)]$ (R_2 *permutable à* R_1) *figure un cycle d'ordre* $\leqq d_2$ *de* $[Z|R_1(Z)]$ (d_2 degré de R_2).

Rapprochant le résultat actuel d'un résultat obtenu précédemment (n° 9), on voit que *tout point double de* $[Z|R_1(Z)]$ *a parmi ses antécédents d'ordre* 1 *dans l'itération par* $R_2(Z)$ *un cycle de* $[Z|R_1(Z)]$ *et pour conséquents de tout ordre, dans l'itération par* $R_2(Z)$, *des points doubles de* $[Z|R_1(Z)]$.

Le même raisonnement peut se faire sur les antécédents d'ordre 2 de α pris avec toutes les branches de $R_2^{(-2)}(Z)$, en nombre d_2^2 au plus.

On verra que ces points $R_2^{(-2)}(\alpha)$ sont transformés par $[Z|R_1(Z)]$ en tout ou partie d'eux-mêmes, on en conclut, comme plus haut, qu'il existe un cycle de $[Z|R_1(Z)]$ d'ordre $\leqq d_2^2$ parmi les antécédents d'ordre 2 de α.

25. Mais il importe de préciser davantage :

Reprenons les $R_2^{(-1)}(\alpha)$. *A moins que* α *ne fasse partie d'un cycle de* $[Z|R_2(\alpha)]$ *ils sont tous distincts de* α. Si un point $R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]$ était identique à α, c'est-à-dire si

$$R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)] = \alpha,$$

on aurait

$$R_2[R_1[R_2^{-1}(\alpha)]] = R_2(\alpha),$$

et, à cause de la permutabilité

$$R_1[R_2[R_2^{(-1)}(\alpha)]] = R_2(\alpha).$$

Or

$$R_2[R_2^{(-1)}(\alpha)] = \alpha.$$

Il viendrait donc

$$R_1(\alpha) = R_2(\alpha),$$

et, comme $R_1(\alpha) = \alpha$, on aurait

$$\alpha = R_2(\alpha).$$

Donc les $R_1[R_2^{(-1)}(\alpha)]$ sont tous distincts de α, à moins que α ne soit point double de $[Z|R_2(Z)]$. *Le cycle* $R_1^{(i)}[R_2^{(-1)}(\alpha)]$, $R_1^{(i+1)}[R_2^{(-1)}(\alpha)]$, ..., $R_1^{(i+j-1)}[R_2^{(-1)}(\alpha)]$, *considéré plus haut, est formé de points distincts de* α, *si l'on suppose* α *non point double de* $[Z|R_2(Z)]$.

Toujours dans la même hypothèse, les $R_2^{(-2)}(\alpha)$ seront distincts des $R_2^{(-1)}(\alpha)$ et de α, car si un point $R_2^{(-2)}(\alpha)$ était aussi un $R_2^{(-1)}(\alpha)$, en lui appliquant d'abord $[Z|R_2(Z)]$ on tomberait sur α [puisque c'est un $R_2^{(-1)}(\alpha)$], et en lui appliquant ensuite $[Z|R_2(Z)]$, on aurait encore α [puisque c'est un $R_2^{(-2)}(\alpha)$]; on aurait donc $\alpha = R_2(\alpha)$, α serait point double de $[Z|R_2(Z)]$, ce qu'on ne suppose pas. On verra alors que, parmi les $R_2^{(-2)}(\alpha)$ tous distincts des $R_2^{(-1)}(\alpha)$ et de α figure un cycle de $[Z|R_1(Z)]$ d'ordre $\leqq d_2^2$, et ce cycle est évidemment distinct du cycle de $[Z|R_1(Z)]$ précédemment relevé parmi les $R_2^{(-1)}(\alpha)$.

Donc, en continuant ainsi, *et à condition que l'on suppose* α *non point double de* $[Z|R_2(Z)]$ *et n'appartenant à aucun cycle de* $[Z|R_2(Z)]$, on voit que l'on trouve parmi les antécédents de α, *de chaque ordre* n, pris avec toutes les branches de $R_2^{(-n)}(Z)$, c'est-à-dire parmi les $R_2^{(-n)}(\alpha)$, un cycle de $[Z|R_1(Z)]$ d'ordre $\leqq d_2^n$.

Tous ces cycles sont différents et n'ont deux à deux aucun point commun. On déduit d'ailleurs, du n° 11, que *ces cycles sont tous pour* $[Z|R_1(Z)]$ *de même nature que le point* α; car en considérant, par exemple, un point θ du cycle d'ordre $\lambda \leqq d_2$ qui figure parmi les $R_2^{(-1)}(\alpha)$, θ sera point double de $R_1^{(\lambda)}$ et $\alpha = R_2(\theta)$ sera point double de R_1 et de $R_1^{(\lambda)}$, le n° 11 prouve que pour $R_1^{(\lambda)}$ les deux points doubles θ et $\alpha = R_2(\theta)$ seront de même espèce et même, d'après le n° 9, si $R_2'(\theta) \neq 0$, θ et α auraient, dans $[Z|R_1^{(\lambda)}(Z)]$, même multiplicateur $s_1^\lambda = [R_1'(\alpha)]^\lambda$ (1). L'essentiel est que tous les cycles

(1) Si $R_2' \neq 0$ aux points du cycle de $[Z|R_1(Z)]$, d'ordre λ qui figure parmi les $R_2^{(-1)}(\alpha)$, le cycle en question aura pour multiplicateur $[R_1'(\alpha)]^\lambda$. Ceci suppose α non critique pour $R_2^{(-1)}(Z)$.

obtenus précédemment soient pour $[Z|R_1(Z)]$ de même nature que le point double α de $[Z|R_1(Z)]$ considéré.

26. Si α est répulsif, le résultat précédent ne contredit aucun des résultats que l'étude de l'itération de la fraction rationnelle $[Z|R_1(Z)]$ peut fournir. On sait qu'il y a, pour toute fraction rationnelle R_1, une infinité de cycles répulsifs distincts formant l'ensemble que j'ai appelé E_{R_1}, dont le dérivé E'_{R_1} parfait a joué un si grand rôle dans l'itération de R_1.

Au contraire, si α est attractif ou indifférent pour $[Z|R_1(Z)]$, c'est-à-dire si $|R'_1(\alpha)|\leqq 1$, l'hypothèse que α ne soit pas point double ou point d'un cycle de $[Z|R_2(Z)]$ conduit à une contradiction. Car parmi les $R_2^{(-n)}(\alpha)$ $(n=1, 2, \ldots, \infty)$ *existeraient une infinité de cycles distincts de* $[Z|R_1(Z)]$, *tous attractifs ou tous indifférents*. Or il est connu que le nombre des points doubles ou cycles attractifs ou indifférents est fini (*voir* n° 23).

Donc *tout point double de* $[Z|R_1(Z)]$ *attractif ou indifférent est aussi point double de* $[Z|R_2^{(\lambda)}(Z)]$ *et de même nature que pour* R_1, *c'est-à-dire attractif ou indifférent* (*voir* n^{os} 16 et 17) *pour une valeur entière positive convenable de* λ.

Tout point double de $[Z|R_1^{(k)}(Z)]$ attractif ou indifférent sera aussi point double de $[Z|R_2^{(l)}(Z)]$ pour l entier convenable dès que k est donné, puisque $R_2^{(l)}$ est permutable à toute puissance $R_1^{(k)}(Z)$ de la substitution $[Z|R_1^k(Z)]$.

Conclusion. — *L'ensemble des points du plan en nombre fini qui constituent les points doubles et les cycles attractifs de* $[Z|R_1(Z)]$ *est identique à l'ensemble analogue pour toute substitution rationnelle* $[Z|R_2(Z)]$ *permutable à la substitution rationnelle considérée.*

L'ensemble des points du plan en nombre fini qui constituent les points doubles et les cycles indifférents de $[Z|R_1(Z)]$ *est identique à l'ensemble analogue pour toute substitution rationnelle permutable à la substitution considérée.*

L'exactitude de cette proposition se vérifie sur les exemples classiques

$$\begin{cases} Z = \sin z, \\ Z_1 = \sin 3z, \end{cases} \qquad \begin{cases} Z = \sin z, \\ Z_1 = \sin 5z, \end{cases}$$

où un seul point double attractif, le point $Z = \infty$;

$$Z_1 = R_1^{(k_1)}(z), \qquad Z_k = R_1^{(k_2)}(Z),$$

$R_1^{(k)}(Z)$ itérée quelconque de $R_1(Z)$, deux itérées quelconques d'une même substitution sont permutables et ont les mêmes points doubles ou cycles attractifs (ou indifférents) que la substitution originelle.

27. En définitive, on vient de reconnaître, dans les Chapitres II, III et IV, que deux substitutions rationnelles permutables $[Z \mid R_1(Z)]$ et $[Z \mid R_2(Z)]$ présentent les caractères suivants :

1° Leurs itérées $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, \infty)$ admettent des fonctions inverses qui, dans leur ensemble, ont *les mêmes points critiques ;*

2° Les *cycles attractifs et les indifférents* sont les mêmes pour R_1 et R_2;

3° Les *ensembles parfaits* E'_{R_1} *et* E'_{R_2} sont les mêmes pour R_1 et R_2.

Ces trois propriétés prouvent que *l'itération de* R_1 *et de* R_2 *présente les mêmes circonstances essentielles*. Les *régions de convergence du plan sont les mêmes*, à cause de l'identité de E'_{R_1} et de E'_{R_2}. Dans *la distribution des fonctions limites* pour les deux suites

$$R_1(Z), \quad R_1^{(2)}(Z), \quad \ldots, \quad R_1^{(n)}(Z), \quad \ldots$$

et

$$R_2(Z), \quad R_2^{(2)}(Z), \quad \ldots, \quad R_2^{(n)}(Z), \quad \ldots,$$

les cycles attractifs de R_1 et R_2 jouent un rôle prépondérant que j'ai étudié dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (n^{os} 27 et suiv.) et ce sont les mêmes pour les deux fractions.

Enfin la distribution des points critiques des

$$R_1^{(-k)}(Z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty)$$

a dominé tout le problème de l'itération de $[Z \mid R_1(Z)]$, comme on peut le voir dans le Mémoire ci-dessus : Resterait à chercher si l'itération de R_1 et celle de R_2 conduit toujours à des constantes ou fonctions limites identiques, en dehors des cycles attractifs ou indifférents.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES SOLUTIONS FONDAMENTALES DES ÉQUATIONS DE SCHROEDER, D'ABEL, ... RELATIVES A UN POINT DOUBLE ATTRACTIF (OU INDIFFÉRENT) COMMUN A DEUX SUBSTITUTIONS PERMUTABLES.

28. On va établir ici des propriétés analogues à celles qu'on a établies au Chapitre I.

Si α est un point double attractif de $[Z[R_1(Z)]]$, il l'est aussi pour $[Z[R_2^{(k)}(Z)]]$ (k entier positif convenable). Pour ce qui va suivre, on peut, sans restreindre la généralité, supposer $k=1$. Deux cas sont à distinguer : ou bien le multiplicateur $s_1 = R'_1(\alpha)$ n'est pas nul, ou bien il est nul.

29. Supposons d'abord $s_1 = R'_1(\alpha) \neq 0$, α est alors intérieur à un domaine ω_α du plan Z, d'un seul tenant, dont la frontière est tout ou partie de l'ensemble parfait E'_{R_1}; ω_α s'appelle « domaine immédiat de convergence vers α », parce que tout point intérieur à ω_α a des conséquents qui tendent régulièrement vers α (voir *J. de Math.*, 1918, p. 125, n^{os} 27 et suiv.). On peut toujours supposer que le point à l'infini n'est pas intérieur à ω_α, par exemple en envoyant à l'infini dans le plan Z de l'itération un point de l'ensemble E' par une transformation homographique préalable, si cela est nécessaire. Alors, si l'on considère l'équation dite de Schrœder,

$$F[R_1(Z)] = s_1 F(Z),$$

M. Kœnigs a démontré l'existence d'une fonction F(Z), holomorphe autour de α, satisfaisant à l'équation précédente et telle que

$$F(\alpha) = 0, \qquad F'(\alpha) = 1;$$

nous l'appellerons « solution fondamentale de l'équation de Schrœder pour le point α », F(Z) est la limite de $\dfrac{R_1^{(n)}(Z)-\alpha}{s_1^n}$ dans un petit cercle entourant α, et comme la suite des $R_1^{(n)}(Z)$ converge uniformément vers α

dans $\mathcal{D}_\alpha$, on conclut facilement que les $\dfrac{R_1^{(n)}(Z)-\alpha}{s_1^n}$ convergent uniformément dans tout domaine intérieur à $\mathcal{D}_\alpha$ vers une fonction $F(Z)$ holomorphe dans tout $\mathcal{D}_\alpha$ et satisfaisant dans tout $\mathcal{D}_\alpha$ à l'équation de Schrœder [1].

Si d'ailleurs, développant $R(Z)$ par la formule

$$Z_1-\alpha = R_1'(\alpha)(Z-\alpha)+a_2(Z-\alpha)^2+\ldots,$$

on cherche à déterminer, par la méthode des coefficients indéterminés, le développement en série de la solution fondamentale $F(Z)$

$$\begin{aligned} F(Z) &= F(\alpha)+(Z-a)+\lambda_2(Z-\alpha)^2+\ldots \\ &= Z-\alpha+\lambda_2(Z-\alpha)^2+\ldots \end{aligned}$$

à cause de

$$F(\alpha)=0, \qquad F'(\alpha)=1,$$

on sera conduit pour la détermination de λ_2, λ_3, ... à des équations linéaires qui détermineront de façon unique $\lambda_2 \lambda_3$, à partir de $F(\alpha)=0$, $F'(\alpha)=1$. La solution fondamentale est unique.

Toutes les solutions (holomorphes dans $\mathcal{D}_\alpha$) pour l'équation de Schrœder sont $C[F(Z)]^k$, C constante quelconque et k entier positif quelconque.

30. Si $s_1 = R_1'(\alpha) = 0$, on a encore, comme précédemment, un domaine immédiat de convergence $\mathcal{D}_\alpha$ vers α, limite à E'_{R_1} mais l'équation de Schrœder dégénère. On la remplace par l'équation de Böttcher. Si l'on a

$$R_1(Z) = a_p(Z-\alpha)^p+\ldots \qquad (a_p \neq 0),$$

la $p^{\text{ième}}$ dérivée $\left[\dfrac{d^pR_1(Z)}{dZ^p}\right]_{Z=\alpha}$ de R_1 étant la première qui ne s'annule pas pour $Z=\alpha$, on peut prouver l'existence d'une fonction $\Phi(Z)$, holomorphe dans $\mathcal{D}_\alpha$, telle encore que

$$\Phi(\alpha)=0 \quad \text{et} \quad \Phi'(\alpha)=1$$

---

[1] Pour toutes les propriétés de la solution fondamentale de l'équation de Schrœder, propriétés d'ailleurs toutes correspondantes à des propriétés de l'itération de $R_1(Z)$, on peut voir par exemple FATOU, *Bull. Soc. math.*, t. XLVIII, p. 257 et suiv.

et satisfaisant à l'équation de Böttcher

$$\Phi[R_1(Z)] = a_p[\Phi(Z)]^p;$$

c'est la solution fondamentale.

D'ailleurs, si l'on cherche encore à déterminer les coefficients μ du développement

$$\Phi(Z) = (Z - \alpha) + \mu_2(Z - \alpha)^2 + \ldots$$

par la méthode des coefficients indéterminés, on est conduit à des équations linéaires qui déterminent μ_2, μ_3, ... sans ambiguïté. La solution fondamentale est unique.

Toutes les solutions pour lesquelles

$$\Phi(\alpha) = 0, \qquad \Phi'(\alpha) \neq 0$$

sont données par la formule

$$\omega\,\Phi(Z) \qquad \text{avec} \qquad \omega^{p-1} = 1.$$

Toutes les solutions holomorphes pour lesquelles

$$\Phi(\alpha) = 0, \qquad \Phi'(\alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi^{(S-1)}(\alpha) = 0, \qquad \Phi^{(S)}(\alpha) \neq 0$$

sont données par la formule

$$\lambda_S[\Phi(Z)]^S$$

à condition de prendre

$$\lambda_S^{p-1} = a_p^{S-1}.$$

Pour le voir, on remarque d'abord que $\lambda_S[\Phi(Z)]^S$ est une solution de l'équation de Böttcher pour laquelle $\Phi^{(S)}(\alpha) \neq 0$ à condition que

$$\lambda_S^{p-1} = a_p^{S-1}.$$

D'ailleurs toute solution commençant par $\lambda_s(Z - \alpha)^s$ est parfaitement déterminée par son premier coefficient λ_s, ainsi que le montre la méthode des coefficients indéterminés. Donc toute solution holomorphe de l'équation de Böttcher se déduira de la solution fondamentale par la formule

$$\Phi_S(Z) = \lambda_S[\Phi(Z)]^s \qquad (S \text{ entier} > 0),$$

à condition que

$$\lambda_S^{p-1} = a_p^{S-1}.$$

31. Prenons un point double α commun à $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$, attractif pour R_1 et à multiplicateur $s_1 \neq 0$. On peut, pour la simplicité des calculs, supposer $\alpha = 0$; alors

$$Z_1 = R_1(Z) = s_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots,$$
$$Z_2 = R_2(Z) = \ldots + b_q Z^q + b_{q+1} Z^{q+1} + \ldots \qquad (b_q \neq 0,\ q \geqq 1).$$

Je vais montrer que *si* R_1 *et* R_2 *sont permutables*, q *est nécessairement* $= 1$.

En effet, supposons $q > 1$, on a

$$R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)].$$

Développant les deux membres il vient

$$s_1(b_q Z^q + b_{q+1} Z^{q+1} + \ldots) + a_2(b_q Z^q + b_{q+1} Z^{q+1} + \ldots)^2 + \ldots$$
$$= b_q(s_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots)^q + b_{q+1}(s_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots)^{q+1} + \ldots.$$

L'identification des termes en Z^q donne

$$s_1 b_q = b_q s_1^q,$$

b_q étant $\neq 0$ et $|s_1| < 1$, *cela n'est possible que si* $q = 1$.

Donc *si* $s_1 = R'_1(\alpha) \neq 0$, $s_2 = R'_2(\alpha)$ *est aussi* $\neq 0$, nécessairement.

32. Considérons la solution fondamentale $F_1(Z)$ de l'équation de Schrœder pour R_1 et α

$$F_1[R_1(Z)] = s_1 F_1(Z).$$

On a nécessairement, par le procédé utilisé au Chapitre I,

$$F_1[R_1[R_2(Z)]] = s_1 F_1[R_2(Z)].$$

Je pose

$$F_1[R_2(Z)] = F_2(Z);$$

c'est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_\alpha$. De plus, si l'on a

$$F_1(Z) = Z + a_2 Z^2 + \ldots$$

on aura

$$F_2(Z) = F_1[R_2(Z)] = s_2 Z + b_2 Z^2 + \ldots,$$

puisque

$$R_2(Z) = s_2 Z + \ldots \qquad (s_2 \neq 0).$$

Or

$$F_1[R_1[R_2(Z)]] = F_1[R_2[R_1(Z)]],$$

à cause de la permutabilité, ou encore

$$F_1[R_1[R_2(Z)]] = F_2[R_1(Z)].$$

On a donc

$$F_2[R_1(Z)] = s_1 F_2(Z).$$

$F_2(Z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}_\alpha$, nulle en α dont le développement en Z (ou $Z-\alpha$) commence par $s_2 Z$; c'est une solution de l'équation de Schrœder. D'ailleurs $s_2 F_1(Z)$ possède les mêmes propriétés; c'est une solution de l'équation de Schrœder, holomorphe dans $\mathcal{D}_\alpha$, dont le développement en série débute par $s_2 Z$. Or, la méthode des coefficients indéterminés appliquée à l'équation de Schrœder montre que toute solution holomorphe est déterminée par le coefficient du terme en Z. Il en résulte que

$$F_2(Z) \equiv s_2 F_1(Z),$$

c'est-à-dire que

$$F_1[R_2(Z)] = s_2 F_1(Z).$$

Les deux équations de Schrœder relatives à R_1 et R_2 (permutables) et au point double attractif commun α ont la même solution fondamentale.

33. Supposons maintenant que $s_1 = R_1'(\alpha) = 0$. *Alors, la permutabilité de* $R_1(Z)$ *et* $R_2(Z)$ *exige que* $s_2 = R_2''(\alpha)$, *soit* $= 0$. Car si $s_2 \neq 0$, la conclusion du n° 31 est que s_1 serait $\neq 0$.

Soient alors

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1(Z) = a_p Z^p + \ldots \qquad (a_p \neq 0;\ p > 1,\ q > 1), \\ Z_2 &= R_2(Z) = b_q Z^q + \ldots \qquad (b_q \neq 0) \end{aligned}$$

les développements de R_1 et R_2 autour de $\alpha = 0$. Écrivons

$$R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)]$$

et identifions les termes en Z^{pq} des deux membres; on a la condition

$$\boxed{b_q^{p-1} = a_p^{q-1}}$$

Soit alors $\Phi_1(Z)$ la solution fondamentale de l'équation de Böttcher pour R_1

$$\Phi_1[R_1(Z)] = a_p[\Phi_1(Z)]^p \qquad \Phi_1(0) = 0, \ \Phi_1'(0) = 1).$$

On aura encore en posant

$$\Phi_2(Z) = \Phi_1[R_2(Z)],$$
$$\Phi_1\big[R_2[R_1(Z)]\big] = \Phi_2[R_1(Z)]$$

et, remplaçant Z par $R_2(Z)$ dans la précédente équation de Böttcher,

$$\Phi_2[R_1(Z)] = a_p[\Phi_2(Z)]^p.$$

$\Phi_2(Z)$ est une solution de l'équation de Böttcher pour R_1 et α, dont le développement est

$$\Phi_2(Z) = \Phi_1[R_2(Z)] = b_q Z^q + \ldots.$$

D'après la conclusion du n° 30, il faudra donc que l'on ait

$$b_q^{p-1} = a_p^{q-1},$$

condition qui est réalisée puisque R_1 et R_2 sont permutables, et il est clair alors (n° 30) que l'on a, Φ_1 étant la solution fondamentale de l'équation de Böttcher,

$$\Phi_2(Z) = b_q[\Phi_1(Z)]^q$$

et, à cause de la définition de Φ_2,

$$\Phi_1[R_2(Z)] = b_q[\Phi_1(Z)]^q.$$

Les solutions fondamentales, relatives à α, des équations de Böttcher pour les deux substitutions permutables R_1 *et* R_2 *sont identiques.*

34. Conclusion. — *Si deux substitutions permutables* R_1 *et* R_2 *ont un point double attractif α commun :*

1° *Si le multiplicateur de l'une pour ce point double n'est pas nul, celui* *de l autre ne l'est pas non plus, et les équations de Schrœder relatives aux deux fractions* $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ *et au point* α *ont les mêmes solutions;*

2° *Si l'un des deux multiplicateurs est nul, l'autre l'est aussi, et les équations de Böttcher relatives aux deux fractions permutables et au point* α *ont les mêmes solutions.*

35. Dans l'un ou l'autre des deux cas précédents, supposons que le point double attractif commun à R_1 et R_2 soit à l'origine, et désignons par $\mathcal{D}_0$ le domaine immédiat de convergence vers l'origine, commun à l'itération de R_1 et R_2. L'une ou l'autre des relations de Schrœder et de Böttcher, suivant le cas, prouve que la solution fondamentale $F(Z)$, développable autour de l'origine, par

$$F(Z) = Z + a_2 Z^2 + \ldots$$

n'admet comme zéro dans un petit cercle γ entourant l'origine que le point O lui-même, et zéro simple. D'ailleurs, si Z_0 est un zéro de $F(Z)$, $R(Z_0)$ le sera aussi et tous les conséquents de Z_0. Il en sera de même de tous les antécédents de Z_0 intérieurs à $\mathcal{D}_0$. Donc tous les antécédents de l'origine, intérieurs à $\mathcal{D}_0$, dans l'itération que définit R_1 ou R_2 seront des zéros de $F(Z)$ qui satisfait aux deux équations de Schrœder de R_1 et de R_2. Inversement pour tout zéro Z_0 de $F(Z)$, intérieur à $\mathcal{D}_0$, tout conséquent $R_1^{(n)}(Z_0)$ étant encore un zéro de $F(Z)$, et, pour n assez grand, intérieur à γ, il est clair que $R_1^{(n)}(Z_0)$ sera $= 0$. Il y a identité entre les zéros de $F(Z)$ et les antécédents de tout ordre du point attractif commun O, intérieurs au domaine immédiat de ce point attractif, antécédents pris par les $R_1^{(-k)}$ ou les $R_1^{(-l)}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Si R_1 *et* R_2 *permutables ont un point double attractif commun* α, *l'ensemble des antécédents de tout ordre de ce point, en se bornant aux antécédents intérieurs au domaine immédiat de convergence* $\mathcal{D}_\alpha$ *vers* α, *est le même pour* R_1 *et pour* R_2. Ces antécédents ont pour points limites tous les points frontière de $\mathcal{D}_\alpha$.

36. Soit maintenant α un point double indifférent commun à R_1 et R_2 fractions permutables. A cause des nombreux cas particuliers en lesquels ce cas peut se subdiviser, je me bornerai ici au cas le plus simple, auquel pourraient se ramener les autres.

On supposera que α étant à l'origine, le multiplicateur

$$S_1 = R'_1(\alpha) = +1$$

et que le développement de $R_1(Z)$ s'écrit

$$Z_1 = R_1(Z) = Z + a_2 Z^2 + \ldots.$$

Écrivons alors

$$Z_2 = R_2(Z) = SZ + b_2 Z^2 + \ldots \qquad (|S| = 1).$$

La condition de permutabilité

$$R_1[R_2(Z)] \equiv R_2[R_1(Z)]$$

donne

$$\begin{aligned}(SZ + b_2 Z^2 + \ldots) + a_2(SZ + b_2 Z^2 + \ldots)^2 + \ldots \\ = S(Z + a_2 Z^2 + \ldots) + b_2(Z + a_2 Z^2 + \ldots)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

L'égalité des termes en Z^2 fournit

$$\begin{gathered}b_2 + a_2 S^2 = S a_2 + b_2, \\ a_2(S^2 - S) = a_2 S(S-1) = 0.\end{gathered}$$

Par conséquent, ou bien $a_2 = 0$, ou bien $S = 1$.

De même si l'on suppose $Z_1 = Z + a_p Z^p + \ldots$ $(p > 2)$, on a encore en égalant les termes en Z^p dans l'identité suivante :

$$\begin{aligned}(SZ + b_2 Z^2 + \ldots) + a_p(SZ + b_2 Z^2 + \ldots)^p + \ldots \\ = S(Z + a_p Z^p + \ldots) + b_2(Z + a_p Z^p + \ldots)^2 + \ldots,\end{aligned}$$

$$b_p + a_p S^p = S a_p + b_p \qquad \text{ou encore} \qquad a_p S(S^{p-1} - 1) = 0.$$

Donc, si $a_p = 0$, il faut $S^{p-1} = 1$.

Nous n'examinerons ici que le cas où $R_1(Z)$ s'écrit

$$Z_1 = Z + a_2 Z^2 + \ldots \qquad (a_2 \neq 0),$$

c'est-à-dire

$$R'_1(\alpha) = 1, \qquad R'_1(\alpha) \neq 0;$$

alors pour R_2 il faudra nécessairement

$$S = 1, \qquad R'_2(\alpha) = 1.$$

Si l'on écrit

$$Z_2 = Z + b_{q+2} Z^{2+q} + \ldots \qquad (q \geqq 0, \, b_{q+2} \neq 0),$$

en écrivant l'identité des termes en Z^{q+3} dans $R_2[R_1] = R_1[R_2]$, on obtient

$$a_{q+3} + b_{q+2}(q+2)a_2 + b_{q+3} = b_{q+3} + 2a_2 b_{q+2} + q_{+3};$$

donc

$$q a_2 b_{q+2} = 0$$

et, à cause de $a_2 \neq 0$, $b_{q+2} \neq 0$, on a nécessairement

$$q = 0.$$

Si donc

$$R'_1(\alpha) = 1, \qquad R''_1(\alpha) \neq 0,$$

alors nécessairement

$$R'_2(\alpha) = 1, \qquad R''_2(\alpha) \neq 0.$$

37. Dans ces conditions, les circonstances de l'itération de

$$Z_1 = Z + a_2 Z^2 + \ldots$$

prouvent que le domaine immédiat de convergence $\mathcal{D}_0$ vers l'origine admet l'origine pour frontière; O est un point de E'_{R_1}; en ce point, E'_{R_1} *pénètre en pointe* dans le domaine $\mathcal{D}_0$, c'est-à-dire que, *sauf une demi-droite bien déterminée par* a_2 (¹) *et issue de* O, sur toute autre demi-droite issue de O on peut trouver un petit segment limité d'un côté par O et dont tous les points intérieurs ont des conséquents successifs qui tendent régulièrement vers l'origine : ce segment est intérieur à $\mathcal{D}_0$. Parmi les domaines en lesquels l'ensemble E'_{R_1} divise le plan, il n'en existe qu'un ayant une pointe rentrante en O comme $\mathcal{D}_0$, et c'est $\mathcal{D}_0$ lui-même.

Considérons alors l'itération de R_2 :

$$Z_2 = Z + b_2 Z^2 + \ldots,$$

l'ensemble E'_{R_2} est identique à E'_{R_1}; parmi les régions en lesquelles E'_{R_2} divise le plan, il en est une et une seule présentant une pointe rentrante en O, et c'est $\mathcal{D}_0$. Or, le domaine immédiat de convergence vers O, dans l'itération de R_2, doit avoir une pointe rentrante en O. C'est donc $\mathcal{D}_0$ lui-même. Les domaines de convergence vers le point

(¹) Voir *J. de Math.*, 1918, p. 223, nᵒˢ 104 et suiv.

double sont donc identiques pour R_1 et R_2. *Ceci oblige le rapport* $\frac{b_2}{a_2}$ *à être réel et positif.*

38. Dans ces conditions, un même changement de variable linéaire sur $Z, Z_1 = R_1(Z)$, et $Z_2 = R_2(Z)$, enverra le point double à l'infini et donnera pour Z_1 et Z_2 des développements de la forme

$$Z_1 = Z + a_1 + \frac{\lambda_1}{Z} + \frac{\lambda_2}{Z^2} + \ldots,$$

$$Z_2 = Z + a_2 + \frac{\mu_1}{Z} + \frac{\mu_2}{Z^2} + \ldots,$$

a_1 et a_2 étant réels et positifs.

Désignons alors par $\mathcal{D}_\infty$ le domaine immédiat de convergence vers l'infini. Il contient un domaine D qui s'étend à l'infini vers la droite (axe réel positif) et limité vers la gauche par deux demi-droites convenables, issues d'un point de l'axe réel, symétriques par rapport à l'axe réel et faisant avec la partie négative de cet axe un angle ε d'ailleurs arbitrairement petit.

On démontre [1] l'existence dans $\mathcal{D}_\infty$ d'une fonction, holomorphe dans $\mathcal{D}_\infty$, y satisfaisant à l'équation fonctionnelle d'Abel

$$F[R_1(Z)] = F(Z) + a_1$$

et admettant, ainsi que sa dérivée, les expressions asymptotiques

$$F(Z) = Z + o(L|Z|),$$

$$F'(Z) = 1 + o\left(\frac{1}{Z}\right).$$

$[o(L|Z|)]$ étant infiniment grand d'ordre inférieur à $L|Z|$ et $o\left(\frac{1}{Z}\right)$, infiniment petit d'ordre $< \frac{1}{Z}$, ces expressions asymptotiques étant valables dans tout domaine intérieur à D et borné à gauche par une droite (d'ailleurs quelconque) parallèle à l'axe imaginaire. Toute

[1] Voir FATOU, *Bull. Soc. math.*, t. XLVII, n^{os} 8 et 9, p. 192 et suiv., et t. XLVIII, n^{os} 72 et 77. On pourra se reporter à cette étude pour les propriétés de F(Z), de $\mathcal{D}_\infty$, etc.

solution de l'équation d'Abel, holomorphe dans $\mathcal{D}_\infty$, sera de la forme

$$\mathcal{F}(Z) = F(Z) + \Omega[F(Z)],$$

Ω fonction entière de $F(Z)$ avec la période a_1.

Mais si l'on astreint $\mathcal{F}(Z)$ à avoir l'expression asymptotique

$$Z + o(L|Z|)$$

dans Δ, la fonction $\Omega[F(Z)]$ ne pourra différer d'une constante à cause de la périodicité a_1 qui obligerait $\Omega(z)$ à être bornée supérieurement par $o(L|z|)$ partout dès l'instant qu'elle l'est dans le domaine infini résultant de Δ par la transformation $z = F(Z)$.

Toutes les solutions de l'équation d'Abel, holomorphes dans $\mathcal{D}_\infty$ et susceptibles dans Δ de la représentation $Z + o(L|Z|)$, sont de la forme

$$F(Z) + \text{const.}$$

39. Soit $F_1(Z)$ une de ces solutions, on a

$$(\mathcal{E}) \qquad F_1[R_1(Z)] = F_1(Z) + a_1,$$

$$F_1[R_1[R_2(Z)]] = F_1[R_2(Z)] + a_1.$$

Posons

$$F_1[R_2(Z)] = F_2(Z),$$

$[Z|R_2(Z)|]$ conservant $\mathcal{D}_\infty$, $F_2(Z)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_\infty$. De plus, dans $\mathcal{D}_\infty$, on a

$$R_2(Z) = Z + a_2 + \frac{\mu_1}{Z} + \ldots = Z + a_2 + \frac{\theta}{Z},$$

θ étant bornée.

Si Z est intérieur à un domaine Δ' intérieur à D analogue à Δ, $R_2(Z)$, d'après les propriétés de l'itération de R_2, sera intérieur à Δ. Dans le domaine Δ', on a donc

$$F_2(Z) = F_1[R_2(Z)] = R_2(Z) + o[L|R_2(Z)|] = Z + a_2 + \frac{\theta}{Z} + o\left(L\left|Z + a_2 + \frac{\theta}{Z}\right|\right),$$

expression qu'on peut écrire

$$F_2(Z) = Z + o(L|Z|),$$

$F_2(Z)$ est donc susceptible dans Δ' de la représentation requise.

L'équation ($\mathcal{E}$) peut s'écrire

$$F_1[R_2[R_1(Z)]] = F_1[R_2(Z)] + a_1,$$

ou bien

$$F_2[R_1(Z)] = F_2(Z) + a_1,$$

F_2, solution de l'équation d'Abel de R_1 satisfaisant aux conditions requises, ne peut différer de $F_1(Z)$, dont on est parti, que par une constante. On a donc

$$F_2(Z) = F_1[R_2(Z)] = F_1(Z) + K.$$

Montrons que cette constante est égale à a_2, nous aurons ainsi prouvé que *les solutions des équations d'Abel relatives à* R_1 *et* R_2 *et à leur point double commun sont les mêmes.*

Pour le voir, remarquons que Z et $R_2(Z)$ étant simultanément dans D, on a

$$F_1[R_2(Z)] - F_1(Z) = \int_Z^{R_2(Z)} F'(Z)\,dZ.$$

On peut supposer Z et $R_2(Z)$ dans Δ', ainsi que le chemin d'intégration. Alors

$$F'(Z) = 1 + o\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Donc

$$\int_Z^{R_2(Z)} F'(Z)\,dZ = R_2(Z) - Z + \int_Z^{R_2(Z)} o\left(\frac{1}{Z}\right)dZ.$$

Dans Δ' on a $\left|o\left(\frac{1}{Z}\right)\right| < \frac{C}{|Z|}$, C constante convenable, et l'intégrale du deuxième membre est inférieure à $\frac{C}{\zeta}\mathcal{L}$, ζ étant le minimum de Z sur le chemin d'intégration et $\mathcal{L}$ la longueur de ce chemin. On prendra pour chemin le segment $[Z, R_2(Z)]$ visiblement intérieur à Δ' lorsque $\mathcal{R}(Z)$ est assez grand et Z intérieur à Δ'; de plus, il est clair que $\frac{R_2(Z)}{Z}$ tend vers 1 si Z grandit indéfiniment. L'intégrale précédente est donc inférieure à

$$C\,\frac{|R_2(Z) - Z|}{|Z|},$$

quantité qui tend vers zéro si Z grandit indéfiniment en restant dans Δ'.

Donc, si Z grandit indéfiniment en restant dans Δ', on a

$$\lim\left[F_1[R_2(Z)] - F_1(Z)\right] = \lim[R_2(Z) - Z]$$

et, à cause de

$$R_2(Z) = Z + a_2 + \frac{\mu_1}{Z} + \frac{\mu_2}{Z^2} + \ldots,$$

développement convergent à l'infini, on a

$$\lim[R_2(Z) - Z] = a_2.$$

Donc

$$\lim\left[F_1[R_2(Z)] - F_1(Z)\right] = a_2.$$

Et puisque $F_1[R_2(Z)] - F_1(Z)$ est constante dans $\mathcal{D}_\infty$, on aura l'identité

$$F_1[R_2(Z)] = F_1(Z) + a_2,$$

qui prouve que les *équations d'Abel pour* R_1 *et* R_2 *et pour le point double indifférent commun ont les mêmes solutions.*

40. On peut, au lieu de considérer l'équation d'Abel, considérer l'équation

$$H_1(z + a_1) = R_1[H_1(z)]$$

et l'équation analogue pour R_2

$$H_2(z + a_2) = R_2[H_2(z)].$$

Elles admettent des solutions *méromorphes* susceptibles dans un domaine infini du côté des parties réelles négatives et limité par deux demi-droites issues d'un point de l'axe réel et faisant avec cet axe un angle ε (arbitrairement petit) de part et d'autre, de la représentation

$$H(z) = z + o[L|z|],$$

$$H'(z) = 1 + o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

En raisonnant comme précédemment, mais cette fois en limitant le domaine Δ'' de *z vers la droite* par $\mathcal{R}(z) < A$ et faisant tendre z vers l'infini en restant dans Δ'', on verra en raisonnant sur la fonction inverse de $H_1(z)$ définie par $Z = H_1(z)$ que cette fonction inverse $z = \mathcal{F}^1(Z)$

satisfait à l'équation d'Abel

$$\mathcal{F}_1[R_1^{(-1)}(Z)] = \mathcal{F}_1(Z) - a_1$$

dans le domaine Δ' pour $\mathcal{R}(Z)$ assez petit, qu'elle y est holomorphe, et qu'elle satisfait aussi à l'équation analogue pour R_2

$$\mathcal{F}_1[R_2^{(-1)}(Z)] = \mathcal{F}_1(Z) - a_2,$$

en choisissant les branches $R_1^{(-1)}$ et $R_2^{(-1)}$ qui, itérées, donnent pour limite le point à l'infini. Il en résulte que *les deux équations*

$$H(z + a_1) = R_1[H(z)],$$
$$H(z + a_2) = R_2[H(z)]$$

admettent encore les mêmes solutions méromorphes, asymptotiquement représentables dans Δ'' *par* $z + o(L|z|)$.

DEUXIÈME PARTIE

EXISTENCE DES FRACTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES.

CHAPITRE I.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE LA PERMUTABILITÉ DES FRACTIONS RATIONNELLES, QUAND L'UNE D'ELLES EST DU PREMIER DEGRÉ.

1. On va rechercher toutes les fractions rationnelles $R_1(Z)$ du premier degré permutables avec d'autres fractions rationnelles $R_2(Z)$.

Nous supposerons $R_2(Z)$ de degré > 1, la permutabilité des fractions rationnelles du premier degré ayant déjà été étudiée.

On devra avoir

$$R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)].$$

Les points critiques de la fonction inverse de $R_2[R_1(Z)]$ sont ceux de la fonction $R_2^{(-1)}(Z)$, inverse de $R_2(Z)$, puisque R_1 est du premier degré; ceux de la fonction inverse de $R_1[R_2(Z)]$ sont les points Z_1 qui se déduisent des points critiques Z de $R_2^{(-1)}(Z)$ par la transformation $Z_1 = R_1(Z)$. Il doit y avoir identité entre les deux groupes de points.

La transformation $[Z \mid R_1(Z)]$ *doit donc permuter entre eux les points critiques de* $R_2^{(-1)}(Z)$.

Partons alors d'un point critique α de $R_2^{(-1)}(Z)$ et itérons-le par R_1, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)}$, ..., comme les $R_1^{(i)}(\alpha)$ sont tous critiques pour $R_2^{(-1)}(Z)$ et comme $R_2^{(-1)}(Z)$ n'a qu'un nombre fini de points critiques, il existera deux indices i et j positifs tels que

$$R_1^{(i)}(\alpha) = R_1^{(i+j)}(\alpha).$$

Le point $R_1^{(i)}(\alpha)$ est donc double pour $[Z \mid R_1^{(j)}(Z)]$. Mais, comme R_1 est du premier degré, son inverse $R_1^{(-1)}$ est aussi du premier degré; il en résulte aussitôt que $R_1^{(i-1)}(\alpha)$ est double pour $[Z \mid R_1^{(j)}]$ comme $R_1^{(i)}$; car on a

$$R_1[R_1^{(i-1)}(\alpha)] = R_1[R_1^{(i-1+j)}(\alpha)].$$

Donc

$$R_1^{(i-1)}(\alpha) = R_1^{(i-1+j)}(\alpha).$$

R_1 tout point du plan n'ayant qu'un antécédent par R_1^{-1}. De même on verra que *tous les points* α, $R_1(\alpha)$, $R_1^{(2)}(\alpha)$, ... *sont points doubles de* $R_1^{(j)}$.

On voit ainsi que *tout point critique* α *de* $R_2^{-1}(Z)$ *sera point double pour une certaine puissance* $R_1^{(j)}$ *de la substitution homographique* $[Z \mid R_1(Z)]$. Or $R_1^{(j)}$ a les mêmes points doubles que R_1 et ils sont au nombre de deux au plus, à moins que $R_1^{(j)}$ ne se réduise à une identité.

En effet, si R_1 a deux points doubles distincts ζ_1, ζ_2, la transformation $Z_1 = R_1(Z)$ peut s'écrire

$$\frac{Z_1 - \zeta_1}{Z_1 - \zeta_1} = k\frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2}$$

et $Z_j = R_1^{(j)}(Z)$ s'écrira

$$\frac{Z_j - \zeta_1}{Z_j - \zeta_2} = k^j\frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2},$$

dont les points doubles sont fournis par l'équation

$$(Z - \zeta_1)(Z - \zeta_2)(1 - k^j) = 0.$$

Si donc $k^j \neq 1$, ce sont les points ζ_1 et ζ_2, et, si $k^j = 1$, $R_1^{(j)}(Z) \equiv Z$ est la substitution identique.

Et si R_1 a deux points doubles confondus qu'on peut supposer à l'infini par une transformation auxiliaire, $Z_1 = R_1(Z)$ s'écrira

$$Z_1 = Z + k.$$

$Z_j = R_1^{(j)}(Z)$ sera

$$Z_j = Z + kj.$$

Ses deux points doubles sont à l'infini à moins que $k = 0$, auquel cas la substitution initiale $[Z \mid R_1(Z)]$ serait l'*identité*.

2. Supposons que $R_2^{(-1)}(Z)$ ait plus de deux points critiques, chacun sera point double pour une $R_1^{(j)}$.

Soient $R_1^{(j_1)}, R_1^{(j_2)}, \ldots, R_2^{(j_k)}$ ces diverses $R_1^{(j)}$ distinctes correspondant aux divers points critiques de $R_2^{(-1)}(Z)$.

Il est clair que $R_1^{(j_1+j_2+\ldots+j_k)}$ *admettra pour points doubles tous les points critiques de* $R_2^{(-1)}(Z)$. Il existera donc une puissance $R_1^{(d)}$ de la substitution linéaire $[Z \mid R_1(Z)]$ qui, ayant plus de deux points doubles, se réduira à l'identité. Comme $[Z \mid R_1(Z)]$ n'est pas la substitution identique, on voit, d'après la fin du n° 1, que R_1 devra avoir deux points doubles distincts ζ_1 et ζ_2 et s'écrire

$$\frac{Z_1 - \zeta_1}{Z_2 - \zeta_2} = k\frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2} \qquad \text{avec} \qquad k^d = 1;$$

k sera une racine primitive d'ordre d de l'unité.

Par une même transformation homographique auxiliaire faite sur les variables Z et $Z_1 = R_1(Z)$, on peut supposer que $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$; alors $Z_1 = R_1(Z)$ s'écrit

$$Z_1 = kZ \qquad (k^d = 1).$$

Toute fonction rationnelle $R_2(Z)$ permutable à $R_1(Z)$ devra satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$R_2[kZ] = kR_2(Z) \qquad (k^d = 1).$$

Posons alors

$$R_2(Z) = Z\mathfrak{R}_2(Z).$$

$\mathcal{R}_2(Z)$ est une fraction rationnelle et l'on aura

$$kZ\mathcal{R}_2(kZ) = kZ\mathcal{R}_2(Z),$$

$\mathcal{R}_2$ satisfera à l'équation plus simple

$$\mathcal{R}_2(kZ) = \mathcal{R}_2(Z).$$

On déduit de là

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(Z) &= \mathcal{R}_2(kZ) = \mathcal{R}_2(k^2Z) = \ldots = \mathcal{R}_2(k^{d-1}Z),\\ &= \frac{1}{d}[\mathcal{R}_2(Z) + \mathcal{R}_2(kZ) + \ldots + \mathcal{R}_2(k^{d-1}Z)].\end{aligned}$$

La quantité

$$\mathcal{R}_2(Z) + \mathcal{R}_2(kZ) + \ldots + \mathcal{R}_2(k^{d-1}Z)$$

est une fonction symétrique rationnelle des quantités $Z, kZ, \ldots, k^{d-1}Z$; c'est donc une fonction rationnelle de leurs fonctions symétriques élémentaires

$$\begin{aligned}s_1 &= Z + kZ + \ldots + k^{d-1}Z,\\ s_2 &= \Sigma\, k^iZ\, k^jZ \qquad (i \neq j;\ i, j = 0, 1, \ldots, d-1),\\ s_3 &= \Sigma\, k^iZ\, k^jZ\, k^lZ \qquad (i \neq j \neq l;\ i, j, l = 0, 1, \ldots, d-1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ s_d &= Z\, kZ\, k^2Z \ldots k^{d-1}Z.\end{aligned}$$

Or, il est bien connu que $1, k, k^2, \ldots, k^{d-1}$ étant les racines de $k^d = 1$ dont k est racine primitive, on a

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad s_d = Z^d.$$

$\mathcal{R}_2(Z)$ *est donc une fonction rationnelle de* Z^d et l'on a

$$R_2(Z) = Z\mathcal{R}(Z^d),$$

$\mathcal{R}$ étant une fraction rationnelle quelconque de la variable Z^d. Il est clair que

$$R_2(kZ) = kZ\mathcal{R}[(kZ)^d] = kZ\mathcal{R}(Z^d) = kR_2(Z) \qquad (\text{car } k^d = 1).$$

Le problème est ici complètement résolu.

Si $R_2^{(-1)}(Z)$ *a plus de deux points critiques, on peut par une transformation homographique du plan* Z *ramener les substitutions permutables*

$[Z \,|\, R_1(Z)]$ *et* $[Z \,|\, R_2(Z)]$ *aux formes canoniques suivantes :*

$$Z_1 = kZ \qquad (k^d = 1),$$

d entier positif quelconque ;

$$Z_2 = R_2(Z) = Z\mathcal{R}(Z^d),$$

$\mathcal{R}$ fraction rationnelle quelconque d'un argument.

Un exemple remarquable de ces substitutions s'obtient en considérant par exemple une fonction $Z = \wp(u)$ de Weierstrass, qui admette une multiplication complexe conduisant à une transformation des périodes qui soit du premier ordre. La théorie de la multiplication complexe (voir *Traité d'Analyse* de M. Jordan, t. II, 3e édition, nos 533-538) prouve qu'alors le rapport τ des périodes doit satisfaire à l'une ou l'autre des équations

$$\tau^2 + 1 = 0,$$
$$2\tau^2 + 2\tau + 2 = 0.$$

Dans le premier cas, le multiplicateur complexe

$$\sigma = \pm i, \qquad \sigma^2 + 1 = 0, \qquad \sigma^4 = 1;$$

Dans le deuxième cas, le multiplicateur complexe

$$\sigma = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}, \qquad \sigma^3 + 1 = 0, \qquad \sigma^6 = 1.$$

Dans le premier cas, $Z_1 = \wp(\pm iu)$ est une fonction homographique de $Z = \wp(u)$, et l'on a $Z_1 = R_1(Z)$, *l'itérée* $R_1^{(4)}$ *étant identique à l'unité* (ici $k = i$, $d = 4$).

Dans le deuxième cas, $Z_1 = \wp\left(ue^{\pm\frac{i\pi}{3}}\right)$ est fonction homographique de $Z = \wp u$. Ici c'est $R_1^{(6)}$ *qui est identique à l'unité* $\left(k = e^{\frac{\pi i}{3}},\ d = 6\right)$.

Ces fonctions seront respectivement permutables à toutes les fonctions rationnelles qui expriment $Z_k = \wp(ku)$ en fonction de $Z = \wp u$; k entier positif quelconque.

Il est à peine besoin de dire ici que si $R_1(Z)$ est permutable à $R_2(Z)$, toute itérée de R_1 est permutable à toute itérée de R_2. Cela se verrait d'ailleurs sur la forme canonique, car $R_1^{(\lambda)}(Z)$ est du même type que $R_1(Z)$ et l'on a par exemple

$$R_2^{(2)}(Z) = Z_1\mathcal{R}(Z_1^d) = Z\mathcal{R}(Z^d).\mathcal{R}[Z^d\mathcal{R}^d(Z^d)]$$

et il est clair que $\mathcal{R}[Z^d\mathcal{R}^d(Z^d)]$ est une fonction rationnelle de Z^d.

2 *bis*. Il faut remarquer, dans le cas qui vient de nous occuper, que l'origine et l'infini sont des points doubles indifférents de $[Z|R_1(Z)]$. S'ils sont points doubles de $Z|R_2(Z)$, ce qui arrive par exemple pour o si o n'est pas pôle de $\mathcal{R}(Z^d)$, ce sont aussi des points doubles indifférents de $[Z|R_2(Z)]$. Il eût été impossible *a priori* que $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ eussent par exemple un point répulsif o commun. Car $G(z)$ étant alors la *fonction méromorphe fondamentale* de $R_2(Z)$ relative à ce point o,

$$G(s_2 z) = R_2[G(z)] \text{ (1)}, \qquad \text{si} \qquad Z_2 = R_2(Z) = s_2 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \ldots,$$

en supposant toujours que $R_1(Z)$ a pour points doubles o et ∞, G devrait satisfaire aussi à

$$G(s_1 z) = R_1[G(Z)] = s_1 G(z),$$

car

$$Z_1 = R_1(Z) = s_1 Z \qquad (|s_1| > 1).$$

Or, si l'on cherche le développement de Taylor de $G(z)$ autour de o

$$G(z) = z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots$$

satisfaisant à

$$G(s_1 z) = s_1 G(z),$$

on trouve que $G(z)$ doit se réduire à $G(z) = z$, et R_2 devrait alors être *linéaire*.

Le même raisonnement peut être fait *a priori* pour prouver l'impossibilité pour le point double commun d'être *attractif*. On considérerait la fonction, holomorphe autour de o, satisfaisant à l'équation de Schrœder (2) pour o

$$F[R_2(Z)] = s_2 F(Z) \qquad (|s_2| < 1),$$

(1) *Voir* première Partie, n° 6.
(2) *Voir* première Partie, n° 32.

elle devrait aussi satisfaire à

$$F(s_1 Z) = s_1 F(Z)$$

et, par conséquent, se réduire à Z, ce qui ne peut être si R_2 n'est pas linéaire.

3. Supposons que $R_2^{(-1)}(Z)$ *n'ait que deux points critiques*. Il est clair qu'une fonction algébrique ne saurait avoir moins de deux points critiques à cause de l'existence de chemins, dans le plan de la variable Z, qui ne permutent aucune détermination de la fonction algébrique $R_2^{(-1)}(Z)$, ce qui ne saurait avoir lieu s'il n'y avait qu'un point critique.

D'après le n° 1, il est clair que la substitution $[Z|R_1(Z)]$ permute entre eux les deux points critiques, ou les conserve individuellement. On peut, si elle les échange, remplacer $[Z|R_1(Z)]$ par son itérée $R_1^{(2)}(Z)$ qui les conservera individuellement, et, par conséquent, supposer dans tous les cas que $[Z|R_1(Z)]$ conserve chacun des points critiques. On supposera d'ailleurs, par une transformation linéaire auxiliaire si c'est nécessaire, que ces points sont o et ∞.

Comme $R_2^{(-1)}(Z)$ n'a que deux points critiques, tout contour qui se réduit à deux lacets successifs, chacun décrit autour de l'un des deux points critiques, devra laisser inaltérée chacune des déterminations de $R_2^{(-1)}(Z)$, car un tel chemin équivaut (sur la sphère de Riemann) à un contour n'embrassant aucun point critique. On verra ainsi facilement que toutes les branches de $R_2^{(-1)}(Z)$ forment un seul système circulaire autour de chaque point critique; toutes ces branches sont égales en o et égales aussi au point à l'infini. Nécessairement alors $R_2(Z)$ a tous ses zéros confondus en un point a et tous ses pôles confondus en un autre point b :

$$Z_1 = R_2(Z) = A\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right)^n.$$

Une telle forme devra être permutable à

$$Z_1 = R_1(Z) = sZ \qquad (s \neq o),$$

ce qui exige

$$\left(\frac{sZ-a}{sZ-b}\right)^n \equiv s\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right)^n \qquad \left(\frac{a}{s}=a,\ \frac{b}{s}=b\right).$$

Donc $s=1$, à moins que $a=0$ et $b=\infty$, auquel cas la fraction $R_2(Z)$ se réduit à

$$Z_2=R_2(Z)=AZ^n,$$

ou bien $a=\infty$, $b=0$, auquel cas elle se réduit à

$$Z_2=R_2(Z)=AZ^{-n}.$$

Dans le premier cas, elle sera permutable à $Z_1=sZ$, si l'on a

$$s^nZ^n=sZ^n, \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad s^{n-1}=1.$$

Dans le deuxième cas, il faudra

$$\frac{1}{s^nZ^n}=\frac{s\,1}{Z^n}, \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad s^{n+1}=1;$$

il se ramène au premier, en posant

$$n=-n'.$$

Les formes canoniques pour le cas présent sont donc banales :

$$\boxed{\begin{array}{ll} Z_2=R_2(Z)=AZ^n & (n \text{ entier} > 0 \text{ ou } < 0) \\ Z_1=sZ & (s^{n-1}=1) \end{array}}$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE L'ENSEMBLE PARFAIT E' QUI CORRESPOND A DEUX SUBSTITUTIONS RATIONNELLES PERMUTABLES $[Z|R_1(Z)]$ ET $[Z|R_2(Z)]$.

4. Nous allons, dans le Chapitre présent et dans les suivants, pousser l'étude des propriétés de deux substitutions permutables, dont aucune n'est linéaire; cette étude a été commencée dans la première Partie que nous avons consacrée à ces questions. On a, en particulier, établi le résultat suivant : Soit E_{R_1} l'ensemble des points qui appartiennent à un cycle répulsif de R_1; son dérivé E'_{R_1} est parfait. On peut le caractériser par la propriété suivante : E'_{R_1} *est l'ensemble des points où la famille des itérées* $R_1(Z)$, $R_1^{(2)}(Z)$, ..., $R_1^{(n)}(Z)$, ... *de* $R_1(Z)$ *n'est pas*

normale (¹). Soient E_{R_2} et E'_{R_2} les ensembles analogues à E_{R_1} et E'_{R_1}, pour la substitution $[Z|R_2(Z)]$. *Si* R_1 *et* R_2 *sont permutables*, E'_{R_1} *et* E'_{R_2} *sont identiques* (²).

J'ai aussi montré (³) que l'on pouvait toujours trouver un point appartenant à E_{R_1} et E_{R_2} et qui fût point double répulsif commun à deux itérées convenables $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$ de R_1 et R_2. On pourra poser

$$R_1^{(k)} = \mathcal{R}_1 \qquad \text{et} \qquad R_2^{(l)} = \mathcal{R}_2.$$

Il est connu que toutes les itérées $R_1^{(k)}$ admettent le même ensemble E'_R, par conséquent $E'_{\mathcal{R}_1}$ est identique à E'_{R_1}, $E'_{\mathcal{R}_2}$ identique à E'_{R_2}, l'est aussi à $E'_{\mathcal{R}_1}$.

On peut donc supposer que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, permutables, ont un point double répulsif commun qu'on prendra pour origine du plan. Soient s_1 et s_2 les multiplicateurs correspondants :

$$\mathcal{R}_1(0) = 0, \qquad \mathcal{R}'_1(0) = s_1, \qquad \mathcal{R}_2(0) = 0, \qquad \mathcal{R}'_2(0) = s_2.$$

Il existe une fonction méromorphe $G(z)$ développable autour de 0 par la formule

$$G(z) = z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots \qquad [G(0) = 0,\ G'(0) = 1],$$

et une seule satisfaisant aux deux équations

$$G(s_1 z) = \mathcal{R}_1[G(z)],$$
$$G(s_2 z) = \mathcal{R}_2[G(z)].$$

C'est la fonction fondamentale, dite aussi « fonction de Poincaré ».

Lorsque R_1 est un polynome, excepté pour $R_1 = AZ^k$, R_2, permutable à R_1 est nécessairement un polynome (⁴).

Lorsque R_1 est de la forme $R_1 = Z^{\pm k}$ (k entier > 0), R_2 est aussi de la forme $AZ^{\pm\lambda}$. Nous laissons de côté ce cas particulier dans toute la suite, puisque aussi bien, pour ce cas particulier, la recherche des fonctions R_2 permutables à R_1 est déjà faite.

(¹) Voir *Journal de Mathématiques*, 1918, nos 13 et 14, p. 97.
(²) *Voir* première Partie, nos 9 à 13.
(³) *Voir* première Partie, nos 9 à 13.
(⁴) *Voir* première Partie, note 7 *bis*.

R_1 étant donc un polynome, R_2 l'est aussi; $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des polynomes. Alors $G(z)$ est une fonction entière d'ordre fini (¹).

5. *Quelles propriétés la fonction* $G(z)$ *possède-t-elle du fait de l'existence pour* R_1 *et* R_2 *d'un ensemble parfait* $E'_{R_1} \equiv E'_{R_2}$ *que, pour abréger, j'appellerai* E'?

E' est le lieu des points où la famille des $\mathcal{R}_1^{(i)}(Z)$ n'est pas normale. Par la transformation $Z = G(z)$, aucun point Z de E' n'étant valeur exceptionnelle de $G(z)$ (²), il correspondra à E' un ensemble parfait $\mathcal{E}$ du plan z, et aux fonctions $\mathcal{R}_1^{(i)}(Z)$ les fonctions méromorphes

$$G_i(z) = G(s_1^i z).$$

En aucun point de $\mathcal{E}$ la famille des $G_i(z)$ ne saurait être normale; inversement à tout point z où la famille des G_i est normale correspond un point $Z = G(z)$ où la famille des $\mathcal{R}_1^{(i)}(Z)$ est normale. L'ensemble parfait $\mathcal{E}$ est le lieu des points du plan z où la famille des

$$G_i(z) = G(s_1^i z)$$

n'est pas normale. C'est évidemment aussi le lieu des points où la famille des $\mathcal{G}_i(z) = G(s_2^i z)$ n'est pas normale. $\mathcal{E}$ *reste invariant par chacune des transformations* $[z \mid zs_1]$, $[z \mid zs_2]$ *et par leurs inverses* [o fait partie de $\mathcal{E}$ ainsi que l'infini]. Il va en résulter d'importantes propriétés de cet ensemble, qui se traduiront sur E' par des propriétés correspondantes.

6. Quelle est la constitution d'un ensemble parfait $\mathcal{E}$ qui reste invariant par deux substitutions

$$[z \mid zs_1], \qquad [z \mid zs_2]\,?$$

Posons

$$z = e^{\zeta}, \qquad s_1 = e^{\sigma_1}, \qquad s_2 = e^{\sigma_2}, \qquad \zeta = \log z, \qquad \sigma_1 = \log s_1, \qquad \sigma_2 = \log s_2.$$

Puisque $|s_1|$ et $|s_2|$ sont > 1, $\log s_1$ et $\log s_2$ auront leur partie réelle

(¹) Voir *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières et méromorphes* (*Annales de l'École Normale*, 1920, n° 29, p. 187).

(²) *Voir* première Partie, n° 20.

> 0 et $\neq 0$. On choisira pour σ_1 et σ_2 les déterminations qu'on voudra, par exemple celles dont les parties imaginaires sont entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il correspondra, dans le plan ζ, à tout point z, une infinité de points ζ se déduisant de l'un d'entre eux par

$$[\zeta \mid \zeta + 2k\pi i] \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \infty)$$

et par suite à l'ensemble $\mathcal{E}$, un ensemble parfait $\mathcal{E}$ qui restera invariant par la transformation $[\zeta \mid \zeta + 2i\pi]$ et par son inverse. Si z est multiplié ou divisé par s_1, ζ augmente ou diminue de $\sigma_1 = \log s_1$. $\mathcal{E}$ ne doit par conséquent pas changer par la transformation $[\zeta \mid \zeta + \sigma_1]$ et par son inverse, il ne doit pas changer non plus par $[\zeta \mid \zeta + \sigma_2]$.

Voici donc un ensemble $\mathcal{E}$ du plan ζ invariant par les trois translations $[\zeta \mid \zeta + 2\pi i]$, $[\zeta \mid \zeta + \sigma_1]$, $[\zeta \mid \zeta + \sigma_2]$, pour lesquelles $\mathcal{R}(\sigma_1) > 0$ et $\mathcal{R}(\sigma_2) > 0$. Par conséquent, $\frac{\sigma_1}{2\pi i}$ et $\frac{\sigma_2}{2\pi i}$ ne peuvent jamais être réels dans nos hypothèses.

Partons d'un point de $\mathcal{E}$ situé à distance finie. Soit ω ce point et à partir de lui construisons tous les points $\omega + m 2\pi i + n\sigma_1 + p\sigma_2$, m, n, p étant des entiers positifs, négatifs ou nuls quelconques. Tous les points ainsi obtenus sont points de $\mathcal{E}$ au même titre que ω et il est facile d'étudier leur distribution. C'est un problème qui a été étudié dans toute sa généralité par Kronecker (¹) par les méthodes d'approximation arithmétique qui le caractérisent. Pour notre objet, on peut employer une représentation géométrique qui rend le résultat presque intuitif. (Je reviendrai ailleurs (²) sur la démonstration géométrique rigoureuse des faits que j'utiliserai dans la suite et que je regarde ici comme intuitifs.)

7. Considérons les quatre points ω, $\omega + 2\pi i$, $\omega + \sigma_1$, $\omega + \sigma_2$. On peut considérer ω comme coïncidant avec un point Ω de l'espace, et les trois autres points comme les projections sur le plan ζ de trois points Ω_1, Ω_2, Ω_3 de l'espace, qu'on pourra toujours supposer n'être pas dans un même plan avec Ω, puisque Ω_2 et Ω_3 ne sont pas dans le plan vertical de Ω et Ω_1. Les trois vecteurs $\Omega\Omega_1$, $\Omega\Omega_2$, $\Omega\Omega_3$ forment un

(¹) *Voir* KRONECKER, *Œuvres*, t. III, 1ʳᵉ Partie (divers Mémoires).

(²) *Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1922 : « Remarques sur le théorème de Jacobi... »

vrai trièdre d'origine Ω et l'on peut considérer ces trois segments comme trois arêtes issues de Ω d'un parallélépipède P. Construisons alors le réseau de parallélépipèdes déduits de P par toutes les translations

$$m\,\overline{\Omega\Omega_1} + n\,\overline{\Omega\Omega_2} + p\,\overline{\Omega\Omega_3} \quad (m, n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \infty).$$

Il est clair que les points $\omega + m\,2\pi i + n\,\sigma_1 + p\,\sigma_2$ seront les projections sur le plan des ζ des *sommets* de ce réseau de parallélépipèdes. Trois cas sont alors possibles.

8. 1° Il existe une droite perpendiculaire au plan ζ sur laquelle figurent *deux sommets du réseau* A_1 et A_2. Si l'on veut encore, le plan ζ est perpendiculaire à une droite joignant deux sommets A_1 et A_2 du réseau. Évidemment cette droite n'est parallèle ni à $\Omega\Omega_1$, ni à $\Omega\Omega_2$, ni à $\Omega\Omega_3$. Il existe alors un parallélépipède π ayant pour sommets A_1 et A_2, dont les arêtes sont parallèles respectivement à $\Omega\Omega_1$, $\Omega\Omega_2$ et $\Omega\Omega_3$ et qui se compose d'un nombre entier de parallélépipèdes P accolés. Sur la droite A_1A_2 les sommets du réseau s'ordonnent en suite équidistante et l'on peut toujours supposer qu'entre A_1 et A_2 n'existe aucun autre sommet du réseau. Si, par tous les sommets du réseau, on mène des parallèles à A_1A_2, on voit que chacune de ces droites porte une infinité de sommets régulièrement distribués sur elle et ces droites se projettent sur le plan ζ suivant un *réseau de points* (on peut voir en effet que la distance de deux de ces droites ne peut descendre au-dessous d'une limite déterminée dès l'instant qu'elle ne descend pas au-dessous d'une limite déterminée pour les droites, en nombre fini, menées par les sommets des parallélépipèdes P intérieurs à π). Les points

$$\omega + 2m\pi i + n\sigma_1 + p\sigma_2$$

forment ici les sommets d'un réseau de parallélogrammes. C'est là un fait bien connu lié au théorème célèbre de Jacobi sur l'impossibilité de trois périodes distinctes pour une fonction uniforme. L'existence de A_1A_2, perpendiculaire au plan ζ, équivaut à dire qu'il existe deux triples de nombres m_1, n_1, p_1 et m_2, n_2, p_2 distincts, c'est-à-dire pour lesquels $m_1 - m_2$, $n_1 - n_2$, $p_1 - p_2$ ne sont pas simultanément nuls, et tels que

$$\omega + m_1 2\pi i + n_1\sigma_1 + p_1\sigma_2 = \omega + m_2 2\pi i + n_2\sigma_1 + p_2\sigma_2$$

ou bien

$$(m_1 - m_2)2\pi i + (n_1 - n_2)\sigma_1 + (p_1 - p_2)\sigma_2 = 0$$

et l'on sait qu'alors le réseau construit sur les trois périodes $2\pi i$, σ_1, σ_2 se ramène à un réseau de parallélogrammes sur deux périodes fondamentales. L'existence de trois entiers M, N, P non tous nuls, tels que

$$M\,2\pi i + N\sigma_1 + P\sigma_2 = 0,$$

montre, en passant aux exponentielles, que

$$e^{N\sigma_1}e^{P\sigma_2} = 1$$

ou bien

$$s_1^N s_2^P = 1.$$

Ceci n'est possible que si N et P sont l'un positif, l'autre négatif. On aurait alors deux entiers positifs N_1 et N_2 tels que

$$s_1^{N_1} = s_2^{N_2}.$$

Mais alors

$$\mathfrak{R}_1^{(N_1)}[G(z)] = G(s_1^{N_1}z)$$

serait identique à

$$\mathfrak{R}_2^{(N_2)}[G(z)] = G(s_2^{N_2}z).$$

On aurait donc deux entiers positifs N_1 et N_2 tels que

$$\mathfrak{R}_1^{(N_1)}(Z) \equiv \mathfrak{R}_2^{(N_2)}(Z).$$

Deux puissances convenables des substitutions proposées $R_1^{(k_1)}$ et $R_2^{(k_2)}$ seraient alors identiques.

Nous écartons provisoirement cette hypothèse, car alors R_1 *et* R_2 *ne seraient pas indépendantes*. Nous ne considérerons jusqu'à nouvel ordre que des fractions permutables R_1 et R_2 *indépendantes*, c'est-à-dire *pour lesquelles le groupe des itérées de* R_1 *et le groupe des itérées de* R_2 *n'ont aucune substitution commune autre que l'unité.*

9. 2° Le cas précédent étant écarté, le plan ζ n'est perpendiculaire à aucune droite joignant deux sommets du réseau. Mais il *peut être perpendiculaire à un plan* Q *contenant trois sommets du réseau.* C'est l'hypothèse que nous faisons maintenant. L'un de ces points peut toujours être supposé Ω. Tous les sommets du réseau situés dans

le plan Q forment alors les sommets d'un réseau de parallélogrammes à partir de Ω. Soit $\Omega A_1 A_2 A_3$ un parallélogramme fondamental de ce réseau, c'est-à-dire ne contenant à son intérieur aucun point du réseau, alors que tous ses sommets sont du réseau. Il existe un parallélépipède π dont les arêtes sont parallèles à $\Omega\Omega_1$, $\Omega\Omega_2$, $\Omega\Omega_3$, dont deux des trois points $A_1 A_2 A_3$ sont des sommets, le troisième étant un sommet ou un point situé sur une arête, et qui est composé d'un nombre fini de parallélépipèdes P, accolés.

Les sommets du réseau de parallélépipèdes P s'ordonnent alors en sommets de réseaux de parallélogrammes homologues de celui qui est dans Q, respectivement situés dans des plans parallèles au plan Q, plans qui sont tous équidistants. Dans chaque plan, par exemple dans Q, les sommets du réseau de parallélogrammes sont tels qu'aucune droite joignant deux sommets n'est perpendiculaire au plan ζ. Les sommets du réseau se projettent sur ζ suivant un *ensemble partout dense sur la droite trace de* Q *sur le plan* ζ (car ces projections s'obtiennent en formant à partir de deux vecteurs $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$ sur une même droite les vecteurs $n.\overline{\Omega\alpha}+p\,\overline{\Omega\beta}$); sur cette droite, sachant que jamais on ne peut avoir $n.\overline{\Omega\alpha}+p\overline{\Omega\beta}=0$, sauf pour $n=p=0$, $\dfrac{\overline{\Omega\alpha}}{\overline{\Omega\beta}}$ n'étant pas commensurable, on arrive à recouvrir la droite tout entière par des points $n\overline{\Omega\alpha}+p\,\overline{\Omega\beta}$.

Le réseau des sommets de parallélépipèdes se projette alors sur le plan ζ suivant une *série infinie de droites* Δ *parallèles équidistantes, sur chaque droite les projections des points du réseau étant partout denses*.

10. 3° Enfin si le plan ζ n'est perpendiculaire à aucun plan contenant trois sommets du réseau de parallélépipèdes, il est aisé de démontrer que la projection des sommets de ce réseau sur le plan ζ fournit un *ensemble partout dense dans tout le plan* ζ.

11. Revenant au plan de la variable $z=e^{\zeta}$, la première hypothèse étant exclue, il correspondra à une série de droites parallèles équidistantes du plan ζ, une série de spirales logarithmiques équiangulaires (coupant tous les rayons sous le même angle), qui pourraient se réduire à des droites passant par l'origine ou à des cercles de

centre O si les droites Δ étaient dans le plan ζ d'ordonnée constante ou d'abscisse constante. Le système des droites Δ restant invariant par les translations $(\zeta|\zeta+2\pi i)$, $(\zeta|\zeta+\sigma_1)$, $(\zeta|\zeta+\sigma_2)$, il est clair qu'elles ne sauraient être d'abscisse constante dans le plan ζ que si les points σ_1 et σ_2 non situés sur l'axe imaginaire tombaient sur deux droites distinctes ou confondues du système Δ, c'est-à-dire si $\mathcal{R}(\sigma_1)$, $\mathcal{R}(\sigma_2)$, parties réelles de σ_1 et σ_2, étaient commensurables. Or

$$\mathcal{R}(\sigma_1) = \log|s_1| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}(\sigma_2) = \log|s_2|;$$

il faudrait donc que l'on eût

$$m_1 \log|\sigma_1| = m_2 \log|\sigma_2| \quad (m_1 \text{ et } m_2 \text{ entiers positifs convenables})$$

ou bien

$$|s_1|^{m_1} = |s_2|^{m_2}.$$

Les itérées $R_1^{(m_1)}$ et $R_2^{(m_2)}$ auraient à l'origine des multiplicateurs de même module (nous y reviendrons plus loin).

Le système des droites Δ ne serait à ordonnée constante que si $\mathcal{I}(\sigma_1)$, $\mathcal{I}(\sigma_2)$ et 2π étaient commensurables deux à deux. Posant

$$s_1 = |s_1| e^{i\theta_1}, \qquad s_2 = |s_2| e^{i\theta_2},$$

on devrait avoir pour $\frac{\theta_1}{2\pi}$ et $\frac{\theta_2}{2\pi}$ des nombres commensurables $\frac{m_1}{p}$ et $\frac{m_2}{p}$, en sorte que s_1^p et s_2^p auraient pour argument

$$p\theta_1 = m_1 . 2\pi \qquad \text{et} \qquad p\theta_2 = m_2 . 2\pi,$$

c'est-à-dire *seraient réels.*

A des droites Δ d'abscisse constante correspondent en z des cercles de centre O.

A des droites Δ d'ordonnée constante correspondent en z des demi-droites issues de O. Sauf dans le cas où les droites Δ sont d'abscisse constante, le système des droites Δ ne donnera lieu dans le plan z qu'à un nombre *fini* de spirales logarithmiques ou de rayons issus de O, puisque le vecteur $2\pi i$ du plan ζ ne coupe qu'un nombre fini de droites Δ dont toutes les autres se déduisent par les translations $k.2\pi i$. De plus, les droites Δ étant équidistantes, les spirales logarithmiques ou les demi-droites qui leur correspondent *se dédui-*

ront de l'une d'entre elles par un nombre fini de rotations répétées autour de O, *d'un certain angle sous-multiple de* 2π.

Dans la troisième hypothèse, d'un point de $\mathcal{E}$, on déduira des points partout denses dans le plan. On en conclut que $\mathcal{E}$: 1° *ou bien se compose de tout le plan;* 2° ou bien se compose d'un *ensemble de droites issues de* O ou de *spirales logarithmiques de pôles* O, *d'ailleurs équiangulaires*, ou enfin *de cercles de centre* O.

(En aucun cas, on le voit, si R_1 et R_2 sont indépendantes, $\mathcal{E}$ *ne peut donc être partout discontinu.* On ne pourra donc pas chercher de fonctions permutables indépendantes parmi les fractions rationnelles R dont l'ensemble E'_R est partout discontinu.)

En effet tout point A de $\mathcal{E}$ donne naissance à un système de droites, de spirales logarithmiques en nombre fini, ou de cercles de centre O en nombre infini dont tous les points sont de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ étant parfait, les points de $\mathcal{E}$ voisins de A donneront ainsi naissance à des courbes qui pourront remplir tout un petit cercle de centre A ou, si petit que l'on choisisse ce cercle, ne le couvriront pas tout entier.

Dans le premier cas, $\mathcal{E}$ est superficiel au voisinage de A, E′ l'est aussi, et, par conséquent, d'après un théorème que j'ai démontré dans mon Mémoire sur l'itération (*J. de Math.*, 1918, p. 101, n° 15), E′ se confond avec le plan tout entier, ainsi que $\mathcal{E}$.

Dans le deuxième cas, $\mathcal{E}$ n'est pas superficiel au voisinage de A, il ne l'est donc nulle part et les points de $\mathcal{E}$ sont identiques aux points d'un ensemble de droites issues de O, de spirales logarithmiques équiangulaires de pôle O, ou de cercles de centre O suivant les cas. Cet ensemble de courbes pourra d'ailleurs être quelconque sous la seule restriction qu'il soit invariant par $(z \mid zs_1)$ et $(z \mid zs_2)$.

12. Passant de là au plan de la variable $Z = G(z)$, on voit que l'ensemble parfait E′ commun à R_1 et R_2 : 1° *ou bien sera identique au plan complet;* 2° ou bien sera identique à un ensemble de *courbes analytiques*, ensemble invariant par les transformations $[Z \mid R_1(z)]$ et $[Z \mid R_2(z)]$.

En effet, on sait que si l'on considère un petit cercle C entourant O dans le plan z, il lui correspond dans le plan Z une aire simple Γ, et aux points de $\mathcal{E}$ situés dans C les points de E′ situés dans Γ; les points de $\overline{\mathcal{E}}$ dans C constituent un ensemble d'arcs analytiques, les points de E′ dans Γ constitueront aussi un ensemble d'arcs analytiques. De plus, on peut toujours trouver un entier p tel que l'itérée $p^{\text{ième}}$ de l'ensemble des points de E′ situés dans Γ contienne E′ tout entier (¹), cette itérée $p^{\text{ième}}$ étant composé d'un ensemble d'arcs analytiques; il en sera ainsi de E′.

13. Les exemples connus de fonctions permutables corroborent les conclusions précédentes.

1° D'abord $Z_1 = R_1(z) = Z^k$, k entier > 0 est permutable à $Z_2 = R_2(z) = Z^l$, l centre quelconque positif ou négatif. Leur ensemble E′ commun est un cercle $|Z| = 1$, $G(z)$ est l'exponentielle e^z

$$G(kz) = [G(z)]^k, \qquad [G(0) = 1, \qquad G'(0) = 1].$$

Le point $Z = 1$ est bien point double répulsif. $\mathcal{E}$, c'est ici l'axe imaginaire tout entier.

2° Prenons

$$Z = \sin z, \qquad Z_1 = \sin 3z, \qquad Z_2 = \sin 5z,$$

$Z_1 = 3Z - 4Z^3$ est permutable à $Z_2(Z)$. On voit aisément que l'ensemble $\mathcal{E}$ se compose uniquement de l'*axe réel*. E′ se compose du segment $(-1+1)$.

De même prenons

$$Z = \cos i\sqrt{2z}, \qquad Z_1 = \cos 2i\sqrt{2z}, \qquad Z_2 = \cos 3i\sqrt{2z},$$

on a

$$Z_1 = 2Z^2 - 1, \qquad Z_2 = 4Z^3 - 3Z$$

et $\cos i\sqrt{2z}$ est la fonction fondamentale relative au point double répulsif $Z = 1$ de multiplicateur 4 pour R_1 et 9 pour R_2; E′ se compose encore du segment $(-1, +1)$ et $\mathcal{E}$ de l'axe réel.

3° Prenons

$$Z = p(u), \qquad Z_1 = p(2u), \qquad Z_2 = p(3u).$$

(¹) *J. de Math.*, 1918, p. 97, nᵒˢ 13 et 14.

On reconnait aisément que les points de l'ensemble E correspondant à $Z_p^{(n)} = Z$ donnent $\mathfrak{p}(z^n u) = \mathfrak{p}(u)$, donc

$$z^n u = \pm u + \text{période} \qquad u = \frac{\text{période}}{z^n \pm 1}.$$

Ces points u étant partout denses dans le parallélogramme des périodes, les points de E sont partout denses dans le plan. E′ est identique au plan complet pour $Z_1(Z)$ comme pour $Z_2(Z)$.

14. On peut tirer des conclusions importantes des résultats du n° 12. En effet, on va voir qu'un certain nombre des possibilités admises pour E′ sont à rejeter du fait de propriétés importantes établies pour E′ (¹) : E′ *a la même structure dans toutes ses parties et si l'on prend les antécédents successifs d'un point de* E′ *par toutes les branches de* $R_1^{(-1)}(z)$, *puis toutes celles de* $R_1^{(-2)}(z)$, etc., *l'ensemble obtenu est partout dense dans* E′.

15. D'abord il est impossible que $\mathcal{E}$ soit composé de cercles de centre O. Car, au voisinage de O correspond par $Z = G(z)$ une petite aire Γ entourant un point de E′ et, dans Γ, les points de E′ constitueraient alors un ensemble d'une infinité de courbes analytiques fermées entourant le point Ω de E′ qui correspond au point $z = 0$ par $Z = G(z)$. Considérons un autre point quelconque Ω_1 de E′, il correspond à un point z_1 de $\mathcal{E}$ distinct de O et l'on peut toujours supposer que $G'(z_1) \neq 0$. Aux points de $\mathcal{E}$ intérieurs à un petit cercle C_1 de centre z_1, correspondent les points de E′ intérieurs à une petite aire simple Γ entourant Ω_1. Dans l'hypothèse où $\mathcal{E}$ serait composé de cercles de centre O, les points de $\mathcal{E}$ intérieurs à C_1 formeraient des arcs de cercle ne se rencontrant jamais deux à deux et allant d'un point du contour de C_1 à un autre point de ce contour; C_1 étant assez petit, les points de E′ dans Γ formeraient aussi des arcs analytiques ne se rencontrant pas deux à deux et allant d'un point du contour de Γ_1 à un autre point de

(¹) *Voir* note (¹) de la page 193.

ce contour. Or il y a dans Γ_1 un certain antécédent Ω_{-k} de Ω par une certaine branche de $R_1^{(-k)}(Z)$. Puisque les points de E' dans Γ forment un ensemble d'une infinité de courbes analytiques fermées entourant Ω et tendant vers Ω, il devrait correspondre par $[Z \mid R_1^{(-k)}(Z)]$, à ces courbes une infinité de courbes fermées entourant Ω_{-k} et tendant vers Ω_{-k}. Toutes ces courbes fermées appartiendraient à E' et, à partir d'un certain moment, seraient intérieures à Γ_1. Or on vient de voir que dans Γ_1 les points de E' ne peuvent former que des arcs ouverts joignant deux à deux des points de la frontière de Γ_1. Il y a donc ici une contradiction, par conséquent $\mathcal{E}$ ne peut se composer de cercles de centre O.

16. $\mathcal{E}$ ne peut se composer de véritables spirales logarithmiques de pôle O. Car dans un cercle C entourant O, ces spirales admettent O comme seul point singulier, point asymptote, et dans Γ correspondant à C par $Z = G(z)$, les points de E' formeraient des arcs de courbes analytiques (en nombre fini ou infini) partant de la frontière de Γ pour s'enrouler asymptotiquement au point Ω qui correspond à O. Au contraire, au voisinage de tout autre point z_1 de $\mathcal{E}$ dans un cercle C_1 assez petit de centre z_1, les points de $\mathcal{E}$ formeraient des arcs réguliers de spirales, ne se rencontrant jamais deux à deux et allant d'un point frontière de C_1 à un autre point frontière; le même caractère appartiendrait aux points de E' intérieurs à Γ_1 qui correspond à C_1 par $Z = G(z)$; mais le raisonnement du n° 15 prouve encore que dans Γ_1 il y a un antécédent Ω_{-k} de Ω et par conséquent que Ω_{-k} est point asymptote pour les courbes qui constituent au voisinage de Ω_{-k} les points de l'ensemble E'. Il y a donc encore une contradiction qui exclut l'hypothèse faite.

17. Si enfin $\mathcal{E}$, se composant de rayons issus de O, comportait autre chose qu'une droite indéfinie dans les deux sens ou une demi-droite issue de O, il y aurait certainement deux demi-droites issues de O, appartenant à $\mathcal{E}$ faisant entre elles un angle α compris entre O et π, limites exclues. Il leur correspondrait, par $Z = G(z)$, deux arcs de courbe γ_1 et γ_2 aboutissant en Ω formant en Ω le même angle α compris entre O et π. En tout antécédent Ω_{-k} de Ω les arcs antécédents

de γ_1 et γ_2 par $R_1^{(-k)}$ font entre eux l'angle α ou une partie aliquote de α selon que Ω n'est pas ou est point critique de $R_1^{(-k)}(z)$. Ces deux arcs forment certainement encore un angle compris entre 0 et π limites exclues. Or cela est contradictoire avec le fait que les points de E′ dans un cercle Γ_1 assez petit entourant tout point Ω_1 de E′ distinct de O forment des arcs analytiques réguliers ne se rencontrant pas deux à deux et allant d'un point de la frontière de Γ_1 à un autre point de Γ_1, puisqu'il en est ainsi des points de $\mathcal{E}$ intérieurs à un petit cercle C_1 entourant tout point de $\mathcal{E}$ distinct de O.

18. En définitive subsistent seulement pour $\mathcal{E}$ les deux possibilités suivantes :

1° $\mathcal{E}$ *est identique au plan complet;*

2° $\mathcal{E}$ *se compose d'une droite indéfinie passant par l'origine ou d'une demi-droite issue de l'origine.*

Par $Z = G(z)$, il correspondra à $\mathcal{E}$ un ensemble E′ qui sera : 1° ou bien le *plan complet* Z; 2° ou bien une *courbe analytique* ou composée d'*arcs analytiques* parcourus plusieurs fois ou formant des points de rebroussement.

19. Laissant provisoirement de côté le cas où E′ est le plan Z complet, nous allons poursuivre l'étude du deuxième cas : E′ *étant composé d'arcs analytiques*. Or l'éventualité où l'ensemble parfait E′ relatif à une fonction rationnelle R_1 est composé d'arcs analytiques a été étudiée en détail par M. Fatou (*Bulletin Soc. math. de France*, t. XLVIII, nos 56 et 43), il a montré que cette éventualité ne peut se présenter que : 1° si E′ *se réduit à un cercle ou une droite indéfinie*, auquel cas la substitution R_1 ou $R_1^{(2)}$ est à cercle fondamental; ou bien 2° *si* E′ *se réduit à un segment de droite ou un segment de cercle.* Alors R_1 se déduit d'une fraction rationnelle à cercle fondamental par une transformation du second degré (*Bulletin Soc. math. de France*, t. XLVII, n° 25, p. 267).

C'est à l'étude de la permutabilité dans ces deux cas particuliers que nous allons consacrer le Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

PERMUTABILITÉ DES FRACTIONS RATIONNELLES A *cercle fondamental* OU A *arc de cercle fondamental.*

20. Nous commençons par le cas où R_1 et R_2 admettent pour ensemble E' un *arc de cercle ou un segment de droite*. Par une même transformation homographique sur Z, $Z_1 = R_1(Z)$, $Z_2 = R_2(Z)$, on peut supposer que ce segment est transformé en l'*axe réel positif* $(0 + \infty)$. Puis par la transformation $W = \sqrt{Z}$, $W_1 = \sqrt{Z_1}$, $W_2 = \sqrt{Z_2}$, les substitutions rationnelles deviennent des substitutions rationnelles

$$W_1 = \mathcal{R}_1(W), \qquad W_2 = \mathcal{R}_2(W)$$

qui admettent pour ensemble parfait tout l'axe réel du plan W et conservent chacun des demi-plans supérieur et inférieur. A un point Z non situé sur l'axe réel positif correspond un point W et un seul du demi-plan supérieur. Partant de W et lui appliquant successivement $[W|\mathcal{R}_1(W)]$ puis $[W|\mathcal{R}_2(W)]$ on aboutit à un point $\mathfrak{W}$ qui est le point du demi-plan supérieur correspondant au point $\mathfrak{Z} = R_2[R_1(Z)]$ du plan Z qui découle de Z, correspondant à W, par la substitution $[Z|R_1(Z)]$ suivie de $[Z|R_2(Z)]$. Si l'on applique à W les substitutions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dans l'ordre inverse, le point $\mathfrak{W}_1$ obtenu correspondra au point $\mathfrak{Z}_1 = R_1[R_2(Z)]$ qui, à cause de la permutabilité de R_1 et R_2, est identique à $\mathfrak{Z}$. Donc $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{W}_1$ sont identiques, ce qui signifie que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont permutables au même titre que R_1 et R_2. Le deuxième cas se ramène donc au premier.

Deux substitutions rationnelles permutables $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ admettant pour E' un arc de cercle ou un segment de droite se ramènent par une transformation rationnelle du second degré $Z = \rho(W)$ à deux substitutions rationnelles permutables $\mathcal{R}_1(W)$ et $\mathcal{R}_2(W)$ admettant pour E' une circonférence entière et conservant toutes deux l'intérieur de cette circonférence $\mathcal{R}_1(W)$ et $\mathcal{R}_2(W)$ sont des fractions à cercle fondamental de *première espèce*, c'est-à-dire pour lesquelles l'ensemble E' comprend toute la circonférence du cercle fondamental.

21. Nous sommes donc toujours ramenés à la recherche des *substitutions rationnelles permutables à cercle fondamental commun et de première espèce;* en substituant au besoin à $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ leurs itérées d'ordre 2 pour le cas où $[Z|R_1(Z)]$ par exemple échangerait entre elles les régions intérieure et extérieure au cercle fondamental, on peut toujours supposer que R_1 et R_2 conservent l'intérieur du cercle fondamental qu'on supposera, selon les cas, confondue avec le cercle trigonométrique ou confondue avec l'axe réel.

Il est, d'autre part, facile de voir que R_1 et R_2 sont simultanément ordinaires ou singulières, mais qu'il est impossible que l'une soit ordinaire et l'autre singulière.

En effet, si R_1 est ordinaire, c'est dire que R_1 admet deux points doubles attractifs symétriques par rapport au cercle fondamental, par exemple confondus avec o et ∞. Or, j'ai montré précédemment (1) que, si deux substitutions sont permutables, les points qui font partie des cycles attractifs de l'une font aussi partie des cycles attractifs de l'autre, et réciproquement; o et ∞ sont donc points doubles attractifs de R_2 s'ils le sont pour R_1, R_1 et R_2 sont simultanément ordinaires ou singulières.

22. Supposons d'abord que R_1 et R_2 soient ordinaires de première espèce et admettent pour cercle fondamental le cercle trigonométrique, pour points doubles attractifs o et ∞. En raisonnant comme dans la première Partie (2) on peut voir que l'ensemble F *formé par les antécédents de tout ordre de* o dans le cercle fondamental, pris avec toutes les branches de $R_1^{(-k)}(Z)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) est identique à l'ensemble formé par les antécédents de tout ordre de o pour toutes les branches de $R_2^{(-k)}(Z)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$); on voit aussi que F a pour dérivé la circonférence du cercle fondamental. Cet ensemble F est invariant par la transformation $[Z|R_1(Z)]$ et toutes les branches de son inverse, car il est clair que si un point A est antécédent d'un certain ordre r de o dans l'itération $R_1(Z)$ tout conséquent, d'ordre p, de ce point A ou bien se confond avec o si $r = p$, ou bien a un conséquent confondu

(1) Première Partie, n° 23.
(2) N^{os} 23 à 27.

avec o, si $p < r$ et tout antécédent d'ordre p de ce point A a son conséquent d'ordre $r+p$ confondu avec o. L'ensemble F est aussi invariant par $[Z|R_2(Z)]$ et son inverse. L'ensemble F' formé des antécédents de tout ordre de l'infini par $R_1^{(-k)}$ ou R_2^{-l} ($k, l = 1, 2, \ldots, \infty$), est symétrique de F par rapport au cercle fondamental et il admet les mêmes invariances.

23. $R_1^{(m_1)}$ et $R_2^{(m_2)}$ ont toujours sur le cercle fondamental un point double répulsif commun si les entiers positifs m_1 et m_2 sont bien choisis [1]. La suite du raisonnement prouvera que ce n'est pas restreindre la généralité que de supposer $m_1 = m_2 = 1$. Je désigne par $G(z)$ la fonction méromorphe fondamentale de Poincaré qui, s_1 et s_2 étant les multiplicateurs de α [$s_1 = R'_1(\alpha)$, $s_2 = R'_2(\alpha)$, $|s_1| > 1$, $|s_2| > 1$] satisfait aux deux relations [2]

$$G(s_1 z) = R_1[G(z)] \qquad [G(0) = \alpha,\ G'(0) = 1],$$
$$G(s_2 z) = R_2[G(z)].$$

Si R_1 n'est pas de la forme $R_1 = Z^k$ (k entier > 0), il n'y a pas de valeurs exceptionnelles pour $G(z)$. Que correspond-il à F dans le plan z, par la transformation $Z = G(z)$?

Soit Z_0 un point de F, c'est un antécédent d'ordre n de l'origine, par conséquent $R_1^{(n)}(Z_0) = 0$. Soit z_0 un point tel que $G(z_0) = Z_0$. On aura

$$R_1^{(n)}(Z_0) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad G(s_1^n z_0) = 0.$$

Tout point de l'ensemble $\mathcal{F}$ du plan z qui correspond à F du plan Z par $Z = G(z)$ est donc une racine de

$$G(s_1^n z) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

La réciproque est immédiate. L'ensemble F est invariant par $[Z|R_1(Z)]$, il en résulte que $\mathcal{F}$ est invariant par $[z|s_1 z]$. F étant invariant par $[Z|R_1^{(-1)}(Z)]$, $\mathcal{F}$ sera invariant par $\left[z\middle|\frac{z}{s_1}\right]$. De même $\mathcal{F}$ sera invariant par $[z|zs_2]$ et par la substitution inverse.

---

(1) *Voir* première Partie, n° 15.

(2) *Voir* première Partie, n°s 3 et suivants.

On remarque immédiatement que s_1 et s_2 sont réels. *Comment le cercle fondamental de plan* Z *se transforme-t-il, par* $Z = G(z)$, *dans le plan* z? Évidemment il devient l'ensemble $\mathcal{E}_{s_1}$ correspondant à la fonction méromorphe $G(z)$. Or

$$G(z) = \alpha + z + \lambda_2 z + \dots$$

montre qu'à un arc de cercle fondamental assez petit englobant α correspondra un petit arc de courbe analytique du plan z passant par o et englobant o. Cet arc fera partie de l'ensemble parfait $\mathcal{E}_{s_1}$ relatif à la fonction méromorphe $G(z)$ qui doit ici se composer d'arcs analytiques. Or la seule possibilité présente pour cet $\mathcal{E}_{s_1}$ est qu'il soit composé d'une droite indéfinie ou d'une demi-droite issue de o (¹).

Comme $\mathcal{E}_{s_1}$ comprend un arc englobant o, *ce sera nécessairement une droite indéfinie* D *issue de* o, parallèle à la tangente en α au cercle fondamental.

On verra de même qu'à tout point z situé dans un des demi-plans P_1 que détermine D correspondra par $Z = G(z)$ un point intérieur au cercle fondamental et réciproquement à tout point Z intérieur au cercle fondamental correspondent une infinité de points z tous situés dans le demi-plan P_1 déterminé par D.

L'autre demi-plan P_2 correspondra à l'extérieur du cercle fondamental, o sera une valeur asymptotique de $G(z)$ atteinte sur les rayons s'éloignant à l'infini dans le demi-plan P_1; l'infini sera une autre valeur asymptotique atteinte sur les rayons du demi-plan P_2.

24. Je dis qu'*il est impossible que* $\mathcal{F}$ *ait d'autres points limites que les points de* D. En effet, si l'ensemble $\mathcal{F}$ avait un point limite non situé sur D, l'ensemble F qui lui correspond par $Z = G(z)$ aurait un point limite non situé sur le cercle fondamental qui correspond à D, et l'on sait que cela est impossible, puisque le dérivé de F ne se compose que de la circonférence du cercle fondamental.

Or, partons d'un point z_0 de $\mathcal{F}$ situé dans le demi-plan P_1 et appliquons-lui la transformation $[z|zs_1]$, et ses puissances positives et négatives, nous obtenons encore des points de $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F}$ est inva-

---

(¹) *Voir* le n° 18 du présent Mémoire, deuxième Partie.

riant par $[z|zs_1]$ et par $\left[z\left|\frac{z}{s_1}\right.\right]$. Tous les points $z_0 s_1^{m_1}$ ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots \infty$) sont de $\mathcal{F}$. De même tous les points $z_0 s_1^{m_1} s_2^{m_2}$ ($m_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$) sont de $\mathcal{F}$, car $\mathcal{F}$ est invariant par $[z\,|\,zs_2^{\pm 1}]$. Ici deux hypothèses sont possibles.

1° Le rapport $\frac{\operatorname{Log} s_1}{\operatorname{Log} s_2}$ n'est pas commensurable (en choisissant pour $\operatorname{Log} s_1$ et $\operatorname{Log} s_2$ les logarithmes népériens réels, positifs, des nombres s_1 et s_2 qui sont > 1). Alors on peut certainement choisir deux entiers m_1 et m_2 tels que

$$|\, m_1 \operatorname{Log} s_1 + m_2 \operatorname{Log} s_2 \,| < \varepsilon$$

(ε nombre positif arbitrairement petit); alors

$$e^{m_1 \operatorname{Log} s_1 + m_2 \operatorname{Log} s_2} = 1 + \varepsilon'$$

(ε' étant arbitrairement petit), c'est-à-dire que

$$s_1^{m_1} s_2^{m_2} = 1 + \varepsilon'.$$

On peut donc choisir une suite de couples de nombres m_1, m_2 tels que $s_1^{m_1} s_2^{m_2}$ *tende vers un*. Les points distincts $z_0 s_1^{m_1} s_2^{m_2}$ tendront alors vers z_0, et ce seront des points de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ aurait z_0 pour point limite. Tout point de $\mathcal{F}$ serait point limite de points de $\mathcal{F}$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{F}$ n'a pas d'autres points limites que les points de D. Il est donc impossible que $\frac{\operatorname{Log} s_1}{\operatorname{Log} s_2}$ soit incommensurable (¹).

2° On est donc contraint d'admettre que $\frac{\operatorname{Log} s_1}{\operatorname{Log} s_2}$ est commensurable et $= \frac{p}{q}$. Mais alors

$$q \operatorname{Log} s_1 = p \operatorname{Log} s_2,$$
$$s_1^q = s_2^p$$

et l'on aura évidemment

$$R_1^{(q)}(Z) = R_2^{(p)}(Z),$$

puisque

$$R_1^{(q)}[G(z)] = R_2^{(p)}[G(z)] = G(s_1^q z) = G(s_2^p z).$$

(¹) Le raisonnement employé ici est identique à celui qu'on a déjà employé au n° 8 du présent Mémoire (2ᵉ Partie).

Dans ce deuxième cas on arrive à la conclusion que R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

25. Conclusion. — *Deux substitutions rationnelles à cercle fondamental, ordinaires et de première espèce, ne sauraient être permutables si elles sont indépendantes, hors le cas banal* $Z_1 = Z^{k_1}$, $Z = Z^{k_2}$, k_1 *et* k_2 *entiers positifs, écarté dans la recherche précédente.* Ces fractions banales sont évidemment permutables, et si l'on choisit pour k_1 et k_2 deux nombres premiers distincts elles sont *indépendantes* puisque les itérées respectives sont

$$Z_1^{(n)} = R_1^{(n)} = Z^{k_1^n} \qquad \text{et} \qquad Z_2^{(n)} = R_2^{(n)} = Z^{k_2^n}$$

et jamais on n'aura

$$Z^{k_1^n} = Z^{k_2^p},$$

puisque jamais pour $n > 0$ et $p > 0$, on n'aura $k_1^n = k_2^p$, k_1 et k_2 étant des nombres premiers distincts.

26. Supposons maintenant que R_1 et R_2 soient *deux substitutions singulières de première espèce à cercle fondamental,* et permutables. Ni R_1 ni R_2 n'ont alors de point double intérieur ou extérieur au cercle fondamental. Tous les points doubles ou les cycles sont *sur* le cercle fondamental et le recouvrent d'une façon partout dense. Au lieu de considérer l'ensemble F des antécédents intérieurs au cercle du point double attractif intérieur au cercle nous allons ici considérer l'ensemble H_1 formé par les zéros intérieurs au cercle fondamental, de $\frac{dR_1}{dZ}$ et des dérivées de toutes les itérées $\frac{dR_1^{(n)}}{dZ}$ $(n = 1, 2, \ldots, +\infty)$. H_1 est composé des zéros intérieurs au cercle de la dérivée $\frac{dR_1}{dZ}$ et des antécédents *de tout ordre* de ces zéros par toutes les branches de $R_1^{(-k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, +\infty)$. On considère l'ensemble analogue H_2 formé des zéros intérieurs au cercle des $\frac{dR_2^{(l)}}{dZ}$ $(l = 1, 2, \ldots, +\infty)$, pour la deuxième substitution R_2; H_1 et H_2 ont tous leurs points intérieurs au cercle fondamental et aucun d'entre eux n'est sur ce cercle.

D'abord tous les zéros de $\frac{dR_1}{dZ}$ sont intérieurs au cercle fondamental, ou extérieurs à ce cercle (ils sont deux à deux symétriques par rapport à ce cercle). En effet un tel zéro a pour conséquent par R_1 un point critique de $R_1^{(-1)}(Z)$, et puisque la transformation $[Z | R_1(Z)$ transforme l'intérieur du cercle fondamental en cet intérieur recouvert d_1 fois [d_1 degré de R_1] et la circonférence, en cette circonférence d_1 fois parcourue dans le même sens, il est impossible que, sur la circonférence du cercle existe un point critique de $R_1^{(-1)}(Z)$. Tous les points de H_1 sont donc *intérieurs* au cercle fondamental et comme ils dérivent, par antécédents successifs, des zéros de $\frac{dR_1}{dZ}$ intérieurs au cercle qui sont au nombre de $(d_1 - 1)$ au plus, on voit que l'ensemble H_1 *est formé de points isolés et n'aura pour points limites que les points de la circonférence du cercle fondamental*. La même conclusion peut se formuler pour H_2.

27. On peut montrer que H_1 et H_2 sont identiques.

Soit en effet Z_0 un zéro de $R'_1(Z) = 0$ intérieur au cercle, et considérons l'identité

$$R_1[R_2(Z)] = R_2[R_1(Z)]$$

qui donne en dérivant

$$R'_1[R_2(Z)].R'_2(Z) = R'_2[R_1(Z)].R'_1(Z).$$

Puisque $R'_1(Z_0) = 0$ on devra avoir aussi un premier membre nul, donc ou bien $R'_2(Z_0)$ ou bien $R_2(Z_0)$ doit annuler $R'_1(Z)$. *En itérant par* R_2 *un zéro de* $R'_1(Z)$ *qui n'est pas zéro de* $R'_2(Z)$ *on tombe encore sur un zéro de* R'_1. Z_0 et $R_2(Z_0)$, intérieurs au cercle fondamental, sont distincts puisque $[Z | R_2(Z)]$ n'a pas de point double intérieur au cercle. Effectuant sur $R_2(Z_0)$ la substitution R_2 on aboutit à $R_2^{(2)}(Z_0)$ qui devra être zéro de R'_1 comme $R_2(Z_0)$ si l'on suppose que $R_2(Z_0)$ n'annule pas $R'_2(Z_0)$. Continuant ainsi indéfiniment, on voit que l'itération indéfinie n'a que deux issues :

1° Ou bien un itéré $R_2^{(p)}(Z_0)$ annulera $R'_2(Z)$, il est alors clair que Z_0 annulera $\frac{dR_2^{(p+1)}(Z_0)}{dZ}$;

2° Ou bien aucun des itérés successifs $R_2(Z_0)$, $R_2^{(2)}(Z_0)$, ..., tous distincts et intérieurs au cercle fondamental n'est racine de $R'_2(Z) = 0$ et alors ils sont tous, au même titre que Z_0 des zéros de $R'_1(Z)$.

Or $R'_1(Z)$ n'a que $d_1 - 1$ zéros au plus dans le cercle fondamental. La suite des $R_2^{(p)}(Z_0)$ ne devant compter qu'un nombre limité de points il existera deux indices. i et j positif $(0 \leqq i \leqq d_1 - 1,\ 0 \leqq i + j \leqq d_1 - 1)$. tels que

$$R_2^{(i)}(Z_0) = R_2^{(i+j)}(Z_0).$$

Le point $R_2^{(i)}(Z_0)$, intérieur au cercle fondamental, serait point double de $R_2^{(j)}(Z)$ qui est, comme $R_2(Z)$, une fraction singulière de première espèce. Ceci est impossible. Donc la deuxième hypothèse doit être rejetée et l'on conclut que tout point Z_0 racine de $R_1'(Z) = 0$ sera aussi racine de $\frac{dR_2^{(p)}}{dZ} = 0$ pour un entier positif p convenable. Dans tout le raisonnement précédent, on peut remplacer R_1 par une itérée quelconque $R_1^{(k)}$ qui est permutable à R_2 puisque R_1 l'est et l'on verra que toute racine de $\frac{d}{dZ} R_1^{(k)}(Z) = 0$ (k entier > 0) sera racine de $\frac{dR_2^{(p)}}{dZ} = 0$ par p entier positif convenable. La réciproque est immédiate et l'on conclut que H_1 et H_2 sont identiques. On pourrait aussi remarquer que l'itération indéfinie par R_1 des zéros de $R'_1(Z)$ conduira aux points critiques de $R_1^{(-k)}(Z)$ et il résulte d'un théorème établi dans la première Partie ([1]) que l'ensemble H'_1 de ces points critiques est identique à celui H'_2 des $R_1^{(-l)}(Z)$ $(l = 1, 2, \ldots, +\infty)$.

28. Si l'on remplace R_1 par une itérée quelconque $R_1^{(k)}$ (k entier > 0), l'ensemble H_1 des zéros des $\frac{d}{dZ} R_1^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, +\infty)$ sera identique à celui des zéros des $\frac{d}{dZ} R_1^{(kl)}$ $(l = 1, 2, \ldots, \infty)$ qui sont les zéros des dérivées des itérées de $R_1^{(k)}$. On ne change pas H_1 en remplaçant R_1 par $R_1^{(k)}$.

On peut donc, en remplaçant au besoin R_1 et R_2 par $R_1^{(k)}$ et $R_2^{(l)}$, supposer que ces deux fractions ont un point double commun répulsif α sur la circonférence du cercle fondamental. Nous supposerons $k = l = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité et nous désignerons par $G(z)$ la

---

([1]) Première Partie, Chapitre III, n° 20.

fonction méromorphe fondamentale correspondant à α

$$G(s_1 z) = R_1[G(z)] \qquad [G(o) = \alpha,\ G'(o) = 1.$$
$$G(s_2 z) = R_2[G(z)].$$

En raisonnant comme au n° 23 on verra que par $Z = G(z)$ l'intérieur du cercle fondamental du plan Z correspond à un demi-plan P_1 du plan z limité par une droite indéfinie D passant par l'origine, l'autre demi-plan P_2 correspondant à l'extérieur du cercle fondamental et la droite D elle-même correspondant à la circonférence du cercle fondamental. Les multiplicateurs s_1 et s_2 de R_1 et R_2 pour α sont réels et > 1. D c'est l'ensemble $\mathcal{E}_{s_1}$ ou $\mathcal{E}_{s_2}$ de la fonction $G(z)$. Dans P_1, $G(z)$ admet la valeur asymptotique α atteinte par exemple suivant un rayon. Dans P_2, $G(z)$ admet la même valeur asymptotique α, mais sur D $G(z)$ repasse périodiquement par les mêmes valeurs. Tous les pôles de $G(z)$ seront situés dans le demi-plan P_2. $G(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles.

29. Que devient H_1 par $Z = G(z)$? Soient Z_0 une racine de $\frac{d}{dZ}R_1^{(k)}(Z) = o$, z_0 un point correspondant par $G(z_0) = Z_0$; z_0 est dans le demi-plan P_1, ..., on a

$$G(s_1^k z) = R_1^{(k)}[G(z)], \qquad \text{d'où} \qquad s_1^k G'(s_1^k z) = \frac{d}{dZ}R_1^{(k)}[G(z)].G'(z).$$

z_0 est dans P_1, il n'est pas pôle de $G(z)$, ni de $G'(z)$, et $G(z_0) = Z_0$ annule $\frac{d}{dZ}R_1^{(k)}(Z)$. Donc on a

$$G'(s_1^k z_0) = o.$$

Réciproquement, considérons une racine de z_0 de $G'(s_1^k z) = o$, dans le demi-plan P_1, on devra avoir ou bien $G'(z_0) = o$ ou bien $Z_0 = G(z_0)$ sera racine de $\frac{d}{dZ}R_1^k(Z) = o$.

L'ensemble $\mathcal{H}_1$ *des racines des équations*

$$G'(s_1^n z) = o \qquad (n = o, 1, 2, \ldots \infty)$$

situées dans le demi-plan P_1 *se compose donc des racines de l'équation*

$$G'(z) = o$$

situées dans P_1 *et des racines des équations*

$$G(z) = A,$$

A *étant un point quelconque de l'ensemble* H_1 *du plan* Z. Par $Z = G(z)$ l'ensemble des racines de $G'(z) = 0$ devient l'ensemble des points critiques des $R_1^{(-k)}(Z)$ ($k = 1, 2, \ldots, +\infty$), et réciproquement; je l'ai montré dans la première Partie [1]. L'ensemble $\mathcal{H}_1$ est donc identique à l'ensemble des racines, situées dans P_1, des équations $G(z) = A$, A *étant un point quelconque de* H_1 *ou un point de* H'_1 *ensemble des points critiques des* $R_1^{(-k)}(Z)$ *situés dans le cercle fondamental.* H_1 est identique à l'ensemble analogue H_2 relatif à R_2 et H'_1 est identique à H'_2 ensemble analogue relatif à R_2.

30. Il résulte de là que $\mathcal{H}_1$ est invariant par les deux substitutions $[z \mid zs_1]$ et $[z \mid zs_1^{-1}]$. En effet, si z_0 de $\mathcal{H}_1$ annule $G'(z) = 0$, on a

$$s_1 G'(s_1 z) = R'_1[G(z)].G'(z).$$

Par conséquent, puisque $G(z)$ n'est pas pôle de R'_1 (car z_0 est dans P_1), on aura

$$G'(s_1 z_0) = 0.$$

Donc $s_1 z_0$ annulera encore $G'(z)$ et appartiendra à $\mathcal{H}_1$. Quant à $\zeta = \frac{z_0}{s_1}$ il satisfera à

$$G'(z_0) = G'(s_1 \zeta) = 0$$

et par conséquent il appartient encore à $\mathcal{H}_1$. De même, si z_0 satisfait à $G'(s_1^n z_0) = 0\ [n > 1]$, $s_1 z_0$ satisfera à $G'(s_1^{n-1} z_1) = 0$ et $\zeta = \frac{z_0}{s_1}$ à $G'(s_1^{n+1} z) = 0$.

L'ensemble $\mathcal{H}_2$ des racines des équations

$$G'(s_2^n z) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

situées dans P_1 se composera aussi des racines, situées dans P_1, des équations $G(z) = A$, A appartenant soit à H_2, soit à H'_2 ensemble des

[1] N^os 20 et suivants du Chapitre III.

points critiques des $R_2^{(-n)}(Z)$. Or H_2 et H'_2 sont identiques respectivement à H_1 et H'_1. Par conséquent, $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *sont identiques.*

$\mathcal{H}_1$ était invariant par $[z \mid z s_1^{\pm 1}]$. $\mathcal{H}_2$ est invariant par $[z \mid z s_2^{\pm 1}]$, $\mathcal{H}_1$ *sera donc invariant à la fois par ces deux substitutions.*

31. L'ensemble H_1 a pour ensemble dérivé la circonférence du cercle fondamental. Les points critiques de $R_1^{(-k)}(Z)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$), conséquents successifs par R_1 des zéros de $R'_1(Z)$, n'ont d'autre point limite que le point α situé sur la circonférence du cercle. α constitue donc l'unique point limite de l'ensemble H'_1. *L'ensemble* $H_1 + H'_1$ *n'a donc pas de point limite qui ne soit sur la circonférence du cercle fondamental.* Puisque tout point z_0 de $\mathcal{H}_1$ conduit, par $Z_0 = G(z_0)$, à un point de H_1 ou à un point de H'_1, $\mathcal{H}_1$ *ne saurait avoir dans le demi-plan* P_1 *de point limite qui ne soit situé sur* D *frontière du demi-plan* P_1; car à un tel point limite ζ correspondrait, par $\zeta_1 = G(\zeta)$, un point ζ_1 intérieur au cercle fondamental et qui serait limite de points de H_1 ou de H'_1, ce qui est impossible.

Or, en raisonnant comme au n° 24, on verra que si le rapport $\dfrac{\operatorname{Log} s_1}{\operatorname{Log} s_2}$ n'est pas rationnel, tout point de $\mathcal{H}_1$ est limite de points de $\mathcal{H}_1$, ce qui contredit le résultat qu'on vient justement d'établir. Par conséquent il faut supposer que $\dfrac{\operatorname{Log} s_1}{\operatorname{Log} s_2}$ est rationnel, d'où l'on conclut comme au n° 24 que, pour deux entiers positifs m_1 et m_2 convenablement choisis, on aura

$$R_1^{(m_1)}(Z) = R_2^{(m_2)}(Z)$$

et *les substitutions données ne seraient pas indépendantes.*

32. Conclusion. — *Deux substitutions rationnelles, à cercle fondamental, singulières et de première espèce, ne sauraient être permutables si elles sont indépendantes.*

33. Les seules fractions rationnelles R_1 à cercle fondamental qui soient permutables avec quelque autre fraction rationnelle R_2 indépendante de R_1 se réduisent donc à

$$R_1(Z) = Z^k \qquad (k \text{ entier} > 0)$$

en admettant que le cercle fondamental soit le cercle trigonométrique. La fonction entière $G(z)$ fondamentale correspondante est e^z dont les théorèmes de multiplication rationnels sont bien connus. Il est clair que si $G(z)$ admet un théorème de multiplication rationnel, $G(\alpha z)$ l'admet aussi. e^{iz} aura la propriété de e^z sous ce rapport et ainsi se trouvent liés e^z et les fonctions trigonométriques au point de vue de la permutabilité des fractions rationnelles auxquelles donnent lieu les divers théorèmes de multiplication.

Par une transformation linéaire du plan Z, en posant $Z = \frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta}$, nous pouvons transformer le cercle fondamental en l'axe réel, o en $-i$, et l'infini en $+i$. La fraction $Z_1 = Z^2$, par exemple, devient

$$\frac{1 - i\zeta_1}{1 + i\zeta_1} = \left(\frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$\zeta_1 = \frac{2\zeta}{1 - \zeta^2}.$$

Pour cette fraction, l'origine est point double répulsif de multiplicateur 2. La fonction $\zeta = G(z)$ fondamentale est $\operatorname{tang} z$, puisque

$$\operatorname{tang} 2z = \frac{2 \operatorname{tang} z}{1 - \operatorname{tang}^2 z}.$$

D'une façon générale, pour $Z_1 = Z^k$ (k entier > 0), en posant $Z = \frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta}$, on tire

$$\zeta = \frac{1}{i} \frac{1 - Z}{1 + Z}.$$

$Z = 1$ est point double répulsif de $Z_1 = Z^k$ de multiplicateur k. $\zeta = 0$ sera point double répulsif, de multiplicateur k, pour $\zeta_1 = R_1(\zeta)$,

$$\zeta_1 = \frac{1}{i} \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} = \frac{1}{i} \frac{1 - Z^k}{1 + Z^k} = \frac{1}{i} \frac{(1 + i\zeta)^k - (1 - i\zeta)^k}{(1 + i\zeta)^k + (1 - i\zeta)^k}.$$

La fonction fondamentale pour le point double $Z = 1$, c'est $Z = e^z$. Par conséquent, la fonction fondamentale pour $\zeta = 0$ sera

$$\zeta = \frac{1}{i} \frac{1 - e^{\lambda z}}{1 + e^{\lambda z}},$$

λ étant une certaine constante choisie telle que, autour de $z = 0$, le développement soit $\zeta = z + \ldots$.

Or, le premier terme de ce développement, c'est évidemment $-\frac{\lambda}{2i}z$, il faudra donc $\lambda = -2i$; alors

$$\zeta = \frac{1}{i}\frac{1 - e^{-2iz}}{1 + e^{-2iz}} = \operatorname{tang} z,$$

alors $\zeta_1 = \operatorname{tang} kz$ et la fonction $\zeta_1 = R(\zeta)$ exprime la multiplication de l'arc par k dans la tangente.

Conclusion. — *Les seules fractions indépendantes* R_1 *et* R_2 *à cercle fondamental qui soient permutables sont celles qui découlent des théorèmes de multiplication de* $\operatorname{tang} z$. *Le cercle fondamental est alors l'axe réel.*

34. *Fractions à arc de cercle fondamental.* — Soient $Z_1 = R_1(Z)$ et $Z_2 = R_2(Z)$ deux telles fractions permutables. On a vu, en supposant que l'arc invariant est ramené à la forme canonique : *demi-droite* $(0 + \infty)$, que si l'on pose

$$Z = W^2, \qquad Z_1 = W_1^2, \qquad Z_2 = W_2^2,$$

$W_1 = \mathcal{R}_1(W)$ et $W_2 = \mathcal{R}_2(W)$ sont des fractions rationnelles à cercle fondamental confondu avec l'axe réel conservant la moitié supérieure du plan W. Ces deux fractions sont permutables. Elles sont donc de première espèce; et si l'on transforme l'axe réel dans le cercle trigonométrique du plan ζ par une transformation homographique, elles se ramènent à $\zeta_1 = \zeta^{k_1}$, $\zeta_2 = A\zeta^{k_2}$ (k_1 et k_2 entiers positifs ou négatifs arbitraires, $A^{k_1 - 1} = 1$). On peut, par une transformation homographique sur W, W_1 et W_2 qui conserve l'axe réel, supposer que le point double attractif commun à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est le point $+i$ dans le demi-plan supérieur, $-i$ dans le demi-plan inférieur. On peut alors poser $W = \operatorname{tang} z$, on aura

$$W_1 = \operatorname{tang} k_1 z, \qquad W_2 = \operatorname{tang}\left[k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right],$$

λ entier arbitraire qu'on peut supposer réduit aux valeurs 1, 2, ...,

$k_1 - 1$. Alors

$$Z = \operatorname{tang}^2 z, \qquad Z_1 = \operatorname{tang}^2 k_1 z, \qquad Z_2 = \operatorname{tang}^2\left[k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right].$$

Mais si, par la transformation $Z = \frac{1 - Z'}{1 + Z'}$, on transforme l'arc invariant $(0 + \infty)$ du plan Z dans le segment $(+1, -1)$ du plan Z', en posant aussi

$$Z_1 = \frac{1 - Z'_1}{1 + Z'_1}, \qquad Z_2 = \frac{1 - Z'_2}{1 + Z'_2},$$

on aura

$$Z' = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 z}{1 + \operatorname{tang}^2 z}, \qquad Z'_1 = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 k_1 z}{1 + \operatorname{tang}^2 k_1 z}, \qquad Z'_2 = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\left(k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right)}{1 + \operatorname{tang}^2\left(k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right)}.$$

Donc

$$Z' = \cos 2z, \qquad Z'_1 = \cos 2k_1 z, \qquad Z'_2 = \cos\left[2k_2 z - \frac{\lambda 2\pi}{k_1 - 1}\right].$$

Mais, pour que $Z'_2 = \cos\left[2k_2 z - \frac{\lambda 2\pi}{k_1 - 1}\right]$ soit rationnel en $Z' = \cos 2z$, il faudra que $\frac{2\lambda}{k_1 - 1}$ soit entier. Or 2λ varie de 2 à $2(k_1 - 1)$, la valeur de l'entier précédent est 1 ou 2.

On a donc

$$Z'_2 = \cos(2k_2 z + \varepsilon_2\pi) \qquad (\varepsilon_2 = 0 \text{ ou } 1).$$

CONCLUSION. — *Les seules fractions permutables indépendantes à arc de cercle fondamental ramené à la forme canonique du segment d'axe réel* $(-1, +1)$ *sont celles qui découlent des théorèmes de multiplication du cosinus.*

La fonction entière fondamentale correspondant alors au point double $Z = +1$ de la substitution $Z_2 = 2Z^2 - 1$, par exemple, qui exprime $Z_2 = \cos 2z$ en $Z = \cos z$, n'est pas $\cos z$, c'est

$$Z = \cos i\sqrt{2z}.$$

En effet, le développement de $\cos i\sqrt{2z}$ est bien $= 1 + z + \ldots$, tandis que celui de $\cos z$, c'est $1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots$.

35. *Conclusion générale de ce Chapitre.* — Il n'y a de fractions rationnelles indépendantes permutables $Z_1 = R_1(Z)$ et $Z_2 = R_2(Z)$, parmi celles dont l'ensemble parfait E′ n'est pas identique au plan complet (¹), que les suivantes :

1° *Celles qui se ramènent par homographie sur* Z, Z_1 *et* Z_2 *à la forme canonique* $Z_1 = Z^{k_1}$, $Z_2 = AZ^{k_2}$, k_1 *et* k_2 *entiers positifs ou négatifs arbitraires, avec* $A^{k_1-1} = 1$. (Les fonctions fondamentales se ramènent à l'exponentielle e^z.) On peut encore, par une transformation homographique commune à Z, Z_1, Z_2,

$$Z = \frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta},$$

les ramener à des fractions qui sont identiques à celles exprimant

$$\zeta_1 = \operatorname{tang} k_1 z, \qquad \zeta_2 = \operatorname{tang}\left[k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right] \qquad [\lambda = 1, 2, \ldots (k_1 - 1)].$$

en fonction rationnelle de

$$\zeta = \operatorname{tang} z.$$

La permutabilité est évidente, et elle se traduit sur z par les deux suites d'opérations

$$z, \quad k_1 z, \quad k_2 k_1 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1},$$

$$z, \quad k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}, \quad k_1\left(k_2 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1}\right) = k_1 k_2 z - \lambda\pi - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1},$$

dont les résultats

$$k_2 k_1 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1} \quad \text{et} \quad k_2 k_1 z - \frac{\lambda\pi}{k_1 - 1} - \lambda\pi$$

donnent la même valeur à la tangente.

2° Celles qui conservent un arc de cercle. On les ramène à une forme canonique en transformant l'arc de cercle dans le segment réel $(-1, +1)$, et *les fractions en question ne sont autres alors que celles qui expriment*

$$Z_1 = \cos[k_1 u + \varepsilon_1 \pi] \quad \text{et} \quad Z_2 = \cos[k_2 u + \varepsilon_2 \pi] \quad (\varepsilon_1 = 0 \text{ ou } 1, \quad \varepsilon_2 = 0 \text{ ou } 1)$$

(¹) Parmi celles pour lesquelles E′ recouvre tout le plan, on ne connaît jusqu'ici que celles qui naissent des théorèmes de multiplication des fonctions elliptiques connue $p(z)$. *Voir*, par exemple, l'exemple 3° à la page 193 du présent Mémoire.

[k_1 et k_2 entiers arbitraires positifs ou négatifs], *en fonction de*

$$Z = \cos u.$$

La permutabilité exige alors les conventions suivantes sur ε_1 et ε_2 :

Si les deux nombres entiers k_1 et k_2 sont impairs, ε_1 et ε_2 sont arbitrairement o ou 1;

Si l'un des nombres k_1 ou k_2 est pair, par exemple k_1, alors ε_2 doit être nul, ε_1 quelconque;

Si les deux nombres k_1 et k_2 sont pairs, ε_1 et ε_2 doivent être *égaux* tous deux soit à o, soit à 1.

36. *Remarques.* — I. Les théorèmes de multiplication rationnels du sinus

$$Z_p = \sin pz, \qquad Z = \sin z \qquad (\text{pour } p \text{ entier impair } = 2p' + 1)$$

rentrent dans ceux du cosinus en posant $z = \frac{\pi}{2} - \zeta$. Alors

$$Z = \cos\zeta, \qquad Z_p = \cos[-p'\pi + p\zeta].$$

II. En définitive, *la seule transcendante essentielle que nous ayons trouvée dans ce Chapitre, possédant deux théorèmes rationnels de multiplication distincts et pour laquelle l'ensemble* $\mathcal{E}$ *ne soit pas tout le plan, c'est l'exponentielle* e^z. Car e^z satisfaisant toujours à la relation

$$e^{kz} = (e^z)^k,$$

il est clair que toute fonction *homographique* de $e^{\lambda z}$ (λ constante quelconque)

$$G(z) = \frac{ae^{\lambda z} + b}{ce^{\lambda z} + d}$$

(a, b, c, d, constantes quelconques $ad - bc \neq 1$) sera telle que $G[kz]$ = fonction rationnelle de $G(z)$, quel que soit l'entier k, puisqu'en effet

$$G[kz] = \frac{a(e^{\lambda z})^k + b}{c(e^{\lambda z})^k + d};$$

$e^{\lambda z}$ étant d'ailleurs fonction homographique de $G(z)$, $G(kz)$ sera rationnel en $G(z)$. La tangente, ordinaire ou hyperbolique, n'est qu'une fonction homographique de e^{2z} ou e^{2iz}. Quant au cosinus, il se déduit de la tangente par la transformation du deuxième degré

$$\cos 2z = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 z}{1 + \operatorname{tang}^2 z},$$

ou de l'exponentielle par

$$\cos z = \frac{e^{2iz} + 1}{2e^{iz}},$$

également du deuxième degré.

Il n'y a pas d'autre fonction rationnelle de $e^{\lambda z}$ admettant un double théorème de multiplication.

III. Nous avons, en chemin, résolu ce problème : *Trouver tous les polynomes* $Z_1 = P_1(Z)$ *permutables avec un autre polynome* $Z_2 = P_2(Z)$, *indépendant de* $P_1(Z)$.

En effet, tout polynome admet le point à l'infini comme point double attractif, en sorte que l'ensemble parfait E' pour l'itération d'un polynome ne peut jamais être superficiel. Tout polynome doit donc rentrer dans la classe des fonctions rationnelles qu'on a étudiées dans ce Chapitre.

Il n'existe de polynomes permutables indépendants que ceux qui, par une même substitution linéaire sur Z, Z_1, Z_2, *se ramènent aux deux formes canoniques suivantes;*

1° $\qquad Z_1 = P_1 = Z^{k_1}, \qquad Z_2 = P_2 = A Z^{k_2} \qquad (A^{k_1 - 1} = 1),$

k_1 *et* k_2 *entiers positifs arbitraires;*

2° $\qquad Z_1 = \cos(k_1 u + \varepsilon_1 \pi), \qquad Z_2 = \cos(k_2 u + \varepsilon_2 \pi) \qquad (Z = \cos u),$

k_1 *et* k_2 *entiers positifs arbitraires* ε_1 *et* $\varepsilon_2 = 0$ *ou* 1 *avec la restriction que* $k_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1$ *et* $k_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ *soient de même parité, ce qui entraîne les conditions énumérées plus haut.*

IV. *Les seules fonctions entières qui admettent deux théorèmes de multiplication rationnels et distincts sont les fonctions linéaires de* $e^{\lambda z}$ *et de* $\cos \lambda z$.

C'est la conséquence de la remarque III pour les fonctions fondamentales des polynomes permutables indépendants.

37. Je vais vérifier, en terminant, la remarque III relative aux polynomes en cherchant tous les polynomes du deuxième degré permutables avec un polynome du troisième degré au plus.

Soit $Z_1 = P_1(Z)$ le polynome du deuxième degré. Par une transformation du type $Z = aZ' + b$ sur Z et Z_1, on peut toujours ramener le polynome du deuxième degré à la forme

$$Z_1 = Z^2 + k.$$

Soit alors

$$Z_2 = a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0$$

un polynome permutable. On devra avoir

$$(a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0)^2 + k = a_3(Z^2 + k)^3 + a_2(Z^2 + k)^2 + a_1(Z^2 + k) + a_0.$$

Le deuxième membre est pair en Z. Le premier doit l'être aussi. Donc

$$a_2 a_3 = 0, \qquad a_0 a_1 = 0, \qquad a_0 a_3 + a_1 a_2 = 0.$$

1° Si $a_3 \neq 0$, on a

$$a_2 = 0, \qquad a_0 = 0,$$

et

$$(a_3 Z^3 + a_1 Z)^2 + k = a_3(Z^2 + k)^3 + a_1(Z^2 + k);$$

d'où

$$a_3^2 = a_3, \qquad 2a_1 a_3 = 3a_3 k, \qquad a_1^2 = 3a_3 k^2 + a_1, \qquad k = a_3 k^3 + a_1 k.$$

On a supposé $a_3 \neq 0$, donc $a_3 = 1$ nécessairement, puis

$$2a_1 = 3k, \qquad a_1^2 = 3k^2 + a_1, \qquad k = k^3 + a_1 k.$$

Les deux dernières équations donnent, en vertu de celle qui précède,

$$k = k^3 + \frac{3}{2}k^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{3k^2}{4} = k^2 + \frac{k}{2}.$$

Dans ces conditions, ou bien $k = 0$, alors $a_1 = 0$, et les fractions se réduisent à

$$Z_1 = Z^2,$$
$$Z_2 = Z^3,$$

ou bien $k \neq 0$ et alors on a, d'après les deux dernières équations,

$$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0, \qquad \frac{k}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad k = -2; \qquad \text{d'où} \qquad a_1 = -3.$$

On n'obtient donc que les deux résultats suivants :

1° $\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = Z^2 \\ Z_2 = Z^3 \end{array}}$ et par $[Z \mid -Z]$ $\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = -Z^2 \\ Z_2 = \quad Z^3 \end{array}}$

ou bien

2° $\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = Z^2 - 2 \\ Z_2 = Z^3 - 3Z \end{array}}$ qui en posant $\left\{\begin{array}{l} Z = 2\zeta \\ Z_1 = 2\zeta_1 \\ Z_2 = 2\zeta_2 \end{array}\right\}$ donnent $\boxed{\begin{array}{l} \zeta_1 = 2\zeta^2 - 1 \\ \zeta_2 = 4\zeta^3 - 3\zeta \end{array}}$

polynomes exprimant $\cos 2u$ et $\cos 3u$ *ou* $\cos u$.

Par la transformation $[\zeta \mid -\zeta]$, $[\zeta_1 \mid -\zeta_1]$, $[\zeta_2 \mid -\zeta_2]$, les deux polynomes deviennent

$\boxed{\begin{array}{l} \zeta_1 = -(2\zeta^2 - 1) \\ \zeta_2 = \quad 4\zeta^3 - 3\zeta \end{array}}$ qui expriment $\boxed{\begin{array}{l} \cos(2u + \pi) \\ \cos 3u \end{array} \text{ en } \cos u}$

conformément à la remarque III pour

$$k_1 = 2, \qquad k_2 = 3, \qquad \varepsilon_1 = 0 \text{ ou } 1, \qquad \varepsilon_2 = 0.$$

2° Si $a_3 = 0$, on doit avoir encore

$$a_1 a_0 = 0, \qquad a_2 a_1 = 0.$$

Si $a_1 \neq 0$, il faut $a_0 = a_2 = 0$, et R_2 se réduit nécessairement à Z, ce qui est banal. Donc il faut supposer $a_1 = 0$, alors il vient

$$(a_2 Z^2 + a_0)^2 + k = a_2(Z^2 + k)^2 + a_0.$$

Donc

$$a_2^2 = a_2, \qquad a_0 a_2 = a_2 k, \qquad a_0^2 + k = a_0 + k^2 a_2.$$

Si $a_2 = 0$, R_2 se réduit à une constante. Donc il faut supposer $a_2 \neq 0$. Alors nécessairement $a_2 = 1$, puis

$$a_0 = k \qquad \text{et} \qquad a_0^2 + k = a_0 + k^2,$$

c'est-à-dire une identité. Mais $a_0 = k$ entraîne que

$$R_2(Z) = Z^2 + k \equiv R_1(Z).$$

Le deuxième cas ne donne donc rien de nouveau.