GASTON JULIA

Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 39 (1922), p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR

UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES

LIÉE A LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR M. GASTON JULIA.

1. Lorsqu'on se donne une aire simplement connexe du plan z, limitée par une courbe simple fermée C, et un point A intérieur à l'aire, il est possible, et d'une infinité de façons, de trouver une fonction $Z = f_A(z)$, nulle en A, holomorphe en z tant que z est intérieur à C, telle en outre qu'à tout point z intérieur à C corresponde un point $Z = f_A(z)$ et un seul intérieur au cercle $\Gamma [|Z| < 1]$ du plan Z et réciproquement de façon que l'intérieur de C et l'intérieur de Γ se correspondent point par point, analytiquement. Si l'on donne une direction At issue de A dans le plan z, et si l'on impose à $f_A(z)$ la condition que la direction correspondante du plan Z soit une direction OT donnée *a priori* $f_A(z)$ est parfaitement déterminée. Le changement de OT en OT' ne fait d'ailleurs que multiplier la fonction $f_A(z)$ par une exponentielle $e^{i\theta}$, θ étant l'angle $\widehat{TOT'}$. Ayant fixé At et OT, $f_A(B)$ est déterminé en tout point B intérieur à C : c'est une fonction du point B. Si l'on fixe B, la valeur $f_A(B)$ dépendra du contour C; à ce titre c'est une fonction de la ligne C. Le problème qu'on se propose ici est d'étudier

cette fonction de la ligne C et notamment de calculer la *dérivée fonctionnelle* de $f_A(B)$ lorsque C varie, A, B restant fixes, ainsi que les directions correspondantes At et OT.

On reconnaîtra aisément que la direction OT correspondant à At ne joue ici qu'un rôle épisodique. L'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on va obtenir est la même, quel que soit le choix fait pour OT; l'essentiel est que, dans la variation de la ligne C, la direction OT qui correspond à At reste invariable. On détermine ainsi la part de la variation de $f_A(B)$ qui tient strictement à la déformation de la ligne C.

2. Il est assez naturel de se poser la question qui va être traitée ici lorsqu'on songe que la partie réelle de la fonction $[-\log f_A(B)]$ n'étant autre que la fonction de Green, $g(A, B)$ relative aux deux points A, B et au contour C :

$$[|f_A(B)| = e^{-g(A,B)}],$$

on connaît déjà, par les travaux de M. Hadamard, une équation aux dérivées fonctionnelles vérifiée par la fonction de Green : c'est

$$2\pi\,\delta g(A, B) = -\int_C \frac{dg(A, M)}{dn_M}\,\frac{dg(B, M)}{dn_M}\,\delta n_M\, ds_M. \tag{1}$$

Cette équation donne, en somme, la variation du module $|f_A(B)|$ quand C varie; on va rechercher une équation qui donne à la fois la variation du module et de l'argument, sous la réserve indiquée plus haut que, au point A, il n'y ait aucune variation des arguments.

3. Il y a deux méthodes pour traiter la question. La première consiste à se servir de l'équation (1) déjà connue pour calculer la variation de la fonction $\gamma(A, B)$ conjuguée de $g(A, B)$. Combinant les deux variations obtenues, on aura la variation de $\log f_A(B)$. On peut conduire le calcul de façon à introduire de suite cette fonction $\log f_A(B)$ dont $-g(A, B)$ est la partie réelle, l'équation cherchée s'obtient alors directement sans passer par $\gamma(A, B)$.

La deuxième méthode, qui ne suppose pas connue l'équation (1), consiste à ramener par la représentation conforme $Z = f_A(z)$ le cas d'une courbe C arbitraire au cas d'un cercle Γ, du plan Z. A vient en O et la fonction $F_0(Z)$ pour le plan Z est Z elle-même. On est ramené à chercher la fonction $F_1(Z)$ qui fait la représentation conforme sur l'extérieur de Γ, de l'intérieur d'une courbe Γ_1 *infiniment voisine du cercle* Γ, le point O étant conservé ainsi que toutes les *directions* issues de O.

Les deux méthodes se rejoignent d'ailleurs à un certain moment, ainsi qu'il est naturel.

4. Pour éviter toute difficulté sur l'existence de la dérivée $f'_A(z)$ aux points z du contour C, qui s'introduira ici au même titre que s'introduit $\frac{dg(A, M)}{dn_M}$ dans l'équation (1), on supposera que *la ligne* C *est analytique* ou formée d'un nombre fini d'arcs analytiques.

On donnera d'abord les deux méthodes, ci-dessus indiquées, pour obtenir l'équation aux dérivées fonctionnelles de $\delta f_A(B)$ (Chap. I, § 1 et 2).

On déduira de cette équation une équation nouvelle qui donne la variation $-\delta\gamma(A, B)$ *de l'argument* $-\gamma(A, B)$ de la fonction $f_A(B)$ dans les conditions du précédent problème (Chap. II, § 1).

Puis on déduira deux solutions remarquables de l'équation

$$\delta\Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M)\,\Phi(M, B)\,\delta n\,ds$$

signalée par M. Hadamard et l'on montrera que ces deux solutions coïncident avec celles que M. Hadamard a données récemment pour l'équation ci-dessus. La méthode qui sera suivie fera bien ressortir la *nature analytique* des deux solutions trouvées (Chap. II, § 2).

Enfin, l'équation aux dérivées fonctionnelles de $\delta f_A(B)$, convenablement traitée, nous fournira une équation nouvelle, très analogue à celle de M. Hadamard, et une solution très simple de cette équation :

$$\delta\Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M)\,\Phi(M, B)\,\delta z\,dz,$$

où Φ est *analytique* et *symétrique* en A et B, et δz, dz sont les déplacements normal et tangent à C (Chap. II, § 3).

De là se déduira une nouvelle solution de l'équation de M. Hadamard, d'ailleurs susceptible de la critique que M. Hadamard adressait à la première solution.

$$\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A\, dn_B}\right],$$

qu'il fut amené à former pour son équation.

CHAPITRE PREMIER.

RECHERCHE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES QUE VÉRIFIE LA FONCTION $f_A(B)$.

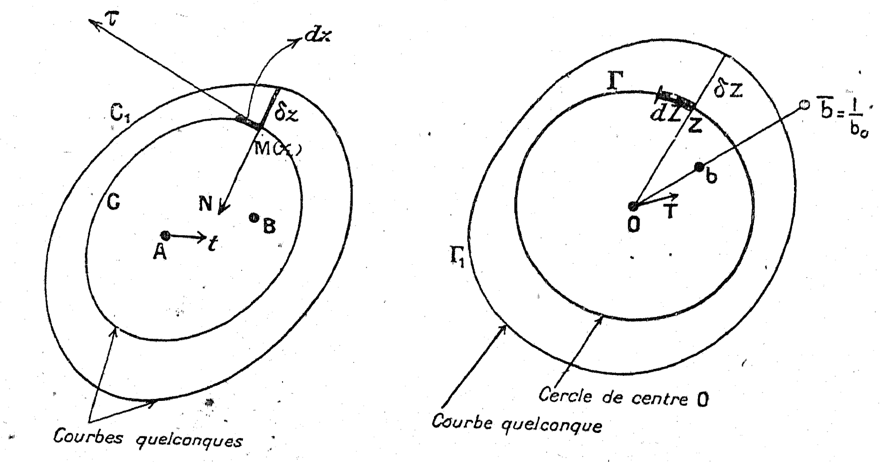
I. — Première méthode.

5. On pose

$$\log f_A(B) = -[g(A, B) + i\gamma(A, B)].$$

Soient M un point variable du contour C, MN la normale dirigée

Fig. 1.



vers l'intérieur et $M\tau$ la demi-tangente telle que $\widehat{M\tau, MN} = +\frac{\pi}{2}$, α désignera l'angle $\widehat{Ox, M\tau}$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ sera $\widehat{Ox, MN}$.

On a

$$\log f_A(z) = -[g(A, z) + i\gamma(A, z)].$$

En dérivant suivant la normale MN

$$\frac{d\gamma(\mathrm{A}, z)}{dn} = \frac{dg(\mathrm{A}, z)}{ds} = 0.$$

Donc

$$\frac{d}{dn}\log f_{\mathrm{A}}(z) = -\frac{dg(\mathrm{A}, z)}{dn}.$$

Suivant la normale

$$dz = dn\, e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z)} = \frac{d}{dz}\log f_{\mathrm{A}}(z) = -\frac{dg(\mathrm{A}, z)}{dn}e^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

De même

$$\frac{f'_{\mathrm{B}}(z)}{f_{\mathrm{B}}(z)} = -\frac{dg(\mathrm{B}, z)}{dn}e^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Donc

$$2\pi\,\delta g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = +\int_{\mathrm{C}}\frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z)}\,\frac{f'_{\mathrm{B}}(z)}{f_{\mathrm{B}}(z)}e^{+2i\alpha}\,\delta n\,ds.$$

Mais la fonction $f_{\mathrm{B}}(z)$ donnant, comme $f_{\mathrm{A}}(z)$, une représentation conforme de l'intérieur de C sur l'intérieur du cercle trigonométrique Γ, $\mathrm{Z}_1 = f_{\mathrm{B}}(z)$ est une fonction homographique de $\mathrm{Z} = f_{\mathrm{A}}(z)$ qui s'annule pour $z = \mathrm{B}$:

$$f_{\mathrm{B}}(z) = \frac{f_{\mathrm{A}}(z) - f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{f_{\mathrm{A}}(z) - \overline{f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}}\,\frac{e^{i\theta}}{|f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})|},$$

$$\overline{f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})} = \frac{1}{\text{nombre complexe conjugué de } f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}.$$

Car la formule

$$\mathrm{Z}_1 = \frac{\mathrm{Z} - b}{\mathrm{Z} - \overline{b}}\,\frac{e^{i\theta}}{|b|} \qquad \left(\overline{b} = \frac{1}{b_0},\ b_0 \text{ conjugué de } b\right)$$

transforme l'intérieur du cercle $|\mathrm{Z}| = 1$ en l'intérieur du cercle $|\mathrm{Z}| = 1$ et au point $\mathrm{Z} = b$ (provenant de B) correspond le point $\mathrm{Z}_1 = 0$. L'angle θ sert uniquement à fixer la direction OT_1 correspondant à la direction $\mathrm{B}t_1$ du plan z.

En posant pour abréger $b = f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, on aura

$$f_{\mathrm{B}}(z) = \frac{f_{\mathrm{A}}(z) - b}{f_{\mathrm{A}}(z) - \frac{1}{b_0}}\,\frac{e^{i\theta}}{|b|},$$

d'où

$$\frac{f'_{\mathrm{B}}(z)}{f_{\mathrm{B}}(z)} = \frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z) - b} - \frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z) - \frac{1}{b_0}}.$$

D'autre part : 1° si ∂n est l'écart normal de la courbe C et de la courbe variée au point M, la variation *normale* de z en passant de M au point correspondant de la courbe variée sera

$$\partial z = \partial n \, e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)};$$

2° La variation de z tangente à C est

$$dz = ds\, e^{i\alpha},$$
$$\partial z \, dz = i\, \partial n \, ds\, e^{2i\alpha}.$$

Et par conséquent

$$(2) \qquad \partial g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z)}\left[\frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z)-b} - \frac{f'_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(z)-\dfrac{1}{b_0}}\right]\partial z\, dz.$$

6. Lorsque z décrit C, $Z = f_{\mathrm{A}}(z)$ décrit le cercle Γ de rayon *un*. Les intégrales de la formule (2) peuvent se transformer en intégrales prises le long de Γ.

Tout d'abord, lorsque z décrit la courbe variée C_1 voisine de C, Z décrira une courbe variée Γ_1 voisine de Γ. L'écart normal ∂Z pour un point Z de Γ, dont le correspondant sur C est z, sera évidemment

$$\partial Z = f'_{\mathrm{A}}(z)\, \partial z$$

à cause des propriétés connues de la représentation conforme. La variation tangente dZ correspondant à dz sera

$$dZ = f'_{\mathrm{A}}(z)\, dz.$$

La formule (2) se transforme alors dans la formule très simple suivante :

$$(3) \qquad \partial g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma} \frac{\partial Z\, dZ}{Z(Z-b)} - \int_{\Gamma} \frac{\partial Z\, dZ}{Z\left(Z-\dfrac{1}{b_0}\right)}\right].$$

7. Le long du cercle Γ, ∂Z et Z ont même argument ou des arguments différant de π selon que $Z + \partial Z$ est extérieur ou intérieur au cercle Γ. Donc

$$\frac{\partial Z}{Z} = -\partial \mathrm{N},$$

$\partial \mathrm{N}$ étant l'écart normal entre Γ et la courbe variée Γ_1, compté positivement vers l'intérieur de Γ:

$$\delta g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{i}{2\pi}\left[\int_{\Gamma_+} \frac{\partial \mathrm{N}\, d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - b} - \int_{\Gamma_+} \frac{\partial \mathrm{N}\, d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - \frac{1}{b_0}}\right], \tag{4}$$

le signe Γ_+ indique que l'intégration doit être faite en décrivant Γ dans le sens positif qui est le sens trigonométrique.

Pour se débarrasser de $b_0 =$ [imaginaire conjuguée de $f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$], une transformation est nécessaire.

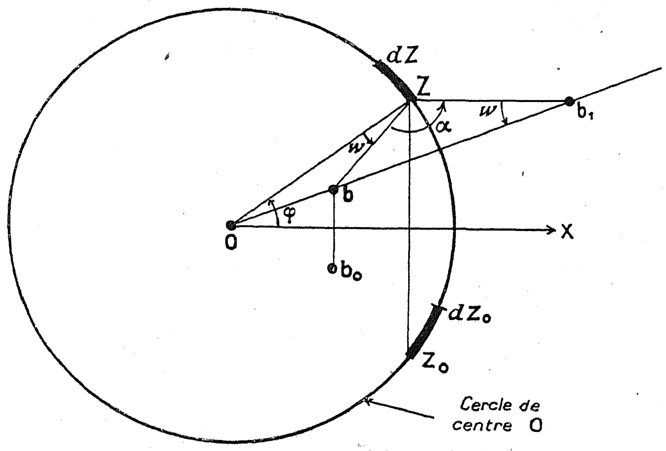
8. Posons $\mathrm{Z} = \frac{1}{\mathrm{Z}_0}$ (Z_0 est alors le *conjugué de* Z) dans

$$\mathrm{I} = \int_{\Gamma_+} \frac{\partial \mathrm{N}\, d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - \frac{1}{b_0}}.$$

On a

$$d\mathrm{Z} = -\frac{d\mathrm{Z}_0}{\mathrm{Z}_0^2}$$

Fig. 2.



et Z_0 décrira Γ dans le sens *négatif*

$$\mathrm{I} = -\int_{\Gamma_-} \frac{\partial_z \mathrm{N}\, d\mathrm{Z}_0}{\mathrm{Z}_0^2\left[\frac{1}{\mathrm{Z}_0} - \frac{1}{b_0}\right]},$$

$\partial_z N$ indiquant l'écart normal au point Z.

$$I = -\int_{\Gamma^+} \frac{\partial_z N\, b_0\, dZ_0}{Z_0(Z_0 - b_0)},$$

en rétablissant l'intégration dans le sens positif. Or

$$\frac{b_0}{Z_0(Z_0 - b_0)} = \frac{1}{Z_0 - b_0} - \frac{1}{Z_0}.$$

Donc

$$I = +\int_{\Gamma_+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0} - \int_{\Gamma_+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0}.$$

En définitive, on a

$$(5) \qquad \partial g(A, B) = \frac{i}{2\pi}\left[\int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ}{Z-b} + \int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} - \int_{\Gamma_+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0}\right].$$

9. Il est visible, sur la figure 2, que si l'on désigne par φ l'argument de Z, on aura

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = +i\, d\varphi,$$

étant entendu que Z_0 décrit Γ dans le sens positif. Il vient alors

$$(6) \qquad \partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_\varphi N\, d\varphi + \frac{i}{2\pi}\left[\int_{\Gamma^+} \partial_z N\left(\frac{dZ}{Z-b} + \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0}\right)\right].$$

Il faut prendre garde qu'avec la convention adoptée, dZ_0 n'est plus l'imaginaire conjuguée de dZ, bien que Z_0 soit l'imaginaire conjuguée de Z. On a

$$dZ_0 = -[\text{imaginaire conjuguée de } dZ].$$

Par conséquent,

$$\frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} = -\left[\text{imaginaire conjuguée de } \frac{dZ}{Z-b}\right]$$

et, dans la formule (6),

$$\frac{dZ}{Z-b} + \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} = 2i\,\mathfrak{I}\left(\frac{dZ}{Z-b}\right),$$

$\mathfrak{I}\left(\frac{dZ}{Z-b}\right)$ désigne, selon la coutume, le coefficient de i dans $\frac{dZ}{Z-b}$.

Ceci donne

(7) $$\delta g(A, B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi - \frac{1}{\pi}\mathfrak{I}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta N\, dZ}{Z - b}.$$

Or, Q étant une quantité complexe quelconque, on a

$$\mathfrak{R}(iQ) = -\mathfrak{I}(Q).$$

Donc

(8) $$\delta g(A, B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi + \mathfrak{R}\left[\frac{i}{\pi}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta N\, dZ}{Z - b}\right].$$

10. Si l'on considère maintenant la fonction

$$-\delta \log f_A(B) = \delta g(A, B) + i\delta\gamma(A, B);$$

c'est une fonction analytique de B dont la partie réelle est donnée par (8) ou bien par

(9) $$\mathfrak{R}[-\delta \log f_A(B)] = \mathfrak{R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi + \frac{i}{\pi}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta N\, dZ}{Z - b}\right].$$

Aux deux membres on a, sous le signe $\mathfrak{R}$, des fonctions analytiques de B, puisque $b = f_A(B)$ est analytique en B. On conclut alors immédiatement

$$-\delta \log f_A(B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi + \frac{i}{\pi}\int_{\Gamma_+} \frac{\delta N\, dZ}{Z - b} + iC,$$

C étant une constante réelle à déterminer.

11. Or, les deux fonctions $f_A(z)$ et $f_A(z) + \delta f_A(z)$ faisant correspondre à At la même direction OT, on aura, autour de $z = A$,

$$f_A(z) = \lambda_1(z - A) + \ldots,$$
$$f_A + \delta f_A(z) = \mu\lambda_1(z - A) + \ldots.$$

Donc $\dfrac{\delta f_A(z)}{f_A(z)}$ tend vers une limite *réelle* $\mu - 1$, si z tend vers A. Mais

(10) $$-\frac{\delta f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi + \frac{i}{\pi}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta N\, dZ}{Z - b} + iC.$$

Lorsque B tend vers A, $b = f_A(B)$ tend vers zéro et la deuxième intégrale tend vers

$$\frac{i}{\pi}\int_{\Gamma^-}\frac{\partial N\, dZ}{Z} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\partial_\varphi N\, d\varphi.$$

Le second membre de (10) a donc pour limite, lorsque B tend vers A, la quantité

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_\varphi N\, d\varphi + iC.$$

Cette limite devant être réelle, on a

$$C = 0.$$

En définitive,

$$(11)\qquad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_\varphi N\, d\varphi - \frac{i}{\pi}\int_{\Gamma_+}\frac{\partial N\, dZ}{Z-b}.$$

En rétablissant le déplacement tangent à Γ, $dZ = iZ\, d\varphi$, et le déplacement normal

$$\partial Z = -Z\,\partial_\varphi N,$$

on a

$$(12)\qquad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}\frac{\partial Z\, dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{\partial Z\, dZ}{Z(Z-b)}.$$

12. On peut réunir les deux intégrales précédentes en une seule par la formule

$$\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}\frac{b+Z}{Z^2(b-Z)}\,\partial Z\, dZ.$$

Et ensuite revenir au plan de la variable z, grâce aux formules

$$\begin{aligned}
Z &= f_A(z),\\
b &= f_A(B),\\
dZ &= f'_A(z)\,\partial z, && \partial z \text{ déplacement normal à C},\\
dz &= f'_A(z)\, dz, && dz \text{ déplacement tangent à C};
\end{aligned}$$

d'où

$$(13)\qquad \boxed{\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_A(B)+f_A(z)}{f_A(B)-f_A(z)}\,\frac{f'^2_A(z)}{f^2_A(z)}\,\partial z\, dz}$$

formule définitive qui permet de calculer $\partial f_A(B)$ connaissant la fonction $f_A(z)$ correspondant à C et, en chaque point de C, le déplacement normal ∂z qui transforme C dans la courbe variée C_1.

13. On peut transformer la formule (13) de façon à leur donner la forme classique d'une variation adoptée depuis M. Volterra. Il suffit pour cela d'observer que la quantité

$$\frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} = \frac{f_A'^2(z)}{f_A^2(z)} \delta z\, dz$$

n'est autre que

$$-i\,\delta N\, dS,$$

car

$$\frac{\delta Z}{Z} = -\delta N \qquad \text{et} \qquad \frac{dZ}{Z} = i\, dS,$$

δN désignant le déplacement normal au cercle Γ et dS le déplacement tangent à ce cercle. Or

$$\delta N = |f_A'(z)|\,\delta n,$$
$$dS = |f_A'(z)|\, ds,$$

δn étant le déplacement normal à C et ds l'arc élémentaire de C. Donc on a

$$\frac{\delta f_A(B)}{f_A(B)} = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f_A(B) + f_A(z)}{f_A(B) - f_A(z)} |f_A'(z)|^2\, \delta n\, ds. \tag{14}$$

Il est loisible d'ailleurs de remarquer que, le module $|f_A(z)|$ étant égal à l'unité sur C, on a, sur C,

$$|f_A'(z)| = \frac{d\, g(A, M)}{dn}.$$

14. Reprenant la formule (12)

$$\frac{\delta f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta Z\, dZ}{Z(Z-b)},$$

on remarque que la première intégrale est une constante indépendante de b. Elle doit donc avoir un sens géométrique, d'autant plus que cette première intégrale se réduit à

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta_\varphi N\, d\varphi.$$

Or, si l'on fait tendre B vers A, b tend vers zéro et le deuxième membre se réduit à

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2}.$$

Quant au premier, si l'on se reporte au développement de Taylor,

$$f_A(z) = (z - A) f'_A(A) + \ldots,$$
$$f_A(z) + \delta f_A(z) = (z - A)[f'_A(A) + \delta f'_A(A)] + \ldots,$$

on voit que $\dfrac{\delta f_A(z)}{f_A(z)}$ tend vers $\dfrac{\delta f'_A(A)}{f'_A(A)}$ quand z tend vers A. On a donc

$$(15) \qquad \boxed{\frac{\delta f'_A(A)}{f'_A(A)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'^2_A(z)}{f^2_A(z)}\delta z\, dz}$$

formule qui donne la *variation de la dérivée de la fonction* $f_A(z)$ *au point* A, lorsque le contour C varie.

Rappelons encore que

$$\frac{\delta f'_A(A)}{f'_A(A)} = \frac{1}{2\pi}\int_C |f'_A(z)|^2 \delta n\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\frac{d g(A, M)}{dn}\right]^2 \delta n\, ds.$$

15. Mais, en outre, dans la formule (12), la deuxième intégrale

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{\delta Z\, dZ}{Z(Z-b)}$$

représente une fonction analytique de b, holomorphe dans le cercle $|b| < 1$. On peut donc *développer très simplement* $\delta f_A(B)$ *en une série de Taylor procédant suivant les puissances de* $b = f_A(B)$ absolument convergente lorsque B est intérieur à C, et par conséquent $|f_A(B)| < 1$:

$$\frac{\delta b}{b} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2\left(1 - \dfrac{b}{Z}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} - \frac{b}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^3} - \ldots - \frac{b^n}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^{n+2}} - \ldots.$$

Enfin

$$\delta f_A(B) = -\frac{f_A(B)}{2\pi i}\int_C \frac{f'^2_A(z)}{f^2_A(z)}\delta z\, dz$$
$$-\frac{[f_A(B)]^2}{\pi i}\int_C \frac{f'^2_A(z)}{f^3_A(z)}\delta z\, dz - \ldots - \frac{[f_A(B)]^n}{\pi i}\int_C \frac{f'^2_A(z)}{[f_A(z)]^{n+1}}\delta z\, dz - \ldots.$$

II. — Deuxième méthode.

Soit $f_A(z)$ la fonction qui fournit la représentation de l'intérieur de C sur l'intérieur de Γ. En supposant C analytique, $f_A(z)$ est prolongeable au delà de C et transforme C_1, contour varié de C, en Γ_1, contour infiniment voisin du cercle trigonométrique Γ (voir *fig.* 1). Posons toujours $Z = f_A(z)$. La fonction $Z_1 = f_A(z) + \delta f_A(z)$ qui fournit la représentation conforme de C_1 sur Γ pourra s'obtenir : 1° en faisant la représentation de C_1 sur Γ_1, ce qui fait passer de z à Z; 2° en faisant la représentation de Γ_1 sur Γ, ce qui fait passer de Z à Z_1. Évidemment Z_1 est une fonction holomorphe de Z, nulle pour $Z = 0$, dont la dérivée est réelle en o puisque évidemment $\frac{dZ_1}{dz}$ et $\frac{dZ}{dz}$ ont même argument en A. Z_1 est une fonction de Z, holomorphe dans Γ_1, et *dont le module est sur* Γ_1 *égal à l'unité*.

16. Je pose $Z_1 = F_1(Z)$. Puisque Γ_1 est infiniment voisin de Γ, j'aurai

$$Z_1 = Z + \varepsilon[Z + a_2 Z^2 + \ldots],$$

ε étant une quantité réelle infiniment petite constante (de l'ordre de δN) et la parenthèse une fonction analytique dans Γ_1

$$\frac{Z_1}{Z} = \frac{F_1(Z)}{Z} = 1 + \varepsilon[1 + a_2 Z + \ldots],$$

$$\varphi(Z) = \log \frac{F_1(Z)}{Z} = \varepsilon F_2(Z),$$

$F_2(Z)$ étant encore une fonction holomorphe de Z dans Γ_1.

Envisageons un point quelconque Z de Γ et le point ζ de Γ_1 situé sur la normale au cercle Γ menée par Z. On sait que $|F_1(\zeta)| = 1$. On va calculer $F_1(Z)$ et $\varphi(Z)$.

Évidemment, δZ désignant le déplacement normal $Z\zeta$, dont la valeur absolue est comptée positivement vers l'intérieur de Γ, on a

$$\varphi(\zeta) = \varphi(Z) + \delta Z\, \varphi'(Z) + \ldots.$$

Or : 1° $\varphi'(Z) = \varepsilon F'_2(Z)$ renferme l'infiniment petit ε en facteur; 2° δZ dont le module est $|\delta N|$ est aussi infiniment petit de l'ordre de ε.

Donc $\partial Z \varphi'(Z)$ étant du deuxième ordre au moins en ε, on a, en ne gardant que les quantités du premier ordre en ε,

$$\varphi(\zeta) = \varphi(Z).$$

Or

$$\varphi(\zeta) = \log \frac{F_1(\zeta)}{\zeta}$$

et

$$\mathcal{R}[\varphi(\zeta)] = \log|F_1(\zeta)| - \log|\zeta| = -\log|\zeta|,$$

puisque

$$|F_1(\zeta)| = 1,$$

et comme

$$|\zeta| = 1 - \partial N,$$

puisque ∂N est positif vers l'extérieur de Γ, on a

$$\log|\zeta| = -\partial N.$$

Donc

$$\mathcal{R}[\varphi(Z)] = +\partial N$$

en tout point Z de Γ.

Remarquons que si $b = f_A(B)$, on aura

$$b + \partial b = F_1(b),$$

$$1 + \frac{\partial b}{b} = \frac{F_1(b)}{b}$$

et

$$\log \frac{F_1(b)}{b} = \frac{\partial b}{b},$$

en se bornant aux infiniment petits de l'ordre de ε,

$$\varphi(b) = \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)},$$

qui est la fonction à déterminer.

Le problème revient donc au suivant :

On connaît *sur le cercle* Γ *la valeur de la partie réelle de la fonction* $\varphi(Z)$, *déterminer, en tout point* b *dans* Γ, *la valeur de cette fonction* $\varphi(b)$.

17. Ce problème se résout aisément :

$$\mathcal{R}[\varphi(b)] = \mathcal{R}\left(\frac{\partial b}{b}\right)$$

est une fonction harmonique dans Γ, *dont la valeur en tout point de* Γ *est* δN.

Or, la fonction de Green pour un point b intérieur à Γ est, en appelant b_1 son inverse $\left[b_1 = \frac{1}{b_0}\right]$ par rapport à Γ,

$$\log\left|\frac{Z-b_1}{Z-b}\,b\right| = \mathcal{R}\log b\frac{Z-b_1}{Z-b}.$$

On a donc

$$\mathcal{R}[\varphi(b)] = +\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \delta N\frac{d}{dN}\log\left|\frac{Z-b_1}{Z-b}\,b\right|dS,$$

en vertu de la formule classique

$$u(b) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(M)\frac{d}{dn}g(b, M)\,dS_M.$$

Or

$$\frac{d}{dN}\mathcal{R}\left[\log b\frac{Z-b_1}{Z-b}\right] = -\frac{d}{dS}\mathcal{I}\left[\log b\frac{Z-b_1}{Z-b}\right] = -\frac{d}{dS}\arg\frac{Z-b_1}{Z-b},$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\delta b}{b}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \delta N\frac{d}{dS}\left(\arg\frac{Z-b_1}{Z-b}\right)dS.$$

A cause de

$$\log\frac{Z-b_1}{Z-b} = \log\left|\frac{Z-b_1}{Z-b}\right| + i\arg\frac{Z-b_1}{Z-b},$$

et puisque $\left|\frac{Z-b_1}{Z-b}\right|$ est constant sur Γ, on a

$$\frac{d}{dS}\arg\frac{Z-b_1}{Z-b} = \frac{1}{i}\frac{d}{dS}\log\frac{Z-b_1}{Z-b}.$$

Donc

$$\mathcal{R}\left(\frac{\delta b}{b}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \delta N\,d\log\frac{Z-b_1}{Z-b} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \delta N\left[\frac{dZ}{Z-b_1} - \frac{dZ}{Z-b}\right].$$

A partir d'ici, la deuxième méthode rejoint la première.

Nous avons en effet donné la formule (4)

$$\delta g(A, B) = \frac{i}{2\pi}\left[\int_\Gamma \delta N\left(\frac{dZ}{Z-b} - \frac{dZ}{Z-b_1}\right)\right]. \tag{4}$$

Or $b = f_A(B)$ montre que

$$\frac{\partial b}{b} = \partial \log f_A(B) = -\partial g(A, B) - i\partial\gamma(A, B),$$
$$\mathcal{R}\frac{\partial b}{b} = -\partial g(A, B),$$

et ceci remarqué, la formule

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial b}{b}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \partial N\left(\frac{dZ}{Z - b_1} - \frac{dZ}{Z - b}\right)$$

devient

$$\partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \partial N\left(\frac{dZ}{Z - b_1} - \frac{dZ}{Z - b}\right) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \partial N\left(\frac{dZ}{Z - b} - \frac{dZ}{Z - b_1}\right)$$

qui n'est autre que (4).

Il n'y a donc, pour obtenir $\frac{\partial b}{b}$ à partir de $\mathcal{R}\left(\frac{\partial b}{b}\right)$, qu'à continuer exactement comme dans la première méthode à partir du n° 7 pour obtenir les formules (10), (11), (12) et finalement la formule (13) qui donne le résultat.

CHAPITRE II.

QUELQUES CONSÉQUENCES DE L'ÉQUATION (13).

I. — Équation qui donne la variation de $\arg f_A(B)$ en fonction de la variation du contour.

18. En posant

$$\log f_A(B) = -[g(A, B) + i\gamma(A, B)],$$

γ étant la fonction conjuguée de g par rapport à la variable complexe B, l'argument de $f_A(B)$ sera $-\gamma(A, B)$, on se propose ici de former une équation simple à laquelle satisfait sa variation. ds étant le déplacement tangent à C, il est connu que

$$\frac{dg(\mathrm{A}, \mathrm{M})}{dn} = -\frac{d\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{M})}{ds} = |f'_{\mathrm{A}}(z)|,$$

et comme

$$\delta \log f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = -\delta g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) - i\delta\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

on aura évidemment

$$-\delta\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} |f'_{\mathrm{A}}(z)|^2 \,\mathfrak{J}\left[\frac{f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + f_{\mathrm{A}}(z)}{f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) - f_{\mathrm{A}}(z)}\right] \delta n\, ds,$$

en se servant de l'équation (14) qui équivaut à (13).

Donc

$$\delta\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \left[\frac{d\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{M})}{ds}\right]^2 \mathfrak{J}\left[\frac{b + \mathrm{Z}}{b - \mathrm{Z}}\right] \delta n\, ds,$$

en posant, pour abréger $\mathrm{Z} = f_{\mathrm{A}}(z)$, $b = f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

Or

$$\frac{b + \mathrm{Z}}{b - \mathrm{Z}} = \frac{b - \mathrm{Z} + 2\mathrm{Z}}{b - \mathrm{Z}} = 1 + 2\frac{\mathrm{Z}}{b - \mathrm{Z}} = 1 - \frac{2\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - b}.$$

Donc

$$\delta\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \left[\frac{d\gamma(\mathrm{A}, \mathrm{M})}{ds}\right]^2 \mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - b}\right) \delta n\, ds.$$

Si l'on se reporte à la figure 2, en désignant par W l'angle dirigé $\widehat{\mathrm{OZ}b}$ et par α l'angle $\widehat{b\mathrm{Z}b_1}$ $\left(b_1\right.$ inverse de b par rapport au cercle unité $\left.b_1 = \frac{1}{b_0}\right)$, il est visible que

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - b}\right) = -\frac{1}{|\mathrm{Z} - b|}\sin \mathrm{W}.$$

Il est d'ailleurs visible, dans le triangle $b\mathrm{Z}b_1$ où l'angle dirigé $\widehat{\mathrm{Z}b_1 b}$ est égal à W, que l'on a, en grandeur et signe,

$$\frac{\sin \mathrm{W}}{|\mathrm{Z} - b|} = \frac{\sin\alpha}{\overline{bb_1}} = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{|b|} - |b|}.$$

On se rappelle en outre que

$$|b| = e^{-g(\mathrm{A}, \mathrm{B})}, \qquad \frac{1}{|b|} = e^{g(\mathrm{A}, \mathrm{B})}.$$

Donc

$$\frac{\sin W}{|Z-b|} = \frac{\sin \alpha}{2 \operatorname{sh} g(A, B)}.$$

Mais il est clair que

$$\hat{\alpha} = b\hat{Z}b_1 = \arg \frac{Z-b_1}{Z-b}.$$

Or, l'expression $\frac{Z-b_1}{Z-b}$ s'introduit naturellement lorsqu'on cherche la fonction $Z_1 = f_B(z)$ qui fournit la représentation conforme de C sur Γ de façon que B devienne le centre de Γ.

On a, en effet,

$$f_B(z) = Z_1 = \frac{Z-b}{Z-b_1} \frac{e^{i\omega}}{|b|},$$

et si l'on choisit spécialement Z_1 de façon que $f_B(A)$ *soit réel et positif* on a $\omega = 0$.

Avec cette convention que, quel que soit B, $f_B(A)$ *soit réel positif*, la fonction $f_B(z)$ sera définie sans ambiguïté quel que soit B intérieur à C, dès que la fonction $f_B(z)$ est connue, et nous savons que $f_A(z)$ est déterminé par la connaissance des directions correspondantes At et OT.

En définitive,

$$f_B(z) = \frac{Z-b}{Z-b_1} \frac{1}{|b|}.$$

Donc

$$\log f_B(z) = \log\left(\frac{Z-b}{Z-b_1}\right) - \log|b|,$$

$$-g(B, M) - i\gamma(B, M) = \log \frac{Z-b}{Z-b_1} - \log|b|.$$

En particulier,

$$\gamma(B, M) = \arg \frac{Z-b_1}{Z-b} = \alpha,$$

avec la convention que

$$\boxed{\gamma(B, A) = 0}$$

$$\frac{\sin w}{|Z-b|} = \frac{\sin[\gamma(B, M)]}{2 \operatorname{sh}[g(A, B)]}.$$

On obtient finalement l'équation curieuse que voici :

$$\delta\gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\frac{d\gamma(A, M)}{ds}\right]^2 \frac{\sin[\gamma(B, M)]}{\operatorname{sh}[g(A, B)]}\delta n\, ds$$

ou enfin

$$(16)\qquad \boxed{\delta\gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi \operatorname{sh}[g(A, B)]}\int_C \left[\frac{d\gamma(A, M)}{ds}\right]^2 \sin[\gamma(B, M)]\,\delta n\, ds}$$

vérifiée par l'argument $-\gamma(A, B)$ de la fonction $f_A(B)$ lorsque A et B restant fixe, C varie d'une manière quelconque. Rappelons que $\gamma(A, B)$ est parfaitement définie par les données initiales At, oT et $\gamma(B, M)$ par la condition

$$\gamma(B, A) = 0.$$

II. — Conséquences relatives à l'équation de M. Hadamard :

$$(17)\qquad \delta\,\Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M)\,\Phi(M, B)\,\delta n\, ds.$$

19. A partir de l'équation aux dérivées fonctionnelles que vérifie la fonction de Green

$$(1)\qquad \delta g(A, B) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg(A, M)}{dn_M}\,\frac{dg(B, M)}{dn_M}\,\delta n_M\, ds_M,$$

M. Hadamard a formé une solution de l'équation (17) par différentiation de (1) relativement à A et B. On va ici fournir une solution complexe de (17) à partir de l'équation (13) que vérifie $f_A(z)$. On partira pour la commodité du calcul de l'équation

$$(12)\qquad \frac{\delta f_A(B)}{f_A(B)} = \delta \log f_A(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z(Z-b)},$$

où, l'on s'en souvient, $Z = f_A(z)$.

Une première différentiation, *par rapport à la variable complexe* B, *dont* $f_A(B)$ *est fonction analytique*, donne aussitôt

$$(18)\qquad \delta \frac{d}{dB}\log f_A(B) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d}{dB}\left[\frac{\delta Z\, dZ}{Z(Z-b)}\right].$$

puisque, évidemment, seule la deuxième intégrale de (12) dépend de B, par l'intermédiaire de

$$b = f_A(B).$$

Relativement à A, il faut remarquer que $f_A(B)$, *qui dépend de* A, *n'est pas fonction analytique de la variable complexe* A. On s'en rend compte de la façon la plus aisée en choisissant un point Ω arbitraire, dans le contour C, distinct de A et B, et en exprimant $f_A(B)$ en fonction de $f_\Omega(B)$, $f_\Omega(A)$, etc. Cela est possible de la façon suivante.

Posons

$$\zeta(z) = f_\Omega(z),$$
$$\alpha = f_\Omega(A),$$
$$\beta = f_\Omega(B).$$

On aura évidemment

$$f_A(z) = Z = \frac{\zeta - \alpha}{\alpha_0 \zeta - 1} e^{i\theta},$$

θ étant une constante réelle convenable; α_0 désigne le nombre complexe conjugué de α :

$$\alpha_0 = f_\Omega^0(A_0),$$

c'est une fonction analytique de A_0, nombre conjugué de A. On voit ainsi que $f_A(z)$, pour une valeur fixe de z, dépend analytiquement de A, *mais aussi de* A_0, A et A_0 étant les *coordonnées isotropes du point* A. $f_A(z)$ n'est donc pas une fonction analytique de A seul, alors qu'elle est une fonction analytique de z seul.

20. Pour obtenir une solution satisfaisante de l'équation (17) on va différentier (18), non par rapport à A, mais *par rapport à* A_0. Pour cela, il est commode de transformer (12) en faisant apparaître la fonction ζ au lieu de Z. Eu égard à ce fait que $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\delta Z\, dZ}{Z^2}$ ne dépend pas de B, on écrira

$$\begin{aligned}
\delta \log f_A(B) &= -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta Z\, dZ}{Z(Z-b)} + \text{fonction indépendante de B} \\
&= -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \delta \log Z\, d\log(Z-b) + \text{fonct. ind. de B} \\
&= -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [\delta \log(\zeta-\alpha) - \delta\log(\alpha_0\zeta - 1)][d\log(\zeta-\beta) - d\log(\alpha_0\zeta-1)] \\
&\qquad + \text{fonct. ind. de B}.
\end{aligned}$$

En effet,

$$Z - b = \frac{(\alpha\alpha_0 - 1)(\zeta - \beta)}{(\alpha_0\beta - 1)(\alpha_0\zeta - 1)} e^{i\theta}.$$

Donc

$$\delta \frac{d}{dB} \log f_A(B) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [\delta \log(\zeta - \alpha) - \delta \log(\alpha_0\zeta - 1)]\, d\left[\frac{d}{dB}\log(\zeta - \beta)\right].$$

En différentiant *par rapport à* A_0 qui figure au deuxième membre par $\alpha_0 = f^0_\Omega(A_0)$, on aura

$$\delta \frac{d^2}{dA_0\, dB} \log f_A(B) = +\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \delta\left[\frac{d}{dA_0}\log(\alpha_0\zeta - 1)\right] d\left[\frac{d}{dB}\log(\zeta - \beta)\right],$$

$$\delta \frac{d^2}{dA_0\, dB} \log f_A(B) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d^2}{dA_0\, d\zeta}\log(\alpha_0\zeta - 1)\,\frac{d^2}{dB\, d\zeta}\log(\zeta - \beta)\,\delta\zeta\, d\zeta.$$

(On verra plus loin ce que donne la *différentiation par rapport à* A.) Eu égard à ce que

$$f_A(B) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1} e^{i\theta},$$

on a, en revenant à C,

$$(19) \qquad -\delta \frac{d^2}{dA_0\, dB}\log(\alpha_0\beta - 1) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{d^2}{dA_0\, dz}\log(\alpha_0\zeta - 1)\,\frac{d^2}{dB\, dz}\log(\zeta - \beta)\,\delta z\, dz.$$

Si l'on effectuait le calcul de double différentiation, il viendrait

$$(19') \qquad \delta \frac{\dfrac{d\alpha_0}{dA_0}\dfrac{d\beta}{dB}}{(\alpha_0\beta - 1)^2} = -\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\dfrac{d\alpha_0}{dA_0}\dfrac{d\zeta}{dz}}{(\alpha_0\zeta - 1)^2}\,\frac{\dfrac{d\zeta}{dz}\dfrac{d\beta}{dB}}{(\zeta - \beta)^2}\,\delta z\, dz.$$

La formule (19) ne présente pas le caractère de symétrie de l'équation (17). On peut la transformer pour *la rendre symétrique*.

21. *Sur la courbe* C $|\zeta(z)| = 1$. — Désignant par ζ_0 le nombre conjugué de ζ (ζ_0 est fonction analytique de z_0), on aura, sur C,

$$\zeta_0 = \frac{1}{\zeta} \qquad \text{et} \qquad d\zeta_0 = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Donc

$$\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{(\zeta-\beta)^2} = \frac{-\zeta^2\frac{d\zeta_0}{dz_0}}{(\zeta-\beta)^2}\frac{dz_0}{dz} = -\frac{\frac{d\zeta_0}{dz_0}}{(\beta\zeta_0-1)^2}\frac{dz_0}{dz}.$$

Par conséquent, (19′) devient

$$\partial\frac{\frac{d\alpha_0}{dA_0}\frac{d\beta}{dB}}{(\alpha_0\beta-1)^2} = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{-\frac{d\alpha_0}{dA_0}\frac{d\zeta}{dz}}{(\alpha_0\zeta-1)^2}\,\frac{-\frac{d\zeta_0}{dz_0}\frac{d\beta}{dB}}{(\zeta_0\beta-1)^2}\,\frac{dz}{dz_0}\,\partial z\,dz.$$

Or α désignant l'angle de la demi-tangente positive à C au point z, on a

$$dz = ds\,e^{i\alpha},\qquad dz_0 = ds\,e^{-i\alpha},\qquad \partial z = \gamma\,\partial n\,e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

et

$$\frac{dz_0}{dz}\partial z\,dz = i\,\partial n\,ds;$$

d'où la relation

$$\begin{aligned}&-\partial\frac{d^2}{dA_0\,dB}[\log(\alpha_0\beta-1)]\\ &= \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d^2}{dA_0\,dz}[\log(\alpha_0\zeta-1)]\frac{d^2}{dz_0\,dB}[\log(\zeta_0\beta-1)]\,\partial n\,ds.\end{aligned}$$

Et si l'on pose finalement

$$\begin{aligned}\Phi(A_0, B) &= -\frac{1}{\pi}\frac{d^2\log(\alpha_0\beta-1)}{dA_0\,dB}\\ &= +\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dA_0\,dB}\log f_A(B),\end{aligned}$$

on a

$$\boxed{\partial\Phi(A_0, B) = \int_C \Phi(A_0, M)\,\Phi(M_0, B)\,\partial n\,ds} \tag{20}$$

Par conséquent, *la fonction* $\Phi(A_0, B)$, *qui dépend analytiquement de l'affixe* B *du point* B, *et du conjugué* A_0 *de l'affixe du point* A, *constitue une solution de l'équation* (17) *de M. Hadamard.* Relativement à la fonction $Z_1 = f_\Omega(z)$, Ω étant distinct de A et B, A et B jouent des rôles symétriques. Par conséquent, la fonction

$$\boxed{\Phi(B_0, A) = -\frac{1}{\pi}\frac{d^2 \log(\alpha\beta_0 - 1)}{dB_0\, dA}}$$

$$\alpha = f_\Omega(A), \qquad \beta_0 = f_\Omega^0(B_0)$$

est aussi solution de l'équation (17).

22. Le calcul de $\frac{d^2}{dA_0 dB}\log(\alpha_0\beta - 1)$ est indépendant de toute direction fixée pour A_0 et B, et, comme tel, échappe à la critique faite par M. Hadamard lui-même à la solution $-\frac{1}{2\pi}\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A\, dn_B}$ de (17) pour laquelle il faut choisir une suite *déterminée* de contours C passant au cours de leur variation successivement en A et B. M. Hadamard a donné récemment, dans une Note (1), les deux solutions

$$\Phi(A, B) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} \mp i\frac{\partial}{\partial y'}\right) g(A, B),$$

où x, y sont les coordonnées de A, x', y' celles de B. Ces deux solutions, qui échappent à la critique précédente, sont identiques aux deux solutions du n° 21. Par exemple, on a

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial}{\partial y'}\right) g(A, B) = -\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dA_0\, dB}\log(\alpha_0\beta - 1).$$

En effet, à cause de

$$g(A, B) = -\log|f_A(B)| = -\mathcal{R}[\log f_A(B)],$$

et puisque

$$a = f_A(B) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1}\, e^{i\theta},$$

on aura

$$g(A, B) = \frac{-1}{2}\left[\log\frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1} + \log\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha\beta_0 - 1}\right);$$

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 359.

$g(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ se présente comme la somme de quatre fonctions :

$$
\begin{array}{lll}
\log(\beta-\alpha) & \text{analytique en} & \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B}, \\
\log(\alpha_0\beta-1) & \quad » & \mathrm{A}_0 \text{ et } \mathrm{B}, \\
\log(\alpha\beta_0-1) & \quad » & \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B}_0, \\
\log(\beta_0-\alpha_0) & \quad » & \mathrm{A}_0 \text{ et } \mathrm{B}_0.
\end{array}
$$

Or, x' et y' étant les coordonnées de B, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}+i\frac{\partial}{\partial y'}\right)f(x'+iy')=0$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}-i\frac{\partial}{\partial y'}\right)f(x'+iy')=2f'(x'+iy'),$$

lorsque f est analytique en $\mathrm{B}=x'+iy'$.

C'est l'inverse, si f est analytique en $\mathrm{B}_0=x'-iy'$, on aura

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}+i\frac{\partial}{\partial y'}\right)f(x'-iy')=2f'(x'-iy'),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}-i\frac{\partial}{\partial y'}\right)f(x'-iy')=0.$$

Par conséquent, l'expression

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}-i\frac{\partial}{\partial y'}\right)g(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

sera égale à

$$2\frac{d^2}{d\mathrm{A}_0\,d\mathrm{B}}\log(\alpha_0\beta-1),$$

car dans la double différentiation précédente les termes

$$\log(\beta-\alpha),\quad \log(\beta_0-\alpha_0),\quad \log(\alpha\beta_0-1)$$

donneront zéro.

De même

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}+i\frac{\partial}{\partial y'}\right)g(\mathrm{A}, \mathrm{B})=2\frac{d^2}{d\mathrm{A}\,d\mathrm{B}_0}\log(\alpha\beta_0-1).$$

Les deux solutions

$$-\frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{d^2}{dA_0\,dB}\log(\alpha_0\beta-1),\\[2mm] \dfrac{d^2}{dA\,dB_0}\log(\alpha\beta_0-1)\end{cases}$$

sont donc identiques aux deux solutions

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\mp i\frac{\partial}{\partial y'}\right)g(A,B)$$

fournies par M. Hadamard. Il ressort de la forme $\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dA_0dB}\log(\alpha_0\beta-1)$ et de la forme analogue pour la seconde que ces deux solutions sont des *fonctions analytiques* respectivement des arguments (A_0 et B), (A et B_0).

III. — Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation (17) de M. Hadamard,

23. Reprenant la formule

$$\delta\frac{d}{dB}\log f_A(B)=-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma[\delta\log(\zeta-\alpha)-\delta\log(\alpha_0\zeta-1)]\,d\left[\frac{d}{dB}\log(\zeta-\beta)\right]$$

dont on s'est servi au n° 20, si l'on différentie par rapport à A et non plus par rapport à A_0 on aura

$$\delta\frac{d^2}{dA\,dB}[\log f_A(B)]=-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\delta\frac{d}{dA}\log(\zeta-\alpha)\,d\frac{d}{dB}\log(\zeta-\beta),$$

et, à cause de

$$f_A(B)=\frac{\beta-\alpha}{\alpha_0\beta-1}e^{i\theta},$$

$$\delta\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha)=-\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{d^2}{dA\,dz}\log(\zeta-\alpha)\frac{d^2}{dz\,dB}\log(\zeta-\beta)\,\delta z\,dz,$$

et, si l'on pose

$$(21)\qquad -\frac{1}{\pi i}\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha)=\Phi(A,B)=-\frac{1}{\pi i}\frac{\dfrac{d\alpha}{dA}\dfrac{d\beta}{dB}}{(\alpha-\beta)^2}\quad (^1),$$

(1) La singularité de $\Phi(A, B)$, lorsque A et B tendent l'un vers l'autre, est évidente.

ce qui donne pour $\Phi(A, B)$ *une fonction symétrique et analytique des deux arguments* A *et* B. On obtient la relation

$$(22) \qquad \boxed{\delta\Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M)\,\Phi(M, B)\,\delta z\,dz}$$

Cette relation (22) ne diffère de la relation (17) de M. Hadamard que par la substitution de $\delta z\,dz$ à $\delta n\,ds$:

$$\delta z\,dz = i\,e^{2i\alpha_M}\,\delta n\,ds,$$

α_M étant toujours l'angle avec l'axe réel x de la demi-tangente positive en M au contour C.

Il serait facile d'obtenir une solution, conjuguée de (21), pour une équation conjuguée de (22).

24. Mais on va montrer maintenant comment, à partir de (21), on peut trouver une nouvelle solution de l'équation (17) de M. Hadamard.

Il suffit d'observer que la relation

$$\delta\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha) = -\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{d^2}{dA\,dz}\log(\zeta-\alpha)\frac{d^2}{dB\,dz}\log(\zeta-\beta)\,\delta z\,dz$$

devient en remplaçant $\delta z\,dz$ par $ie^{2i\alpha_M}.\,\delta n\,ds$

$$\delta\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_C\left[e^{i\alpha_M}\frac{d^2}{dA\,dz}\log(\zeta-\alpha)\right]\left[e^{i\alpha_M}\frac{d^2}{dB\,dz}\log(\zeta-\beta)\right]\delta n\,ds.$$

Or, si ds_M est le déplacement tangent à C en M d'affixe z,

$$dz = ds_M\,e^{i\alpha_M},$$

en sorte que

$$\frac{d}{ds_M} = e^{i\alpha_M}\frac{d}{dz},$$

et l'équation précédente devient

$$\delta\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_C \frac{d^2}{dA\,ds_M}\log(\zeta-\alpha)\frac{d^2}{dB\,ds_M}\log(\zeta-\beta)\,\delta n\,ds.$$

Imaginons qu'un contour se déforme à partir de C, vers l'intérieur, de façon à passer au cours de la déformation par les points A et B respectivement. Soit α_A l'angle avec Ox de la demi-tangente positive en A au contour qui passe en A. Soit α_B le même angle pour le contour qui passe en B.

On aura toujours

$$\frac{d}{ds_A} = e^{i\alpha_A}\frac{d}{dA}$$

et une relation analogue pour B, en sorte que la relation précédente devient

$$\delta \frac{d^2}{ds_A\,ds_B}\log(\beta-\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_C \frac{d^2}{ds_A\,ds_M}\log(\zeta-\alpha)\frac{d^2}{ds_B\,ds_M}\log(\zeta-\beta)\,\delta n\,ds,$$

et, par conséquent,

$$\Phi(A, B) = -\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{ds_A\,ds_B}\log(\beta-\alpha) \tag{23}$$

sera une nouvelle solution de l'équation (17).

25. Les considérations du n° 22 prouvent aisément que la solution (21) de l'équation (22) peut s'écrire

$$\Phi(A, B) = -\frac{1}{\pi i}\frac{d^2}{dA\,dB}\log(\beta-\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial}{\partial y'}\right)g(A, B),$$

A coordonnées (x, y), B coordonnées (x', y').

Par conséquent, la nouvelle solution (23) de l'équation de M. Hadamard sera

$$\Phi(A, B) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial}{\partial y'}\right)g(A, B)\right]e^{i(\alpha_A+\alpha_B)}. \tag{24}$$

Elle n'échappe pas à la critique, adressée à la solution

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A\,dn_B},$$

de l'équation (17), d'exiger la connaissance, *a priori*, d'une loi de déformation pour le contour C.

Signalons aussi la solution [conjuguée de (23)]

$$\Phi_0(A, B) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right) g(A, B)\right] e^{-i(\alpha_A+\alpha_B)}$$

pour la même équation (17).

26. Le fait qu'on vient de signaler est d'ailleurs général.

L'équation (22) *se ramène à l'équation* (17) *de M. Hadamard par un changement de la fonction* $\Phi(A, B)$, c'est-à-dire que, à toute solution de (22), on peut associer une solution de (17) [susceptible d'ailleurs des mêmes critiques que $\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A\, dn_B}$] *et réciproquement*. En effet, si

$$\delta\Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M)\Phi(M, B)\,\delta z\, dz$$

à cause de

$$\delta z\, dz = i\, e^{2i\alpha_M}\,\delta n\, ds,$$

on aura

$$\delta\Phi(A, B) = i\int_C \Phi(A, M)\Phi(M, B)\, e^{2i\alpha_M}\,\delta n\, ds.$$

Ceci étant, si α_A désigne l'angle avec Ox de la demi-tangente positive en A au contour de la famille C qui passe en B, et α_B l'angle analogue en B, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\delta[i\Phi(A, B)\, e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_B}] = \int_C [i\Phi(A, M)\, e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_M}][i\Phi(M, B)\, e^{i\alpha_M} e^{i\alpha_B}]\,\delta n\, ds$$

et, sous cette forme, on voit que

$$\Psi(A, B) = i\Phi(A, B)\, e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_B} \tag{25}$$

est une solution de l'équation (17).

La forme (22) n'est cependant pas sans intérêt, surtout lorsqu'on considère des fonctions $\Phi(A, B)$ *analytiques par rapport aux deux variables complexes* A *et* B.