GEORGES VALIRON

Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 219-253
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__219_0>

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE M. BOREL

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR M. G. VALIRON.

Dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (¹), puis dans ses *Leçons* (²), M. Borel a démontré plusieurs propositions générales relatives à la croissance des diverses fonctions qui s'introduisent dans cette théorie. Si l'on considère le maximum $M(r)$ du module de la fonction entière $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$, le maximum $A(r)$ de la partie réelle de la fonction sur le même cercle, le maximum $M'(r)$ du module de la dérivée, et le terme de plus grand module du développement de Taylor de la fonction, $m(r)$; toutes ces fonctions de r ont même ordre de grandeur, en ce sens qu'il existe une suite de valeurs de r, indéfiniment croissantes, pour lesquelles le rapport des logarithmes de deux quelconques de ces fonctions tend vers 1. M. Borel montre même que ce rapport tend vers 1 lorsqu'on exclut sur l'axe des r des intervalles tels que la longueur totale des intervalles exclus entre 0 et r est infiniment petite par rapport à r.

J'ai démontré dans ma Thèse (³) et dans une Note ultérieure (⁴) des propositions plus précises, notamment en ce qui concerne les fonctions d'ordre fini, pour lesquelles le rapport de deux quelconques des fonctions considérées ci-dessus reste compris, à partir d'une

---

(¹) *Acta mathematica*, t. XX, p. 357-396.

(²) *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900.

(³) *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, p. 117).

(⁴) *Sur quelques théorèmes de M. Borel* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1914).

certaine valeur de r, entre deux puissances de r dont les exposants sont liés à l'ordre de la fonction. Dans le cas de l'ordre infini, la méthode employée donne également des résultats assez précis, mais à l'extérieur de certains intervalles d'exclusion ([1]).

Dans deux Mémoires publiés dans les Tomes XXXVII et XLI des *Acta mathematica* ([2]), M. Wiman a obtenu des inégalités beaucoup plus serrées entre les fonctions en question, et a montré que, dans le voisinage de la valeur de z donnant au module sa valeur maximum, l'argument de la fonction se comporte comme celui du terme maximum. Mais la méthode de M. Wiman ne semble pas pouvoir donner facilement la grandeur des intervalles dans lesquels ces inégalités ont lieu; la démonstration nouvelle du théorème de M. Picard donnée par cet auteur est donc encore assez compliquée.

J'ai montré dans deux Notes des *Comptes rendus* ([3]) que je me propose de développer ici, que les inégalités de M. Wiman ont lieu presque partout; la démonstration découle très simplement de la considération du polygone de Newton introduit par M. Hadamard dans son Mémoire de 1893. La propriété de l'argument de la fonction signalée ci-dessus a lieu dans les mêmes conditions et pour toutes les valeurs de z pour lesquelles le module de la fonction est voisin de son maximum. L'impossibilité d'une relation de la forme

$$e^{f_1(z)} + e^{f_2(z)} = 1$$

est alors aussi manifeste lorsque $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions entières que lorsque ce sont des polynomes. La démonstration du théorème de M. Picard ainsi obtenue semble plus simple que celle indiquée par M. Borel à la page 388 de son Mémoire cité dans laquelle intervient la relation entre le minimum et le maximum de la fonction

---

([1]) *Sur la croissance du maximum du module des séries entières* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1916, note de la page 60).

([2]) *Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylor'schen Reihe* (*Acta mathematica*, t. XXXVII); *Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion* (*Acta mathematica*, t. XLI).

([3]) Tome 166, p. 605, et tome 167, p. 988.

sur un même cercle, et qui exige aussi l'introduction des valeurs ordinaires.

Dans la première Partie du présent travail j'ai réuni les diverses propositions utiles à la démonstration du théorème de M. Picard, afin de mettre en évidence la simplicité de cette démonstration.

Les théorèmes généraux relatifs à la comparaison des fonctions $M(r)$, $m(r)$, $A(r)$, $\mathfrak{M}(r)$, plus précis que ceux de M. Borel et qui complètent ceux de M. Wiman, et diverses autres propositions, font l'objet de la seconde Partie.

Je donne dans une troisième Partie les extensions relatives aux fonctions définies par les séries entières, en insistant surtout sur la classe de ces fonctions pour laquelle les propriétés ont encore lieu *en général*, comme pour les fonctions entières. On est ainsi conduit à étendre à une certaine classe de séries entières le théorème de M. Picard, mais les résultats que l'on obtient par cette méthode sont moins généraux que ceux que l'on peut déduire d'une inégalité de M. Schottky. Je n'ai signalé ici ces propriétés que pour montrer le parti que l'on peut en tirer dans le cas des fonctions entières et en particulier celles d'ordre infini, pour lesquelles on arrive ainsi à compléter l'un des résultats nouveaux obtenus récemment par M. Julia [1].

I. — Le théorème de M. Picard.

1. Nous considérons une fonction entière $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ et nous désignons par $M(r)$ le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$, et par $m(r)$ le plus grand des nombres $|c_n| r^n$.

Soit $-g_n$ le logarithme du module de c_n. Si l'on prend deux axes rectangulaires Ox, Oy et que l'on place les points A_n de coordonnées $x_n = n$, $y_n = g_n$, on peut définir au moyen de ces points un polynome de Newton concave vers les y positifs, ayant pour sommets certains points des A_n, tous les autres points A_n étant sur les côtés du polygone ou situés du côté de la concavité. Soit, en effet, A_{n_1} le

(1) *Voir* les Notes de M. Julia (*Comptes rendus*, t. 168).

premier point A_n qui n'est pas rejeté à l'infini, les coefficients angulaires des droites joignant ce point aux points d'indice supérieur à n_1 ont pour limite l'infini, puisque le quotient de g_n par n croît indéfiniment avec n. Ces coefficients angulaires ont donc un minimum μ_1 atteint pour une droite déterminée, soit A_{n_2} le point A_n de plus haut indice situé sur cette droite; les droites joignant ce point aux points d'indice supérieur à n_2 ont un coefficient angulaire supérieur à μ_1, le minimum μ_2 de ces coefficients angulaires est supérieur à μ_1, car il ne peut lui être égal d'après la définition de A_{n_2}. A μ_2 correspond un sommet A_{n_3} et ainsi de suite indéfiniment. Les nombres μ_n croissent indéfiniment avec n.

Nous désignerons par la notation $\pi(f)$ le polygone de Newton ainsi formé avec les points A_n.

Pour une valeur déterminée r, le terme maximum de $f(z)$ dont le module est égal à $m(r)$, correspond à la valeur de n pour laquelle la quantité

$$g_n - n \log r$$

est minimum. Si $n = n(r)$ est une telle valeur de n, on aura pour tout nombre i la relation

$$g_{n+i} - g_n \geqq i \log r,$$

ce qui exprime que les points A_{n+i} sont du côté des y positifs par rapport à la droite de coefficient angulaire $\log r$ menée par le point A_n, ou bien sont sur cette droite. La valeur $n(r)$ est donc l'abscisse du sommet de $\pi(f)$ qui est tel que la droite de coefficient angulaire $\log r$ menée par ce point ne traverse pas le polygone. $n(r)$ est en général unique, il admet plusieurs déterminations lorsque $\log r$ est égal à la pente μ_n d'un des côtés de $\pi(f)$; dans ce cas nous conviendrons de désigner par $n(r)$ la plus grande abscisse des deux sommets de $\pi(f)$ situés sur ce côté. Nous dirons, dans tous les cas, que la droite de pente $\log r$ menée par le sommet $A_{n(r)}$ est tangente au polygone $\pi(f)$.

La connaissance de $\pi(f)$ entraîne donc celle du rang $n(r)$ du terme maximum, et aussi de $m(r)$ dont le logarithme est égal à

$$n(r) \log r - g_{n(r)}.$$

Inversement, si $m(r)$ est complètement connu, $\pi(f)$ le sera également.

Il résulte de là que si deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ admettent des polygones $\pi(f_1)$ et $\pi(f_2)$ identiques, elles ont pour toute valeur de r même terme maximum. En particulier, on voit que si l'on désigne par G_n l'ordonnée du point d'abscisse n de $\pi(f)$, la série à termes positifs

$$F(r) = \sum_0^\infty e^{-G_n} r^n,$$

qui majore $f(z)$, a pour chaque r un terme maximum égal à celui de $f(z)$ et de même rang.

Si deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ admettent des polygones $\pi(f_1)$, $\pi(f_2)$ ayant un sommet commun, et si ces polygones ne se traversent pas, il existe une valeur au moins de r pour laquelle le rang et la valeur du terme maximum sont les mêmes pour les deux fonctions.

2. Désignons par $\mathcal{F}(u)$ une série entière de la variable réelle u, à coefficients positifs croissants, non bornés, dont le rayon de convergence est l'unité

$$\mathcal{F}(u) = \sum_0 e^{\mathcal{H}(n)} u^n. \tag{1}$$

Les nombres $\mathcal{H}(n)$ croissent indéfiniment et leur quotient par n tend vers zéro. Nous supposerons de plus que la fonction $\mathcal{H}(x)$ admet une dérivée décroissante, qui évidemment tend vers zéro. Les points B_n de coordonnées $x_n = n$, $y_n = -\mathcal{H}(n)$ sont alors les sommets d'un polygone concave vers le haut que j'appellerai encore $\pi(\mathcal{F})$; et pour chaque valeur de u inférieure à 1 la fonction $\mathcal{F}(u)$ possède un terme maximum qui s'obtient en menant à $\pi(\mathcal{F})$ la tangente dont la pente est $\log u$.

Soient l un nombre positif quelconque, et r un nombre inférieur à l. A la série $\mathcal{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ considérée comme fonction de r nous pouvons faire correspondre un polygone $\pi\left[\mathcal{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ qui s'obtient à partir de $\pi(\mathcal{F})$ en ajoutant à l'ordonnée de chaque sommet B_n la quantité $n \log l$. Autrement dit, $\pi\left[\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ s'obtient en construisant $\pi(\mathfrak{F})$ à partir de Oy et de l'axe oblique OX_l, OX_l ayant pour équation $y = x \log l$.

La pente des côtés de $\pi\left[\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ croît et tend vers $\log l$, ce polygone reste donc à partir d'une certaine valeur $N(l)$ de n au-dessous du polygone $\pi(f)$ dont la pente des côtés croît indéfiniment. Il en résulte qu'on pourra, en effectuant une translation de $\pi\left[\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ parallèlement à Oy, faire en sorte que le nouveau polygone obtenu ait avec $\pi(f)$ un ou plusieurs sommets communs, tous les autres sommets de ce polygone étant au-dessous de $\pi(f)$. En effet, si l'on effectue sur $\pi\left[\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ les $N(l)$ translations amenant chaque sommet B_n^l de rang inférieur à $N(l)$ en coïncidence avec le point de même abscisse de $\pi(f)$, il existera parmi les polygones obtenus un polygone au moins situé au-dessous de tous les autres. Si $-\log k(l)$ désigne la translation correspondante, le polygone ainsi obtenu est relatif à la fonction $k(l)\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$, nous l'appellerons $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$.

Soit $n(l, \mathfrak{F})$ la plus grande abscisse des sommets communs à $\pi(f)$ et $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$. Toute tangente à $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ en un sommet commun est aussi tangente à $\pi(f)$, en particulier la droite dont le coefficient angulaire $\log r(l)$ est donné par l'égalité

$$\log r(l) = \log l - \mathcal{H}'[n(l, \mathfrak{F})], \tag{2}$$

qui est tangente à $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ au point d'abscisse $n(l, \mathfrak{F})$, est aussi tangente à $\pi(f)$. Pour cette valeur $r(l)$ de r les fonctions $F(r)$ et $k(l)\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ ont donc des termes maxima égaux et de même rang, et de plus, puisque tous les sommets de $\pi(f)$ sont au-dessus (au sens large) de ceux de $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$, les coefficients de $F(r)$ sont inférieurs ou égaux à ceux de $k(l)\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$, $f(z)$ est majoré par cette fonction.

Faisons croître l de façon continue. La fonction $n(l, \mathfrak{F})$ ne peut décroître, car la pente d'un côté de rang fixe de $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ croît indéfiniment avec l, pour cette même raison $n(l, \mathfrak{F})$ ne peut rester finie lorsque l croît indéfiniment. $\mathcal{H}'[n(l, \mathfrak{F})]$ est donc une fonction discontinue décroissante de l, tendant vers zéro lorsque l croît indéfiniment. D'après l'égalité (2), $r(l)$ est donc croissante et croît indéfiniment avec l. Les discontinuités de $\log r(l)$ sont celles de $\mathcal{H}'$, elles se produisent pour les valeurs de l rendant $n(l, \mathfrak{F})$ discontinue, et correspondent par suite aux valeurs de l pour lesquelles les polygones $\pi(f)$ et $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ ont plusieurs sommets communs. Le nombre de ces discontinuités entre o et $r(l)$ est donc inférieur à $n(l, \mathfrak{F})$, et leur somme est inférieure à la variation totale de $-\mathcal{H}'(x)$ qui est finie.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

I. *Étant données une fonction entière quelconque $f(z)$ et une série entière $\mathfrak{F}(u)$ de la forme* (1), *on peut faire correspondre, en général, à une valeur r, deux nombres k et l tels que, pour cette valeur de r, les deux fonctions $f(z)$ et $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ aient leurs termes maxima égaux et de même rang, et que la première de ces fonctions soit majorée par la seconde. Les valeurs de r comprises entre* o *et* R *pour lesquelles la propriété n'a pas lieu peuvent être enfermées dans des intervalles dont le nombre est au plus égal à $n(\mathrm{R})$ et dans lesquelles la variation totale de $\log r$ est, quel que soit* R, *inférieure à un nombre fixe* (¹).

Pour abréger, nous dirons dans ce qui suit que les valeurs pour lesquelles la propriété a lieu sont *ordinaires*, les autres valeurs seront dites *exceptionnelles*, on sous-entendra que ces valeurs sont ordinaires ou exceptionnelles relativement à une fonction de comparaison déterminée $\mathfrak{F}(u)$. Pour que r soit valeur ordinaire, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, qu'il existe deux nombres k et l tels que $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ ait un sommet commun avec $\pi(f)$, soit au-dessous de

(¹) Dans mes travaux précédents, je disais dans les cas analogues que les points exceptionnels pouvaient être enfermés dans un *ensemble dénombrable d'intervalles;* cette expression abrégée a le défaut de manquer de précision.

lui, et que la droite de pente $\log r$ menée par ce sommet commun soit tangente au premier de ces polygones.

3. Nous prendrons pour fonction de comparaison

$$\mathcal{F}(u) = \sum e^{n^\alpha} u^n \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3}$$

et démontrerons le corollaire suivant du théorème I.

Corollaire I. — *q étant un nombre positif et r une valeur ordinaire supérieure à un nombre R_0, on a l'inégalité*

$$\sum_{p=-n}^{p=\infty} |p|^q |c_{n+p}| r^{n+p} < A_q m(r) n^{(q+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{4}$$

dans laquelle n est le rang $n(r)$ du terme maximum $m(r)$, et A_q un nombre fixe.

D'après la proposition I, le premier membre de l'égalité (4) est majoré par l'expression

$$k\sum_{p=-n}^{\infty} |p|^q e^{(n+p)^\alpha}\left(\frac{r}{l}\right)^{n+p} = m(r) \sum_{p=-n}^{\infty} |p|^q e^{(n+p)^\alpha - n^\alpha}\left(\frac{r}{l}\right)^p.$$

Dans la série qui figure au second membre de cette égalité, les coefficients de $|p|^q$ sont tous inférieurs ou égaux à *un*, et n est l'un des entiers encadrant la racine de l'équation en x,

$$\alpha x^{\alpha-1} = \log\left(\frac{r}{l}\right),$$

équation obtenue en cherchant le rang du terme maximum dans la série (3), puis en remplaçant u par $\frac{r}{l}$. Nous allons montrer que le rapport de la somme de cette série à la somme de ceux de ses termes dont le rang est compris entre $\pm n_1$ est inférieur à un nombre fixe, n_1 étant le plus grand nombre pair inférieur à $B_q n^{1-\frac{\alpha}{2}}$ et B_q étant convenablement choisi.

i étant un nombre positif, considérons le rapport ρ_i des termes de rangs $\frac{n_1}{2}+i$ et n_1+i, le logarithme de ce rapport est

$$\log\rho_i = q\log\frac{2n_1+2i}{n_1+2i}+(n+n_1+i)^\alpha-\left(n+\frac{n_1}{2}+i\right)^\alpha+\frac{1}{2}n_1\log\left(\frac{r}{l}\right).$$

En remplaçant dans cette expression $\log\left(\frac{r}{l}\right)$ par sa limite supérieure $-\alpha(n+1)^{\alpha-1}$, le coefficient de q par son maximum $\log 2$ et la différence des second et troisième termes par l'application de la formule des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned}\log\rho_i &< q\log 2+\frac{\alpha}{2}n_1\left[\left(n+\frac{1+\theta}{2}n_1\right)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}\right]\\ &< q\log 2+\frac{\alpha}{2}n_1\left[\left(n+\frac{n_1}{2}\right)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}\right],\end{aligned}$$

d'où enfin

$$\begin{aligned}\log\rho_i &< q\log 2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}(n_1-2)^2\left(n+\frac{n_1}{2}\right)^{\alpha-2}\\ &< q\log 2-\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}B_q^2(1-\varepsilon_n) \quad (^1).\end{aligned}$$

Si l'on suppose que $\alpha(1-\alpha)B_q^2$ est supérieur à $4q\log 2+5$, on voit que, sous la seule condition que n soit suffisamment grand, c'est-à-dire pour r supérieur à un nombre fixe R_0, $\log\rho_i$ sera inférieur à -1. Si l'on appelle S_m^n la somme des termes de la série considérée dont le rang est compris entre $m+1$ et n, on aura donc

$$S_0^\infty - S_0^{n_1} = S_{n_1}^\infty < \frac{1}{e}S_{\frac{n_1}{2}}^\infty < \frac{1}{e}S_0^\infty,$$

et par suite

$$S_0^\infty < \frac{e}{e-1}S_0^{n_1} < \frac{e}{e-1}(n_1)^{q+1} \leqq \frac{e}{e-1}B_q^{q+1}\,n^{(q+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

---

(1) Nous désignerons par ε, ou ε_n, ou $\varepsilon(x)$, toute fonction positive de n ou x tendant vers zéro lorsque n ou x croissent indéfiniment, et par η toute fonction réelle ou complexe dont le module tend vers zéro.

On obtiendra une inégalité analogue pour la somme S^0_{-n-1}, le corollaire est donc démontré.

4. Nous supposerons maintenant que le nombre α est voisin de 1 et nous poserons $\alpha = 1 - \frac{4}{3}\beta$, β sera un nombre voisin de zéro, il suffira, d'ailleurs, que β soit inférieur à $\frac{1}{16}$ pour que toutes nos conclusions soient exactes. En utilisant le corollaire précédent et en employant une égalité de M. Wiman, nous obtiendrons la proposition suivante :

II. *La valeur r étant ordinaire et supérieure à un nombre fixe R_0, et le nombre z_0 de module r rendant le module $|f(z_0)|$ de $f(z)$ supérieur à $M(r)n^{-\frac{1}{8}}$, on a l'égalité*

$$f\left(z_0 e^{i\lambda\frac{\pi}{n}}\right) = e^{i\lambda\pi} f(z_0)(1+\eta), \qquad |\eta| < Cn^{-\beta}. \tag{5}$$

Cette égalité, dans laquelle n désigne toujours le rang $n(r)$ du terme maximum, est valable pour tous les λ dont la valeur absolue est moindre que $n^{\frac{1}{8}-2\beta}$.

Quels que soient λ et z_0, on peut écrire avec M. Wiman,

$$f\left(z_0 e^{i\lambda\frac{\pi}{n}}\right) = e^{i\lambda\pi}\left[f(z_0) + \lambda g(z_0) + \sum_{p=-n}^{\infty} c_{n+p}\, z_0^{n+p}\left(e^{i\lambda\frac{\pi p}{n}} - 1 - i\lambda\pi\frac{p}{n}\right)\right] \tag{6}$$

avec

$$g(z_0) = i\pi\left[\frac{z_0}{n} f'(z_0) - f(z_0)\right].$$

Le module de la quantité

$$e^{i\lambda\pi\frac{p}{n}} - 1 - i\lambda\pi\frac{p}{n},$$

qui est équivalente à $\frac{1}{2}\lambda^2\pi^2\frac{p^2}{n^2}$ pour les petites valeurs de p, est, comme on le constate aisément, inférieur à $\lambda^2\pi^2\frac{p^2}{n^2}$ quel que soit le nombre p;

par suite, en utilisant le corollaire I avec la valeur $q = 2$, et en remplaçant α par $1 - \frac{4}{3}\beta$, on a

$$(7)\qquad \left| \sum_{p=-n}^{\infty} c_{n+p}\, z_0^{n+p} \left(e^{i\lambda\pi\frac{p}{n}} - 1 - i\lambda\pi\frac{p}{n} \right) \right| < \frac{\lambda^2\pi^2}{n^2} \sum |c_{n+p}|\, p^2 r^{n+p} < A\, m(r)\, \lambda^2 n^{2\beta - \frac{1}{2}},$$

A étant un nombre fixe. Donnons alors à λ la valeur $n^{\frac{1}{4}-\beta}$, le module du troisième terme du crochet dans l'égalité (6) sera moindre que $AM(r)$, $f(z_0)$ et le premier membre de cette égalité ont aussi leur module inférieur ou égal à $M(r)$, le module de $g(z_0)$ est donc inférieur à $(A + 2)M(r)\, n^{\beta - \frac{1}{4}}$.

En utilisant la limite du module de $g(z_0)$ ainsi obtenue et l'inégalité (7), on voit bien qu'il suffira que $f(z_0)$ soit supérieur à $M(r)\, n^{\frac{1}{4}-\beta}$ pour que ce terme l'emporte sur les deux autres termes du crochet de l'égalité (6), tout au moins pour les valeurs suffisamment petites de $\frac{\lambda}{n}$. En particulier, en égalant la limite inférieure du rapport de $|f(z_0)|$ à $M(r)$ à l'intervalle dans lequel on peut faire varier λ, on obtient l'énoncé du théorème II.

L'égalité (5) a lieu, notamment, lorsque z_0 est la valeur de z (ou l'une des valeurs), de module r, pour laquelle le module $f(z_0)$ est égal au maximum $M(r)$; désignons alors par φ_0 celui des arguments de $f(z_0)$ qui est compris entre 0 et 2π, nous aurons, d'après l'égalité (5),

$$(8)\qquad f(z) = f(z_0 e^{i\theta}) = M(r)\, e^{i(\varphi_0 + n\theta)}(1 + \eta), \qquad |\eta| < C n^{-\beta},$$

et l'on peut, dans cette égalité, donner à $n\theta$ toute valeur comprise entre $\pm n^{\frac{1}{8}-2\beta}$. Lorsque θ varie d'une façon continue, l'argument de $f(z)$ varie aussi continûment, donc passe par les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Il existe donc sur tout cercle $|z| = r$ correspondant à une valeur ordinaire, dans le voisinage de la valeur z_0 pour laquelle le module de la fonction atteint son maximum, des points z pour lesquels $f(z)$ est réel et positif, réel et négatif, imaginaire pur avec un coefficient de i positif, et avec un coefficient de i négatif, le module étant égal à $M(r)(1-\varepsilon)$.

Si l'on désigne par $A(r)$ le maximum de la partie réelle de $f(z)$, sur le cercle $|z|=r$, on aura la proposition suivante, conséquence immédiate du théorème II :

III. *Le rapport de* $A(r)$ *à* $M(r)$ *tend vers* 1 *lorsque* r *croît indéfiniment à l'intérieur des intervalles ordinaires.*

5. La démonstration du théorème de M. Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières résulte bien simplement des théorèmes II et III. Considérons d'abord la proposition suivante :

$f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant deux fonctions entières, on ne peut avoir l'égalité

$$e^{f_1(z)} = e^{f_2(z)} + 1. \tag{9}$$

Nous ne devons pas exclure *a priori* le cas où l'une des fonctions (ou même les deux) serait un polynome, nous remarquerons seulement que les polynomes vérifient aussi le théorème III, sans restriction d'intervalles.

Dans un intervalle $0, R$ les valeurs exceptionnelles pour l'une ou l'autre des deux fonctions sont intérieures à un nombre fini d'intervalles dont la longueur totale est infiniment petite par rapport à R, il existe donc entre R et $hR(h>1)$ des valeurs ordinaires à la fois pour les deux fonctions, soit r une telle valeur.

Soit z_0 une valeur de z pour laquelle la partie réelle de $f_2(z)$ atteint son maximum $A_2(r)$, on aura

$$M_1(r) > \mathcal{R}[f_1(z_0)] > A_2(r)(1-\varepsilon) > (1-\varepsilon)M_2(r),$$

ε étant très petit pourvu que r soit assez grand. On obtiendra de même une inégalité de sens contraire en partant de $f_1(z)$. Le rapport de $M_1(r)$ à $M_2(r)$ est donc très voisin de *un*, ce qui montre que si l'une des fonctions était un polynome, l'autre serait un polynome de même degré, les termes de plus haut degré ayant des coefficients de même module, ce cas se traiterait séparément d'une façon analogue à celle que nous allons employer pour les fonctions entières proprement dites. $f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant des fonctions entières, nous supposerons que r est assez grand pour que les rangs n_1 et n_2 des termes maxima soient aussi très grands.

z_0 désignant toujours une valeur de z pour laquelle la partie réelle de $f_2(z)$ atteint son maximum, les rapports de $|f_1(z_0)|$ et de $|f_2(z_0)|$ à $M_1(r)$ et à $M_2(r)$ sont voisins de *un*, l'égalité (5) s'applique donc aux deux fonctions à partir de cette valeur, et l'on a

$$f_1(z) = f_1(z_0 e^{i\theta}) = M_1(r)(1+\eta_1)e^{i(\varphi_1+\theta n_1)},$$
$$f_2(z) = f_2(z_0 e^{i\theta}) = M_1(r)(1+\eta_2)e^{i(\varphi_2+\theta n_2)}.$$

Dans ces égalités, θn_1 et θn_2 peuvent varier dans un intervalle

$$-2\pi D, \qquad +2\pi D,$$

D étant très grand; η_1 et η_2 ont des modules très petits; φ_1 et φ_2 sont compris entre o et 2π.

Faisons croître θ à partir de la valeur $-\frac{5}{2}\frac{\pi}{n_2}$, nous obtiendrons deux valeurs θ_2, θ'_2 pour lesquelles l'argument de $f_2(z)$ prendra les valeurs $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et $+\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, et nous aurons

$$\varphi_2 + \theta_2 n_2 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon + \eta'_2,$$

$$\varphi_2 + \theta'_2 n_2 = +\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \eta''_2.$$

D'après l'égalité (9), $\varphi_1 + \theta n_1$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $+\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lorsque θ croît de θ_2 à θ'_2, nous avons donc

$$\varphi_1 + \theta_2 n_1 > -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \eta'''_2,$$

$$\varphi_1 + \theta'_2 n_1 < +\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \eta^{\text{IV}}_2.$$

En partant de $f_1(z)$, nous obtenons de même les égalités et inégalités

$$\varphi_1 + \theta_1 n_1 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon + \eta'_1, \qquad \varphi_2 + \theta_1 n_2 > -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi + \eta'''_1,$$

$$\varphi_1 + \theta'_1 n_1 = +\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \eta''_1, \qquad \varphi_2 + \theta'_1 n_2 < +\frac{\pi}{2} + 2k'\pi + \eta^{\text{IV}}_1.$$

La comparaison de ces égalités et inégalités montre que le rapport de n_1 à n_2 est voisin de *un*, que k et k' sont nuls et que $\varphi_1 - \varphi_2$ est très petit ainsi que $\theta_1 n_1 - \theta_2 n_2$ et $\theta'_1 n_1 - \theta'_2 n_2$.

Donnons alors à θ la valeur $\theta'_2 + \frac{\pi}{2n_2}$, les parties réelles de $f_1(z)$ et $f_2(z)$ seront toutes deux très grandes et négatives, ce qui est incompatible avec l'égalité (9). La proposition en vue est donc démontrée.

6. La démonstration du théorème général de M. Picard ne présente pas de difficultés supplémentaires. Si l'on considère une fonction $\varphi(z)$ holomorphe à l'extérieur d'un cercle de rayon R et admettant le point à l'infini pour point essentiel, et si l'on suppose que cette fonction ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur zéro, elle est de la forme

$$\varphi(z) = z^k \mathrm{P}(z) e^{\psi(z)},$$

k étant un entier négatif, $\mathrm{P}(z)$ un polynome et $\psi(z)$ une fonction développable en série de Laurent à l'extérieur du cercle de rayon R. $\psi(z)$ est la somme d'une fonction entière $f(z)$ et d'une série $\psi_1\left(\frac{1}{z}\right)$ convergente lorsque le module de z est supérieur à R. On obtient ainsi finalement, dans le cas où zéro est valeur exceptionnelle,

$$\varphi(z) = z^k \mathrm{P}(z) \mathrm{Q}\left(\frac{1}{z}\right) e^{f(z)}$$

et $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{z}\right)$ tend vers une limite lorsque z croît indéfiniment. Si donc nous supposons que les valeurs 0 et 1 sont exceptionnelles, nous aurons l'égalité

$$z^{k_1} \mathrm{P}_1(z) \mathrm{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right) e^{f_1(z)} = z^{k_2} \mathrm{P}_2(z) \mathrm{Q}_2\left(\frac{1}{z}\right) e^{f_2(z)} + 1,$$

et il est clair que le raisonnement du n° 5 s'applique presque sans modification pour montrer qu'une telle égalité est impossible.

On déduit de là le théorème général de M. Picard :

Si la fonction $f(z)$ admet le point z_0 pour point essentiel isolé, elle prend toute valeur une infinité de fois dans le voisinage de ce point, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles.

II. — Les théorèmes de M. Borel.

7. Le théorème III du n° 4 montre la relation étroite qui existe entre $A(r)$ et $M(r)$; le théorème II contient d'ailleurs beaucoup plus de choses. Aux remarques déjà faites à ce sujet, il faut ajouter que la relation (5) a encore lieu autour des maxima des diverses fonctions considérées : partie réelle et partie réelle changée de signe, coefficient de i et coefficient de i changé de signe, en supposant toujours que r est valeur ordinaire. Il faut d'ailleurs remarquer que ces maxima peuvent être atteints pour des valeurs de z qui n'appartiennent pas au voisinage de la valeur pour laquelle le module de $f(z)$ est égal à $M(r)$. Par exemple, le minimum de la partie réelle de la fonction $e^{z^2}+z$ est atteint lorsque l'argument de z est voisin de π, alors que le module est maximum pour l'argument nul.

Il reste à examiner la question suivante : savoir si la restriction faite au sujet des intervalles exceptionnels, qui est imposée par le mode de démonstration, est bien légitime, et notamment savoir s'il existe des fonctions pour lesquelles le rapport de $A(r)$ à $M(r)$ ne tend pas vers *un* lorsque r croît indéfiniment sans aucune restriction. La réponse est affirmative. Considérons la fonction

$$f(z)=\sum_{p=0}^{p=\infty}(2^{-p}z)^{2^p}e^{i\alpha_p} \qquad (\alpha_p=\alpha+2\alpha_{p-1}).$$

Les sommets du polygone $\pi(f)$ relatif à cette fonction ont pour abscisses les nombres 2^p. Prenons pour $\log r$ la pente du côté qui joint les points d'abscisses 2^p et 2^{p+1}; on constate sans peine que la somme des termes de la série $f(z)$ autres que ceux de rangs 2^p et 2^{p+1}

est infiniment petite $\left(\text{avec } \frac{1}{p}\right)$ par rapport à l'un de ces deux termes. On peut d'ailleurs éviter cette vérification en remarquant qu'on pourrait constituer $f(z)$ en prenant seulement des groupes de deux termes consécutifs aussi espacés que l'on voudra, et il est clair que dans ces conditions, la circonstance signalée ci-dessus sera réalisée. On a ainsi, pour la valeur considérée de r,

$$f(z) = (2^{-p}r)^{2p} \{ \cos\chi + \cos(2\chi + \alpha) + i[\sin\chi + \sin(2\chi + \alpha)] \} + \eta(2^{-p}r)^{2p},$$
$$\chi = 2^p\theta + \alpha_p,$$

θ étant l'argument de z. Le maximum du module du crochet est égal à 2, tandis que si l'on suppose que α n'est pas multiple de $\frac{\pi}{2}$, les maxima et minima de la partie réelle et du coefficient de i sont compris entre -2 et 2.

Il existe donc, effectivement, des fonctions pour lesquelles le théorème III ne peut avoir lieu sans restrictions; la seule amélioration possible de l'énoncé pourra être de resserrer les dimensions des intervalles renfermant les valeurs exceptionnelles.

8. La relation entre le maximum $M(r)$ de $f(z)$ et le maximum $M'(r)$ de la dérivée $f'(z)$ s'obtient en utilisant la fonction $g(z)$ introduite dans l'égalité (6). On a vu que cette fonction, définie par l'égalité

$$(10) \qquad g(z) = i\pi\left[\frac{z}{n}f'(z) - f(z)\right], \qquad n = n(r),$$

a un module inférieur à $(A+2)M(r)n^{\beta-\frac{1}{4}}$ sous la seule condition que r soit valeur ordinaire. Il résulte de là que, pour les valeurs de z qui rendent le module de $f(z)$ supérieur à $M(r)n^{\beta'-\frac{1}{4}}$ $(\beta' > \beta)$, on a l'égalité

$$(11) \qquad f'(z) = (1+\eta)\frac{n(r)}{z}f(z).$$

Cette égalité a lieu en particulier pour le z donnant au module de $f(z)$ sa valeur maxima, on a donc

$$M'(r) > (1-\varepsilon)\frac{n(r)}{r}M(r).$$

Cette dernière relation montre que le premier membre de l'égalité (10) est encore infiniment petit par rapport au second lorsque z est la valeur pour laquelle le module de $f'(z)$ atteint son maximum, l'égalité (11) a donc encore lieu dans le voisinage de cette valeur, et le rapport de $M'(r)$ à $M(r)$ est égal à $(1+\eta)\frac{n}{r}$, η tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

L'égalité (11) a lieu en même temps que l'égalité (5), et ces deux égalités sont réalisées dans le voisinage des maxima des diverses fonctions considérées jusqu'ici : $|f(z)|$, $|f'(z)|$, partie réelle, etc.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

IV. *Le rapport du maximum $M'(r)$ du module de la dérivée au maximum $M(r)$ de la fonction est asymptotiquement égal au quotient du rang $n(r)$ du terme maximum par r, lorsque r croît indéfiniment à l'intérieur des intervalles ordinaires. Dans ces intervalles, on a l'égalité* (11) *en tout point z pour lequel le module de $f(z)$ ou de $\frac{z}{n}f'(z)$ est supérieur à $M(r)\,n^{\beta'-\frac{1}{4}}$.*

Il est évident ici que la propriété ne peut avoir lieu pour tous les r, quelle que soit la fonction considérée, puisque $M(r)$ et $M'(r)$ sont continues et que $n(r)$ peut avoir des discontinuités arbitraires.

9. Pour étendre cette propriété aux dérivées successives, il sera nécessaire d'introduire dans la démonstration le rang du terme maximum dans ces dérivées.

Nous nous appuierons sur la proposition suivante :

V. *Le rapport de $n(r)$ au rang $n'(r)$ du terme maximum de $f'(z)$ tend vers* 1 *lorsque r croît indéfiniment à l'intérieur des intervalles qui sont ordinaires à la fois pour $f(z)$ et $f'(z)$, la fonction de comparaison relative à $f'(z)$ étant la dérivée de celle relative à $f(z)$.*

D'après les propriétés des coefficients de la fonction $\mathfrak{F}(u)$, la fonction $\mathfrak{F}'(u)$ est encore une fonction de même nature, le polygone $\pi(\mathfrak{F}')$ admet pour sommets tous les points d'abscisse entière. Pour une même valeur u, le rapport des rangs n et n' des termes maxima dans $\mathfrak{F}(u)$

et $\mathfrak{F}'(u)$ tend vers 1. En effet, ces rangs diffèrent de moins d'une unité des racines des équations en x et x^1 :

$$\alpha x^{\alpha-1} + \log u = 0, \qquad \alpha x_1^{\alpha-1} + \frac{1}{x_1} + \log u = 0,$$

ce qui donne

$$x = x_1 \left[1 + \frac{1}{\alpha x_1^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

On voit que n^1 est supérieur à n et lui est asymptotiquement égal.

Soit r une valeur ordinaire pour f et f'. Il existe deux nombres $k(r)$ et $l(r)$ tels que le polygone $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ a le sommet de rang $n(r)$ en commun avec $\pi(f)$, est au-dessous de ce polygone, et que la droite de pente $\log r$ menée par le sommet commun est tangente commune aux deux polygones. Il existe de même deux nombres $k'(r)$ et $l'(r)$ jouant le même rôle relativement aux polygones correspondant à $f'(z)$ et $\mathfrak{F}'(u)$, le rang du sommet commun étant ici $n^1(r)$.

Le polygone $\pi\left[k\mathfrak{F}'\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ construit à partir de $\mathfrak{F}'(u)$ avec les nombres $k(r)$ et $l(r)$ a évidemment en commun avec $\pi(f')$ le sommet de rang $n(r) - 1$ et est au-dessous de ce polygone, mais les tangentes communes en ce point ont, d'après ce qui précède, une pente inférieure à $\log r$. Il résulte de là que $n^1(r)$ est supérieur à $n(r)$, et que $l'(r)$ est supérieur à $l(r)$; ainsi $n(r)$ étant le rang du terme maximum dans $\mathfrak{F}(u)$, $n^1(r)$ l'est dans $\mathfrak{F}'(u')$, avec $u' < u$, on a donc aussi

$$n^1(r) < n(r)(1+\varepsilon).$$

Le théorème est donc démontré. Il est clair que ce résultat une fois acquis, il n'est plus nécessaire de parler des fonctions de comparaison, on est certain que, des intervalles dans lesquels $\log r$ a une variation totale finie étant exclus, le rapport de $n(r)$ à $n^1(r)$ tend vers *un*. Il existe d'ailleurs effectivement des fonctions pour lesquelles le quotient $\frac{n_1}{n}$ n'a pas pour limite *un* lorsque r croît indéfiniment sans restrictions, c'est le cas dans le deuxième exemple du n° 7, où ce quotient prend une infinité de fois des valeurs voisines de 2.

Les théorèmes IV et V donnent alors la proposition générale suivante :

VI. *Lorsque r est extérieur à des intervalles analogues aux intervalles ordinaires, les rangs des termes maxima dans $f(z)$ et ses premières dérivées sont asymptotiquement égaux, le produit du maximum $\mathrm{M}^q(r)$ du module de $f^q(z)$ par l'expression $\left(\frac{r}{n}\right)^q$ est asymptotiquement égal à $\mathrm{M}(r)$ et dans le voisinage des valeurs de z pour lesquelles l'une des fonctions $\left|\left(\frac{z}{n}\right)^q f^q(z)\right|$ est supérieure à $\mathrm{M}(r)\,n^{\beta'-\frac{1}{4}}$, on a l'égalité*

$$f^q(z) = [1 + \eta(z)]\left[\frac{n(r)}{z}\right]^q f(z). \tag{12}$$

10. Dans la démonstration du corollaire du n° 3, on s'est, en réalité, appuyé sur la propriété de la fonction $\mathrm{M}(r)$ d'être déterminée par un certain groupe de termes entourant le terme maximum. On peut énoncer, à ce sujet, la proposition générale suivante :

VII. *Dans tout intervalle ordinaire défini au moyen de la fonction* (3), *$\mathrm{M}(r)$ est déterminé asymptotiquement par un groupe de $n^{1-\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}$ termes entourant le terme maximum, ε étant un nombre positif quelconque.*

Dans tout intervalle ordinaire, $m(r)$ est égal au terme maximum de $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$, $\mathrm{M}(r)$ est supérieur à $m(r)$ et $\mathrm{F}(r)$ est majoré par $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$; il suffit donc de démontrer que dans la série $\mathfrak{F}(u)$ la somme des termes dont le rang est inférieur à $n - \mathrm{N}$ ou supérieur à $n + \mathrm{N}\left(\mathrm{N} = n^{1-\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}\right)$ est infiniment petite par rapport au terme maximum $m(u)$.

En remplaçant dans le calcul du n° 3 le nombre n_1 par N, on trouve

$$\rho_i < h, \qquad \log h = -\mathrm{A}n^{\varepsilon} = -\mathrm{A}_1\mathrm{N}^{\varepsilon_1}.$$

En désignant par S_i^j la somme des termes dont le rang est compris entre $i+1$ et j, on aura donc

$$\mathrm{S}_{n+\mathrm{N}}^{\infty} < h\,\mathrm{S}_{+\frac{1}{2}\mathrm{N}}^{\infty}, \qquad \mathrm{S}_{0}^{n-\mathrm{N}} < h\,\mathrm{S}_{0}^{n-\frac{1}{2}\mathrm{N}};$$

d'où

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^{\infty} - \mathop{\mathrm{S}}_{n-\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} = \mathop{\mathrm{S}}_0^{n-\mathrm{N}} + \mathop{\mathrm{S}}_{n+\mathrm{N}}^{\infty} < h \mathop{\mathrm{S}}_0^{\infty};$$

$m(u)$ étant le terme maximum, on obtient, en tenant compte de ce résultat,

$$2\mathrm{N}\, m(u) > \mathop{\mathrm{S}}_{n-\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} > (1-h) \mathop{\mathrm{S}}_0^{\infty},$$

d'où enfin

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^{n-\mathrm{N}} + \mathop{\mathrm{S}}_{n+\mathrm{N}}^{\infty} < m(u)\frac{2\mathrm{N}h}{1-h}.$$

En se reportant à la valeur de h, on voit que le coefficient de $m(u)$ dans le second membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, ce qui démontre le théorème VII.

Ce théorème ne peut être vrai sans restrictions, car on peut construire des fonctions pour lesquelles, pour une infinité de valeurs de r, le nombre des termes égaux au terme maximum soit une fraction déterminée du rang n' de ce terme.

11. Les inégalités relatives à la comparaison des fonctions $\mathrm{M}(r)$ et $m(r)$ résultent du théorème I, qui donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire II. — *Si le quotient de $\mathfrak{F}(u)$ par son terme maximum $m(u)$ reste inférieur à une fonction $\varphi(n)$ du rang de ce terme maximum, toute fonction entière $f(z)$ vérifie l'inégalité*

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\,\varphi[n(r)] \tag{13}$$

dans les intervalles ordinaires relatifs à $\mathfrak{F}(u)$.

Si l'on considère en particulier la fonction de comparaison (3), le corollaire I montre que $\varphi(n)$ est égal à $\mathrm{A}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$; α pouvant être pris aussi voisin de *un* que l'on veut, on obtient le théorème :

VIII. *ε étant un nombre positif donné aussi petit que l'on veut, toute fonction entière vérifie l'inégalité*

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\,[n(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{14}$$

sauf peut-être dans des intervalles dont le nombre entre o *et* r *est inférieur à* $n(r)$ *et dans lesquels la variation totale de* $\log r$ *est inférieure à un nombre fixe indépendant de* r.

En particulier, pour les fonctions d'ordre fini ρ, $n(r)$ est inférieur à $r^{\rho+\varepsilon}$, on aura donc l'inégalité

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}; \tag{15}$$

dans les intervalles exceptionnels, on a encore une inégalité de la même forme, mais où $\frac{\rho}{2}$ est remplacé par ρ [1].

On peut également transformer le corollaire II en introduisant une fonction de $m(r)$ à la place de la fonction $n(r)$. Le rang $n(r)$ du terme maximum dans $\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ est fonction de la valeur de ce terme maximum qui est égal à $\frac{m(r)}{k(l)}$, on a donc aussi

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\,\psi\left[\frac{m(r)}{k(l)}\right],$$

ψ étant une fonction que l'on sait former à partir des coefficients de la fonction $\mathfrak{F}(u)$. Or $k(l)$ croît indéfiniment lorsque l croît, car si l'on augmente l en laissant k fixe, le sommet du polygone $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ qui se trouvait sur $\pi(f)$ passe au-dessus de ce polygone, l'écart des ordonnées pouvant dépasser tout nombre donné, le logarithme de $k(l)$ doit alors être augmenté d'une quantité au moins égale à cet écart.

Il résulte de là que, si la fonction ψ est croissante, $\mathrm{M}(r)$ sera *a fortiori* inférieur à $\psi[m(r)]\,m(r)$; d'où le nouveau corollaire :

Corollaire III. — *Si le quotient de* $\mathfrak{F}(u)$ *par son terme maximum* $m(u)$ *reste inférieur à une fonction croissante* $\psi(m)$ *de ce terme, toute fonction entière vérifie aussi l'inégalité*

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\,\psi[m(r)] \tag{16}$$

dans les intervalles ordinaires déduits de $\mathfrak{F}$.

---

(1) *Loc. cit.* (note 3 de la page 219).

Pour la fonction (3), le terme maximum m est donné par les égalités

$$\log m = n^\alpha + n \log u, \qquad \alpha x^{\alpha-1} + \log u = 0, \qquad n = \mathrm{E}(x),$$

ce qui donne

$$n = (1+\varepsilon)\left(\frac{\log m}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On pourra donc prendre

$$\psi(m) = \mathrm{A}[\log m]^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}},$$

et l'on obtiendra le résultat suivant qui correspond au théorème VIII :

IX. *Toute fonction entière vérifie l'inégalité*

$$\mathrm{M}(r) < m(r)[\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{17}$$

si petit que soit le nombre positif ε, *dans les mêmes conditions que l'inégalité* (14).

12. La fonction $\mathcal{F}(u)$ choisie au n° 3 pour faciliter la démonstration du corollaire I peut être remplacée par d'autres. On constate déjà sur cette fonction qui dépend du paramètre α, que lorsqu'on remplace $\mathcal{F}(u)$ par une autre fonction plus croissante, la longueur des intervalles exceptionnels augmente ; mais dans les intervalles ordinaires restants, les inégalités figurant dans les énoncés se resserrent ou d'une façon générale les conditions d'application des théorèmes s'élargissent. Le gain que l'on réalise ainsi est surtout visible pour les propositions du n° 11.

On pourra remplacer $\mathcal{F}(u)$ par une fonction croissant plus vite que toutes les fonctions (3), en prenant

$$\mathcal{H}(n) = n(\log_p n)^{-1}.$$

Les théorèmes VII, VIII, IX seront modifiés de la façon suivante : dans les intervalles ordinaires, $\mathrm{M}(r)$ sera déterminé asymptotiquement par un groupe de $[n \log n \ldots \log_{p-1} n]^{\frac{1}{2}}(\log_p n)^{1+\varepsilon}$ termes entourant le terme maximum et l'on aura

$$(18)\quad \begin{cases} M(r) < A\, m(r)\sqrt{n \log n \ldots \log_{p-1} n}\, \log_p n, \\ M(r) < A\, m(r)\sqrt{\log m(r)}\, \log_2 m(r) \ldots \log_p m(r)\, [\log_{p+1} m(r)]^2, \end{cases}$$

A étant supérieur à $\sqrt{2\pi}$.

D'autre part, si l'on considère la fonction entière à coefficients positifs pour laquelle on a

$$g_n = n \log_q n;$$

on obtient les inégalités

$$M(r) > A'\, m(r)\sqrt{n \log n \ldots \log_{q-1} n},$$
$$M(r) > A'\, m(r)\sqrt{\log m(r)}\, \log_2 m(r) \ldots \log_q m(r),$$

A′ étant inférieur à $\sqrt{2\pi}$. Ces résultats, qui découlent des formules asymptotiques de M. Le Roy [1], montrent ce que l'on peut obtenir en augmentant l'ordre de $\mathcal{F}(u)$. On aura des inégalités de plus en plus précises, mais on ne pourra obtenir une inégalité de la forme (13) ou (16) plus précise que toutes les autres. On voit, en outre, que si l'on considère le rapport du maximum $M(r)$ au terme maximum $m(r)$, cette fonction est d'autant plus croissante que $M(r)$ est lui-même plus croissant lorsqu'on a affaire aux fonctions entières, mais est moins croissante que pour les séries entières; pour ces séries, cette fonction est d'autant moins croissante que le module est plus croissant. En se plaçant à ce point de vue, l'ensemble des fonctions entières et des séries entières se classerait de la façon suivante : fonctions entières de plus en plus croissantes, puis séries entières de moins en moins croissantes.

13. L'emploi d'une fonction $\mathcal{F}(u)$ peu croissante a l'avantage de diminuer la longueur des intervalles exceptionnels. En employant la fonction du n° 3, on voit que, pour que la démonstration de la propriété du n° 4 subsiste, il est nécessaire que le dernier membre de l'inégalité (7), dans laquelle λ est supposé une fonction croissante de n, soit le produit de $m(r)$ par une quantité tendant vers zéro. Il

[1] *Voir* Le Roy, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 245, et mon article : *Sur le calcul approché des fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1914)

suffit donc que β soit inférieur à $\frac{1}{4}$ et, par suite, α supérieur à $\frac{2}{3}$, pour que tous les théorèmes précédents soient vrais, la seule modification à faire à certains des énoncés concernant la limitation inférieure de $|f(z)|$ ou des fonctions analogues.

On peut modifier la démonstration du théorème II de façon à utiliser des nombres α encore plus petits que $\frac{2}{3}$. Remplaçons l'égalité (6) par la suivante :

$$(19)\quad f\left(z_0 e^{i\lambda\frac{\pi}{n}}\right) = e^{i\lambda\pi}\Bigg\{ f(z_0) + \lambda g_1(z_0) + \ldots + \lambda^{q-1} g_{q-1}(z_0) \\ + \sum_{p=-n}^{p=\infty} c_{n+p} z_0^{n+p}\left[e^{i\frac{\lambda\pi p}{n}} - 1 - \ldots - \frac{1}{(q-1)!}\left(\frac{i\lambda\pi p}{n}\right)^{q-1}\right]\Bigg\}.$$

Le module du coefficient de $c_{n+p} z_0^{n+p}$ est inférieur à $A\left(\frac{\lambda p}{n}\right)^q$, A étant un nombre fixe, le module de la somme de la série figurant dans l'expression précédente est donc moindre que

$$A\left(\frac{\lambda}{n}\right)^q \sum |c_{n+p}|\,|p|^q r^{n+p},$$

ou encore, en appliquant le corollaire I, à

$$B\lambda^q\, m(r)\, n^{1-(q+1)\frac{\alpha}{2}}.$$

Supposons que α soit supérieur à $\frac{2}{q+1}$, l'exposant de n dans l'expression précédente aura une valeur négative $-\beta$. Donnons à λ les $q-1$ valeurs

$$i n^{\frac{\beta}{2q}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1),$$

nous aurons, pour déterminer les fonctions $g_j(z_0)$, les $q-1$ équations

$$\sum i^j n^{\frac{\beta j}{2q}} g_j(z_0) = \theta_i M(r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1),$$

les θ_i étant moindres que 3. En résolvant ce système, on voit que chaque quantité

$$n^{\frac{\beta_j}{2q}} g_j(z_0)$$

est inférieure à $CM(r)$, C étant fini; par suite, l'égalité (5) du n° 4 sera encore réalisée dans les conditions suivantes :

$$|\lambda| < n^{\frac{\beta}{4q}}, \qquad |f(z_0)| > M(r)\, n^{-\frac{\beta}{4q}}.$$

Toutes les propositions précédentes qui découlent de cette égalité (5) auront encore lieu, avec la modification résultant de ce que la limite inférieure de $|f(z)|$ est changée.

On peut donc prendre pour fonction de comparaison une fonction de la forme (3), α étant simplement assujetti à être positif.

Nous allons montrer que, dans certaines conditions, la longueur totale des intervalles exceptionnels peut être finie. Soit r_0 une valeur ordinaire, les intervalles exclus pour $r > r_0$ sont tels que $\log r$ y varie de moins de $\mathcal{K}'(n_0) = \alpha n_0^{\alpha-1}$; il y a donc entre $2r_0$ et $3r_0$ des points ordinaires, soit r_1 l'un d'eux; les intervalles exclus entre r_0 et r_1 sont en nombre fini et leur longueur est moindre que

$$r_1\left[e^{\alpha |n_0^{\alpha-1}} - 1\right] < A r_0 n_0^{\alpha-1},$$

A étant un nombre fini indépendant de r_0 pourvu que n_0 soit assez grand. On peut recommencer le même raisonnement à partir de r_1, et ainsi de suite, et l'on voit que, si la série de terme général $r_i n_i^{\alpha-1}$ converge, la longueur totale des intervalles exceptionnels sera finie. On a d'ailleurs $r_i > 2^i r_0$.

Supposons que $f(z)$ soit d'ordre supérieur à *un* et que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r, l'inégalité

$$\log M(r) > r^{\rho_1},$$

ρ_1 étant supérieur à *un*; on aura dans tout intervalle ordinaire

$$r^{\rho_1} < \log M(r) < 2n(r)\log r.$$

Je dis que pour tout r, $n(r)$ est supérieur à r^σ, σ étant supérieur à *un*; car, si r est une valeur exceptionnelle et r' la plus grande valeur ordinaire inférieure à r, on aura, à cause de la croissance de $n(r)$ et de la densité des valeurs ordinaires,

$$n(r) \geqq n(r') > \frac{r'^{\rho_1}}{\log r'} \qquad (r < kr');$$

d'où l'inégalité annoncée. Il résulte de là que le produit $r_i n_i^{\alpha-1}$ sera inférieur à $(r_i)^a$, a étant égal à $1 - \sigma(1-\alpha)$; on peut prendre α de telle façon que a soit négatif, et, par suite, la série formée avec les longueurs des intervalles exclus converge.

D'où les résultats :

X. *Pour toute fonction entière dans laquelle le rapport de* $\log_2 M(r)$ *à* $\log r$ *a une limite inférieure (pour r infini) supérieure à* 1, *les intervalles exceptionnels ont une longueur totale finie à condition que l'exposant* α *de la fonction de comparaison* (3) *soit suffisamment petit. A l'extérieur de ces intervalles, les propositions précédentes s'appliquent, à l'exception des théorèmes VIII et IX qui sont remplacés par d'autres moins précis.*

XI. *Lorsque le rapport de* $\log_2 M(r)$ *à* $\log r$ *croît indéfiniment avec* r, *tous les résultats obtenus s'appliquent sans modifications à l'extérieur d'intervalles exceptionnels dont la longueur totale est finie.*

Car, dans ce second cas, on peut prendre α aussi voisin de *un* que l'on veut.

Ces résultats s'appliqueront notamment aux fonctions à croissance régulière.

Il convient de noter que, bien que la longueur des intervalles exceptionnels soit d'autant plus petite que l'ordre de grandeur de $M(r)$ est plus grand, il ne s'ensuit pas nécessairement que la *régularité* des fonctions entières relativement aux propriétés considérées est d'autant plus grande que $M(r)$ croît plus vite. On conçoit en effet que les irrégularités de $M(r)$ et de $n(r)$, dans les intervalles exceptionnels, peuvent être d'autant plus grandes que l'ordre de $M(r)$ est plus élevé. D'autre part, la limitation inférieure de $M(r)$, donnée dans les énoncés précédents, élimine précisément les fonctions les plus irrégulières.

14. La méthode employée au n° 2 pour comparer les fonctions $f(z)$

et $\mathfrak{F}(u)$ peut s'appliquer à la comparaison de $f(z)$ à une autre fonction entière

$$\mathfrak{F}(r) = \sum e^{-\mathcal{G}(n)} r^n, \tag{20}$$

dans laquelle nous supposerons que la fonction $\mathcal{G}'(x)$ est constamment croissante. Si l'on suppose que les exposants G_n déduits des coefficients de $f(z)$ vérifient la condition

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{1}{n}[G_n - \mathcal{G}(n)] = \infty, \tag{21}$$

on voit encore que : à tout nombre l correspond un nombre $k(l)$ tel que les polygones $\pi\left[k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)\right]$ et $\pi(f)$ aient au moins un sommet commun et que le premier de ces polygones soit au-dessous du second ; si $n(l, \mathfrak{F})$ est la plus grande abscisse des sommets communs, et $r(l)$ la valeur définie par l'égalité

$$\log r(l) = \log l + \mathcal{G}'[n(l, \mathfrak{F})],$$

les fonctions $f(z)$ et $k(l)\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ ont pour cette valeur $r(l)$ des termes maxima égaux et de même rang, et la première fonction est majorée par la seconde. Lorsque l croît indéfiniment, $n(l, \mathfrak{F})$ ne peut décroître, donc $r(l)$ croît indéfiniment, et il en est de même de $k(l)$.

Les discontinuités de $\log r(l)$ qui sont celles de $\mathcal{G}'[n(l, \mathfrak{F})]$ ont ici une somme infinie, mais on peut encore les étudier dans un intervalle o, R. Dans un tel intervalle, les valeurs qui ne sont pas atteintes par la fonction $r(l)$ forment un nombre fini d'intervalles que nous exclurons, si r est une valeur conservée, la variation totale de $\log x$ dans les intervalles exclus correspondant à $x < r$ est inférieure à $K + \mathcal{G}'[n(r)]$. Si donc on suppose que le quotient de $\log r$ par $\mathcal{G}'[n(r)]$ croît indéfiniment avec r, on pourra encore parler d'intervalles ordinaires et d'intervalles exceptionnels.

On utilisera cette comparaison d'une fonction $f(z)$ à une autre fonction entière spéciale $\mathfrak{F}(r)$ à croissance plus rapide pour obtenir des relations très serrées entre $M(r)$ et $m(r)$, ce qui nécessitera que $f(z)$ et $\mathfrak{F}(r)$ aient des croissances voisines, et donnera des relations valables pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r; on pourra également obtenir des relations moins précises, mais valables à l'extérieur de certains intervalles exceptionnels. On donnera à ces relations la forme des inégalités (18).

Par exemple, en prenant pour $\varphi(n)$ les fonctions $\frac{1}{\rho} n \log n$ et $n \log n (\log_p n)^{-1}$, on aura les propositions suivantes :

XII. *Toute fonction entière d'ordre inférieur à* ρ *vérifie l'inégalité*

$$M(r) < \sqrt{2\pi}\,\rho\sqrt{\log[m(r)]}\, m(r)$$

pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r.

XIII. *Quel que soit le nombre fini* q, *toute fonction entière d'ordre fini vérifie l'inégalité*

$$M(r) < m(r)\sqrt{\log m(r)}\, \log_q m(r)$$

pour les valeurs de r *comprises entre* 0 *et* R *extérieures à un nombre fini d'intervalles dans lesquels la variation totale de* $\log r$ *est inférieure à* $\varepsilon(R) \log R$.

III. — Les séries entières.

15. Considérons maintenant une série entière

$$f(z) = \sum c_n z^n$$

admettant pour rayon de convergence l'unité, et supposons que le quotient $\frac{h_n}{\log n}$ du logarithme du module du terme de rang n, $h_n = \log|c_n|$, par le logarithme du rang, ne soit pas borné supérieurement, ce qui revient à dire que le module maximum $M(r)$ croît plus vite que tout polynome en $\frac{1}{1-r}$ [1].

Pour chaque valeur r, la fonction possède un terme maximum $m(r)$ dont le rang $n(r)$ croît indéfiniment avec r; ce terme s'obtient encore par la considération d'un polygone de Newton $\pi(f)$ que nous construi-

[1] *Voir* Le Roy, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 245, et mon article : *Sur le calcul approché des fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1914).

rons ici avec les points de coordonnées n, h_n. Ce polygone est convexe vers les y positifs; nous appellerons toujours H_n l'ordonnée du point du polygone dont l'abscisse est n.

Prenons d'autre part la série de comparaison (1) déjà utilisée au n° 2, et supposons que l'on a

$$\varlimsup_{n=\infty} [H_n - \mathcal{H}(n)] = \infty. \tag{22}$$

Si le nombre positif $l - 1$ est suffisamment voisin de zéro, on pourra trouver, en vertu de l'égalité (22), un nombre $k(l)$ tel que le polygone $\pi[k\mathcal{F}(lr)]$, relatif à la fonction $k(l)\mathcal{F}(lr)$, ait un sommet commun avec $\pi(f)$ et n'ait aucun sommet au-dessous de $\pi(f)$. Si cette circonstance se produit pour un nombre l_0, elle aura lieu pour tous les nombres l inférieurs à ce nombre. Soit $n(l, \mathcal{F})$ la plus grande des abscisses des sommets communs aux deux polygones, si r est pris de telle façon que $n(l, \mathcal{F})$ soit le rang du terme maximum de $\mathcal{F}(lr)$, les les deux fonctions $f(z)$ et $k(l)\mathcal{F}(lr)$ auront des termes maxima de même rang et même valeur, et la seconde de ces fonctions majorera la première. Cette propriété aura lieu notamment pour la valeur $r(l)$ définie par l'égalité

$$\log r(l) = -\log l - \mathcal{H}'[n(l, \mathcal{F})].$$

Lorsque l décroît et tend vers *un*, $n(l, \mathcal{F})$ ne peut décroître et n'est pas borné, et $k(l)$ croît indéfiniment; $r(l)$ croît donc et tend vers *un*, les discontinuités de $\log r(l)$ sont celles de $-\mathcal{H}'[n(l, \mathcal{F})]$.

Soit r une valeur particulière de la fonction $r(l)$, le total des discontinuités de la fonction, pour $r(l) > r$, est au plus égal à $\mathcal{H}'[n(r)]$; conservons sur le segment r, 1, les intervalles correspondant à des valeurs de $r(l)$ et excluons les autres. Si r_i est l'extrémité gauche du $i^{\text{ième}}$ intervalle exclu et d_i sa longueur, la variation de $\log x$ dans cet intervalle étant $\log \frac{r_i + d_i}{r_i}$, on a

$$\sum \log\left(1 + \frac{d_i}{r_i}\right) < \mathcal{H}'[n(r)].$$

On voit que, si l'on suppose r supérieur à $\frac{1}{2}$, la somme $\sum d_i$ des intervalles exclus entre ce point et le point 1 est inférieure à $4\mathcal{H}'[n(r)]$.

D'où le résultat :

XIV. *L'ensemble des coefficients de $f(z)$ satisfaisant à la condition (22), il existe des valeurs de r aussi voisines de 1 que l'on veut jouissant de la propriété suivante : à chacun de ces r correspondent deux nombres k et l supérieurs à 1, tels que, pour $|z| = r$ et $x = r$, les fonctions $f(z)$ et $k\mathfrak{F}(lx)$ ont des termes maxima égaux et de même rang, et que la seconde fonction majore la première. Si r est une valeur supérieure à $\frac{1}{2}$ pour laquelle la propriété a lieu, les valeurs comprises entre r et 1, pour lesquelles elle n'est pas vérifiée, sont intérieures à une suite d'intervalles dont la longueur totale est moindre que* $4\mathcal{H}'[n(r)]$.

De la première partie de cette proposition, on déduira des relations très serrées entre $M(r)$ et $m(r)$, valables pour une infinité de r, mais il est plus intéressant de se borner aux fonctions pour lesquelles on pourra prendre la fonction (3) pour fonction de comparaison, de façon à étendre à ces séries les théorèmes généraux relatifs aux fonctions entières.

16. Nous devrons donc nous borner à considérer les fonctions $f(z)$ pour lesquelles l'inégalité (22) est vérifiée lorsqu'on y remplace $\mathcal{H}(n)$ par n^α. Il faut et il suffit que le quotient de H_n par $n^{\alpha'}$, α' étant positif, ait une limite supérieure infinie, pour que l'inégalité (22) soit vérifiée en prenant $\mathcal{H}(n) = n^\alpha$, avec $\alpha < \alpha'$.

Dans ces conditions, $\mathcal{H}'(n)$ est égal à $\alpha n^{\alpha-1}$; si nous voulons que les intervalles exclus dans la proposition XIV soient négligeables par rapport à ceux qui sont conservés, il faudra que $n(r)$ soit supérieur à une expression de la forme $(1-r)^{-1-\gamma}$, γ étant positif. Si cette condition est réalisée, elle entraîne celle relative à H_n; en effet, si l'on désigne par $\log r_i$ la pente du côté de $\pi(f)$ entre les points d'abscisses $i-1$ et i, on a

$$H_n = \sum_1^n \log r_i,$$

et de l'inégalité supposée pour $n(r)$, on tire, pour les valeurs de r_i suffisamment proches de 1,

$$\frac{1}{2}\log r_i > 1 - \frac{1}{r_i} > i^{-\frac{1}{1+\gamma}},$$

ce qui conduit bien à l'inégalité requise pour H_n. On obtient ainsi le résultat suivant :

Pour toutes les séries dont le rang du terme maximum vérifie la condition

$$\lim_{r=1} \frac{\log n(r)}{-\log(1-r)} = 1+\gamma \qquad (\gamma > 0), \tag{23}$$

la proposition XIV s'applique pour tous les r voisins de 1*, la longueur des intervalles exceptionnels compris entre* r *et* 1 *étant inférieure à* $(1-r)^{1+\frac{1}{2}\gamma}$.

La condition (23) entraîne pour le maximum du module $M(r)$ l'inégalité

$$\lim_{r=1} \frac{\log_2 M(r)}{-\log(1-r)} \geqq \gamma$$

qui est la plus précise que l'on puisse obtenir, mais qui peut être vérifiée alors même que (23) ne l'est pas. Nous allons montrer que l'égalité

$$\lim_{r=1} \frac{\log_2 M(r)}{-\log(1-r)} = 1+\gamma' \qquad (\gamma' > 0) \tag{24}$$

entraîne une égalité de la forme (23). Cette condition nécessite que la limite supérieure pour n infini du quotient de H_n par $\log n$ soit au moins égale à $\frac{1+\gamma'}{2+\gamma'}$, l'inégalité (22) est donc vérifiée pour α assez petit, et la propriété XIV a lieu pour une suite de valeurs de r tendant vers *un*, soit r l'une de ces valeurs. L'inégalité (16) du n° 11 s'applique avec la valeur de ψ relative à la fonction (3), il en résulte que $m(r)$ vérifie l'inégalité

$$\log m(r) > (1-r)^{-1-\frac{\gamma'}{2}};$$

or, le premier membre de cette inégalité est inférieur à $n(r)$, puisque $\frac{H_n}{n}$ tend vers zéro ; on a donc

$$n(r) > (1-r)^{-1-\frac{\gamma'}{2}} \tag{25}$$

et les intervalles exclus entre r et 1 ont une longueur au plus égale à $4(1-r)^{(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{2}\gamma'\right)}$, quantité dont l'exposant est supérieur à 1, si α est convenablement choisi. La proposition XIV est donc de nouveau réalisée pour un nombre $r' = r + (1-r)^{1+\delta}$, δ étant positif, et l'inégalité (25) a lieu pour ce nombre; l'inégalité (23) est donc vérifiée.

Il est clair que l'égalité (24) est plus restrictive que (23), mais elle a l'avantage de ne faire intervenir que $M(r)$.

17. En utilisant la méthode du n° 13, on voit que le théorème II s'applique ainsi que ses conséquences relatives à la comparaison des fonctions $A(r)$, $M(r)$; d'une façon générale, toutes les propriétés des fonctions entières s'étendent de suite. On a notamment les propriétés suivantes :

XV. *Dans les intervalles ordinaires relatifs aux séries vérifiant les conditions* (23) *ou* (24) :

a. Dans le voisinage des valeurs z_0, *pour lesquelles le quotient de* $|f(z_0)|$ *par* $M(r)$ *est supérieur à* $[n(r)]^{-\delta}$, δ *étant un nombre positif, on a l'égalité*

$$f\left(z_0 e^{\frac{i\lambda\pi}{n}}\right) = (1+\eta)\, e^{i\lambda\pi} f(z_0),$$

λ *pouvant prendre toutes les valeurs vérifiant la condition* $|\lambda| < [n(r)]^{\delta'}$, $\delta' > 0$;

b. Le rapport de $A(r)$ *à* $M(r)$ *tend vers* 1 *lorsque* r *tend vers* 1;

c. Le quotient du maxima de la dérivée d'ordre p *par* $M(r)$ *est asymptotiquement égal à* $[n(r)]^p$ *lorsque* r *tend vers* 1, *dans le voisinage de ces maxima le rapport de* $f^p(z)$ *à* $f(z)$ *est asymptotiquement égal à* $\left(\frac{n}{z}\right)^p$;

d. La valeur de $M(r)$ *est déterminée asymptotiquement par un groupe de* $n^{1-\delta}$ *termes entourant le terme maximum;*

e. Le quotient de $M(r)$ *par* $m(r)$ *est inférieur à* $[\log m(r)]^A$, A *étant un nombre fixe.*

Il est aisé de former des exemples de fonctions ne vérifiant pas les conditions (23), (24), et pour lesquelles certaines de ces propriétés n'ont plus lieu; il est clair d'ailleurs qu'aucune de ces propriétés n'est vérifiée pour les fonctions

$$f(z) = (1 - z)^{-p},$$

quel que soit le nombre p supérieur à *un* (pour p inférieur ou égal à *un*, les coefficients ne croissent pas et la base de la théorie précédente est en défaut).

18. La propriété (XV, a) conduit à étendre le théorème de M. Picard à une certaine classe de séries entières. Pour montrer l'impossibilité de l'existence de deux valeurs exceptionnelles, nous devons montrer qu'on ne peut avoir une égalité de la forme

$$f(z) = e^{f_1(z)} = e^{f_2(z)} + 1,$$

$f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant des séries de rayon de convergence égal à *un*. Lorsqu'il s'agissait de fonctions entières, f_1 et f_2 étaient des fonctions entières ou des polynomes, toutes ces fonctions vérifiaient les théorèmes II et III. Ici, il faut choisir $f(z)$ de telle façon que les propriétés XV aient lieu pour f_1 et f_2; il faut donc supposer que le maximum $M(r)$ du module de $f(z)$ vérifie la condition

$$\lim_{r=1} \frac{\log_3 M(r)}{-\log(1-r)} > 1, \tag{27}$$

ce qui revient à dire que la croissance de $M(r)$ est comparable à celle d'une certaine classe de fonctions entières d'ordre infini. Les fonctions f_1 et f_2 vérifieront alors la condition (24), les intervalles ordinaires de f_1 se produiront à partir d'une valeur r_1, ceux de f_2 à partir de r_2. Supposons, par exemple, r_2 supérieur à r_1. Dans l'intervalle $r_1 + \frac{1}{4}(1 - r_1)$, $r_2 + \frac{1}{2}(1 - r_1)$, $f_1(z)$ a certainement des valeurs ordinaires, soit r'_1 l'une d'elles; opérons de même à partir de r'_1, et ainsi de suite, on obtient une suite de valeurs $r'_1, r''_1, \ldots, r_1^{(p)}$, tendant vers *un* et ordinaires pour f_1; r_2 sera compris entre deux de ces valeurs. Il en résulte que f_1 et f_2 ont une infinité de valeurs ordinaires communes supérieures à r_2, et le raisonnement du n° 5 s'applique alors sans modification. L'égalité (26) est impossible, et il en serait de même de celles obtenues en multipliant les exponentielles par des polynomes.

Le théorème de M. Picard s'étend donc aux fonctions vérifiant la condition (27), mais cette condition est beaucoup trop restrictive. M. Schottky a montré [1] que, si $f(z)$ ne prend pas les valeurs o et 1 dans le cercle de rayon 1, le maximum du module de la fonction vérifie l'inégalité

$$\log M(r) < H(1-r)^{-3};$$

le nombre H ne dépendant que de la valeur $f(0)$, on en déduit la généralisation suivante du théorème de M. Picard :

XVI. *Toute série entière pour laquelle le produit* $\log M(r)(1-r)^3$ *n'est pas borné prend une infinité de fois toute valeur dans le voisinage du cercle de convergence, sauf peut-être une valeur au plus.*

La limite inférieure de la croissance donnée dans cet énoncé est peut-être encore trop élevée, mais il est certain que cette limite existe, la fonction

$$e^{\frac{1}{1-z}}$$

ne prend pas dans le cercle de rayon 1 les valeurs dont le module est inférieur à $\sqrt{e}$.

19. La proposition XVI donne des résultats relatifs à la distribution des zéros des fonctions dans le voisinage d'un point singulier, isolé ou non, dont on peut approcher à l'intérieur d'un angle.

Nous nous bornerons à signaler ici les conséquences relatives aux fonctions entières.

XVII. *Considérons une fonction entière d'ordre supérieur ou égal à* ρ, *et soient* α *et* α' *deux nombres positifs donnés. Si dans un angle* A

(1) *Voir*, par exemple, la Note sur le théorème de M. Picard dans le *Traité d'Analyse* de M. Goursat, t. II, 3e édition, p. 659.

ayant pour sommet l'origine et pour ouverture $\frac{3\pi}{\rho+\alpha}$, *le produit*

$$|z|^{-\rho-\alpha'}\log|f(z)|$$

n'est pas borné supérieurement, la fonction $f(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, à l'intérieur de l'angle d'ouverture* $\frac{3\pi}{\rho-\alpha}$, *ayant même bissectrice que* A.

Il est clair que l'angle A existe toujours, mais la propriété ne diffère du théorème ordinaire de M. Picard que lorsque l'ordre est supérieur à $\frac{3}{2}$. Dans le cas de l'ordre infini, l'ouverture de l'angle A peut être prise arbitrairement petite, et l'on retrouve, en le complétant, un résultat obtenu, parmi beaucoup d'autres, par M. Julia :

XVII. *Étant donnée une fonction d'ordre infini, si l'on divise le plan de la variable* z *en secteurs angulaires égaux d'ouverture* $\frac{\pi}{k}$ *arbitrairement petite, la fonction prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans tout secteur où le logarithme de son module ne peut être limité supérieurement par une expression de la forme* $A|z|^{4k}$.

On obtiendra des énoncés analogues en considérant des secteurs angulaires limités par des arcs de spirales logarithmiques égales.